WYKŁAD 7

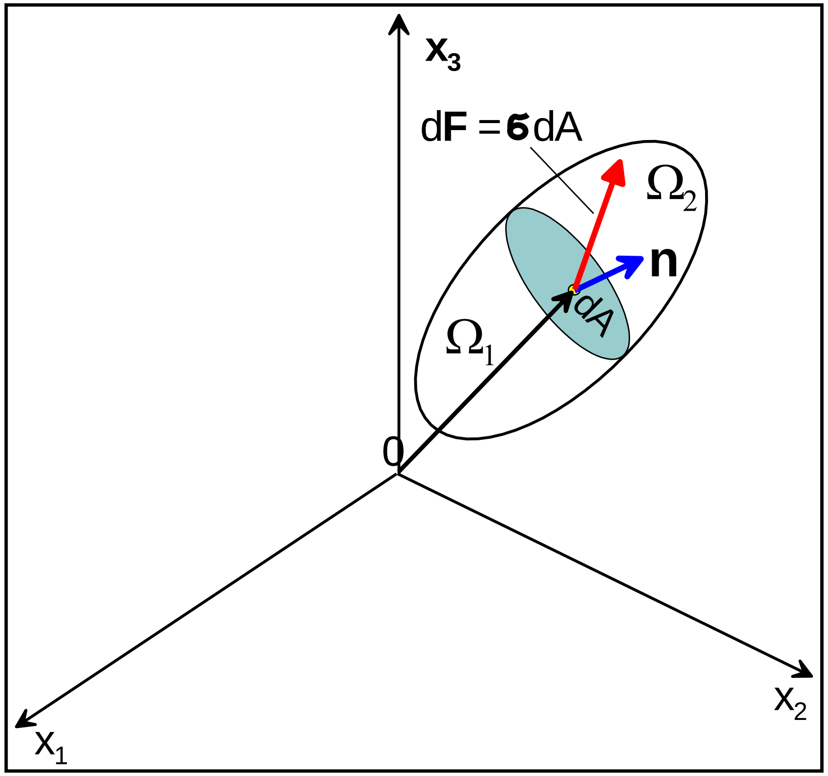
SIŁY WEWNĘTRZNE W PŁYNIE. ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE. PŁYN NEWTONOWSKI.

OPIS SIŁ WEWNĘTRZNYCH W PŁYNIE. TENSOR NAPRĘŻEŃ.

Zgodnie z hipotezą Cauchy'ego, siły reakcji dwóch części płynu wynikające z ich kontaktu na wspólnej powierzchni granicznej (interfejsie) mogą być scharakteryzowane za pomocą wektora gęstości powierzchniowej siły zwanego wektorem naprężeń (jednostka fizyczna to Pascal $Pa = N / m^2$).

Tak więc, „siłka" odpowiadającą różniczkowej powierzchni dA należącej do interfejsu $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ dana jest wzorem $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\sigma}\, dA$, a „cała" reakcja to

$$\boldsymbol{F}_{\Omega_2 \to \Omega_1} = \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}\, dA$$



