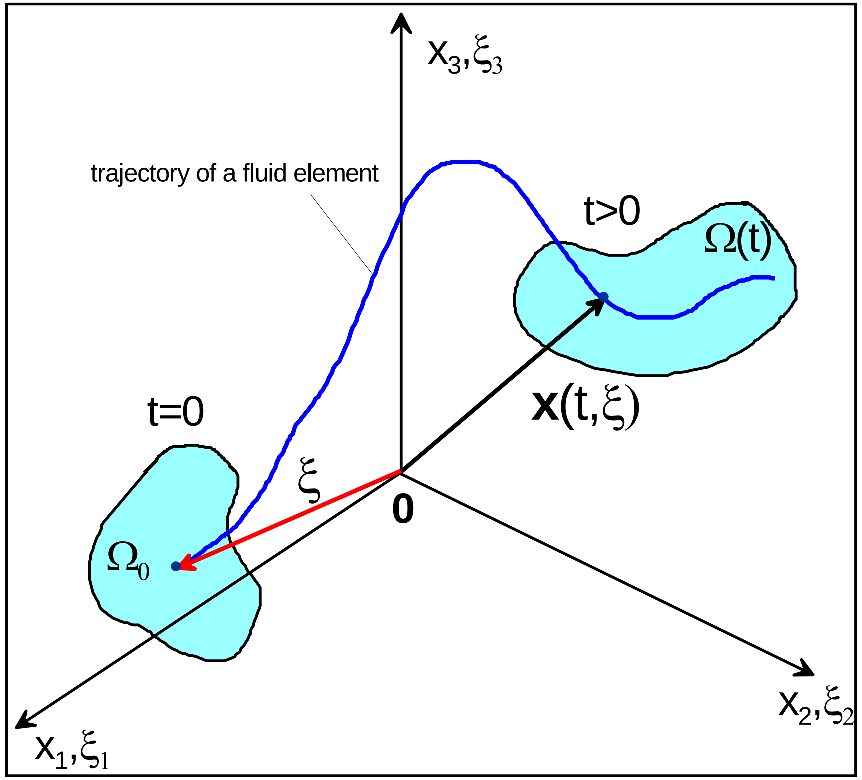
WYKŁAD 2

KINEMATYKA PŁYNÓW – CZĘŚĆ 1

Opisy Lagrange'a i Eulera. Prędkość i przyspieszenie płynu.



Elementem płynu nazywamy indywidualną i nieskończenie małą porcję płynu. Każdy element płynu ma przypisane identyfikujące go położenie w wyróżnionej początkowej chwili czasu (z reguły można przyjąć, ze chwilą tą jest $t = 0$). Położenie początkowe oznaczamy dalej symbolem ξ. Położenie elementu płynu w bieżącej chwili czasy $t > 0$ określone jest wektorem $\boldsymbol{x}$. **Ruchem płynu** nazywamy zatem odwzorowanie obszaru Ω_0 zajmowanego przez płyn w chwili początkowej w obszar $\Omega(t)$, który zajmuje **ten sam płyn** w chwili bieżącej $t > 0$.

Możemy zatem napisać związek $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,\xi)$, w szczególności $\xi = \boldsymbol{x}(0,\xi)$.

Jeśli ustalimy $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_*$, wówczas przyporządkowanie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*)$ opisuje pewną linię w E^3. Linię tę nazywamy **trajektorią** elementu płynu (identyfikowanego przez położenie początkowe ξ_***).**

Obszar $\Omega(t)$ będący obrazem obszaru Ω_0 w dowolnej chwili $t > 0$ nazywamy **obszarem płynnym** lub **obszarem materialnym**.

UWAGA:

1. Przez każdy punkt w obszarze zajętym przez płyn przechodzi jedna i tylko jedna trajektoria. Wyjątek stanowią punkty stagnacji, czyli punkty w których prędkość płynu jest równa zeru.
2. Odwzorowanie obszaru początkowego w obszary płynne w późniejszych chwilach czasu ma **własność grupową**, a mianowicie:

Jeżeli $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t, \xi)$ i $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}(t+\tau, \xi)$, to $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}(t+\tau, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}[\tau, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})] = \boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{x}_1)$

Dowolny ruch płynu można opisywać w ramach podejścia Lagrange'a lub podejścia Eulera.

Opis Lagrange'a: każdy element płynu jest jednoznacznie identyfikowany przez wektor $\boldsymbol{\xi}$, tj. swoją lokalizację w chwili początkowej $t = 0$. Wszystkie charakterystyki kinematyczne ruchu płynu są opisane funkcjami czasy i współrzędnych wektora $\boldsymbol{\xi}$, tj. wielkości skalarnych ξ_1, ξ_2 and ξ_3, zwanych współrzędnymi Lagrange'a.

Wektor prędkości płynu (elementu płynu) zdefiniowany jest wzorem

$$\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\xi}) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t+\Delta t,\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})}{\Delta t} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}(t,\boldsymbol{\xi}) \qquad (\boldsymbol{\xi} \text{ – zafiksowane})$$

Przyspieszenie płynu (elementu płynu) jest zdefiniowane wzorem

$$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{\xi}) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{V}(t+\Delta t,\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\xi})}{\Delta t} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{\xi})$$

Opis Eulera: prędkość, przyspieszenie, a także inne wielkości kinematyczne i dynamiczne charakteryzujące ruch płynu opisane są jako pola fizyczne, czyli funkcje (o wartościach skalarnych, wektorowych lub tensorowych) czasu t i położenia $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$.

Pole (wektorowe) prędkości płynu $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ (w każdym punkcie obszaru zajętego przez płyn zdefiniowany jest – na ogół zmienny w czasie – wektor prędkości)

Relacja pomiędzy opisami Lagrange'a i Eulera: prędkość elementu płynu w chwili t jest taka jak wartość pola prędkości w tejże chwili i w punkcie aktualnym zajmowanym przez ten element.

Euler $\Rightarrow$ Lagrange: $\boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{v}[t, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})]$

Lagrange $\Rightarrow$ to Euler: $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}[t, \underbrace{\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{x})}_{\textit{transformacja odwrotna}}]$

Wyprowadzeniem eulerowskiej formuły na pole przyspieszeń zajmiemy się niebawem …

PRZEPŁYW USTALONY (STACJONARNY): pole prędkości nie zależy (jawnie) od czasu tj.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \ , \ \partial_t \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

TRAJEKTORIE ELEMENTÓW PŁYNU

Lagrange: $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{x}(t,\xi)=\boldsymbol{V}(t,\xi)$ (ξ – zafiksowane).

Całkujemy względem czasu … $\boldsymbol{x}(t,\xi)=\xi+\int_0^t \boldsymbol{V}(\tau,\xi)\,d\tau$.

Otrzymaliśmy bezpośrednią całkową formułę opisującą trajektorię elementu płynu. Całka może być obliczona numerycznie standardowymi metodami (np. metodą trapezów).

Euler: aby wyznaczyć trajektorię trzeba rozwiązać różniczkowe zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}[t,\boldsymbol{x}(t)] \\ \boldsymbol{x}(0)=\xi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}x_j=\upsilon_j(t,x_1,x_2,x_3)\ ,\ \ j=1,2,3. \\ x_j(0)=\xi_j \end{cases}$$

W celu otrzymania rozwiązania, posłużymy się na ogół metodami numerycznymi (np. zastosujemy metodę Rungego-Kuty)

LINIE PRĄDU

Linia prądu: to taka linia, że w każdym jej punkcie (chwilowy) wektor pola prędkości jest do niej styczny.

Morał: W przepływie nieustalonym układ linii prądu zależy od czasu!

Warunek styczności może być zapisany następująco

$$\frac{dx_1}{\upsilon_1(t,x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_2}{\upsilon_2(t,x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_3}{\upsilon_3(t,x_1,x_2,x_3)}$$

Powyższe równości implikują krawędziowy opis 2-parametrycznej rodziny linii w 3D, a mianowicie

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_1(t,x_1,x_2,x_3,C_1,C_2)=0 \\ \mathfrak{F}_2(t,x_1,x_2,x_3,C_1,C_2)=0 \end{cases}$$

Czas t traktowany jest tu jako (zafiksowany) parametr.

Praktyczna metoda wyznaczenia linii prądu polega na obliczeniu trajektorii fikcyjnych cząstek (markerów) poruszających się z „zamrożonym w czasie" polu prędkości. Ruch markerów opisują rozwiązania następującego zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{v}[t, \boldsymbol{x}(\tau)] \\ \boldsymbol{x}(\tau = 0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

gdzie czas fizyczny t jest zafiksowany, a zmienna τ to „pseudo-czas".

