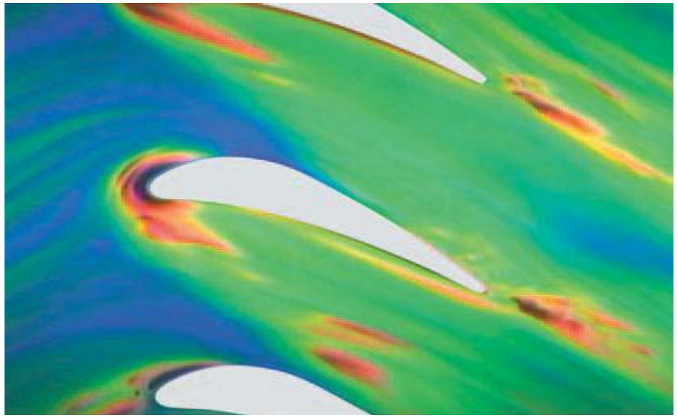
WYKŁAD 7
REAKCJE DYNAMICZNE



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

“Gallery of Fluid Motion”-M. Samimy, K.S. Breuer

DEFINICJA REAKCJI

Reakcja – to siła wywierana na ciało sztywne kontaktujące się z płynącym ośrodkiem ciągłym

Zmiana pędu jest konsekwencją działania siły.

Napiszmy równanie ruchu dla dowolnego ośrodka ciągłego.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla \mathbb{T}$$

To samo równanie dla składowej $k = 1,2,3$ ma postać:

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_i\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) = \rho F_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbb{T}_{ik}$$

Wprowadźmy masę właściwą pod pochodną i przekształćmy powyższe równanie wykorzystując fakt, że $v_k\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\right) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) = \rho F_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{T}_{ik} - \rho v_i v_k\right)$$

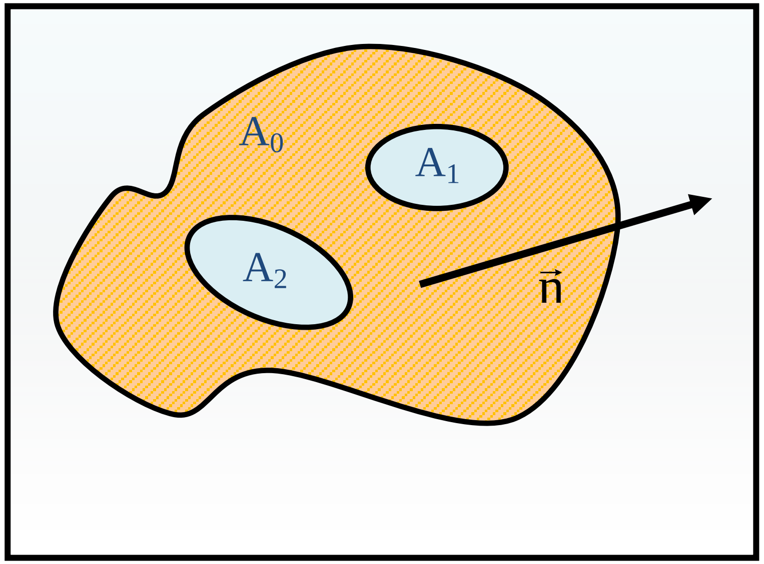
Gdzie ρv_k nazywamy gęstością k -tej składowej pędu
a $\rho v_i v_k$ składowymi tensora ilości ruchu.

Gdy przyjmiemy, że ruch jest ustalony- $\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial t}$ **i siły zewnętrzne możemy pominąć -**$F_k = 0$ **to otrzymamy:**

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbb{T}_{ik} - \rho v_i v_k\right) = 0$$

Weźmy zamkniętą powierzchnię A, składającą się z nieprzenikliwej części A_0 i otworów A_1, A_2. Ośrodek ciągły przepływa przez otwory wywierając reakcję na część nieprzenikliwą A_0.