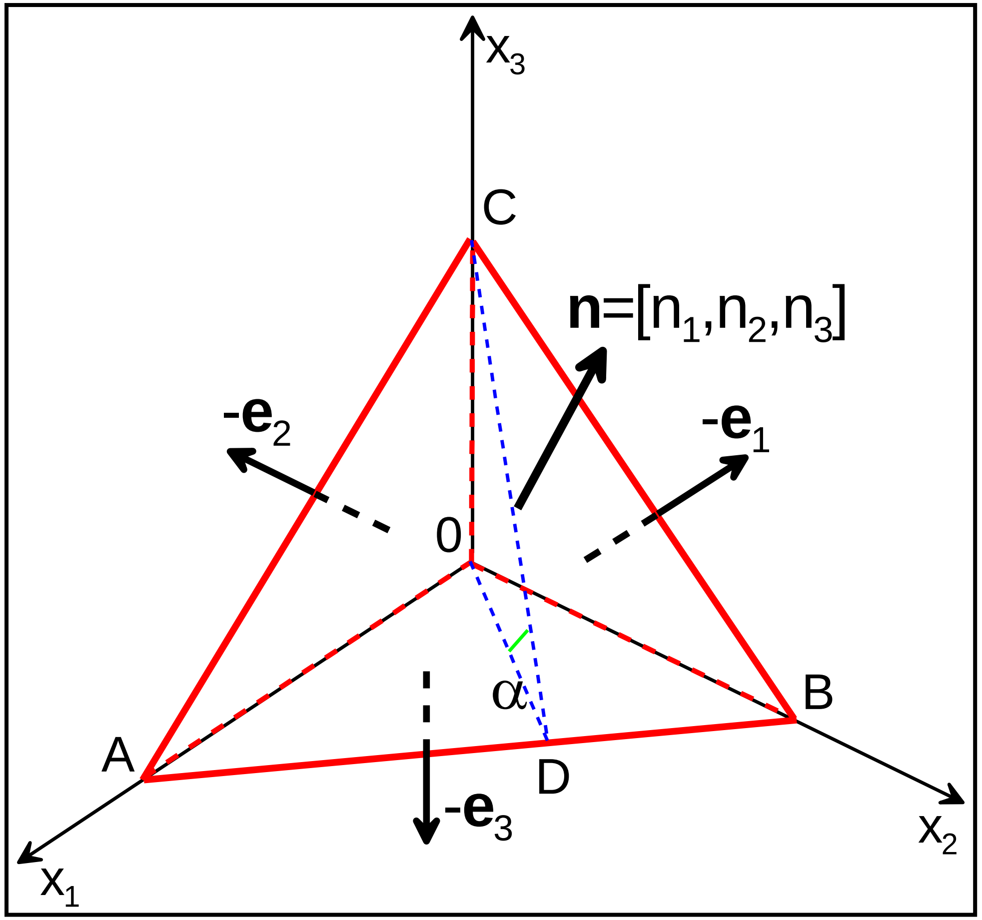
Zauważmy, że wektor naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ w zadanym punkcie interfejsu nie jest wartością żadnego pola wektorowego (jak np. prędkość płynu)!

Jest tak dlatego, że wartość wektora naprężeń jest nie tylko funkcją położenia i czasu, ale również funkcją orientacji przestrzennej powierzchni! Orientacja ta jest zadana (lokalnie) przez wersor normalny do powierzchni $\boldsymbol{n}$. Mamy zatem $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$.

Zgodnie z **3-cią Zasadą Dynamiki (zasada akcji-reakcji)** wektor naprężeń musi spełniać warunek (Cauchy'ego)

$$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},-\boldsymbol{n})$$

Pokażemy dalej, że wektor naprężeń może być skonstruowany poprzez odwołanie do pola tensorowego. W tym celu rozważmy porcję płynu w kształcie **czworościanu OABC** przedstawionego na rysunku.



Ściana frontowa ΔABC należy do płaszczyzny opisanej równaniem

$$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) \equiv n_j x_j = h \quad , \quad h \text{ – mała liczba.}$$

Pola powierzchni ścian czworościanu oznaczymy symbolami S, S_1, S_2 i S_3, odpowiednio dla ścian ΔABC, ΔOBC, ΔAOC i ΔABO. Jasnym jest, że pola wszystkich ścian są $O(h^2)$.

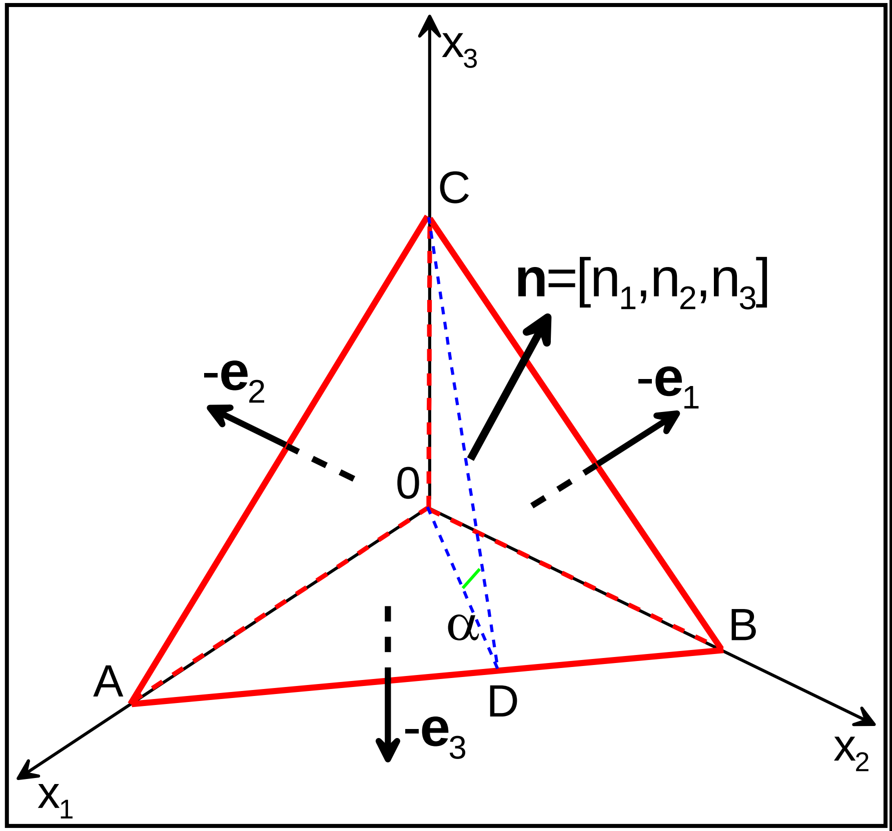
Ponadto, dla j = 1,2,3 mają miejsce zależności

$$S_j = S\cos[\sphericalangle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{e}_j)] = S\cdot(\boldsymbol{n},\boldsymbol{e}_j) = S\,n_j$$

Objętość czworościanu $\quad V_\Omega \sim O(h^3)$.

Dla masy płynu zamkniętej w czworościanie można napisać równanie ruchu, a mianowicie

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}}_{\text{pochodna pędu}} = \underbrace{\boldsymbol{F}_{vol}}_{\text{siła obj.}} + \underbrace{\boldsymbol{F}_{surf}}_{\text{siła pow.}}$$



Potrzebujemy wyrażenia na siłę powierzchniową $\boldsymbol{F}_{surf}$.

Otóż mamy (pomijamy zależność od czasu):

na ΔABC: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{n}) + O(h)$

$$\boldsymbol{F}_{surf}^{\Delta ABC} = S\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{n}) + O(h^3)$$

na ΔOBC: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1) + O(h)$

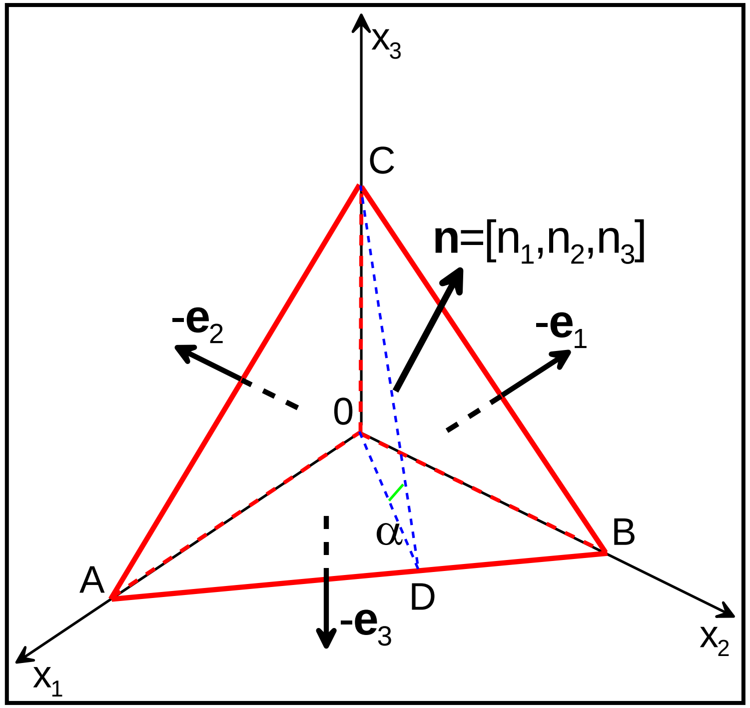
$$\boldsymbol{F}_{surf}^{\Delta OBC} = -S_1\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1) + O(h^3) = -S\,n_1\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1) + O(h^3)$$

na ΔAOC: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_2) + O(h)$

$$\boldsymbol{F}_{surf}^{\Delta AOC} = -S_2\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_2) + O(h^3) = -S\,n_2\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_2) + O(h^3)$$

na ΔAOB: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_3) + O(h)$

$$\boldsymbol{F}_{surf}^{\Delta AOB} = -S_3\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_3) + O(h^3) = -S\,n_3\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_3) + O(h^3)$$



Podstawiamy otrzymane wyrażenia do równania ruchu. Po uporządkowaniu składników otrzymujemy równanie

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}}_{O(h^3)} = \underbrace{\boldsymbol{F}_{vol}}_{O(h^3)} + \underbrace{S[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{n}) - n_j\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_j)]}_{O(h^2)} + O(h^3)$$

Niech teraz $h \to 0$. Powyższe równanie redukuje się do postaci

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{n}) - n_j\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_j) = 0$$

W przypadku ogólnym wierzchołek O nie jest początkiem układu odniesienia oraz przepływ może być niestacjonarny. Uwzględniając ten fakt, zapiszemy powyższą równość w równoważnej (ale ogólniejszej) formie, a mianowicie

$$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = n_j\,\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_j)$$

Załóżmy, że wersor normalny $\boldsymbol{n}$ pokrywa się z wersorem bazy $\boldsymbol{e}_j$. Wektor naprężeń $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_j)$ ma w bazie $\{\boldsymbol{e}_j,\ j=1,2,3\}$ jednoznaczne przedstawienie, a mianowicie

$$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_j) = \sigma_{ij}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \quad \text{(sumowanie po } i \text{)}$$

Ogólna formuła dla wektora naprężeń może być zatem zapisana następująco

$$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = n_j\,\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_j) = \underbrace{\sigma_{ij}(t,\boldsymbol{x})\,n_j}_{(\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n})_i}\,\boldsymbol{e}_i \equiv \boldsymbol{\Xi}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}$$

W naszym wyprowadzeniu pojawiła się „w naturalny sposób" macierz, która reprezentuje (w wybranej bazie) tzw. **tensor naprężeń**. Tensor ten jest na ogół zależny od miejsca i od czasy, czyli mamy do czynienia z **polem tensorowym**.

Zauważmy, że tensor naprężeń Ξ zadaje transformację liniową (sparametryzowaną przez czas t i wektor współrzędnych $\boldsymbol{x}$) pomiędzy wektorami w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej:

$$\Xi : E^3 \ni \boldsymbol{w} = w_j \boldsymbol{e}_j \;\mapsto\; \sigma_{ij} w_j \boldsymbol{e}_i \in E^3$$

W szczególności

$$\Xi(\boldsymbol{n}) \equiv \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n} = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\sigma}$$

Wniosek: lokalną wartość wektora naprężeń w punkcie należącym do pewnej powierzchni otrzymujemy z wyniku „zadziałania" tensorem naprężeń na wersor normalny do powierzchni w tym punkcie.

Jak obliczyć składowe styczną i normalną wektora naprężeń w zadanym punkcie?

Oczywiście drogą obliczenia odpowiednich rzutów pełnego wektora na odpowiednie kierunki w przestrzeni!

Składowa normalna do powierzchni jest równa

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\Xi}\, \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \equiv \underbrace{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\Xi}\, \boldsymbol{n})}_{\textit{iloczyn skalarny}} \boldsymbol{n}$$

Składową styczną możemy obliczyć odejmując od całego wektora składową normalną …

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_n \boldsymbol{n} = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i - (\sigma_{km} n_k n_m) n_i \boldsymbol{e}_i = \underbrace{[\sigma_{ij} n_j - (\sigma_{km} n_k n_m) n_i]}_{(\boldsymbol{\sigma}_\tau)_i} \boldsymbol{e}_i$$

… albo stosując bardzo zgrabną formułę z **podwójnym iloczynem wektorowym**

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{n})$$

Ćwiczenie: uzasadnij powyższą formułę.

ZWIĄZEK KONSTYTUTYWNY

Modelem reologicznym nazywamy w Mechanice Ośrodka Ciągłego relację pomiędzy deformacją ośrodka a siłami wewnętrznymi. Ilościowe ujęcie tej relacji w postaci formuł matematycznych nazywane jest **związkiem (albo prawem) konstytutywnym**.

W MOC definiuje się klasę substancji zwanych **płynami prostymi**. Płynem prostym nazywamy ośrodek, w którym **tensor deformacji** Ξ **zależy wyłącznie od tensora prędkości deformacji** $\boldsymbol{D}$. Relacja ta musi spełniać kilka podstawowych warunków, przede **warunek niezmienniczości** (niezależności od wyboru układu współrzędnych), a także zapewniać **symetrię tensora naprężeń**.

Przypomnijmy dwa fakty:

- Gradient prędkości $\nabla \boldsymbol{\upsilon}$ może być przedstawiony jako suma symetrycznego tensora prędkości deformacji $\boldsymbol{D}$ i antysymetrycznego tensora obrotu $\boldsymbol{R}$, czyli $\nabla \boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$,
- Tensor $\boldsymbol{D}$ może być przedstawiony jako suma tensora sferycznego $\boldsymbol{D}_{SF}$ i (symetrycznego) dewiatora $\boldsymbol{D}_{DW}$, czyli $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{SF} + \boldsymbol{D}_{DW}$

gdzie
$$\boldsymbol{D}_{SF} = \tfrac{1}{3} tr\, \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{I} = \tfrac{1}{3} (\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon}) \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{D}_{DW} = \boldsymbol{D} - \tfrac{1}{3} (\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon}) \boldsymbol{I} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{D}_{DW})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Ogólny związek konstytutywny dla płynu prostego ma formę wielomianu o argumencie macierzowym, postaci

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathcal{P}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{\Xi}_0 + c_0\boldsymbol{I} + c_1\boldsymbol{D} + c_2\boldsymbol{D}^2 + c_3\boldsymbol{D}^3 + \ldots$$

którego współczynniki (skalarne) są funkcjami trzech niezmienników tensora ***D***, tj.

$$c_k = c_k[I_1(\boldsymbol{D}), I_2(\boldsymbol{D}), I_3(\boldsymbol{D})].$$

Rozważmy **wielomian charakterystyczny tensora *D***

$$p_{\boldsymbol{D}}(\lambda) = \det[\boldsymbol{D} - \lambda\boldsymbol{I}] = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3.$$

Z **Twierdzenia Cayleya-Hamiltona** wynika, że ma miejsce równość

$$p_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{D}) = -\boldsymbol{D}^3 + I_1\boldsymbol{D}^2 - I_2\boldsymbol{D} + I_3 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D}^3 = I_1\boldsymbol{D}^2 - I_2\boldsymbol{D} + I_3$$

Zatem, 3-cia potęga i wyższe potęgi tensora *D* mogą być przedstawione jako kombinacje liniowe tensorów ***I*, *D* i *D*^{2}.**

Wobec tego, the **ogólna forma związku konstytutywnego dla płynu prostego ma postać tensorowego wielomianu 2-ego stopnia**

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathcal{P}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{\Xi}_0 + c_0\boldsymbol{I} + c_1\boldsymbol{D} + c_2\boldsymbol{D}^2$$

PŁYN NEWTONOWSKI

Dynamika wielu powszechnie spotykanych płynów (woda, powietrze …) może być opisane z dużą dokładnością przy użyciu modelu liniowego płynu prostego. W modelu tym tensor naprężeń zależy liniowo od tensora prędkości deformacji i jego niezmienników**.** Płyn o takich cechach nazywamy **płynem newtonowskim.**

W modelu płynu newtonowskiego przyjmujemy, że:

- c_0 jest liniową funkcją niezmiennika I_1,
- c_1 jest wielkością stałą,
- $c_2 = 0$.

Jeśli płyn pozostaje w spoczynku, ma obowiązywać **prawo Pascala**, tzn. przy dowolnej orientacji powierzchni w płynie jedyną składową naprężenia ma być składowa normalna równa liczbowo lokalnej wartości ciśnienia. Oznacza to, że w spoczynku tensor naprężeń sprowadza się do tensora sferycznego postaci

$$\boldsymbol{\Xi}_0 \boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\Xi}_0 = -p\,\boldsymbol{I}$$

Związek konstytutywny dla płynu Newtona można zapisać następująco:

$$\boldsymbol{\Xi} = \underbrace{-p\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{\Xi}_0} + \zeta \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{v})}_{I_1(\boldsymbol{D})} \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{D}_{DW} = \underbrace{-p\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{\Xi}_0} + \underbrace{(\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \boldsymbol{v})}_{c_0} \boldsymbol{I} + \underbrace{2\mu}_{c_1} \boldsymbol{D}$$

gdzie

- μ - **lepkość dynamiczna** (jej jednostka SI to kg/m·s)
- ζ - **lepkość objętościowa (tzw. druga lepkość)** (jednostka jak μ) ; zwykle $\zeta << \mu$ i można ją przyjąć za równą zeru.

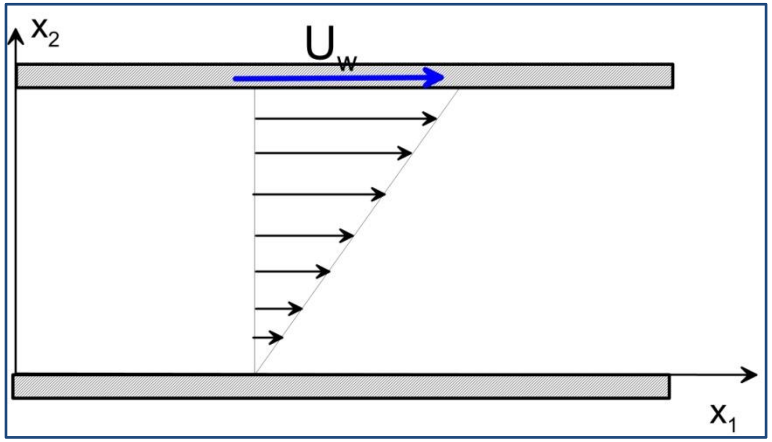
Związek konstytutywny zapisany w formie indeksowej ma postać

$$\sigma_{ij} = \left[-p + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu) \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} \right] \delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \right]$$

Dla płynu nieściśliwego $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ i powyższe formuły upraszczają się

$$\boldsymbol{\Xi} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \quad , \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\upsilon_j \right]$$

Przykład: Obliczyć naprężenia styczne na ścianie w przepływie Couette'a.



Pole prędkości tego przepływu zdefiniowane jest następująco:

$$\upsilon_1(x_1,x_2)=U_{wall}x_2/H \quad , \quad \upsilon_2(x_1,x_2)\equiv 0$$

Ciśnienie jest stałe w całym obszarze. Na dolnej ścianie wersor normalny zorientowany na zewnątrz płynu to $\boldsymbol{n}=[0,-1]$.

Mamy zatem

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\Xi n}=-p\underbrace{\boldsymbol{n}}_{=[0,-1]}+2\mu\boldsymbol{Dn}=\begin{bmatrix}0\\p\end{bmatrix}+2\mu\begin{bmatrix}\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0\\p\end{bmatrix}+2\mu\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\\p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu U_w/H\\p\end{bmatrix}$$

Zgodnie z zasadą akcji-reakcji jednostkowa siła styczna działająca na dolną ścianę jest równa

$$\tau_{wall}=\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\upsilon_1\Big|_{wall}=\frac{\mu U_w}{H}$$ (jaki jest jej zwrot?)