Z powyższego wynika wniosek: **trajektorie elementów płynu i linie prądu są tymi samymi liniami wtedy i tylko wtedy, gdy pole prędkości nie zależy jawnie od czasu, tj. gdy przepływ jest ustalony (stacjonarny)**.

PRZYKŁADY

(1) Dwuwymiarowy przepływ ustalony $\boldsymbol{v}(x_1, x_2) = -x_2\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2 \equiv [-x_2, x_1]$

Linie prądu: $\dfrac{dx_1}{-x_2} = \dfrac{dx_2}{x_1} \Rightarrow x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,\ R \geq 0.$

Otrzymaliśmy układ koncentrycznych okręgów.

Trajektorie: $\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = -x_2\ ,\ \frac{d}{dt}x_2 = x_1 \\ x_1(0) = R\ ,\ x_2(0) = 0 \end{cases}$

Rozwiązaniem jest para funkcji $x_1(t) = R\cos(t)\ ,\ x_2(t) = R\sin(t)$

która stanowi parametryczny opis rodziny koncentrycznych okręgów

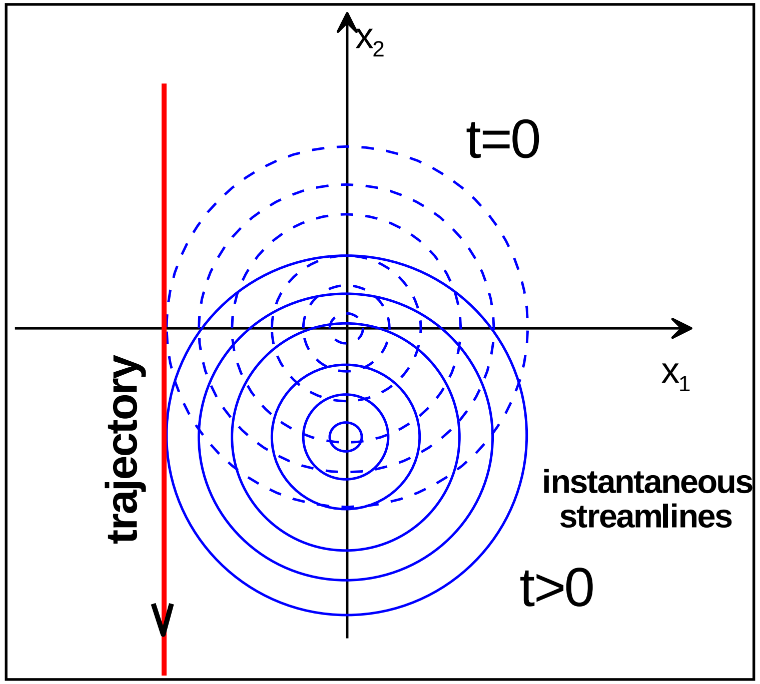
$$x_1^2 + x_2^2 = R^2\,,\ R \geq 0.$$

(2) przepływ niestacjonarny $\boldsymbol{v}(t,x_1,x_2) = (-x_2 - t)\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_2 \equiv [-x_2 - t, x_1]$

Linie prądu:

$$\frac{dx_1}{-x_2 - t} = \frac{dx_2}{x_1} \;\Rightarrow\; x_1\,dx_1 + (x_2 + t)\,dx_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1^2 + (x_2 + t)^2 = C + t^2 \equiv R^2\,,\; C \geq -t^2.$$

Ponownie – rodzina koncentrycznych okręgów, ale ich układ porusza się wzdłuż osi $\boldsymbol{0x_2}$ (w dół) ze stałą prędkością równą –1 (obrazek).



Trajektorie:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = -x_2 - t \;,\; \frac{d}{dt}x_2 = x_1 \\ x_1(0) = x_{10} \;,\; x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

Rozwiązanie
$$\begin{cases} x_1(t) = (x_{10} + 1)\cos(t) - x_{20}\sin(t) - 1 \\ x_2(t) = (x_{10} + 1)\sin(t) + x_{20}\cos(t) - t \end{cases}$$

Niech $x_{10} = -1$ i $x_{20} = 0$. Wtedy $x_1(t) = -1$ i $x_2(t) = -t$, czyli element płynu porusza się z prędkością równą -1 wzdłuż pionowej linii $x_1 = -1$

W ruchu niestacjonarnym kształt trajektorii może być zupełnie inny niż linii prądu!

POCHODNA SUBSTANCJALNA (MATERIALNA)

Niech $f = f(t, \mathbf{x}) = f(t, x_1, x_2, x_3)$ będzie dostatecznie regularnym polem skalarnym. Z punktu widzenia obserwatora poruszającego się z elementem płynu, zmienność wielkości opisanej polem f opisana jest następująca funkcją czasu

$$F(t) := f[t, \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})]$$

Pochodną substancjalną pola f, oznaczaną dalej symbolem $\dfrac{Df}{Dt}$, nazywamy tempo zmian tego pola z punktu widzenia obserwatora poruszającego się z płynem, czyli wzdłuż trajektorii.

Mamy zatem

$$\frac{Df}{Dt}[t, \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})] := \frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}[t, \mathbf{x}(t, \xi)] + \frac{\partial f}{\partial x_1}[t, \mathbf{x}(t, \xi)] \frac{\partial x_1}{\partial t}(t, \boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}[t, \mathbf{x}(t, \xi)] \frac{\partial x_2}{\partial t}(t, \boldsymbol{\xi}) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}[t, \mathbf{x}(t, \xi)] \frac{\partial x_3}{\partial t}(t, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \upsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \upsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \upsilon_3 \right) [t, \mathbf{x}(t, \xi)]$$

gdzie wykorzystaliśmy równości $\dfrac{\partial x_j}{\partial t}(t, \boldsymbol{\xi}) = \upsilon_j[t, \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})]\;,\;\; j = 1,2,3.$

Ponieważ w powyższej formule argumenty wyrażeń po obu stronach znaku równości są identyczne, możemy napisać równość pomiędzy funkcjami, a mianowicie

$$\frac{Df}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{pochodna lokalna}} + \underbrace{\boldsymbol{\upsilon}\cdot\nabla f}_{\text{pochodna konwekcyjna}} ,$$

W notacji indeksowej (z użyciem konwencji sumacyjnej) …

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \upsilon_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

- Pierwszy ze składników nazywamy **pochodną lokalną**. „Mierzy” ona tempo zmian wielkości f zachodzących w wyniku jawnej zależności tej wielkości od czasu**.** Jeśli $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$, to pole f jest stacjonarne i pochodna lokalna $\partial f / \partial t$ znika tożsamościowo.
- Drugi składnik nazywamy **pochodną konwekcyjną** pola f. Jest ona na ogół różna od zera, nawet jeśli pole jest stacjonarne. „Mierzy” ona tempo zmian pola f wynikających z ruchu obserwatora. Pochodna ta znika ta m.in. wówczas, gdy wartość pola f nie zależy od miejsca, czyli pole f jest jednorodne.

POLE PRZYSPIESZEŃ – OPIS EULERA

Z definicji, przyspieszeniem płynu jest tempo zmian prędkości elementu płynu, podczas jego ruchu wzdłuż jego indywidulanej trajektorii. Wynika z tego, że **w celu wyznaczenia pola przyspieszeń płynu należy obliczyć pochodną substancjalną (materialną) pola prędkości**.

Mamy zatem

$$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{D\boldsymbol{\upsilon}}{Dt} = \frac{D\upsilon_i}{Dt}\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_j \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial t} + \upsilon_j \frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial x_j}$$

Pole przyspieszeń jest oczywiście polem wektorowym. W popularnym w mechanice płynów zapisie postać tego pola jest następująca

$$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{D\boldsymbol{\upsilon}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial t} + (\boldsymbol{\upsilon}\cdot\nabla)\boldsymbol{\upsilon} = a_{lokalne} + a_{konwekcyjne}$$

W nawiasie występującym w drugim składniku wzoru (zwanym przyspieszeniem konwekcyjnym) pojawił się **formalny iloczyn skalarny** wektora prędkości i operatora różniczkowego postaci $\nabla = [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}]$ (tzw. nabla).

Alternatywną (ale równoważną) postacią wzoru na przyspieszenie jest postać Lamba-Gromeki

$$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

gdzie $\upsilon = \|\boldsymbol{v}\|$ to wartość (długość) wektora prędkości, a pole wektorowe $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ to rotacja pola prędkości zwana **wirowością**. Rachunkowy dowód tożsamości

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

pozostawiamy studentowi jako ćwiczenie.

Z podanej formuły dla pola przyspieszenia płynu wynika, że kartezjańskie składowe tego pola można obliczyć ze wzoru

$$a_i(t,\boldsymbol{x}) = \frac{D\upsilon_i}{Dt} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_j\,\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \quad (\textit{sumowanie po } j!)$$