Będziemy szukać właśnie tej reakcji.



Całkujemy ostatnie równanie we wnętrzu powierzchni $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ i stosujemy twierdzenie Greena – Gaussa – Ostrogradskiego

$$0 = \oint_{A_0} \left[n_i T_{ik} - \rho \left(n_i v_i \right) v_k \right] dA + \oint_{A_1 \cup A_2} \left[n_i T_{ik} - \rho \left(n_i v_i \right) v_k \right] dA$$

Na A_0 $\vec{n} \cdot \vec{v} = n_i v_i = 0$, bo ta część powierzchni jest nieprzenikliwa. $n_i T_{ik}$ - to siła powierzchniowa działająca na płyn.

Na A_0 od wewnątrz działa reakcja

$$-R_k = \oint_{A_0} n_i T_{ik} dA = - \oint_{A_1 \cup A_2} \left[n_i T_{ik} - \rho \left(n_i v_i \right) v_k \right] dA$$

Dodatkowo, jeśli na zewnątrz panuje stałe ciśnienie p_0, to na powierzchnię A_0 działa od zewnątrz siła ciśnieniowa $-\oint_{A_0} n_k p_0 \, dA$

Gdy dodamy reakcję wewnętrzną i siłę zewnętrzną ciśnieniową dostaniemy:

$$R_k = -\oint_{A_1 \cup A_2} n_i \left(T_{ik} + \delta_{ik} p_0 \right) dA - \oint_{A_1 \cup A_2} \rho \left(n_i v_i \right) v_k \, dA$$

W otworach A_1 i A_2 pomijamy składową styczną siły powierzchniowej. Wtedy nasze równanie upraszcza się do postaci:

$$R_k = -\oint_{A_1 \cup A_2} n_k \left(p - p_0 \right) dA - \oint_{A_1 \cup A_2} \rho \left(n_i v_i \right) v_k \, dA$$

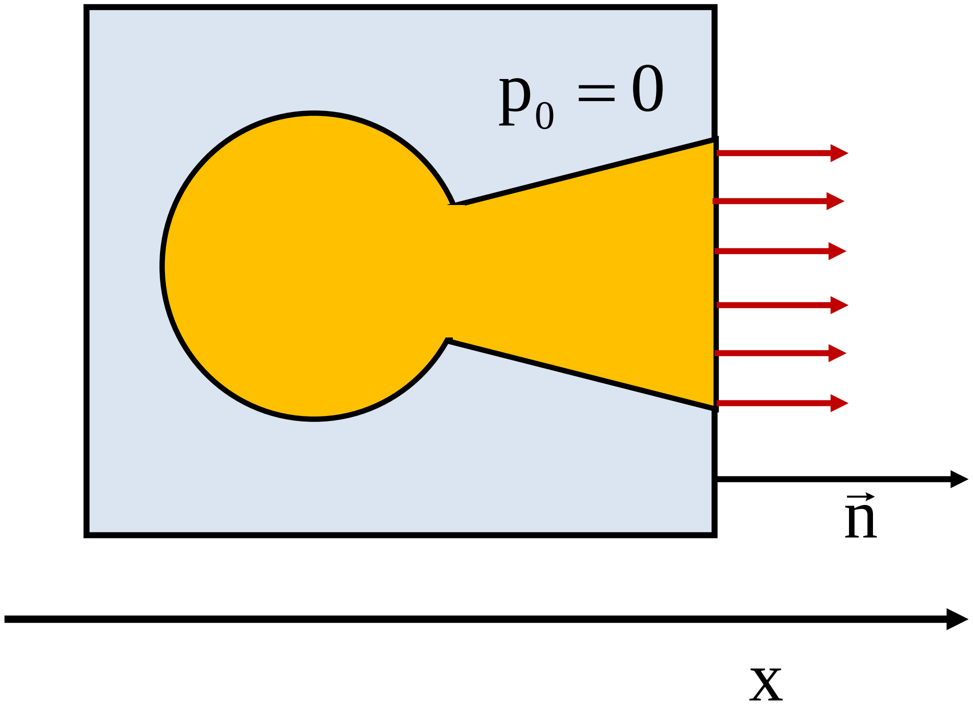
Równanie w formie wektorowej:

$$R_k = -\oint_{A_1 \cup A_2} \rho\left(\vec{n}\cdot\vec{v}\right)\vec{v}\,dA - \oint_{A_1 \cup A_2} \vec{n}\left(p - p_0\right)dA$$

Aby obliczyć siłę reakcji, z jaką działa płynący płyn na kontaktujące się z nim ciało sztywne, wystarczy znać prędkość oraz ciśnienie na wlotach i wylotach powierzchni danego ciała.

PRZYKŁAD 1

Z silnika rakietowego, pracującego w próżni, wypływa w ciągu sekundy $\dot{m}$ gazu z prędkością U. Ciśnienie w strumieniu ≈ 0. Policzyć reakcję płynu.



Wybieramy powierzchnię zamkniętą jak na szkicu.

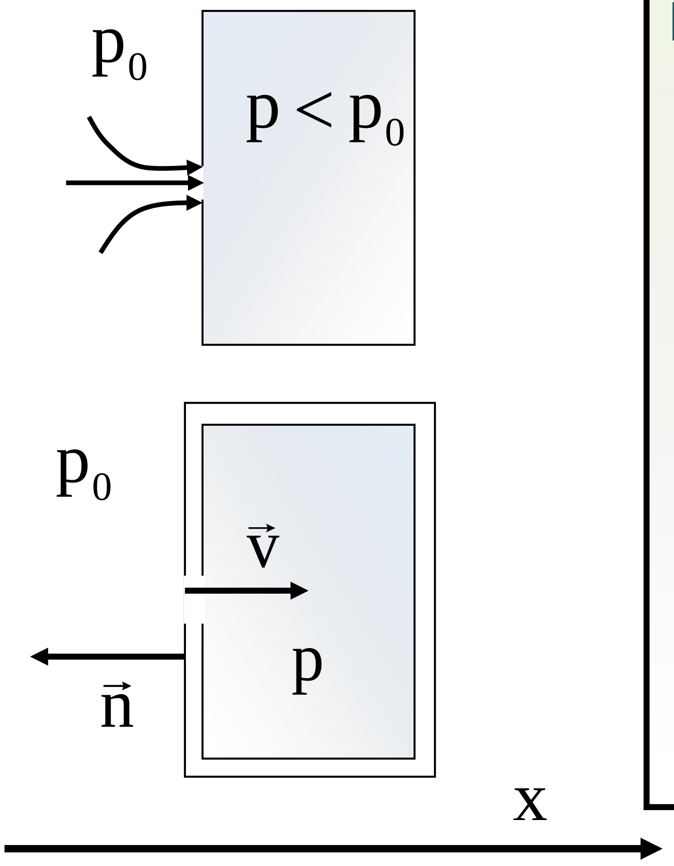
Reakcja:

$$R_x = -\oint_{A_{wylot}} \rho U \cdot U dA = -(\rho U A) U = -\dot{m} U$$

Znak „-” oznacza przeciwne zwroty prędkości wypływu i reakcji

Przykład 2

W cieczy panuje ciśnienie p_0. Otwarto naczynie, w którym ciśnienie jest niższe i wynosi p. Znaleźć reakcję płynu na naczynie.



Znajdujemy prędkość w otworze wlotowym. W tym celu piszemy równanie Bernoulliego

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{2(p_0 - p)}{\rho}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = -v$$

$$R_x = -\oint_{A_{wlot}} v(\vec{n} \cdot \vec{v})\rho dA - \oint_{A_{wlot}} (p - p_0) dA = \rho v^2 A$$

$$+(p - p_0)A = 2(p_0 - p)A - (p_0 - p)A = (p_0 - p)A$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY