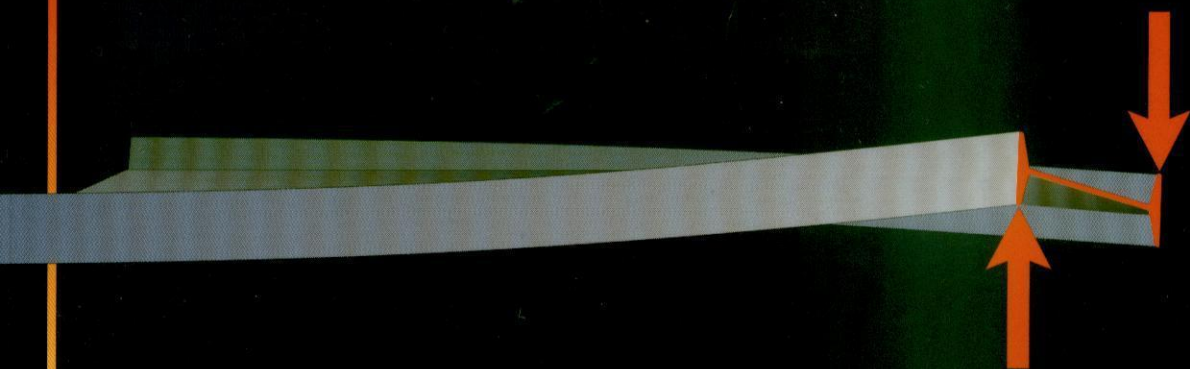


M. E. Niezgodziński

T. Niezgodziński

WZORY WYKRESY I TABLICE WYTRZYMAŁOŚCIOWE



55
lat
WT

**Wydawnictwa
Naukowo-Techniczne**

Michał Edward Niezgodziński
Tadeusz Niezgodziński

WZORY
WYKRESY
I TABLICE
WYTRZYMAŁOŚCIOWE

Wydanie dziewiąte



Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej
ul. Politechniczna 1, 00-646 Warszawa
tel. (22) 63 82 11 11, fax (22) 63 82 11 12
e-mail: wpt@pwr.edu.pl

Spis treści

Od Autorów.....	9
Część pierwsza	
OBLICZENIA WYTRZYMAŁOŚCIOWE W PRZYPADKU OBCIĄŻEŃ STAŁYCH.....	11
1. Tok przeprowadzania obliczeń wytrzymałościowych	11
1.1. Kryteria wytrzymałościowe w obliczeniach elementów maszyn i konstrukcji.....	11
1.2. Obliczenia wytrzymałościowe na naprężenia dopuszczalne	12
1.2.1. Definicja naprężeń nominalnych.....	12
1.2.2. Naprężenia dopuszczalne.....	13
1.2.3. Przybliżony sposób wyznaczania wymaganego współczynnika bezpieczeństwa.....	16
1.3. Obliczenia wytrzymałościowe na dopuszczalne odkształcenia (przemieszczenia).....	17
1.4. Obliczenia wytrzymałościowe na stateczność	20
1.5. Obliczenia wytrzymałościowe na pełzanie	20
1.6. Obliczenia metodą nośności granicznej.....	20
1.7. Obliczenia wytrzymałościowe metodą stanów granicznych.....	22
2. Zestawienie podstawowych wzorów wytrzymałościowych	23
2.1. Rozciąganie i ściskanie.....	23
2.2. Ścinanie.....	25
2.2.1. Ścinanie czyste.....	25
2.2.2. Ścinanie technologiczne	26
2.3. Skręcanie prętów okrągłych.....	28
2.3.1. Skręcanie prętów o przekroju kołowym	28
2.3.2. Obliczanie sprężyn śrubowych.....	29
2.4. Zginanie.....	30
2.4.1. Zginanie płaskie.....	30
2.4.2. Zginanie ukośne.....	31
2.5. Obliczenia na docisk powierzchniowy.....	31
2.5.1. Docisk powierzchniowy liczony na rzut powierzchni styku.....	31
2.5.2. Naprężenia dociskowe według wzorów Hertza	32
2.6. Naprężenia zredukowane według aktualnych hipotez wytrzymałościowych.....	36
2.6.1. Obliczanie naprężeń zredukowanych dla materiałów sprężysto-kruchych	36
2.6.2. Obliczanie naprężeń zredukowanych w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych	37

3. Stateczność prętów ściskanych lub zginanych oraz sprężyn śrubowych	40
3.1. Wyboczenie pryzmatycznych prętów ściskanych	40
3.1.1. Zestawienie wzorów teoretycznych	40
3.1.2. Praktyczne metody obliczania prętów ściskanych	43
3.2. Wyboczenie prętów dwugłęziowych i wielogłęziowych o przekroju stałym	45
3.3. Wyboczenie prętów o przekroju zmiennym	48
3.4. Wyboczenie sprężyn śrubowych	52
3.5. Zwężenie belek	53
4. Skręcanie prętów o niekołowych kształtach przekroju poprzecznego	56
4.1. Skręcanie swobodne i nieswobodne prętów	56
4.2. Skręcanie swobodne prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym	57
4.3. Skręcanie prętów o przekroju prostokątnym	58
4.4. Zestawienie wzorów dotyczących swobodnego skręcania prętów o przekroju zamkniętym	58
4.5. Skręcanie swobodne prętów o przekrojach otwartych	63
4.6. Uproszczony sposób obliczania profili walcowanych na czyste skręcanie	65
5. Obliczanie belek zginanych	69
5.1. Podstawowe wzory dotyczące belek zginanych	69
5.2. Przykłady rozwiązywania belek metodą superpozycji	97
6. Obliczanie ram	99
7. Pręty zakrzywione o małej krzywiznie względnej	111
8. Pręty zakrzywione o dużej krzywiznie względnej	125
9. Belki na sprężystym podłożu	128
10. Pręty smukłe obciążone siłami poprzecznymi i osiowymi	134
10.1. Pręty smukłe ściskane i zginane	134
10.2. Pręty smukłe zginane i rozciągane	138
11. Obliczanie płyt	142
11.1. Cienkie płyty kołowsymetryczne	142
11.1.1. Podstawy teoretyczne i wzory ogólne	142
11.1.2. Przykłady obliczania płyt kołowsymetrycznych	152
11.2. Zginanie cienkich płyt prostokątnych	153
11.2.1. Oznaczenia i wzory ogólne	153
11.2.2. Walcowe zginanie płyt	155
11.2.3. Przykłady zginania cienkich płyt prostokątnych	157
11.3. Zginanie płyt grubych	163
11.4. Stateczność płyt cienkich	164

12. Obliczanie rur i zbiorników	168
12.1. Obliczanie rur cienkościennych lub powłok walcowych	168
12.1.1. Osiowosymetryczne zginanie rur cienkościennych	168
12.1.2. Naprężenia w rurach cienkościennych lub powłokach walcowych poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego lub zewnętrznego	170
12.1.3. Wyboczenie rur lub powłok walcowych poddanych równomiernemu ścisnaniu osiowemu	177
12.2. Obliczanie naczyń i powłok cienkościennych	178
12.3. Obliczanie rur i naczyń grubościennych	186
13. Obliczanie zbiorników ciśnieniowych i połączeń śrubowo-kołnierзовych według metod wzorowanych na przepisach Urzędu Dozoru Technicznego	189
13.1. Obliczanie zbiorników ciśnieniowych	189
13.1.1. Obliczanie elementów walcowych	189
13.1.2. Obliczanie den zbiorników ciśnieniowych	190
13.2. Obliczanie połączeń śrubowo-kołnierзовych	193
14. Obliczanie połączeń spawanych	198
15. Własności wytrzymałościowe metali w temperaturach obniżonych	206
16. Własności wytrzymałościowe metali w temperaturach podwyższonych	209
16.1. Zmiany własności wytrzymałościowych metali w temperaturach podwyższonych	209
16.2. Pękanie materiałów i relaksacja naprężeń	212
 Część druga	
OBLICZENIA WYTRZYMAŁOŚCIOWE W PRZYPADKU OBCIĄŻEŃ ZMĘCZENIOWYCH	215
17. Tok przeprowadzania obliczeń zmęczeniowych	215
17.1. Wpływ spiętrzenia naprężeń, stanu powierzchni i wielkości przedmiotu na wytrzymałość zmęczeniową	215
17.1.1. Wprowadzenie	215
17.1.2. Współczynniki kształtu α_k	215
17.1.3. Współczynnik działania karbu β_k	216
17.1.4. Współczynnik stanu powierzchni β_p	217
17.1.5. Zmęczeniowy współczynnik spiętrzenia naprężeń β	217
17.1.6. Współczynnik wielkości przedmiotu γ	218
17.2. Obliczenia zmęczeniowe w przypadku symetrycznych cykli obciążeń	218
17.3. Obliczenia zmęczeniowe w przypadku niesymetrycznych cykli obciążeń	219
17.3.1. Wprowadzenie	219
17.3.2. Budowa uproszczonego wykresu Smitha	219
17.3.3. Przeprowadzanie obliczeń zmęczeniowych za pomocą wykresu Smitha	221
17.3.4. Analityczne obliczanie współczynnika bezpieczeństwa przy stałym stosunku amplitud do naprężeń $\sigma_a / \sigma_m = \text{const}$	221

17.3.5. Analityczne obliczanie współczynnika bezpieczeństwa przy stałych naprężeniach średnich $\sigma_m = \text{const}$	222
17.4. Obliczenia zmęczeniowe w złożonym stanie naprężeń	228
17.4.1. Obliczenia wytrzymałościowe w przypadku zmęczeniowego rozciągania i zginania	228
17.4.2. Obliczenia wytrzymałościowe w przypadku zmęczeniowego działania naprężeń normalnych i naprężeń stycznych	230
17.5. Wytrzymałość zmęczeniowa żeliw, staliw i metali nieżelaznych	232
17.5.1. Wytrzymałość żeliw	232
17.5.2. Obliczanie wytrzymałościowe staliw	235
17.5.3. Wytrzymałość stopów lekkich	235
17.6. Obliczenia zmęczeniowe elementów dźwignic	237
18. Wykresy stosowane w obliczeniach zmęczeniowych	238
18.1. Współczynniki wielkości przedmiotu γ	238
18.2. Współczynniki stanu powierzchni β_p , wrażliwości η oraz promienie minimalne ρ_m	241
18.3. Współczynniki kształtu α_k dla prętów okrągłych (wałów) pełnych	244
18.4. Współczynniki kształtu α_k dla wałów wydrążonych	252
18.5. Współczynniki kształtu α_k dla płaskowników	255
18.6. Współczynniki kształtu α_k dla gwintów i sprężyn	263
Część trzecia	
TABLICE STOSOWANE DO OBLICZEŃ WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH	265
19. Tablice własności fizycznych i wytrzymałościowych materiałów	265
Literatura	296
Skorowidz	298

Od Autorów

Książka ma charakter podręcznego vademecum zawierającego omówienie podstawowych, klasycznych metod stosowanych w obliczeniach wytrzymałościowych elementów maszyn i konstrukcji. Zakres metod oraz podanych wzorów i przykładów dostosowano do potrzeb związanych ze wstępnym projektowaniem konstrukcji w ramach prac przejściowych i dyplomowych, wykonywanych na studiach dziennych i zaocznych politechnicznych wydziałów mechanicznych (i pokrewnych), jak również w biurach projektowych.

Wyniki obliczeń projektów wstępnych mogą stanowić podstawę do przeprowadzania obliczeń sprawdzających, z zastosowaniem odpowiednich norm branżowych i państwowych (PN), mogą też być wykorzystane jako dane wejściowe do aktualnie dostępnych programów komputerowych.

Łódź, maj 1996 r.

Część pierwsza

Obliczenia wytrzymałościowe w przypadku obciążeń stałych

1. Tok przeprowadzania obliczeń wytrzymałościowych

1.1. Kryteria wytrzymałościowe w obliczeniach elementów maszyn i konstrukcji

Zasadniczym celem przeprowadzania obliczeń wytrzymałościowych jest zapewnienie bezpiecznej i niezawodnej pracy maszyn i urządzeń w czasie ich eksploatacji. W każdym przypadku w obliczeniach powinno się uwzględniać wszystkie kryteria dotyczące bezpiecznej pracy maszyn. Na ogół jedno z tych kryteriów, limitujące najmniejszą dopuszczalną wartość obciążeń, decyduje o wytrzymałości danego elementu maszyny lub konstrukcji.

Z tych względów obliczenia wytrzymałościowe każdego elementu powinny obejmować następujące punkty:

- 1) obliczenia na naprężenia dopuszczalne,
- 2) obliczenia na odkształcenia (przemieszczenia) dopuszczalne,
- 3) obliczenia na stateczność,
- 4) obliczenia na pełzanie,
- 5) obliczenia zmęczeniowe.

Wymienione wyżej kryteria wytrzymałościowe muszą być za każdym razem spełnione jednocześnie. Jeżeli w konkretnych przypadkach porzeka się na zastosowaniu tylko jednego z wymienionych wyżej kryteriów, oznacza to, że pozostałe kryteria są z całą pewnością spełnione, za co przeprowadzający obliczenia bierze pełną odpowiedzialność.

Podstawowe zasady obliczeń według kolejnych kryteriów zostaną omówione w następnych punktach.

W przypadku przeprowadzania obliczeń *metodą nośności granicznej* (por. p. 1.6) należy również pamiętać o spełnieniu kryteriów 2÷5 podanego wyżej zestawienia.

W wydawanych ostatnio i stopniowo wprowadzanych w życie normach dąży się do ujednolicenia systemu obliczeń wytrzymałościowych, wprowadzając tzw. *metody stanów granicznych*, stanowiące połączenie omówionych wyżej kryteriów wytrzymałościowych. Metody te omówiono w p. 1.7.

1.2. Obliczenia wytrzymałościowe na naprężenia dopuszczalne

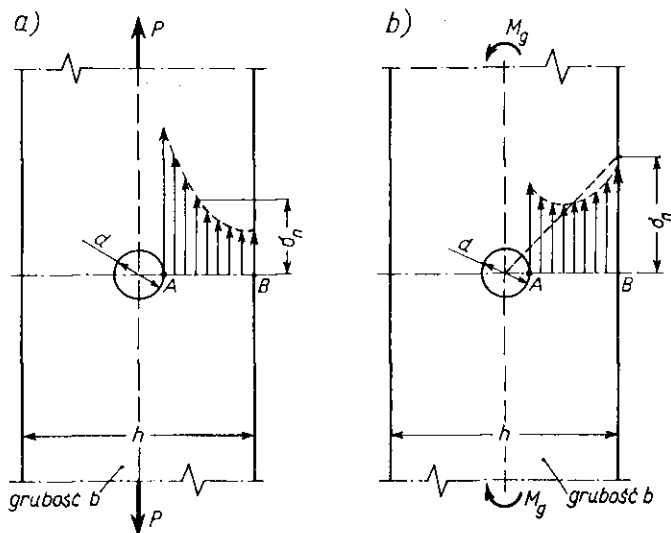
1.2.1. Definicja naprężeń nominalnych

Przeprowadzanie obliczeń na naprężenia dopuszczalne ma na celu ustalenie, czy w żadnym punkcie obliczanego elementu naprężenia nominalne σ_n nie przekroczą naprężeń przyjętych za dopuszczalne i oznaczanych literą k

$$\sigma_n \leq k \quad (1.1)$$

Pod nazwą *naprężenia nominalne* σ_n należy rozumieć naprężenia maksymalne obliczone za pomocą odpowiednich wzorów wytrzymałościowych lub wyznaczone doświadczalnie (np. w wyniku badań tensometrycznych) dla obciążeń nominalnych, jednak bez uwzględnienia spiętrzenia naprężeń. Tak więc dla płaskownika o szerokości h i grubości b , z otworem o średnicy d w środku, naprężenie nominalne w przypadku rozciągania siłą P (rys. 1.1a) wynosi

$$\sigma_n = \frac{P}{F} = \frac{P}{b(h-d)} \quad (a)$$



Rys. 1.1

choć wiadomo, że rozkład naprężeń rzeczywiście występujących w płaskowniku nie jest równomierny i w przekroju AB przedstawia się w sposób podany przykładowo na rys. 1.1a; gdy szerokość h płaskownika jest dostatecznie duża, naprężenie w punkcie A jest trzykrotnie większe od naprężenia σ_n (por. rys. 18.38), jednak nadal naprężeniem nominalnym jest wartość σ_n otrzymana ze wzoru (a).

Jeżeli ten sam płaskownik jest zginany momentem M_g (rys. 1.1b), naprężeniem nominalnym σ_n jest naprężenie maksymalne otrzymane ze wzoru na zginanie

$$\sigma_n = \frac{M_g}{W} = \frac{M_g \cdot 6h}{b(h^3 - d^3)} \quad (b)$$

Rozkład naprężeń określonych powyższym wzorem w przekroju poprzecznym AB płaskownika podano linią kreskowaną na rys. 1.1b. Pomimo tego, że w miejscu B naprężenie rzeczywiste może być nawet większe od obliczonego σ_n , naprężeniem nominalnym będzie jednak maksymalne naprężenie otrzymane ze wzorów wytrzymałościowych, a więc w danym przypadku określone wzorem (b).

1.2.2. Naprężenia dopuszczalne

W zależności od rodzaju obciążeń naprężenia dopuszczalne k przybierają różne wartości i stosuje się dla nich różne oznaczenia, tak więc dla rozciągania oznaczenie k_r , dla zginania – k_g , dla ścinania – k_t , dla skręcania – k_s , na docisk powierzchniowy – k_d .

Dla materiałów plastycznych (dla obciążeń stałych) przyjmuje się $k_g = k_r$ oraz $k_s = k_t = 0,6k_r$ (por. p. 2.6).

Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie dla materiałów mających wyraźną lub umowną granicę plastyczności wyznacza się ze wzoru

$$k_r = \frac{Q_r}{x_w} \quad (1.2)$$

a dla pozostałych materiałów – ze wzoru

$$k_r = \frac{R_r}{x_{rw}} \quad (1.3)$$

gdzie: k_r – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie, Q_r – granica plastyczności⁽¹⁾ (wyraźna lub umowna Q_{02}), R_r – wytrzymałość na rozciąganie, x_w – wymagany współczynnik bezpieczeństwa w odniesieniu do granicy plastyczności, x_{rw} – wymagany współczynnik bezpieczeństwa w odniesieniu do wytrzymałości na rozciąganie.

Ustalenie właściwej wartości współczynnika bezpieczeństwa x_w , a tym samym naprężeń dopuszczalnych, jest jednym z trudniejszych zagadnień w obliczeniach wytrzymałościowych. Najogólniej rzecz biorąc, przy ustaleniu wartości współczynnika bezpieczeństwa trzeba uwzględnić następujące czynniki:

⁽¹⁾ Według obowiązujących norm granicę plastyczności (wyraźną lub umowną) oznacza się symbolem R_s , natomiast wytrzymałość na rozciąganie – R_m . Aby uprościć i ujednolicić system obliczeń zmęzeniowych, w pracy zachowano równoległe oznaczenia: Q_r oraz R_r dla rozciągania, Q_g oraz R_g dla zginania, a następnie ścinania, skręcania, ściskania itp.

Tablica 1.1. Wartości liczbowe cząstkowych współczynników bezpieczeństwa

Nazwa współczynnika	Wartości	Zastosowanie
x_1 pewności założeń	1,1	przeprowadzone badania wytrzymałościowe danego materiału i zastosowanie ścisłej metody obliczeń
	1,2÷1,4	znany gatunek materiału oraz zwykłe metody obliczeń
	1,5÷2,0	obciążenie uderne
x_2 ważności przedmiotu	1,0÷1,1	gdy zniszczenie danej części: spowoduje zatrzymanie maszyny
	1,1÷1,2	spowoduje uszkodzenie maszyny
	1,3÷1,5	może spowodować wypadek
x_3 jednorodności materiału	1,0÷1,05	ścisła kontrola jednorodności po obróbce plastycznej (metodami rentgenograficznymi, ultradźwiękowymi itp.)
	1,1	materiały kute, walcowane, ciągnione
	1,2	odlewy ciśnieniowe, odśrodkowe
	1,3	odlewy kokilowe, starannie wykonane połączenia spawane (spawane automatycznie lub wykonane przez spawaczy I kategorii z kontrolą rentgenowską)
	1,4÷1,7	odlewy piaskowe, części hartowane, połączenia spawane o prawidłowym wyglądzie zewnętrznym
x_4 zachowania wymiarów	1,0÷1,05	ścisła kontrola wymiarów każdego przedmiotu
	1,05÷1,1	normalna kontrola metodą wrywkową po obróbce skrawaniem
	1,1÷1,15	pręty, profile walcowane, blachy, dokładne odlewy, elementy tłoczone
	1,2	konstrukcje spawane, odlewy, odkuwki

Wymagany współczynnik bezpieczeństwa $x_w = x_1 x_2 x_3 x_4$.

U w a g a: dla staliwa, stopów lekkich i metali kolorowych wymagany współczynnik bezpieczeństwa x_w obliczony z tabl. 1.1 należy powiększyć o 40%, dla żeliwa zaś o 100%.

Przykłady zastosowania
badanie specjalnych nadlewów, naddatków lub odcinków danego materiału
1,2 – bardzo prosty układ obciążeń 1,4 – gatunek materiału określony porównawczo (np. przez badanie twardości) lub skomplikowany układ obciążeń
1,5 – uderzenie łagodne z resorowaniem 1,6 – obciążenie przykładane dynamicznie bez prędkości początkowej 2,0 – uderzenia bez resorowania
1,1 – łatwa, tania naprawa
1,3 – poważne uszkodzenie wielu części 1,4 – zniszczenie urządzenia 1,5 – wypadek (zagrożenie dla ludzi)
1,0 – elementy o małej grubości
1,4 – małe odlewy, połączenia spawane elementów ze stali o sprawdzonej spawalności (np. St3S) 1,7 – duże odlewy, połączenia spawane elementów niestalowych
1,0 – gdy geometria przedmiotu jest prosta
1,1 – skomplikowane kształty
1,1 – pręty ciągnięte, krótkie profile, odlewy kokilowe bez rdzeni 1,15 – utrudniony pomiar (np. blachy w środku arkusza), duże profile walcowane

1) *jednorodność materiału* (wpływ wywierają wtrącenia niemetaliczne, pory w odlewach),

2) *naprężenia wstępne* (przy ostygnięciu odlewów, skurczowe, hartownicze),

3) *obciążenia przewidziane i przypadkowe* (dodatkowe naprężenia od drgań własnych, różnice między założonymi a rzeczywistymi warunkami działania obciążeń: np. nieidealnie osiowe działanie sił rozciągających, powodujące dodatkowo powstanie zginania),

4) *niedoskonałość metod obliczeniowych*,

5) *skutki, jakie mogą wynikać z uszkodzenia danej części* (jeżeli uszkodzenie części spowoduje tylko krótkotrwałe zatrzymanie maszyny i część tę da się łatwo wymienić, można dopuścić mały współczynnik x , gdy natomiast uszkodzenie części może spowodować zniszczenie maszyny lub wypadek zagrażający np. życiu znajdujących się w pobliżu osób – należy przyjąć znacznie większy współczynnik bezpieczeństwa x),

6) *czas eksploatacji maszyny lub urządzenia* i związane z tym uszkodzenia spowodowane korozją, ścieraniem się – niezależnie od zjawisk zmęczeniowych (por. rozdz. 17),

7) *kontrolę dokładności wymiarów* (łatwo ustalić średnicę wałka toczonego na tokarce, a znacznie trudniej rzeczywistą grubość dużego arkusza blachy w środku jego powierzchni lub den zbiorników w miejscach wyobleni itp.),

8) *udarne działanie sił* (obciążenia przykładane nagle oraz wszelkiego rodzaju uderzenia powodują powstanie większych naprężeń niż przy powolnym, tj. statycznym obciążeniu),

9) *spiętrzenie naprężeń* wymagające stosowania specjalnych metod obliczeniowych w przypadku obciążeń zmiennych (por. rozdz. 17), w przypadku zaś materiałów kruchych – zwiększenie współczynnika bezpieczeństwa nawet dla obciążeń stałych.

W przypadku konstrukcji, co do których nagromadzono wiele doświadczeń, jak mosty, kotły parowe, zbiorniki ciśnieniowe, więzary dachowe, dźwignice itp. istnieją przepisy (normy) państwowe nakazujące przyjmowanie odpowiednich wartości wymaganych współczynników bezpieczeństwa x_w .

1.2.3. Przybliżony sposób wyznaczania wymaganego współczynnika bezpieczeństwa

Jak wspomniano, w wielu dziedzinach przepisy państwowe (normy, instrukcje odpowiednich urzędów, jak np. Urzędu Dozoru Technicznego) lub normy branżowe nakazują stosowanie ustalonych wartości współczynników bezpieczeństwa lub naprężeń dopuszczalnych. W większości jednak przypadków konstruktor sam musi decydować o wyborze wartości współczynnika bezpieczeństwa, opierając się na doświadczeniach własnych, na danych zaczerpniętych z literatury, a często na własnej intuicji.

W przypadku gdy brak jest bliższych danych dotyczących właściwej wartości wymaganego współczynnika bezpieczeństwa x_w , dla uzyskania pierwszego przybliżenia można posłużyć się tabl. 1.1. Znajdujemy w niej *współczynnik bezpieczeństwa* x_w , określony jako iloczyn czterech współczynników cząstkowych

$$x_w = x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (1.4)$$

gdzie: x_1 – współczynnik pewności założeń, x_2 – współczynnik ważności przedmiotu, x_3 – współczynnik jednorodności materiału, x_4 – współczynnik zachowania wymiarów.

Wartości współczynników cząstkowych podane w tabl. 1.1 dotyczą podstawowego materiału konstrukcyjnego, jakim jest stal. Dla staliwa, stopów lekkich i metali kolorowych wartość wymaganego współczynnika bezpieczeństwa x_w , otrzymaną z tabl. 1.1, należy powiększyć o 40%, dla żeliwa zaś o 100%. Zalecenia te są wzorowane m.in. na zasadach stosowanych w *Przepisach Dozoru Technicznego* [24], dotyczących obliczania kotłów i zbiorników ciśnieniowych, przy czym stosować je można w ograniczonym zakresie temperatury, a więc np. dla stopów lekkich do 60°C (por. rozdz. 16).

1.3. Obliczenia wytrzymałościowe na dopuszczalne odkształcenia (przemieszczenia)

W wielu przypadkach warunkiem niezawodności działania maszyn i urządzeń jest zachowanie dostatecznej sztywności, a więc niedopuszczenie do nadmiernych odkształceń. W przeważającej większości przypadków warunek sztywności jest automatycznie spełniony, jeżeli naprężenia nominalne nie przekroczą naprężeń dopuszczalnych. Wystarczy wówczas przeprowadzić obliczenia wytrzymałościowe na naprężenia dopuszczalne, natomiast przeprowadzanie obliczeń na dopuszczalne odkształcenia nie jest konieczne.

Istnieją jednak przypadki, gdy pomimo spełnienia warunków wynikających z obliczeń na naprężenia dopuszczalne prawidłowa praca maszyn lub urządzeń nie jest możliwa, gdyż o wartości dopuszczalnych obciążeń nie decydują dopuszczalne naprężenia, lecz odkształcenia (przemieszczenia).

Typowym przykładem tego rodzaju urządzeń są wały pędniowe, w których kąt skręcenia jednego metra bieżącego wału nie może przekroczyć $(1/4)^\circ$, czyli

$$\varphi_{\text{dop}} = (1/4)^\circ / \text{m} \quad (1.5)$$

Warunek sztywności wału i warunek wynikający z naprężeń dopuszczalnych będą jednocześnie spełnione wówczas, gdy średnica d wału, obliczona ze wzoru na skręcanie

$$\varphi_{\text{dop}} = \frac{M_s \cdot l}{G J_0} = (1/4)^\circ / \text{m} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

a więc

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{4 \cdot 180 \cdot M_s \cdot l}{\pi G} \quad (\text{a})$$

spełnia wzór na naprężenia dopuszczalne

$$\tau = \frac{M_s}{W_0} = \frac{M_s \cdot 16}{\pi d^3} = k_s \quad (\text{b})$$

Po wyrugowaniu M_s ze wzorów (a) i (b) otrzymuje się

$$\frac{\pi^2 G d^4}{32 \cdot 4 \cdot 180} = \frac{\pi d^3 k_s}{16}$$

stąd

$$d = \frac{8 \cdot 180 \cdot k_s}{\pi G}$$

Jeżeli przyjmiemy naprężenia dopuszczalne na skręcanie dla wału stalowego $k_s = 20 \text{ MPa}$, a moduł sprężystości postaciowej dla stali $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, otrzymamy

$$d = \frac{8 \cdot 180 \cdot 20}{\pi \cdot 8,5 \cdot 10^4} \approx 0,108 \text{ m} = 108 \text{ mm}$$

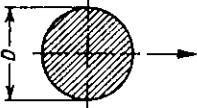
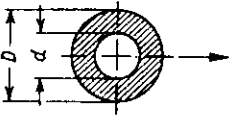
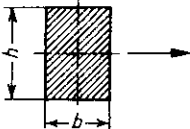
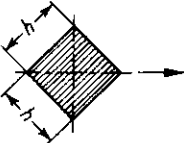
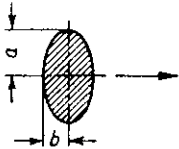
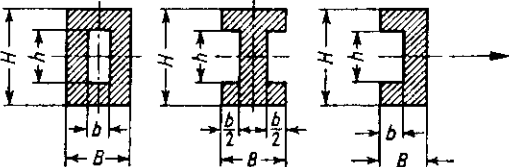
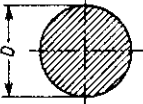
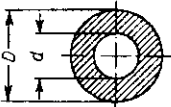
Oznacza to, że cienkie wały stalowe należy obliczać na dopuszczalny kąt skręcenia i wtedy automatycznie naprężenia będą mniejsze od dopuszczalnych $k_s = 20 \text{ MPa}$ ($\approx 200 \text{ kG/cm}^2$), natomiast wały o grubości większej niż 108 mm należy obliczać ze wzoru (b), tj. na naprężenia dopuszczalne.

Wzory na momenty bezwładności i wskaźniki wytrzymałości na skręcanie dla wałów pełnych i wydrążonych podano w tabl. 1.2.

W zakresie budowy suwnic obowiązują przepisy określające m.in. maksymalną strzałkę ugięcia suwnicy, spowodowaną obciążeniem równym 110% udźwigu przy najbardziej niekorzystnym rozmieszczeniu wózka (lub wózków, gdy jest ich więcej niż jeden). Maksymalna strzałka ugięcia nie może przekroczyć następujących wartości:

- 1,1/700 rozpiętości suwnic o napędzie elektrycznym,
- 1,1/500 rozpiętości suwnic jednodźwigarowych o napędzie elektrycznym,
- 1,1/400 rozpiętości suwnic o napędzie ręcznym.

Tablica 1.2. Momenty bezwładności J i wskaźniki wytrzymałości W niektórych figur

A. Przy zginaniu względem osi zaznaczonej na rysunku	
	$J = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$
	$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ $W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$
	$J = \frac{bh^3}{12}, \quad W = \frac{bh^2}{6}$
	$J = \frac{h^4}{12}, \quad W = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3$
	$J = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad W = \frac{\pi a^2 b}{4}$
	$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
B. Przy skręcaniu	
	$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad W_0 = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$
	$J_0 = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ $W_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^4 - r^4}{R} \right) = \frac{\pi}{16} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right)$

1.4. Obliczenia wytrzymałościowe na stateczność

Jak wiadomo z wytrzymałości materiałów, stan równowagi układu może odpowiadać równowadze stałej, a w niektórych przypadkach równowadze chwiejnej lub obojętnej, gdy niewielkie dodatkowe siły powstające np. od drgań własnych mogą spowodować skończone przemieszczenia pewnych punktów układu. Mówimy wówczas o *utracie stateczności* danego elementu lub całej konstrukcji.

Gdy utrata stateczności następuje pod wpływem sił ściskających, zjawisko to nazywamy *wyboczeniem* (por. p. 3.1). W przypadku zginania utrata stateczności przejawia się *zwichrzeniem* belek (por. p. 3.2).

Utrata stateczności płyt przejawia się wybrzuszeniami zachodzącymi w pewnych obszarach i oznaczanymi za pomocą warstwic (por. rozdz. 11). W powłokach poddanych ściskaniu, zginaniu lub skręcaniu, stanowiących np. powierzchnie zbiorników, rur itp. urządzeń, utrata stateczności przejawia się powstawaniem fal, których liczba zależy od kształtu i od grubości powłoki (por. rozdz. 12 i 13).

1.5. Obliczenia wytrzymałościowe na pełzanie

Przy obliczaniu elementów narażonych na działanie wyższych temperatur należy uwzględnić zjawisko pełzania materiałów i związanej z tym relaksacji naprężeń.

Pełzaniem materiału nazywamy zdolność do powolnego powiększania odkształceń, mimo tego że obciążenie w tym czasie nie ulega zmianie. Z pełzaniem materiału związane jest *zjawisko relaksacji*, tj. zmniejszania się naprężeń w miarę upływu czasu przy zachowaniu nie zmienionych odkształceń (por. rozdz. 16).

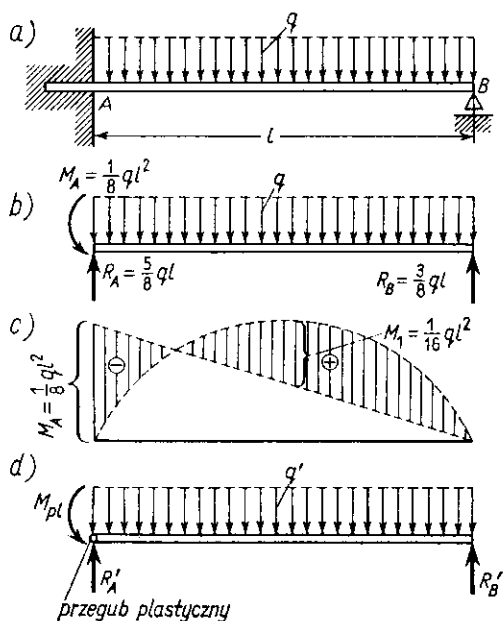
Obliczenia na pełzanie mogą warunkować wytrzymałość danej części lub konstrukcji już w temperaturach normalnych, tj. bliskich 20°C . Dotyczy to elementów wykonanych ze stopów cyny, cynku itp., a przede wszystkim z tworzyw sztucznych.

Dla stopów lekkich obliczenia na pełzanie mogą decydować o wartości dopuszczalnych obciążeń już w temperaturze 60°C , dla stali zaś od 200°C .

1.6. Obliczenia metodą nośności granicznej

W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych, wykonanych z materiałów o wyraźnej granicy plastyczności (np. ze stali niskowęglowych), można uzyskać oszczędności materiałowe przeprowadzając obliczenia wytrzymałościowe *metodą nośności granicznej*.

Rozpatrzmy na przykład belkę statycznie niewyznaczalną, utwierdzoną w punkcie A i podpartą w punkcie B , obciążoną na całej długości obciążeniem ciągłym o natężeniu q (rys. 1.2a). Zgodnie z danymi odczytanymi z tabl. 5.4 (poz. 9) wartości reakcji podporowych i momentu utwierdzenia M_A podano na rys. 1.2b, a wykres momentów gnących – na rys. 1.2c.



Rys. 1.2

Przeprowadzając obliczenia metodą naprężeń dopuszczalnych, stwierdzamy, że naprężenia maksymalne (czyli nominalne) powstają w przekroju utwierdzenia i wynoszą

$$\sigma_n = \frac{M_A}{W} = \frac{ql^2}{8W} \leq k_r \quad (\text{a})$$

gdzie W – wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie.

Jeżeli obciążenie q zaczniemy powiększać, to naprężenia w przekroju utwierdzenia w skrajnych włóknach belki przekroczą wartość naprężeń dopuszczalnych k_r i osiągną wartość granicy plastyczności R_e . Jeżeli nawet naprężenia w całym przekroju utwierdzenia osiągną wartość R_e , to w przekroju tym utworzy się tzw. *przegub plastyczny*, belka zaś znajdować się będzie nadal w równowadze stałej. Jak wiadomo z wytrzymałości materiałów (por. [18] str. 408), w przypadku belki o przekroju prostokątnym moment plastyczny M_{pl} jest o 50% większy od mo-

mentu M_A określonego wzorem (a) przy założeniu, że w obu przypadkach naprężenia maksymalne nie przekroczą granicy plastyczności R_e .

W budowie maszyn, jak również w obliczeniach konstrukcji stalowych dźwignic, zbiorników itp. nie stosuje się w zasadzie metody nośności granicznej. Podobny skutek uzyskuje się stosunkowo prostszą drogą, przyjmując odpowiednie wartości wymaganych współczynników bezpieczeństwa x_w . Znalazło to wyraz również w tabl. 1.1, gdzie wartość cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa x_2 jest uzależniona od stopnia ważności przedmiotu. Tak więc dla belki statycznie niewyznaczalnej można przyjąć małą wartość współczynnika x_2 (np. $x_2 = 1,0 \div 1,1$), gdyż utworzenie się przegubu plastycznego nie spowoduje żadnego zagrożenia w normalnej pracy belki, natomiast w przypadku belki statycznie wyznaczalnej utworzenie się przegubu plastycznego spowodowałoby naruszenie stanu równowagi, prowadzące np. do złamania belki, w związku z czym – zgodnie z danymi zamieszczonymi w tabl. 1.1 – współczynnik cząstkowy x_2 należałoby przyjąć w granicach $x_2 = 1,3 \div 1,5$.

1.7. Obliczenia wytrzymałościowe metodą stanów granicznych

Omówione wyżej metody obliczeń wytrzymałościowych można określić jako klasyczne, obejmujące wszelkie maszyny i urządzenia, konstrukcje i mechanizmy, pojazdy, silniki itp., wykonane z różnych materiałów, jak stale, staliwa, żeliwa, stopy miedzi, aluminium itp.

W dążeniu do maksymalnego wykorzystania materiału i ujednolicenia metod obliczeniowych wydawane ostatnio normy nakazują przeprowadzenie obliczeń wytrzymałościowych konstrukcji stalowych tzw. *metodą stanów granicznych* [38].

Istotną cechą tej metody jest wprowadzenie tzw. *wytrzymałości obliczeniowej* f_a (zamiast naprężeń dopuszczalnych k), przy czym f_a jest z zasady znacznie wyższe od k , w przybliżeniu równe $0,85 \div 0,90$ granicy plastyczności R_e . Pociąga to za sobą znaczne sformalizowanie metod obliczeniowych, wprowadzenie kilkunastu współczynników bezpieczeństwa, które każdorazowo należy ustalić dla danego typu rozwiązań konstrukcyjnych itp.

Jako zalecenie praktyczne można więc polecić stosowanie klasycznych metod obliczeniowych – podanych m.in. w niniejszej pracy – przy opracowywaniu projektów wstępnych, a następnie sprawdzanie tak obliczonego projektu według metod podanych w aktualnie obowiązujących Polskich Normach, przepisach Urzędu Dozoru Technicznego, normach branżowych itp.

2. Zestawienie podstawowych wzorów wytrzymałościowych

2.1. Rozciąganie i ściskanie

W przypadku rozciągania obliczenia wytrzymałościowe ze względu na naprężenia dopuszczalne sprowadzają się do warunku

$$\sigma = \frac{P}{F_{nt}} \leq k_r \quad (2.1)$$

gdzie: P – siła rozciągająca, F_{nt} – pole przekroju poprzecznego netto, tj. po odliczeniu otworów na nity, śruby itp., k_r – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie określone wzorem (1.2).

Dla wszystkich przypadków rozciągania, jak również dla tych przypadków ściskania, gdy nie zachodzi jeszcze wyboczenie, słuszne są elementarne wzory na wartość odkształceń i naprężeń.

Wydłużenie λ pręta pryzmatycznego o długości l i o polu przekroju poprzecznego F , rozciąganego siłą osiową P (prawo Hooke'a), wynosi

$$\lambda = \frac{Pl}{EF} \quad (2.2)$$

gdzie E – moduł sprężystości przy rozciąganiu (moduł Younga, por. tabl. 19.1 i 19.2).

Wydłużenie względne (jednostkowe) w jednokierunkowym stanie naprężenia wynosi

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{P}{EF} = \frac{\sigma}{E} \quad (2.3)$$

Wydłużenie względne w dwukierunkowym (płaskim) stanie naprężenia

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)\end{aligned}\quad (2.4)$$

gdzie ν – liczba Poissona (wartości ν dla różnych materiałów podano w tabl. 19.1 i 19.2).

Wydłużenia względne w trójwymiarowym (przestrzennym) stanie naprężenia (tzw. uogólnione prawo Hooke'a)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (2.5)$$

przy czym osie x, y, z tworzą wzajemnie prostopadły układ współrzędnych, a $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ są naprężeniami głównymi, działającymi wzdłuż tych osi.

Wyznaczanie naprężeń głównych i płaszczyzn głównych w płaskim stanie naprężenia przeprowadza się za pomocą następujących wzorów

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}\quad (2.6)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}\quad (2.7)$$

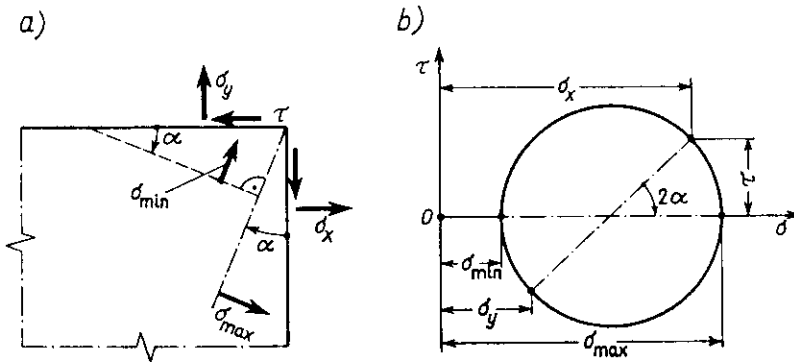
przy czym σ_x, σ_y i τ oznaczają naprężenia na dwóch dowolnych wzajemnie prostopadłych przekrojach (rys. 2.1a).

Koło Mohra dla stanu naprężenia podanego na rys. 2.1a przedstawiono na rys. 2.1b.

Wydłużenie pręta o długości l spowodowane przyrostem temperatury o Δt K [przyrost temperatury mierzony w stopniach Kelvina lub Celsjusza, oznaczany dawniej $\Delta t^\circ\text{C}$, zgodnie z układem SI należy oznaczać Δt K (kelwinów)] wynosi

$$\lambda = \Delta t \alpha l\quad (2.8)$$

gdzie α – współczynnik rozszerzalności liniowej (wartości α dla różnych materiałów podano w tabl. 19.1 i 19.2).



Rys. 2.1

Energia sprężysta w pręcie rozciągany siłą P

$$V = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{EF \lambda^2}{2l} \quad (2.9)$$

Energia sprężysta w kostce sześcienniej o boku 1 cm, poddanej działaniu naprężeń głównych σ_x , σ_y , σ_z , wynosi

$$V_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) \quad (2.10)$$

po podstawieniu zaś wzorów (2.5)

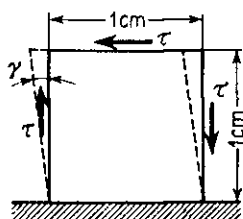
$$V_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \quad (2.11)$$

2.2. Ścinanie

2.2.1. Ścinanie czyste

Ścinanie czyste realizuje się w przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdy jedno z naprężeń głównych jest rozciągające, drugie zaś takie samo co do wartości liczbowej, lecz ściskające. W przekrojach nachylonych pod kątem 45° do kierunków naprężeń głównych istnieje wówczas czyste ścinanie z rozkładem naprężeń τ podanym na rys. 2.2. Prawo Hooke'a przy ścinaniu [analogiczne do wzoru (2.3)] ma postać

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (2.12)$$



Rys. 2.2

gdzie: γ – kąt odkształcenia postaciowego (rys. 2.2), G – moduł sprężystości postaciowej Kirchhoffa (wartości modułu G dla różnych materiałów podano w tabl. 19.1 i 19.2), τ – naprężenie tnące (styczne).

Zależność między modułem sprężystości postaciowej G i modułem Younga E jest ujęta wzorem

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.13)$$

Energia sprężysta w kostce sześciiennej o boku 1 cm, poddanej czystemu ścinaniu naprężeniami τ , wynosi (według rys. 2.2)

$$V_1 = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (2.14)$$

2.2.2. Ścinanie technologiczne

Średnia wartość naprężeń tnących przy ścinaniu siłą T elementu o polu F przekroju poprzecznego

$$\tau_{sr} = \frac{T}{F} \quad (2.15)$$

W przypadku gdy znana jest wartość naprężeń dopuszczalnych na ścinanie k_t , wyznaczanych z próby technologicznej na ścinanie, warunek wytrzymałościowy sprowadza się do obliczeń na dopuszczalne naprężenia według wzoru

$$\tau_{sr} = \frac{T}{F} \leq k_t \quad (2.15a)$$

Ze wzoru (2.15a) korzysta się w obliczeniach szacunkowych (wstępnych) nitów, sworzni, czopów, wałów itp. Rzeczywisty rozkład naprężeń tnących w elemencie o przekroju poprzecznym w kształcie wąskiego prostokąta, ścinanym siłą poprzeczną T , wyraża się wzorem (por. [18], str. 191)

$$\tau = \frac{TS_y^{\gamma_{max}}}{b_y J_z} \quad (2.16)$$

gdzie: $S_y^{y_{\max}}$ – moment statyczny względem osi obojętnej tej części przekroju poprzecznego, która jest zawarta między współrzędnymi y oraz $y_{\max}$, odcinającymi od osi obojętnej pokrywającej się z osią z ; b_y – szerokość przekroju poprzecznego na poziomie określonej współrzędnej y ; J_z – moment bezwładności całego przekroju poprzecznego względem osi obojętnej pokrywającej się z osią z

$$J_z \equiv J = \int_F y^2 dF \quad (2.17)$$

Wzory na momenty bezwładności J dla kilku figur podano w tabl. 1.2. Naprężenia tnące określone wzorem (2.16) osiągają największą wartość w punktach przekroju położonych na osi obojętnej z . Dla przekroju prostokątnego

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{2F} = \frac{3}{2} \tau_{sr} \quad (2.18)$$

dla przekroju kołowego

$$\tau_{\max} = \frac{4T}{3F} = \frac{4}{3} \tau_{sr} \quad (2.18a)$$

Jeżeli nie jest znana wartość k_t otrzymana z prób technologicznych, to można przyjąć $k_t = 0,6k_r$ (por. p. 2.6) i warunek wytrzymałościowy wyrazi się wzorem

$$\tau_{\max} \leq k_t = 0,6k_r \quad (2.19)$$

Energia sprężysta w przecie o polu przekroju F , ścinanym siłą T_x , wynosi

$$V = \int_0^l \frac{\alpha T_x^2 dx}{2GF} \quad (2.20)$$

gdzie współczynnik α wyraża się wzorem

$$\alpha = \frac{F}{J_z^2} \int_F \left(\frac{S_y^{y_{\max}}}{b_y} \right)^2 dF \quad (2.21)$$

Współczynnik ten dla przekroju prostokątnego wynosi $\alpha = 1,2$, a dla pełnego przekroju kołowego $\alpha = \frac{32}{27}$.

2.3. Skręcanie prętów okrągłych

2.3.1. Skręcanie prętów o przekroju kołowym

Maksymalne naprężenia tnące w pręcie o przekroju kołowym skręcanym momentem M_s nie mogą przekraczać naprężeń dopuszczalnych na skręcanie k_s

$$\tau = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s \quad (2.22)$$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie W_0 jest równy ilorazowi biegunowego momentu bezwładności J_0 względem środka przekroju przez odległość najdalszego włókna $\rho_{\max}$ od tego środka

$$W_0 = \frac{J_0}{\rho_{\max}} \quad (2.23)$$

przy czym moment bezwładności biegunowy przekroju wyraża się wzorem

$$J_0 = \int_F \rho^2 dF \quad (2.24)$$

Dla przekroju kołowego (dla pełnego wału okrągłego)

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \quad (2.25)$$

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2} \quad (2.26)$$

Dla przekroju rurowego (wał wydrążony)

$$J_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}$$

$$W_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R}$$

Naprężenie dopuszczalne na skręcanie dla materiałów plastycznych przyjmuje się $k_s = 0,6 k_r$.

Kąt skręcenia pręta o długości l

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_0} \quad (2.27)$$

Dla wałów pędniowych kąt skręcenia odcinka wału o długości 1 m nie może przekraczać

$$\varphi_{\text{dop}} = (1/4)^{\circ}/\text{m} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Obliczenia ze względu na dopuszczalny kąt skręcenia sprowadzają się do warunku

$$\varphi = \frac{M_s \cdot 1}{GJ_0 \cdot 10^6} \leq \frac{1}{4} \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (2.28)$$

gdzie moment skręcający M_s należy podstawić w niutonometrach, moduł sprężystości postaciowej G – w megapaskalach (MPa), przy czym

$$1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Gdy dana jest moc N przenoszona przez wał skręcany przy liczbie obrotów n obr/min, moment skręcający M_s oblicza się ze wzoru:

a) w układzie SI, gdy moc N jest podana w kilowatach (kW)

$$M_s = 9549,3 \frac{N}{n} \approx 9550 \frac{N}{n} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (2.29)$$

b) w układzie technicznym (obecnie nielegalnym, lecz dawniej powszechnie stosowanym), gdy moc N jest podana w koniach mechanicznych ($1 \text{ KM} = 75 \text{ kG} \cdot \text{m/s} \approx 735,499 \text{ W}$)

$$M_s = 71620 \frac{N}{n} \text{ kG} \cdot \text{cm} \quad (2.29a)$$

Energia sprężysta pręta o długości l , skręcanego momentem M_s , wyraża się wzorem

$$V = \int_0^l \frac{M_s^2 dx}{2GJ_0} = \frac{M_s^2 l}{2GJ_0} \quad (2.30)$$

2.3.2. Obliczanie sprężyn śrubowych

Dla sprężyn śrubowych (walcowych) wykonanych z drutu okrągłego o średnicy d , ściskanych lub rozciąganych siłą P , warunek wytrzymałościowy wyraża się wzorem

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq k_s \quad (2.31)$$

wydłużenie zaś sprężyny mającej n zwojów

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \quad (2.32)$$

gdzie D – średnica walca zawierającego środki ciężkości przekrojów poprzecznych drutu tworzącego sprężynę (por. rys. 3.12).

2.4. Zginanie

2.4.1. Zginanie płaskie

Zginanie płaskie zachodzi wówczas, gdy para sił o momencie M_g wywołująca zginanie działa w płaszczyźnie zawierającej oś belki oraz jedną z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Druga główna oś bezwładności przekroju pokrywa się wówczas z osią obojętną przy zginaniu.

Maksymalne naprężenia normalne powstają we włóknach położonych w największej odległości od osi obojętnej i muszą spełniać warunek

$$\sigma = \frac{M_g}{W} \leq k_g \quad (2.33)$$

przy czym k_g jest naprężeniem dopuszczalnym na zginanie – dla materiałów plastycznych $k_g = k_r$ (dla żeliwa – patrz uwagi do tabl. 19.11); W – wskaźnikiem wytrzymałości przekroju na zginanie, równym ilorazowi momentu bezwładności przekroju J względem osi obojętnej [wzór (2.17)] przez odległość najdalszego włókna $y_{\max}$

$$W = \frac{J}{y_{\max}}$$

Wzory na momenty bezwładności przekroju względem osi obojętnej oraz wskaźniki wytrzymałości przekroju na zginanie dla niektórych figur podano w tabl. 1.2.

Gdy dane są momenty bezwładności przekroju względem osi y i z , tzn. J_y, J_z , oraz moment odśrodkowy $J_{yz} = \int_F dF \cdot yz$, wówczas kąt, jaki tworzą z osiami y i z

osie główne przekroju, jest określony wzorem

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \quad (2.34)$$

a momenty bezwładności przekroju względem tych osi głównych

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} \quad (2.35)$$

Promień krzywizny belki zginanej momentem M_g wyraża się wzorem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EJ} \quad (2.36)$$

Energia sprężysta w belce zginanej

$$V = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} \quad (2.37)$$

Jeżeli moment M_x jest stały na całej długości l belki, to

$$V = \frac{M_g^2 l}{2EJ}$$

2.4.2. Zginanie ukośne

Zginanie ukośne występuje wówczas, gdy płaszczyzna działania momentu gnącego nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś zginanego pręta i jedną z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Oś obojętna przy zginaniu ukośnym nie jest prostopadła do płaszczyzny działania momentu gnącego, jak to zachodzi w przypadku zginania płaskiego. Jeżeli płaszczyzna działania momentu gnącego tworzy z jedną z płaszczyzn głównych, np. płaszczyzną xy , gdzie oś x pokrywa się z osią pręta, ostry kąt α , to oś obojętna tworzy z tą płaszczyzną ostry kąt β_0 , określony zależnością (por. [18], str. 161)

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_y}{J_z} \quad (2.38)$$

2.5. Obliczenia na docisk powierzchniowy

2.5.1. Docisk powierzchniowy liczony na rzut powierzchni styku

W obliczeniach śrub, nitów, sworzni itp. elementów walcowych stosowanych w konstrukcjach połączeń docisk powierzchniowy liczy się na tzw. *rzut powierzchni półwalcowej styku*

$$\sigma_d = \frac{P}{F} = \frac{P}{db} \leq k_d \quad (2.39)$$

gdzie: d – średnica elementu łączącego (śruby, nitu, sworznia); b – najmniejsza grubość elementu łączonego, działającego na powierzchnię półwalcową $d \times b$ siłą P ; k_d – naprężenie dopuszczalne na docisk powierzchniowy liczony na rzut (wartości k_d dla kilku materiałów podano w tabl. 19.3).

W podobny sposób oblicza się dociski w czopach wałów obracających się w łożyskach ślizgowych, przy czym dopuszczalny nacisk liczony na rzut jest wówczas wielokrotnie mniejszy od wartości k_d podanych w tabl. 19.3 i przy współpracy np. czopa ze stali St3 ze stopem łożyskowym o osnowie cynowej wynosi 5 MPa. Powierzchnię docisku oblicza się jako iloczyn średnicy czopa d i długości l panewki łożyska ([12], str. 634).

2.5.2. Naprężenia dociskowe według wzorów Hertza

Rozkład naprężeń występujących w miejscach styku dwóch gładkich, jednorodnych ciał dociskanych do siebie siłą P ustalił H. Hertz na podstawie wzorów wyprowadzonych zgodnie z zasadami teorii sprężystości (Journ. Math., tom 92, 1881 r.; por. [33], [9], [18]). Naprężenia te osiągają największe wartości w środku powierzchni styku, oznaczane są σ_{dH} i noszą nazwę *maksymalnych naprężeń dociskowych (stykowych, kontaktowych)*, które oblicza się według wzorów Hertza.

Wartości liczbowe naprężeń σ_{dH} dla kilku przypadków częściej spotykanych w praktyce podano w tabl. 2.1, przy czym literą ψ oznaczono wyrażenie

$$\psi = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

gdzie ν_1 i E_1 oznaczają liczbę Poissona i moduł Younga ciała pierwszego, ν_2 i E_2 zaś drugiego z ciał dociskanych, przy czym kolejność ciał jest taka, by $r_1 \leq |r_2|$.

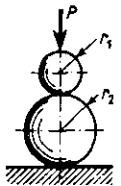
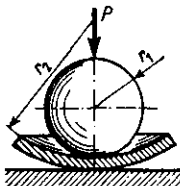
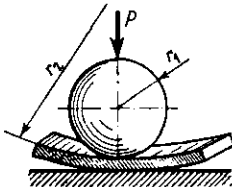
Wartości liczbowe współczynnika η należy wyznaczyć z tabl. 2.2 w zależności od stosunku b/a , przy czym współczynniki b i a oblicza się ze wzorów podanych w kolumnach 4 i 5 tabl. 2.1.

W kolumnie 7 tabl. 2.1 podano wzory dla przypadków, gdy liczby Poissona dla obu stykających się ciał wynoszą $\nu = 0,3$, moduły Younga zaś obu ciał są jednakowe: $E_1 = E_2 = E$.

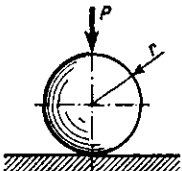
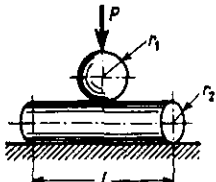
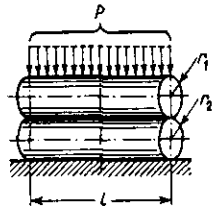
Wartości naprężeń dociskowych σ_{dH} obliczone ze wzorów podanych w tabl. 2.1 nie mogą przekroczyć tzw. *naprężeń dopuszczalnych na docisk według Hertza* k_{dH}

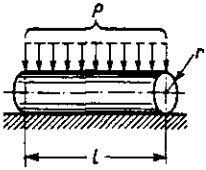
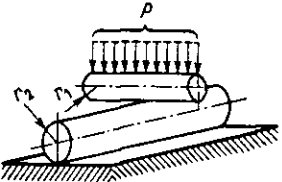
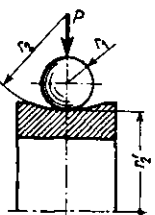
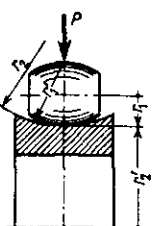
$$\sigma_{dH} \leq k_{dH} \quad (2.40)$$

Tablica 2.1. Maksymalne naprężenia dociskowe σ_{dH} według wzorów Hertza

Lp.	Schematy i wymiary ciał dociskanych		Wartości współczynników do obliczania η (z tabl. 2.2)		Maksymalne naprężenia dociskowe σ_{dH}	
			a	b	$\psi = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$	dla jednakowych materiałów obu ciał, dla $\nu = 0,3$ oraz $E_1 = E_2 = E$, tj. $\psi = 1,82/E$
1	2	3	4	5	6	7
1		Dwie kule o promieniach r_1 i r_2	—	—	$0,5784 \sqrt[3]{\left(\frac{r_1 + r_2}{\psi r_1 r_2}\right)^2 P}$	$0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}$
2		Kula o promieniu r_1 w kuli o promieniu r_2	—	—	$0,5784 \sqrt[3]{\left(\frac{r_2 - r_1}{\psi r_1 r_2}\right)^2 P}$	$0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)^2}$
3		Kula o promieniu r_1 w walcu o promieniu r_2	$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2r_2}$	$\frac{1}{2r_2}$	$0,365 \eta \sqrt[3]{\left(\frac{2r_2 - r_1}{\psi r_1 r_2}\right)^2 P}$	$0,2448 \eta \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{2r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)^2}$

Tablica 2.1 (cd.)

Lp.	Schematy i wymiary ciał dociskanych	Wartości współczynników do obliczania η (z tabl. 2.2)		Maksymalne naprężenia dociskowe σ_{dH}	
		a	b	$\psi = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$	dla jednakowych materiałów obu ciał, dla $\nu = 0,3$ oraz $E_1 = E_2 = E$, tj. $\psi = 1,82/E$
4		—		$0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{(\psi r)^2}}$	$0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}$
5		$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{2r_2}$	$\frac{1}{2r_2}$	$0,365 \eta^2 \sqrt[3]{\left(\frac{r_1 + 2r_2}{\psi r_1 r_2}\right)^2 P}$	$0,2448 \eta^2 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{r_1 + 2r_2}{r_1 r_2}\right)^2}$
6		—		$0,564 \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{\psi r_1 r_2} \frac{P}{l}}$	$0,418 \sqrt{\frac{PE}{l} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}$

7		Walec o promieniu r na płaszczyźnie	—	—	$0,564 \sqrt{\frac{P}{\psi r l}}$	$0,418 \sqrt{\frac{PE}{lr}}$
8		Dwa walce o osiach wzajemnie prostopadłych i promieniach r_1 i r_2 gdzie $r_2 > r_1$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$	$0,365 \eta^3 \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{\psi r_1 r_2} \right)^2 P}$	$0,2448 \eta^3 \sqrt{PE^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right)^2}$
9		Kula o promieniu r_1 na bieżni łożyska o promieniach r_2 i r'_2	$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2r_2} + \frac{1}{2r'_2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right)$	$0,365 \eta^3 \sqrt{\left[\frac{1}{\psi} \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right) \right]^2 P}$	$0,2448 \eta^3 \sqrt{PE^2 \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right)^2}$
10		Baryłka o promieniach r_1 i r'_1 na bieżni łożyska o promieniach r_2 i r'_2	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} \right) - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} \right) + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2}$	$0,365 \eta \times \sqrt{\left[\frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right) \right]^2 P}$	$0,2448 \eta \times \sqrt{PE^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right)^2}$

U w a g a: Wartości współczynnika η należy odczytać z tabl. 2.2 dla odpowiednich wartości a i b obliczonych według wzorów podanych w kolumnach 4 i 5.

Tablica 2.2. Wartości liczbowe współczynników η do wzorów Hertza (por. kolumny 6 i 7 tabl. 2.1)

b/a	η	b/a	η	b/a	η
0,00	1,000	0,66	0,883	0,86	0,749
0,05	0,999	0,68	0,873	0,87	0,738
0,10	0,997	0,70	0,863	0,88	0,727
0,15	0,995	0,72	0,852	0,89	0,715
0,20	0,991	0,74	0,842	0,90	0,702
0,25	0,986	0,75	0,836	0,91	0,687
0,30	0,980	0,76	0,830	0,92	0,671
0,35	0,972	0,77	0,823	0,93	0,653
0,40	0,963	0,78	0,816	0,94	0,633
0,45	0,952	0,79	0,808	0,95	0,612
0,50	0,939	0,80	0,800	0,96	0,587
0,55	0,924	0,81	0,792	0,97	0,555
0,58	0,916	0,82	0,784	0,98	0,517
0,60	0,908	0,83	0,776	0,99	0,467
0,62	0,900	0,84	0,768	0,995	0,390
0,64	0,892	0,85	0,759	0,997	0,350

Uwaga: Wartości b oraz a należy obliczać według wzorów podanych w kolumnach 4 i 5 tabl. 2.1.

Wartości liczbowe naprężeń dopuszczalnych k_{dH} oraz f_{dH} (przy metodzie stanów granicznych) dla niektórych stali i staliw można odczytać z tabl. 19.3. Jak wynika z tabl. 19.3, naprężenia k_{dH} mają wartości dość znacznie przekraczające granicę plastyczności na ściskanie. Wynika to z faktu, że w obszarach, gdzie występują największe naprężenia dociskowe σ_{dH} , naprężenia główne są zawsze ściskające (trójkierunkowe ściskanie), co zgodnie z hipotezami wytrzymałościowymi dotyczącymi materiałów plastycznych pozwala na dopuszczenie naprężeń ściskających większych od granicy plastyczności (por. [18], str. 179 i nast.).

2.6. Naprężenia zredukowane według aktualnych hipotez wytrzymałościowych

2.6.1. Obliczanie naprężeń zredukowanych dla materiałów sprężysto-kruchych

W przypadku materiałów sprężysto-kruchych (jak np. żeliwo, nie wykazujące wydłużeń odlewy stopów lekkich, beton itp.) naprężenia zredukowane należy obliczać według hipotezy największych wydłużeń (Saint-Venanta). Naprężenie

zredukowane dla trójkierunkowego stanu naprężeń wyrażonego przez naprężenia główne $\sigma_x \geq \sigma_y \geq \sigma_z$ wynosi

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (2.41)$$

gdzie ν – liczba Poissona.

W szczególnym przypadku płaskiego stanu napięcia, gdy działają tylko naprężenia normalne σ i naprężenia tnące τ , naprężenie zredukowane według hipotezy największych wydłużeń wynosi

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.42)$$

Warunek wytrzymałościowy wyraża się zależnością

$$\sigma_{\text{red}} \leq k_r \quad (2.43)$$

Dla materiałów o liczbie Poissona $\nu = 0,3$ wzór (2.42) przybiera postać

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.44)$$

w przypadku zaś czystego płaskiego ścinania

$$\sigma_{\text{red}} = 1,3\tau \quad (2.45)$$

2.6.2. Obliczanie naprężeń zredukowanych w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych

W przypadku materiałów mających wyraźną (Q_r) lub umowną (Q_{02}) granicę plastyczności najbardziej odpowiadają rzeczywistości obliczenia oparte na hipotezie Hubera (energii odkształcenia postaciowego) lub Coulomba (największych naprężeń tnących). W ogólnym przypadku przestrzennego stanu napięcia, gdy dane są naprężenia główne $\sigma_x \geq \sigma_y \geq \sigma_z$, naprężenia zredukowane wyrażają się wzorami:

a) według hipotezy Hubera

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]} \quad (2.46)$$

b) według hipotezy Coulomba

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_x - \sigma_z \quad (2.47)$$

Warunek wytrzymałościowy wyrazi się zależnością (2.43)

$$\sigma_{\text{red}} \leq k_r$$

W przypadku płaskiego stanu napięcia, gdy występują tylko naprężenia normalne σ i naprężenia tnące τ , naprężenia zredukowane wynoszą:

a) według hipotezy Hubera

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (2.48)$$

b) według hipotezy Coulomba

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.49)$$

Wzory powyższe znajdują zastosowanie w obliczeniach wałów okrągłych poddanych zginaniu momentem gnącym M_g oraz skręcaniu momentem skręcającym M_s . Naprężenia zredukowane wyrażą się wówczas wzorami:

a) według hipotezy Hubera

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{\sqrt{M_g^2 + 0,75M_s^2}}{W} \quad (2.50)$$

b) według hipotezy Coulomba

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{\sqrt{M_g^2 + M_s^2}}{W} \quad (2.51)$$

gdzie W jest wskaźnikiem wytrzymałości wału okrągłego na zginanie

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$$

Ponieważ różnice wynikające ze stosowania hipotezy Hubera lub Coulomba są niewielkie, przyjęta jest dowolność w stosowaniu jednej z tych hipotez.

W przypadku czystego ścinania naprężenia zredukowane wynoszą:

a) według hipotezy Coulomba

$$\sigma_{\text{red}} = 2\tau \quad (2.52)$$

b) według hipotezy Hubera

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{3}\tau = 1,73\tau \quad (2.53)$$

Warunek wytrzymałościowy w przypadku czystego ścinania można również wyrazić przez naprężenia dopuszczalne na ścinanie k_t . Tak na przykład zgodnie z hipotezą Hubera ze wzorów (2.53) i (2.43) wynika związek

$$\sigma_{\text{red}} = 1,73\tau \leq k_t,$$

stąd

$$\tau \leq \frac{k_r}{1,73} = 0,578k_r = k_t$$

zatem napężenie dopuszczalne na ścinanie wynosi

$$k_t = 0,578k_r \approx 0,6k_r \quad (2.54)$$

Podobnie, według hipotezy największych wydłużeń, dla materiałów sprężysto-kruchych otrzymuje się [wzór (2.45)]

$$k_t = \frac{k_r}{1,3} = 0,77k_r \quad (2.55)$$

Można również obliczać napężenia zredukowane według wzoru wynikającego z hipotezy wyężeniowej Burzyńskiego

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{R_r}{R_t} \right) \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]} + \left(1 + \frac{R_r}{R_c} \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (2.56)$$

przy czym powyższą zależność można stosować zarówno dla materiałów sprężysto-plastycznych, jak i sprężysto-kruchych.

3. Stateczność prętów ściskanych lub zginanych oraz sprężyn śrubowych

3.1. Wyboczenie pryzmatycznych prętów ściskanych

3.1.1. Zestawienie wzorów teoretycznych

W przypadku prętów ściskanych może nastąpić utrata stateczności pręta przy naprężeniach σ znacznie mniejszych od granicy sprężystości. Krytyczną wartość siły ściskającej P_{kr} , przy której pręt przegubowy o długości l (rys. 3.1) ulega wyboczeniu, określa wzór (por. [18], str. 243)

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l_w^2} \quad (3.1)$$

naprężenie krytyczne – wzór

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \frac{\pi^2 E}{s^2} \quad (3.2)$$

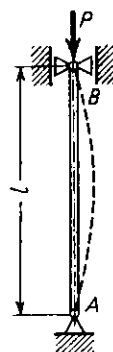
gdzie: $J_{\min}$ – minimalny moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej przy zginaniu, l_w – długość wyboczeniowa pręta (por. tabl. 3.1), s – smukłość pręta, wyrażona wzorem

$$s = \frac{l_w}{i_{\min}} \quad (3.3)$$

w którym $i_{\min}$ jest minimalnym promieniem bezwładności przekroju

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} \quad (3.4)$$

Przy innych sposobach zamocowania końców pręta ściskanego długość wyboczeniową l_w pręta, występującą we wzorach (3.1) i (3.3), można wyznaczyć z zależności



Rys. 3.1

$$l_w = \eta l \quad (3.5)$$

gdzie: l – długość rzeczywista obliczanego pręta, η – współczynnik wybożeniowy długości pręta.

Wartości liczbowe współczynników η dla częściej spotykanych warunków brzegowych prętów podano w tabl. 3.1.

Wzory (3.1) oraz (3.2) są słuszne wówczas, gdy naprężenia krytyczne są mniejsze od granicy proporcjonalności. Wzory te można więc stosować wówczas, gdy smukłość pręta jest większa od smukłości granicznej s_{gr} , obliczonej ze wzoru

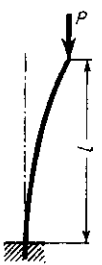
$$s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} \quad (3.6)$$

gdzie R_H – granica proporcjonalności, tj. stosowalności prawa Hooke'a.

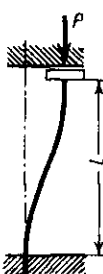
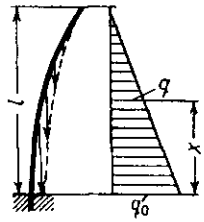
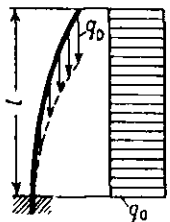
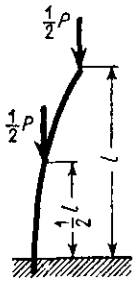
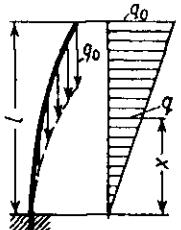
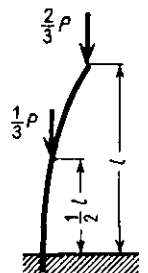
Dla stali konstrukcyjnej St3, mającej $R_H = 200$ MPa i moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, smukłość graniczna według wzoru (3.6) wynosi $s_{gr} = 100$ (por. [18], str. 244). Dla smukłości większych od s_{gr} należy więc stosować wzory (3.1) i (3.2), dla smukłości zaś mniejszych – wzór Tetmajera

$$\sigma_{kr} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} s \quad (3.7)$$

Tablica 3.1. Wartości liczbowe współczynnika wybożeniowego długości pręta [do wzoru (3.5)]

Lp.	Schemat obciążenia	Warunki brzegowe	η	Lp.	Schemat obciążenia	Warunki brzegowe	η
1		Przeguby na obu końcach	1	3		Oba końce utwierdzone	0,5
2		Jeden koniec utwierdzony, drugi swobodny	2	4		Jeden koniec utwierdzony, drugi przegubowy	0,7

Tablica 3.1 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Warunki brzegowe	η	Lp.	Schemat obciążenia	Warunki brzegowe	η
5		Jeden koniec utwierdzony, drugi może się przesuwać bez obrotu	1	8		Dolny koniec utwierdzony, obciążenie q zmienne $q = q_0 \frac{l-x}{l}$	0,782
6		Dolny koniec utwierdzony, obciążenie ciągłe q_0 jednakowe na całej długości pręta	1,12	9		Dolny koniec utwierdzony, dwie siły ściskające: każda równa $\frac{1}{2}P$	1,545
7		Dolny koniec utwierdzony, obciążenie q zmienne $q = q_0 \frac{x}{l}$	1,388	10		Dolny koniec utwierdzony, dwie siły jak na rysunku	1,708

Dla stali St3, dla której zgodnie z tabl. 19.3 granica plastyczności $R_e = 240$ MPa, wzór Tetmajera przybiera postać

$$\sigma_{kr} = 240 - 0,395s \quad (3.7a)$$

Obliczenia wytrzymałościowe uwzględniające stateczność (wyboczenie) prętów ściskanych sprowadzają się zatem do wzoru

$$\sigma_c = \frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_{kr}}{x} \quad (3.8)$$

gdzie x – współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie, będący zazwyczaj pewną funkcją smukłości s pręta.

3.1.2. Praktyczne metody obliczania prętów ściskanych

Obliczenia prętów ściskanych przeprowadzane za pomocą wzorów (3.1), (3.2) lub (3.7) są niedogodne, gdyż inaczej oblicza się pręty krótkie, tj. mające małą smukłość, a inaczej pręty długie, przy czym współczynnik bezpieczeństwa χ we wzorze (3.8) wymaga dodatkowego ustalenia. Z tych względów obliczenia na wyboczenie przeprowadza się przy zastosowaniu wzorów podanych w odpowiednich normach [38]. Wzory te – w obecnej postaci – uwzględniają między innymi różnorodne sposoby współpracy elementów ściskanych z całością konstrukcji i dlatego są mało przejrzyste.

Tablica 3.2. Wartości współczynników wyboczeniowych β dla stali i staliwa

$s = \frac{l_w}{i_{\min}}$	Dla stali o granicy plastyczności R_e MPa		
	$R_e < 260$	$260 \leq R_e < 300$	$300 \leq R_e \leq 380$
0	1	1	1
10	0,980	0,980	0,980
20	0,950	0,950	0,950
30	0,920	0,920	0,920
40	0,890	0,885	0,880
50	0,850	0,840	0,830
55	0,825	0,813	0,800
60	0,800	0,785	0,770
65	0,770	0,750	0,730
70	0,740	0,720	0,700
75	0,710	0,683	0,655
80	0,680	0,645	0,610
85	0,650	0,608	0,565
90	0,620	0,570	0,520
95	0,585	0,533	0,480
100	0,550	0,495	0,440
105	0,515	0,460	0,405
110	0,480	0,425	0,370
115	0,450	0,395	0,340
120	0,420	0,365	0,310
125	0,395	0,340	0,285
130	0,370	0,315	0,260
135	0,345	0,295	0,245
140	0,320	0,275	0,230
145	0,300	0,258	0,215
150	0,280	0,240	0,200
155	0,265	0,237	0,190

Tablica 3.2 (cd.)

$s = \frac{l_w}{i_{min}}$	Dla stali o granicy plastyczności R_e MPa		
	$R_e < 260$	$260 \leq R_e < 300$	$300 \leq R_e \leq 380$
160	0,250	0,215	0,180
170	0,220	0,190	0,160
180	0,200	0,170	0,140
190	0,180	0,153	0,125
200	0,160	0,135	0,110
210	0,140	0,120	0,100
220	0,130	0,110	0,090
230	0,120	0,103	0,085
240	0,110	0,095	0,080
250	0,100	0,085	0,070

Tablica 3.3. Wartości współczynników wyboczeniowych β dla stopów aluminium, żeliwa i drewna

$s = \frac{l_w}{i_{min}}$	PA6 dural ⁽¹⁾	PA4 anticorodal ⁽¹⁾	PA2 hydronalium ⁽¹⁾	żeliwo	drewno
0	1	1	1	1	1
20	0,97	0,98	1	0,91	0,99
30	0,85	0,91	0,98	0,81	0,93
40	0,72	0,80	0,94	0,69	0,87
50	0,60	0,70	0,87	0,57	0,80
60	0,50	0,60	0,79	0,44	0,71
70	0,40	0,51	0,72	0,34	0,60
80	0,30	0,42	0,66	0,26	0,48
90	0,23	0,33	0,60	0,20	0,38
100	0,19	0,27	0,54	0,16	0,31
110	0,16	0,22	0,48		0,25
120	0,13	0,18	0,41		0,22
130	0,11	0,16	0,35		0,18
140	0,10	0,14	0,30		0,16
160	0,07	0,11	0,23		0,12
180	0,06	0,08	0,18		0,10
200	0,05	0,07	0,15		0,08
250	0,03	0,04	0,09		

⁽¹⁾ Dawna nazwa handlowa stopu.

W obliczeniach wstępnych można korzystać z prostego wzoru

$$\sigma = \frac{P}{\beta F_{br}} \leq k_c \quad (3.9)$$

gdzie: F_{br} – pole przekroju poprzecznego pręta brutto (tj. bez odliczania otworów na nity, śruby itp.), β – współczynnik wyboczeniowy, którego wartości należy odczytać z tabl. 3.2 dla stali i staliwa, z tabl. 3.3 zaś dla żeliwa, stopów aluminium i drewna.

3.2. Wyboczenie prętów dwugałęziowych i wielogałęziowych o przekroju stałym

Dla prętów o przekroju stałym, złożonych z dwu lub kilku prętów połączonych ze sobą przewiązkami (rys. 3.2) lub kratą (rys. 3.3), obliczenia na wyboczenie należy przeprowadzać zgodnie z normą [38]. Zasadniczym elementem obliczeń jest analiza tego, by nie nastąpiło wyboczenie pręta (słupa) o przekroju złożonym, traktowanego jako całość, jak również wyboczenie każdej gałęzi pręta na odcinkach między przewiązkami lub węzłami kraty.

Smukłość każdej gałęzi pręta należy obliczać jako iloraz długości gałęzi na odcinku między przewiązkami lub węzłami kraty przez promień bezwładności i przekroju względem osi, oznaczony na rys. 3.2 i 3.3 cyframi $1-1$.

Smukłość całego pręta należy obliczać ze wzoru

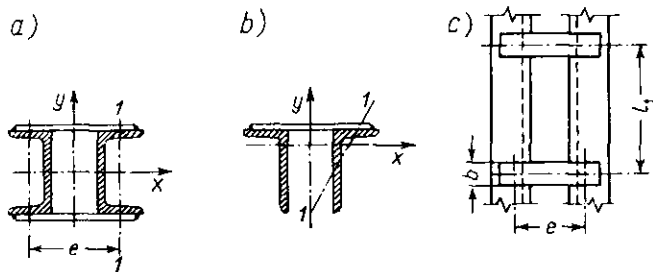
$$s'_y = s_y \gamma \quad (3.10)$$

gdzie s_y – smukłość całego pręta względem osi $y-y$ według rys. 3.2 i 3.3

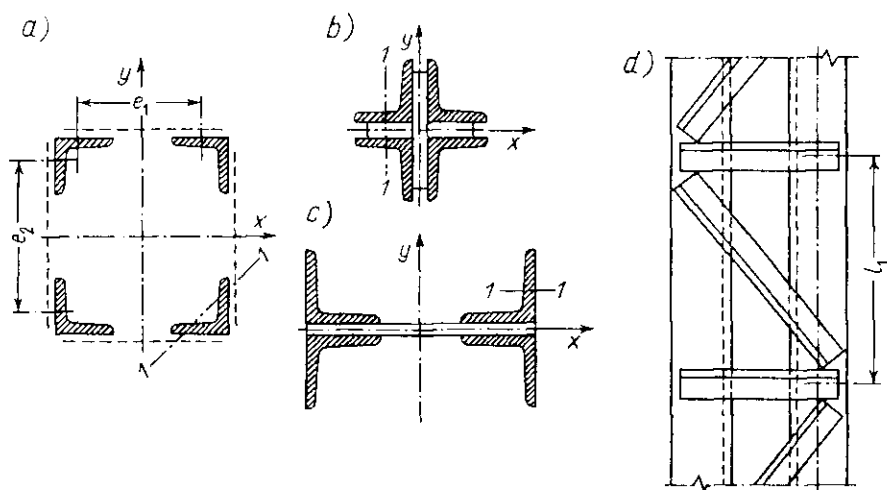
$$s_y = \frac{l_y}{i_y}$$

l_y – długość wyboczeniowa w kierunku prostopadłym do osi $y-y$ według rys. 3.2 i 3.3,

i_y – promień bezwładności całego przekroju (tj. wszystkich gałęzi) względem osi $y-y$.



Rys. 3.2



Rys. 3.3

Współczynnik γ wynosi:

a) dla gałęzi łączonych przewiązkami

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{s_1}{s_y} \right)^2} \quad (3.11)$$

b) dla gałęzi łączonych krata

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 F_{br} l_k^2}{m F_k l_1 e^2 s_y^2}} \quad (3.12)$$

gdzie: $s_1 = l_1/i_1$ – smukłość odcinka gałęzi względem osi $l-l$ według rys. 3.2 i 3.3, F_{br} – pole przekroju wszystkich gałęzi brutto, l_k – długość teoretyczna krzyżulca między przecięciami się jego osi z osiami gałęzi słupa, m – liczba płaszczyzn wiązań słupa przeciętych osią $y-y$, F_k – pole przekroju pojedynczego krzyżulca brutto, e – odstęp między osiami gałęzi słupa.

Szerokość b przewiązek przyspawanych (rys. 3.2) nie powinna być mniejsza niż 100 mm. Przewiązki należy liczyć na siłę poprzeczną określoną wzorem

$$T = 0,012 \frac{P}{\beta} \quad (3.13)$$

gdzie: P – siła osiowa ściskająca słup, β – współczynnik wybiegniowy wyznaczony z tabl. 3.2, odpowiadający całemu prętowi o przekroju złożonym.

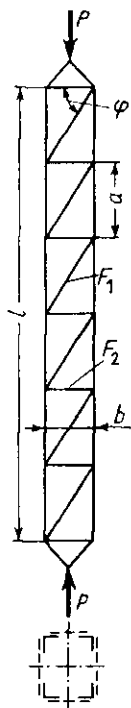
Dla słupa ukształtowanego jak na rys. 3.4 krytyczną wartość siły ściskającej P można obliczyć ze wzoru

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 J}{l^2} \left(\frac{1}{F_1 \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a F_2} \right)} \quad (3.14)$$

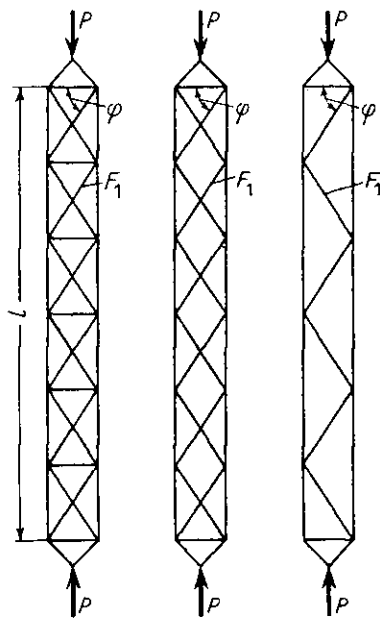
gdzie: F_1 – powierzchnia przekroju poprzecznego dwóch krzyżulców znajdujących się po obu stronach słupa, F_2 – powierzchnia przekroju poprzecznego dwóch przewiązek znajdujących się po obu stronach słupa, φ – kąt pochylenia krzyżulca do poziomu (rys. 3.4), J – moment bezwładności przekroju poprzecznego słupa.

Dla słupów przedstawionych na rys. 3.5 krytyczną wartość siły można obliczyć ze wzoru

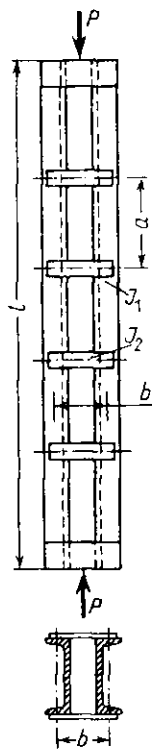
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 J}{l^2} \frac{1}{F_1 \sin \varphi \cos^2 \varphi}} \quad (3.15)$$



Rys. 3.4



Rys. 3.5



Rys. 3.6

Oznaczenia we wzorze (3.15) są takie same jak we wzorze (3.14).

Dla pręta złożonego z dwóch ceowników połączonych przewiązkami (rys. 3.6) można stosować wzór

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12 EJ_1} + \frac{a^2}{24 EJ_2} + \frac{na}{b F_1 G} \right)} \quad (3.16)$$

gdzie: J_1 – moment bezwładności przewiązki, J_2 – moment bezwładności jednej gałęzi słupa, F_1 – pole przekroju poprzecznego dwóch przewiązek, n – współczynnik (dla przewiązek o przekroju prostokątnym $n = 1, 2$), J – moment bezwładności (minimalny) przekroju (tj. obu ceowników).

3.3. Wyboczenie prętów o przekroju zmiennym

Dla prętów o przekroju poprzecznym zmiennym skokowo, przedstawionych na rys. 3.7, krytyczną wartość siły ściskającej można wyznaczyć ze wzoru

$$P_{kr} = n \frac{EJ_2}{l^2} \quad (3.17)$$

gdzie n wyznacza się z tabl. 3.4.

Tablica 3.4. Wartości współczynnika n we wzorze (3.17)

$\frac{J_2}{J_1} \backslash \frac{a}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0,15	0,27	0,60	2,26
0,1	1,47	2,40	4,50	8,59
0,2	2,80	4,22	6,69	9,33
0,4	5,09	6,68	8,51	9,67
0,6	6,98	8,19	9,24	9,78
0,8	8,55	9,18	9,63	9,84

Krytyczną wartość siły ściskającej pręt w sposób podany na rys. 3.7 można wyznaczyć również ze wzoru przybliżonego

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_2}{l^2} \frac{1}{\frac{a}{l} + \frac{l-a}{l} \frac{J_2}{J_1} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{J_2}{J_1} - 1 \right) \sin \frac{\pi a}{l}} \quad (3.18)$$

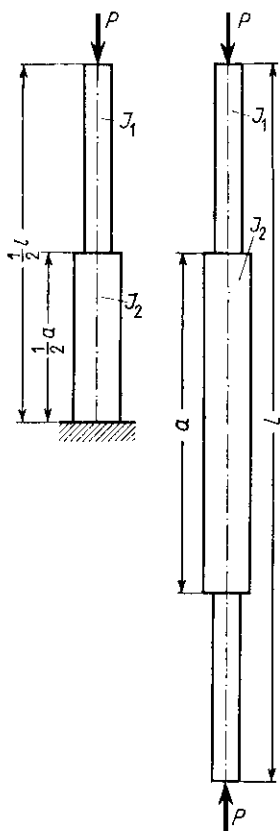
W przypadku prętów czterogłęziowych (rys. 3.8), w których moment bezwładności przekroju J_x określony współrzędną x spełnia warunek

$$J_x = J_1 \left(\frac{x}{a} \right)^2$$

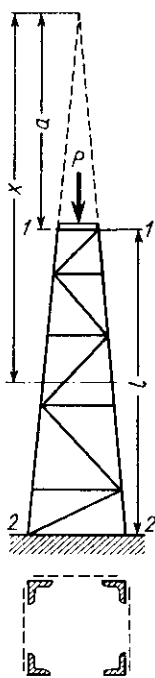
gdzie J_1 jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego w głowicy słupa, siłę krytyczną ściskającą słup określa zależność

$$P_{kr} = n \frac{EJ_2}{l^2} \quad (3.19)$$

w której: J_2 – moment bezwładności przekroju poprzecznego na dolnym końcu słupa, n – współczynnik, którego wartość w zależności od stosunku J_2/J_1 należy odczytać z tabl. 3.5.



Rys. 3.7



Rys. 3.8

Tablica 3.5. Wartości współczynników n we wzorze (3.19) oraz n_1 we wzorze (3.20)

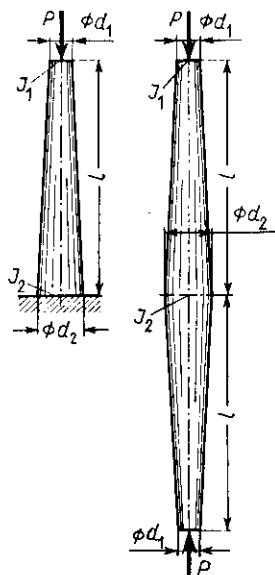
J_2/J_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
n	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023	2,128	2,223	2,311	2,392	$\pi^2/4$
n_1	—	1,202	1,505	1,710	1,870	2,002	2,116	2,217	2,308	2,391	$\pi^2/4$

Dla prętów w kształcie pełnego stożka przedstawionego na rys. 3.9 siłę krytyczną określa wzór

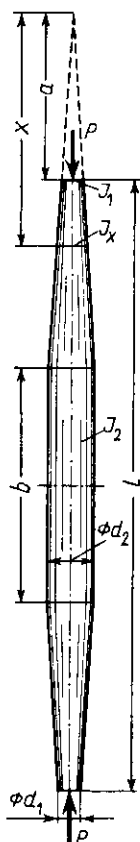
$$P_{kr} = n_1 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (3.20)$$

w którym wartość współczynnika n_1 należy odczytać z tabl. 3.5.

Dla prętów mających część cylindryczną oraz części stożkowe (rys. 3.10), dla których momenty bezwładności J_x przekroju określonego współrzędną x mierzoną od teoretycznego wierzchołka stożka wyrażone są wzorem



Rys. 3.9



Rys. 3.10

$$J_x = J_1 \left(\frac{x}{a} \right)^m \quad (3.21)$$

krytyczną wartość siły ściskającej określa wzór

$$P_{kr} = n_2 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (3.22)$$

gdzie wartość współczynnika n_2 należy odczytać z tabl. 3.6 dla odpowiedniego wykładnika potęgi m we wzorze (3.21) i stosunku momentów bezwładności przekroju cylindrycznego J_2 do przekrojów końcowych J_1 .

Tablica 3.6. Wartości współczynnika n_2 we wzorze (3.22)

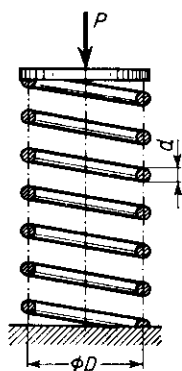
J_2/J_1	m wykładnik we wzorze (3.21)	b/l					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,1	1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	π^2
	2	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	
	3	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	
	4	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	
0,2	1	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82	π^2
	2	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	
	3	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	
	4	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	
0,4	1	7,87	8,59	9,19	9,70	9,84	π^2
	2	7,61	8,42	9,15	9,63		
	3	7,52	8,38	9,12	9,62		
	4	7,48	8,38	9,10	9,62		
0,6	1	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	π^2
	2	8,51	9,04	9,48	9,74		
	3	8,50	9,02	9,46	9,74		
	4	8,47	9,01	9,45	9,74		
0,8	1	9,27	9,54	9,69	9,83	9,86	π^2
	2	9,24	9,50		9,82		
	3	9,23	9,50		9,81		
	4	9,23	9,49		9,81		
1,0		π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

3.4. Wyboczenie sprężyn śrubowych

Utrata stateczności (wyboczenie) sprężyny śrubowej wykonanej z drutu o średnicy d i z materiału o liczbie Poissona $\nu = 0,3$ nie jest możliwa, jeżeli stosunek wysokości swobodnej H_0 do średnicy podziałowej zwojów D spełnia warunek

$$\frac{H_0}{D} < 2,62$$

Dla sprężyn o większej długości swobodnej, tj. gdy $H_0 > 2,62 D$, utrata stateczności zachodzi przy ugięciu $\lambda > 0,813 H_0$, gdy końcowe zwoje sprężyny ściskanej są podparte przegubowo ([22], t. 2, str. 71). W przypadku sprężyn ścis-



Rys. 3.11

kanych w sposób podany na rys. 3.11, dla stosunku modułu Younga E do modułu sprężystości postaciowej G wynoszącego $E/G = 2,6$ (jak dla stali sprężynowych), krytyczną wartość siły ściskającej określa wzór

$$P_{kr} = \frac{6,5 G J l_0}{\pi D^3 n} \left[1 - \sqrt{1 - 6,865 \left(\frac{D}{l_0} \right)^2} \right] \quad (3.23)$$

gdzie: G – moduł sprężystości postaciowej, J – moment bezwładności przekroju poprzecznego drutu okrągłego względem średnicy: $J = \pi d^4/64$, l_0 – długość początkowa sprężyny, D – średnica linii śrubowej sprężyny, n – liczba zwojów.

3.5. Zwichrzenie belek

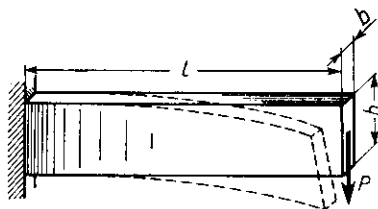
W przypadku zginania belek oprócz sprawdzenia warunków wytrzymałościowych ujętych wzorami na naprężenia normalne [wzór (2.33)] oraz na naprężenia styczne [wzór (2.16)] dla zginania z udziałem sił poprzecznych należy również rozpatrzyć ewentualność utraty stateczności polegającą na zwichrzeniu belki. W przypadku belki wspornikowej o przekroju w kształcie wąskiego prostokąta, obciążonej na końcu siłą P , zwichrzenie przedstawione na rys. 3.12 nastąpi wówczas, gdy siła P osiągnie wartość krytyczną ujętą wzorem ([35], str. 257)

$$P_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{BC} \quad (3.24)$$

We wzorze tym B jest sztywnością na zginanie w kierunku poprzecznym

$$B = \frac{hb^3}{12} E \quad (3.25)$$

C – sztywnością na skręcanie swobodne.



Rys. 3.12

Dla belki o przekroju prostokątnym sztywność na skręcanie swobodne można obliczyć ze wzoru

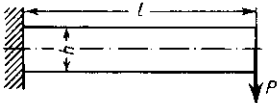
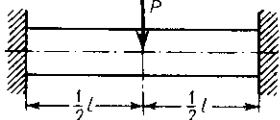
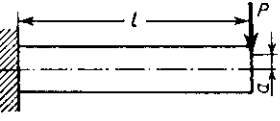
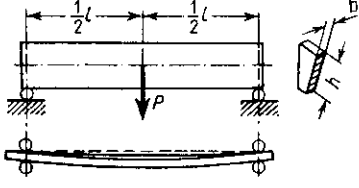
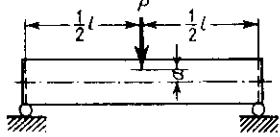
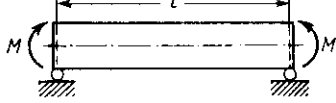
$$C = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,630 \frac{b}{h} \right) G \quad (3.26)$$

Wzory na siłę krytyczną dla innych przypadków podparcia i obciążenia belek o przekroju w kształcie wąskiego prostokąta podano w tabl. 3.7 ([13], [23]).

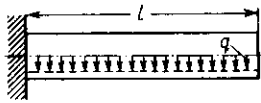
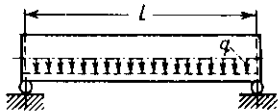
Zagadnienie stateczności płyt, tarcz, powłok, rur, zbiorników itp. omówiono w odpowiednich rozdziałach dotyczących obliczeń wytrzymałościowych tych elementów.

Tablica 3.7. Siła krytyczna powodująca zwichrzenie zginanych belek o przekroju w kształcie wąskiego prostokąta

Oznaczenia: $B = \frac{hb^3}{12} E$ [wzór (3.25)]; sztywność skręcania C według wzoru (3.26)

Lp.	Obciążenie i warunki podparcia belki		Obciążenie krytyczne
1		Belka wspornikowa (rys. 3.12)	$P_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{BC}$
2		Belka utwierdzona na końcach	$P_{kr} = \frac{26,6}{l^2} \sqrt{BC}$
3		Belka wspornikowa obciążona siłą P , przyłożoną w odległości a nad osią belki	$P_{kr} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{BC} \left(1 - \frac{a}{l} \sqrt{\frac{B}{C}} \right)$
4		Belka podparta na końcach, przy czym przekroje końcowe nie mają swobody obrotu względem osi belki	$P_{kr} = \frac{16,93}{l^2} \sqrt{BC}$
5		Jak wyżej, lecz siła P przyłożona w odległości a nad osią belki	$P_{kr} = \frac{16,93}{l^2} \sqrt{BC} \times \left(1 - 3,48 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{B}{C}} \right)$
6		Podparcie jak w poz. 4, belka zginana momentem M	$M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{BC}$
7		Belka zginana momentem M , końce belki utwierdzone przesuwnie	$M_{kr} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{BC}$

Tablica 3.7 (cd.)

Lp.	Obciążenie i warunki podparcia belki		Obciążenie krytyczne
8		Belka wspornikowa, obciążenie ciągłe q przyłożone w osi belki	$(ql)_{kr} = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{BC}$
9		Belka podparta jak w poz. 4, obciążenie ciągłe q przyłożone w osi belki	$(ql)_{kr} = \frac{28,3}{l^2} \sqrt{BC}$

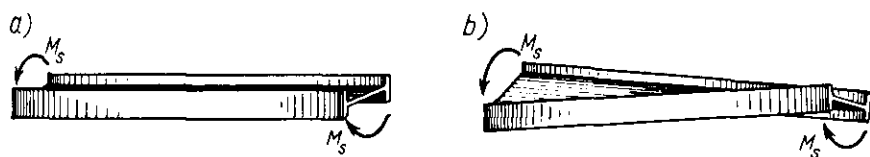
4. Skręcanie prętów o niekołowych kształtach przekroju poprzecznego

4.1. Skręcanie swobodne i nieswobodne prętów

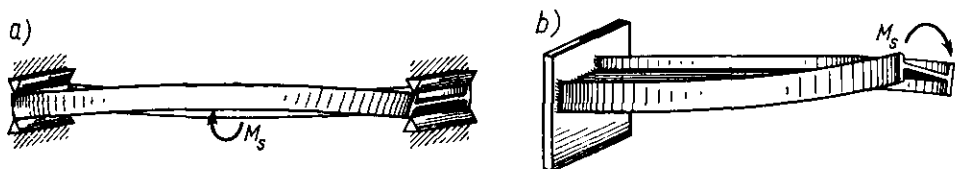
W przypadku skręcania prętów o przekroju kołowym lub pierścieniowym (wały wydrążone), omówionych w p. 2.3, przekroje poprzeczne skręcanych prętów pozostawały płaskie i nie zmieniały przy tym swego kształtu. W przypadku skręcania prętów o przekroju niekołowym, przekroje poprzeczne nie pozostają płaskie, lecz ulegają spaczeniu (deplanacji).

Jeżeli przy skręcaniu prętów o przekroju niekołowym paczenie się przekrojów poprzecznych nie jest niczym krępowane, mówimy o *skręcaniu swobodnym* takich prętów. Jeżeli natomiast swobodna deplanacja przekrojów poprzecznych jest w jakikolwiek sposób ograniczona, obok skręcania powstaje zginanie niektórych fragmentów pręta, a oprócz naprężeń stycznych pojawiają się naprężenia normalne, co w sumie zwiększa sztywność pręta, a skręcanie takie nazywamy *skręcaniem nieswobodnym*. Przykład swobodnego skręcania dwuteownika podano na rys. 4.1. W przypadku gdy na swobodne końce dwuteownika działają pary sił o momencie M_s , przekroje poprzeczne nie pozostają w swej płaszczyźnie, lecz ulegają deplanacji, osie podłużne pólek obracają się względem osi dwuteownika, lecz tworzące pólek pozostają nadal liniami prostymi. Dokładniejsze obserwacje wskazują, że odległości między dwoma dowolnymi punktami – znajdującymi się na jednej tworzącej – po przyłożeniu momentu M_s nie ulegają zmianie, co świadczy między innymi o tym, że w pręcie nie występują naprężenia normalne.

Jeżeli na swobodne przekroje końcowe tego samego dwuteownika będą działały momenty skręcające o wartości $\frac{1}{2}M_s$, równoważące działanie momentu M_s przyłożonego w przekroju środkowym pręta, to półki dwuteownika ulegną zgięciu w sposób przedstawiony na rys. 4.2a. Wygięcie pólek świadczy o występowaniu naprężeń normalnych; oprócz skręcania pewne elementy dwuteownika (np. półki) ulegają zginaniu, niektóre przekroje nie mogą się swobodnie deplanować (np. przekrój poprzeczny położony w połowie długości dwuteownika), mamy więc przypadek skręcania nieswobodnego.



Rys. 4.1



Rys. 4.2

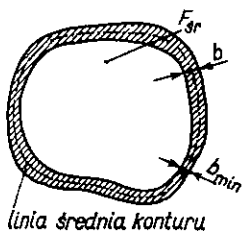
To samo obserwujemy w przypadku dwuteownika utwierdzonego w jednym końcu, skręcanego momentem M_s (rys. 4.2b): w przekroju utwierdzenia nie zachodzi swobodna deplanacja, półki dwuteownika ulegają zgięciu, jest to więc również przypadek skręcania nieswobodnego.

4.2. Skręcanie swobodne prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym

W przypadku prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym (rys. 4.3), skręcanych momentem M_s , maksymalne naprężenia tnące $\tau_{\max}$ powstają w miejscach, gdzie grubość b ścianki jest najmniejsza, i określone są wzorem *Bredta* (por. [18], str. 119)

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2b_{\min}F_{sr}} \leq k_s \quad (4.1)$$

gdzie: $b_{\min}$ – najmniejsza grubość ścianki pręta, F_{sr} – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta ograniczone linią średnią konturu (rys. 4.3).



Rys. 4.3

Kąt skręcenia pręta cienkościennego o przekroju zamkniętym wynosi

$$\varphi = \frac{M_s l}{4GF_s^2} \int_s \frac{ds}{b} \quad (4.2)$$

Całka w powyższym wzorze musi być obliczona po zamkniętej linii średniej konturu (por. [18], str. 120).

4.3. Skręcanie prętów o przekroju prostokątnym

W przypadku prętów o przekroju prostokątnym, poddanych swobodnemu skręcaniu momentem M_s , największe naprężenia tnące powstają przy powierzchni zewnętrznej pręta w środku dłuższych boków przekroju poprzecznego i określone są wzorem

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\eta_1 ab^2} \leq k_s \quad (4.3)$$

Kąt skręcenia pręta o długości l wynosi

$$\varphi = \frac{M_s l}{\eta_2 ab^3 G} \quad (4.4)$$

Oznaczenia w powyższych wzorach: a – dłuższy bok prostokąta, b – krótszy bok prostokąta, η_1 oraz η_2 – współczynniki, których wartości należy odczytać z tabl. 4.1.

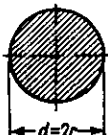
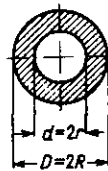
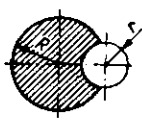
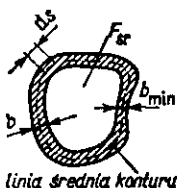
Tablica 4.1. Wartości współczynników η_1 i η_2 do obliczania prętów skręcanych o przekroju prostokątnym wg wzorów (4.3) oraz (4.4)

a/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	6	8	10	∞
η_1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,313	0,333
η_2	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281					

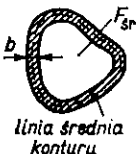
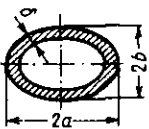
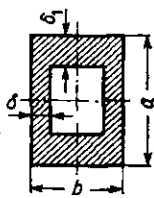
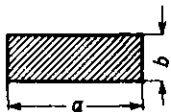
4.4. Zestawienie wzorów dotyczących swobodnego skręcania prętów o przekroju zamkniętym

Dla większej przejrzystości omówione poprzednio wzory ogólne oraz przykłady ich zastosowania do niektórych przypadków szczególnych podano w tabl. 4.2.

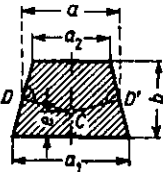
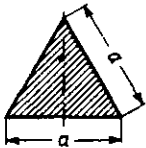
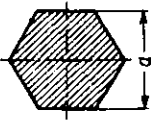
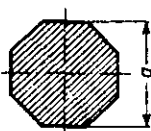
Tablica 4.2. Zestawienie wzorów do obliczania naprężeń maksymalnych i kątów skręcenia prętów o przekroju zamkniętym, poddanych skręcaniu (swobodnemu) momentem M_s

Lp.	Przekrój pręta	Wzory na swobodne skręcanie																														
1	Pręt okrągły 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{M_s \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{M_s \cdot 2}{\pi r^3} \leq k_s \approx 0,6k_r,$ $\varphi = \frac{M_s l}{GJ_0} = \frac{M_s l \cdot 32}{G\pi d^4} = \frac{M_s l \cdot 2}{G\pi r^4} \leq \varphi_{\text{dop}} l;$ dla wałów pędniowych $\varphi_{\text{dop}} = (1/4)^\circ/\text{m} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$																														
2	Wał wydrążony 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{M_s \cdot 16D}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{M_s \cdot 2R}{\pi(R^4 - r^4)},$ $\varphi = \frac{M_s l}{GJ_0} = \frac{M_s l \cdot 32}{G\pi(D^4 - d^4)} = \frac{M_s l \cdot 2}{G\pi(R^4 - r^4)}$																														
3		$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\eta_1 R^3},$ $\varphi = \frac{M_s l}{G\eta_2 R^4},$ przy czym współczynniki η_1, η_2 podano w poniższej tabelce: <table><tr><td>r/R</td><td>0</td><td>0,05</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,6</td><td>0,8</td><td>1,0</td><td>1,5</td></tr><tr><td>η_1</td><td>1,57</td><td>0,89</td><td>0,82</td><td>0,81</td><td>0,76</td><td>0,66</td><td>0,52</td><td>0,38</td><td>0,14</td></tr><tr><td>η_2</td><td>1,57</td><td>1,56</td><td>1,50</td><td>1,46</td><td>1,22</td><td>0,92</td><td>0,63</td><td>0,38</td><td>0,07</td></tr></table>	r/R	0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	η_1	1,57	0,89	0,82	0,81	0,76	0,66	0,52	0,38	0,14	η_2	1,57	1,56	1,50	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07
r/R	0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5																							
η_1	1,57	0,89	0,82	0,81	0,76	0,66	0,52	0,38	0,14																							
η_2	1,57	1,56	1,50	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07																							
4	 linia średnia konturu	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2b_{\min} F_{sr}},$ $\varphi = \frac{M_s l}{4GF_{sr}^2} \int_s \frac{ds}{b};$ F_{sr} – pole ograniczone linią średnią konturu, $\int_s \frac{ds}{b}$ – całka obliczona dla zamkniętego obwodu linii średniej konturu																														

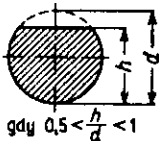
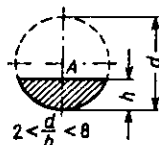
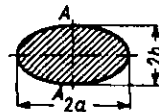
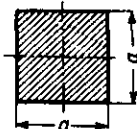
Tablica 4.2 (cd.)

Lp.	Przekrój pręta	Wzory na swobodne skręcanie
5	Rura cienkościenne o stałej grubości i dowolnym kształcie 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2bF_{sr}}$ $\varphi = \frac{M_s l s}{4GbF_{sr}^2}$ s – długość zamkniętej linii średniej konturu
6	Przekrój eliptyczny o stałej grubości ścianki 	$\tau = \frac{M_s}{2\pi ab\delta}$ $\varphi = \frac{M_s l s}{4G\pi^2\delta a^2 b^2}$ przy czym długość linii średniej konturu $s = \pi(a + b)$ lub dokładniej: $s = \alpha\pi(a + b)$, gdzie współczynnik α wynosi:
$(a - b)/(a + b)$		0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
a		1,0000 1,0025 1,0100 1,0226 1,0404 1,0635 1,0922 1,1269 1,1679 1,2162
7		$\tau = \frac{M_s}{2\delta(a - \delta_1)(b - \delta)} \quad (\text{w środku dłuższych boków}),$ $\tau_1 = \frac{M_s}{2\delta_1(a - \delta_1)(b - \delta)} \quad (\text{w środku krótszych boków}),$ $\varphi = \frac{M_s l (a\delta_1 + b\delta - \delta^2 - \delta_1^2)}{2G\delta\delta_1(a - \delta_1)^2(b - \delta)^2}$
8	Przekrój prostokątny $a \geq b$ 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{\eta_1 ab^2} \quad (\text{w środku dłuższych boków}),$ $\varphi = \frac{M_s l}{\eta_2 ab^3 G}$ wartości współczynników η_1 i η_2 podano w tabl. 4.1

Tablica 4.2 (cd.)

Lp.	Przekrój pręta	Wzory na swobodne skręcanie
9	Trapez (lub trójkąt) równoboczny 	Ze środka ciężkości C poprowadzić prostopadłe do boków; punkty przecięcia D i D' wyznaczają prostokąt o bokach a i b. Naprężenia τ i kąt skręcenia φ wyznacza się według wzorów dla prostokąta (poprzednia pozycja). Odległość e środka ciężkości trapezu wynosi $e = \frac{b}{3} \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2}$
10	Przekrój w kształcie trójkąta równobocznego 	$\tau_{\max} = \frac{20M_s}{a^3} \quad (\text{w środku boków}),$ $\varphi = \frac{M_s l \cdot 80}{G\sqrt{3}a^4}$
11	Przekrój w kształcie sześciokąta foremnego 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{0,186a^3},$ $\varphi = \frac{M_s l}{0,114a^4 G}$
12	Przekrój w kształcie ośmiokąta foremnego 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{0,185a^3},$ $\varphi = \frac{M_s l}{0,108a^4 G}$

Tablica 4.2 (cd.)

Lp.	Przekrój pręta	Wzory na swobodne skręcanie
13	Przekrój kołowy z odciętym fragmentem  gdz $0,5 < \frac{h}{d} < 1$	$\tau_{\max} = \frac{8M_s(0,3h + 0,7d)}{d^3(2,6h - d)},$ $\varphi = \frac{16M_s l}{Gd^3(2,6h - d)}$
14	Fragment przekroju kołowego  $2 < \frac{d}{h} < 8$	$\tau_{\max} = \frac{22,9M_s}{d^3\left(\frac{2h}{d}\right)^{2,82}} \text{ (w punkcie A),}$ $\varphi = \frac{M_s l}{G \cdot 0,0185d^4\left(\frac{2h}{d}\right)^{3,35}}$
15	Przekrój eliptyczny 	$\tau_{\max} = \frac{2M_s}{\pi ab^2} \text{ (w punktach A),}$ $\varphi = \frac{16M_s(a^2 + b^2)l}{G\pi a^3 b^3}$
16	Przekrój kwadratowy 	$\tau_{\max} = \frac{M_s}{0,208a^3},$ $\varphi = \frac{M_s l}{0,1406a^4 G}$

4.5. Skręcanie swobodne prętów o przekrojach otwartych

W przypadku skręcania swobodnego prętów o przekrojach otwartych jednostkowy kąt skręcenia całego pręta jest taki sam, jak jednostkowe kąty skręcenia poszczególnych części przekroju. Jeżeli przekrój poprzeczny pręta składa się z kilku prostokątów, największe naprężenia tnące pozostaną w prostokącie o największej grubości.

W celu uproszczenia obliczeń ograniczymy rozważania do przekrojów złożonych z wąskich prostokątów. Z tablicy 4.1 widać, że dla wąskich prostokątów $\eta_1 = \eta_2 = 1/3$ i wzór (4.7) na maksymalne naprężenia tnące w pręcie o kształcie wąskiego prostokąta wyrazi się w postaci

$$\tau = \frac{M_s}{\frac{1}{3}ab^2} \leq k_s \quad (4.5)$$

kąt skręcenia zaś

$$\varphi = \frac{M_s l}{G \cdot \frac{1}{3}ab^3} \quad (4.6)$$

Przez analogię do wzoru (2.27) na kąt skręcenia wału pełnego mianownik we wzorze (4.6) zwany jest *szytywnością na skręcanie* C , równą iloczynowi modułu sprężystości postaciowej G i szytywności geometrycznej przekroju na skręcanie J_s

$$C = GJ_s \quad (4.7)$$

gdzie dla wąskiego prostokąta $J_s = \frac{1}{3}ab^3$.

Wzory (4.5) i (4.6) przybierają więc postać

$$\tau = \frac{M_s b}{J_s}, \quad \varphi = \frac{M_s l}{GJ_s}$$

W przypadku pręta o przekroju złożonym z wąskich prostokątów szytywność geometryczna na skręcanie J_s przekroju jest sumą szytywności na skręcanie prostokątów składowych

$$J_s = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{3}a_i b_i^3 \quad (4.8)$$

Największe naprężenia tnące w takim pręcie powstaną w środku dłuższych boków prostokąta o największej grubości $b_{\max}$ spośród wszystkich prostokątów stanowiących przekrój poprzeczny pręta

$$\tau_{\max} = \frac{M_s b_{\max}}{J_s} = \frac{M_s b_{\max}}{\frac{1}{3} \sum a_i b_i^3} \quad (4.9)$$

Kąt skręcenia pręta wynosi

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_s} = \frac{M_s l}{G \cdot \frac{1}{3} \sum a_i b_i^3} \quad (4.10)$$

Przykład 4.1. Obliczyć dopuszczalną wartość momentu skręcającego M_s dla pręta o przekroju ceowym, podanego na rys. 4.4, jeżeli naprężenie dopuszczalne na skręcanie wynosi $k_s = 50 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Przekrój poprzeczny pręta składa się z trzech prostokątów, zatem sztywność geometryczna przekroju na skręcanie według wzoru (4.8) wynosi

$$J_s = \frac{1}{3} \sum a_i b_i^3 = \frac{1}{3} (120 \cdot 8^3 + 100 \cdot 9^3 + 60 \cdot 10^3) = 64\,780 \text{ mm}^4$$

Największa grubość wynosi $b_{\max} = 10 \text{ mm}$.

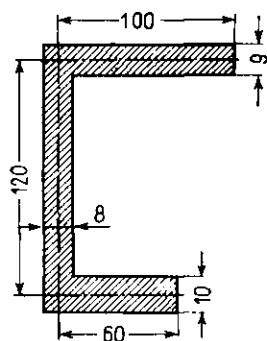
Ze wzoru (4.9) otrzymujemy

$$M_s \leq \frac{k_s J_s}{b_{\max}}$$

Z rysunku 4.4 odczytujemy $b_{\max} = 10 \text{ mm}$. Ponieważ $1 \text{ MPa} = 1 \text{ MN/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$, więc $k_s = 50 \text{ MPa} = 50 \text{ N/mm}^2$.

Po podstawieniu danych liczbowych do otrzymanego poprzednio wzoru otrzymujemy moment skręcający, jakim można obciążyć obliczany pręt

$$M_s \leq \frac{50 \left(\text{N/mm}^2 \right) \cdot 64\,780 \left(\text{mm}^4 \right)}{10 \left(\text{mm} \right)} = 323\,900 \text{ N} \cdot \text{mm} = 323,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Rys. 4.4

4.6. Uproszczony sposób obliczania profili walcowanych na czyste skręcanie

Omówione wyżej przypadki skręcania swobodnego prętów o przekroju niekołowym dały się łatwo ująć za pomocą stosunkowo prostych wzorów. Najczęściej spotyka się jednak przypadki skręcania nieswobodnego, a dla takich przypadków obliczenie naprężeń i odkształceń jest dość skomplikowane, zależne przy tym nie tylko od kształtu i wymiarów przekroju, lecz również od sposobu podparcia i przyłożenia momentu M_s . Szczegółowe omówienie wzorów i metod obliczeń można znaleźć w literaturze [9,13,28]. Jako wniosek praktyczny można przyjąć zasadę, że zawsze, w każdym przypadku skręcania, maksymalne naprężenie tnące jest w rzeczywistym pręcie mniejsze od obliczonego ze wzoru (4.9), a w przypadkach szczególnych (np. przy skręcaniu kątowników) równe rzeczywistemu.

Aby ułatwić obliczenia i uzyskać orientacyjne dane dotyczące wartości naprężeń, można przyjąć uproszczenie polegające na tym, że dla profili walcowanych o przekrojach otwartych złożonych z wąskich prostokątów, poddanych czystemu skręcaniu momentem M_s , naprężenia maksymalne można obliczyć posługując się wzorem (4.9). We wzorze tym wprowadza się ustalony doświadczalnie współczynnik η , przez który należy pomnożyć wskaźnik przekroju na skręcanie

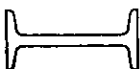
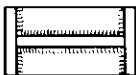
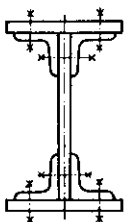
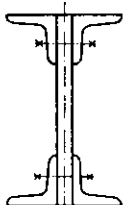
$$\tau_{\max} = \frac{M_s b_{\max}}{\eta J_s} \quad (4.11)$$

przy czym sztywność geometryczna na skręcanie J_s jest określona wzorem (4.8), wartości zaś współczynnika η dla różnych przekrojów podano w tabl. 4.3 (wg [13], str. 309). Dla profili walcowanych wymiar b_s we wzorze (4.8) przyjmuje się równy średniej grubości każdej półki.

Tablica 4.3. Wartości współczynnika η we wzorze (4.11)

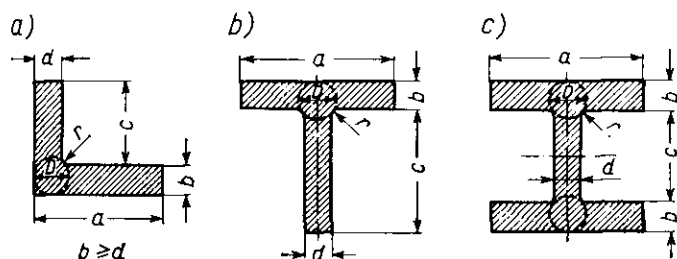
Lp.	Oznaczenie	Kształt przekroju	Wartości współczynnika η
1		Kątownik	1,00
2		Ceownik	1,12
3		Przekrój krzyżowy	1,17

Tablica 4.3 (cd.)

Lp.	Oznaczenie	Kształt przekroju	Wartości współczynnika η
4		Dwuteownik (walcowany)	1,20
5		Dwuteownik spawany z przeponami usztywniającymi	1,50
6		Teownik spawany z przeponami usztywniającymi	1,40
7		Nitowany dwuteownik z pasami podłużnymi	0,5
8		Nitowany dwuteownik bez pasów podłużnych	0,25

Naprężenia maksymalne τ określone wzorem (4.11) występują w środku dłuższych boków najgrubszego z prostokątów, na jakie da się podzielić przekrój poprzeczny pręta. Wzór ten nie uwzględnia spiętrzenia naprężeń, jakie powstaje w narożach wklęsłych przekroju poprzecznego.

Zaokrąglenia wklęsłych naroży przekrojów poprzecznych wpływają korzystnie na zwiększenie sztywności prętów i zmniejszenie naprężeń maksymalnych τ . Wpływ ten ujmują wzory (4.12) oraz (4.13) dla kątowników, teowników i dwuteowników poddanych swobodnemu skręcaniu (rys. 4.5)



Rys. 4.5

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{J_s} \mu \quad (4.12)$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{G_s J_s} \quad (4.13)$$

przy czym

$$J_s = 2J_1 + J_2 + 2k_1 D^4 \quad (4.14)$$

We wzorze tym (oznaczenia według rys. 4.5)

$$J_1 = ab^3 \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{a}{b} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$

Wartość J_2 dla kątowników i teowników (rys. 4.5a i b) oblicza się ze wzoru

$$J_2 = cd^3 \left[\frac{1}{3} - 0,105 \frac{d}{c} \left(1 - \frac{d^4}{192c^4} \right) \right]$$

dla dwuteowników zaś (rys. 4.5c)

$$J_2 = \frac{1}{3} cd^3$$

We wzorze (4.14) wymiar D dotyczy maksymalnej średnicy koła wpisanego w przekrój poprzeczny pręta, współczynnik k_1 zaś wynosi:

– dla kątowników (rys. 4.5a)

$$k_1 = \frac{b}{d} \left(0,07 + 0,076 \frac{b}{r} \right),$$

gdzie $b \geq d$

– dla teowników i dwuteowników (rys. 4.5b i c)

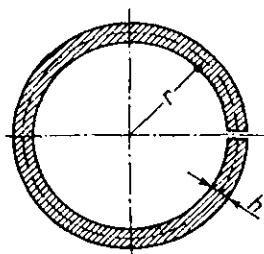
$$k_1 = \frac{h}{h_1} \left(0,15 + 0,10 \frac{r}{b} \right)$$

gdzie h oznacza grubość ścianki cieńszej, h_1 zaś ścianki grubszej spośród ścianek b oraz d .

Współczynnik μ we wzorze (4.12) oblicza się ze wzoru

$$\mu = \frac{0,7616D}{1 + \left(\frac{\pi D^2}{4F} \right)^2} \left\{ 1 + \left[0,118 \ln \left(1 - \frac{D}{2r} \right) - 0,238 \frac{D}{2r} \right] \right\}$$

gdzie F – pole przekroju poprzecznego pręta.



Rys. 4.6

W przypadku swobodnego skręcania pręta w kształcie rury o grubości h , rozciętej wzdłuż tworzącej (rys. 4.6), naprężenia maksymalne $\tau_{\max}$ oraz kąt skręcenia φ są określone wzorami

$$\tau_{\max} = \frac{M_s (6\pi r + 1,8h)}{(2\pi rh)^2}, \quad \varphi = \frac{M_s l \cdot 3}{G \cdot 2\pi rh^3} \quad (4.15)$$

5. Obliczanie belek zginanych

5.1. Podstawowe wzory dotyczące belek zginanych

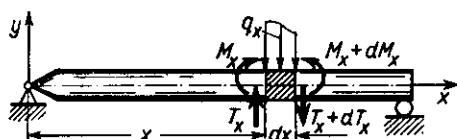
Z warunków równowagi odcinka belki o długości dx (rys. 5.1; por.[18], str. 145) wynika, że pochodna momentu gnącego jest równa sile tnącej

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (5.1)$$

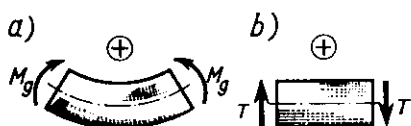
obciążenie ciągle q_x zaś jest równe pochodnej siły tnącej (wziętej ze znakiem minus)

$$q_x = -\frac{dT_x}{dx} \quad (5.2)$$

Znaki w powyższych wzorach wynikają z przyjętego na rys. 5.1 założenia, że dodatni moment gnący wygina rozpatrywany odcinek belki o długości dx wypukłością do dołu (rys. 5.2a), a dodatnia siła tnąca usiłuje obrócić ten odcinek belki w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 5.2b).



Rys. 5.1



Rys. 5.2

Promień krzywizny belki zginanej momentem M_x wyraża się wzorem (2.36)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_z}$$

Z porównania tego wzoru ze znanym z geometrii analitycznej wyrażeniem określającym promień krzywizny linii

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

otrzymujemy przybliżone równanie różniczkowe linii ugięcia belki zginanej

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x \quad (5.3)$$

Równanie to otrzymano przy założeniu, że kwadraty tangensów kątów nachylenia stycznych do linii ugięcia $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ są małe w porównaniu z jednością. Występujący we wzorze (5.3) moment bezwładności przekroju J_z zdefiniowany wzorem (2.17): $J_z = \int_F y^2 dF$ należy obliczać względem osi z , prostopadłej do płaszczyzny xy

i według oznaczeń podanych na rys. 5.1 – pokrywającej się z osią obojętną. Ponieważ moment bezwładności przekroju przy zginaniu płaskim oblicza się zawsze względem osi obojętnej, przechodzącej przez środek ciężkości przekroju, przy danych oznaczeniach pokrywającej się z osią z , przeto dla uproszczenia w dalszych wzorach opuszczono indeks z i moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej przy zginaniu oznaczono J .

Równanie linii ugięcia belki znajdujemy przez dwukrotne całkowanie równania (5.3)

$$EJ \frac{dy}{dx} = \int M_x dx + C = EJ\theta \quad \text{gdyż: } \theta = \frac{dy}{dx} \quad (5.4)$$

$$EJy = \int \left[\int M_x dx \right] dx + Cx + D \quad (5.5)$$

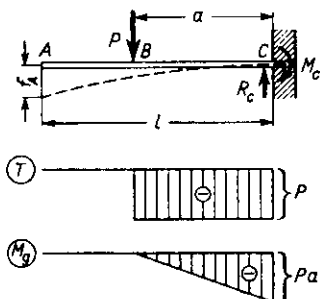
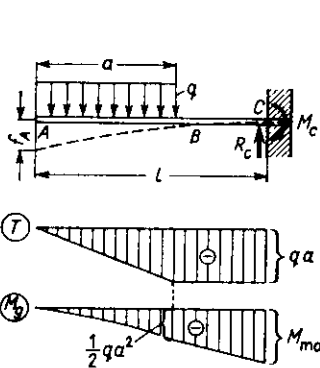
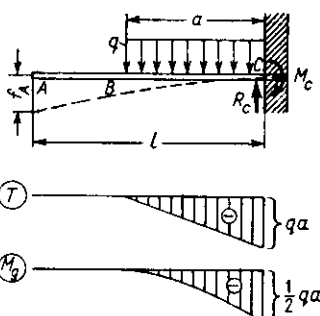
Stałe całkowania C i D wyznacza się z warunków brzegowych.

Wartości liczbowe maksymalnych momentów gnących $M_{\max}$, reakcji podparowych, strzałek ugięcia f oraz kątów ugięcia θ dla różnych przypadków podparcia i obciążenia belek statycznie wyznaczalnych podano w tabl. 5.1–5.3, a dla belek statycznie niewyznaczalnych – w tabl. 5.4 oraz 5.5.

W przypadku innych sposobów podparcia lub obciążenia belek niż podane w tablicach rozwiązania można uzyskać za pomocą metody superpozycji, co omówiono na kilku przykładach.

Tablica 5.1. Wzory i wykresy dotyczące zginania belek wspornikowych

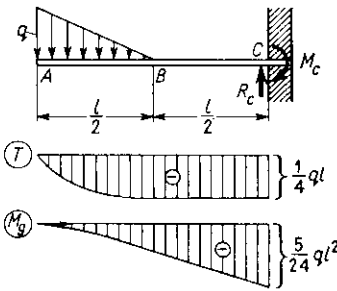
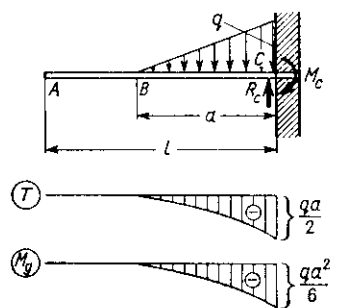
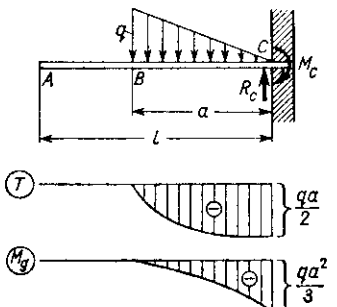
Oznaczenia: f – strzałka ugięcia, θ – kąt nachylenia stycznej do linii ugięcia belki, E – moduł Younga, J – moment bezwładności względem osi obojętnej przy zginaniu, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, T – siła tnąca (poprzeczna), M_g – moment gnący

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
1		$R_C = P, \quad M_C = Pa,$ $M_{\max} = Pa \text{ dla } x = l,$ $\theta_A = \theta_B = \frac{Pa^2}{2EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{Pa^2}{6EJ}(3l - a),$ $f_B = \frac{Pa^3}{3EJ}$
2		$R_C = qa, \quad M_C = qa\left(l - \frac{a}{2}\right),$ $M_{\max} = qa\left(l - \frac{a}{2}\right) \text{ dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{q}{6EJ}\left[(l - a)^3 - l^3\right],$ $\theta_B = \frac{q}{6EJ}\left[l^3 - a^3 - (l - a)^3\right] = \frac{qla}{2EJ}(l - a),$ $f_A = \frac{q}{24EJ}\left[3l^4 - (l - a)^3(3l + a)\right],$ $f_B = \frac{qa}{12EJ}\left(4l^3 - 9l^2a + 6la^2 - a^3\right)$
3		$R_C = qa, \quad M_C = \frac{1}{2}qa^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{2}qa^2,$ $\theta_A = \theta_B = \frac{qa^3}{6EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{qa^3}{6EJ}\left(l - \frac{a}{4}\right) = \frac{qa^3}{24EJ}(4l - a),$ $f_B = \frac{qa^4}{8EJ}$

Tablica 5.1 (cd.)

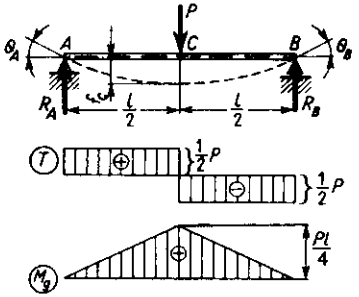
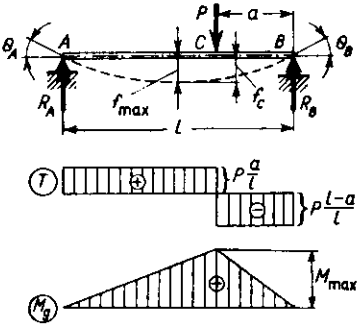
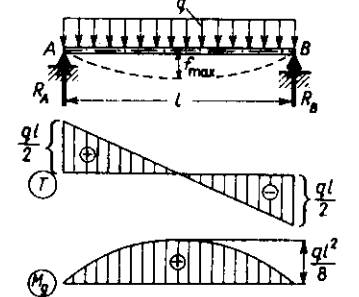
Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów tnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
4	Diagram showing a beam of length l fixed at the right end (C) and free at the left end (A). A concentrated moment M is applied at a distance a from the fixed end. The beam is shown with its deflection curve, shear force diagram ($T=0$), and bending moment diagram (M).	$R_C = 0, \quad M_C = M, \quad M_{\max} = M,$ $\theta_A = \theta_B = \frac{Ma}{EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{Ma}{2EJ}(2l - a), \quad f_B = \frac{Ma^2}{2lEJ}$
5	Diagram showing a beam of length l fixed at the right end (B) and free at the left end (A). A uniformly distributed load q is applied downwards. The beam is shown with its deflection curve, shear force diagram (T), and bending moment diagram (M_g). The bending moment diagram is labeled "parabola 3 stopnia".	$R_B = \frac{1}{2}ql, \quad M_B = \frac{1}{6}ql^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{6}ql^2 \text{ dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{ql^3}{24EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{ql^4}{30EJ}$
6	Diagram showing a beam of length l fixed at the right end (B) and free at the left end (A). A uniformly distributed load q is applied downwards. The beam is shown with its deflection curve, shear force diagram (T), and bending moment diagram (M_g). The bending moment diagram is labeled "parabola 3 stopnia".	$R_B = \frac{1}{2}ql, \quad M_B = \frac{1}{3}ql^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{3}ql^2 \text{ dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{ql^3}{8EJ}, \quad f_{\max} = f_A = \frac{11}{120} \frac{ql^4}{EJ}$
7	Diagram showing a beam of length l fixed at the right end (C) and free at the left end (A). A uniformly distributed load q is applied downwards. The beam is divided into two equal segments of length $l/2$ by point B. The beam is shown with its deflection curve, shear force diagram (T), and bending moment diagram (M_g). The bending moment diagram is labeled "parabola 3 stopnia".	$R_C = \frac{1}{4}ql, \quad M_C = \frac{1}{6}ql^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{6}ql^2 \text{ dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{11}{192} \frac{ql^3}{EJ}, \quad \theta_B = \frac{10}{192} \frac{ql^3}{EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{13}{240} \frac{ql^4}{EJ}, \quad f_B = \frac{5}{192} \frac{ql^4}{EJ}$

Tablica 5.1 (cd.)

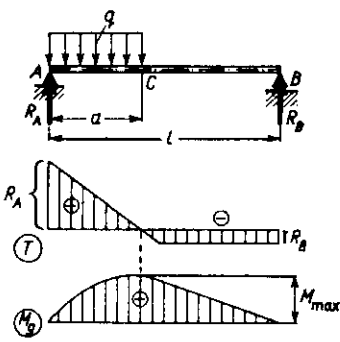
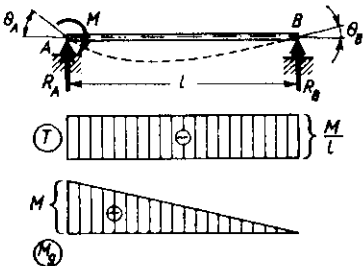
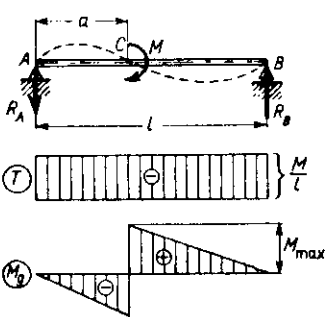
Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
8		$R_C = \frac{1}{4}ql, \quad M_C = \frac{5}{24}ql^2,$ $M_{\max} = \frac{5}{24}ql^2 \text{ dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{17}{192} \frac{ql^3}{EJ}, \quad \theta_B = \frac{7}{96} \frac{ql^3}{EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{121}{1920} \frac{ql^4}{EJ}, \quad f_B = \frac{1}{48} \frac{ql^4}{EJ}$
9		$R_C = \frac{1}{2}qa, \quad M_C = \frac{1}{6}qa^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{6}qa^2, \quad \theta_A = \theta_B = \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{1}{120} \frac{qa^3}{EJ} (5l - a),$ $f_B = \frac{1}{30} \frac{qa^4}{EJ}$
10		$R_C = \frac{1}{2}qa, \quad M_C = \frac{1}{3}qa^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{3}qa^2,$ $\theta_A = \theta_B = \frac{1}{8} \frac{qa^3}{EJ},$ $f_{\max} = f_A = \frac{1}{120} \frac{qa^3}{EJ} (15l - 4a),$ $f_B = \frac{11}{120} \frac{qa^4}{EJ}$

Tablica 5.2. Wykresy i wzory dotyczące zginania belek spoczywających na dwóch podporach

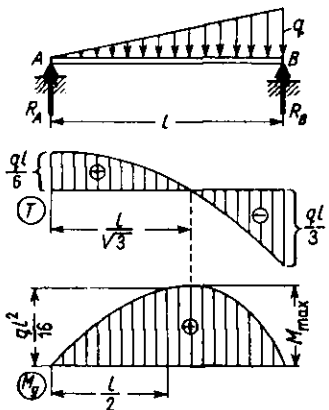
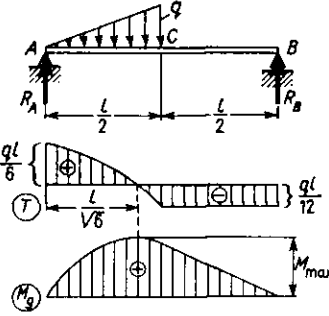
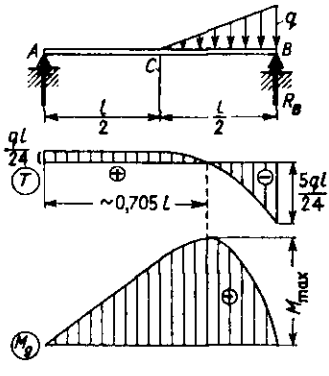
Oznaczenia jak w tabl. 5.1

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
1		$R_A = R_B = \frac{1}{2}P,$ $M_{\max} = \frac{1}{4}Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $\theta_A = -\theta_B = -\frac{Pl^2}{16EJ}, \quad f_{\max} = f_C = \frac{Pl^3}{48EJ}$
2		$R_A = P\frac{a}{l}, \quad R_B = P\frac{l-a}{l},$ $M_{\max} = P\frac{a(l-a)}{l} \quad \text{dla } x = l-a,$ $\theta_A = -\frac{Pa(l^2-a^2)}{6EJ}, \quad \theta_B = \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6EJ},$ $f_C = \frac{Pa^2(l-a)^2}{3EJ},$ jeżeli $a \leq \frac{1}{2}l$, to $f_{\max} = \frac{Pa(l^2-a^2)}{9\sqrt{3}EJ} \sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}} = \frac{Pa}{3EJ} \left(\frac{l^2-a^2}{3} \right)^{3/2}$ dla $x = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2-a^2)}$
3		$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql,$ $M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2 \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $\theta_A = -\theta_B = -\frac{ql^3}{24EJ},$ $f_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l$

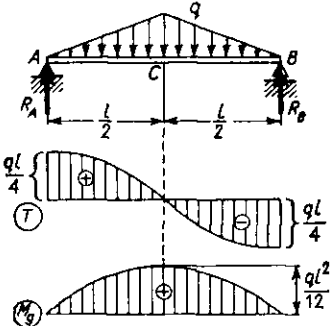
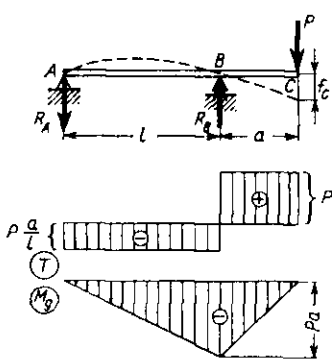
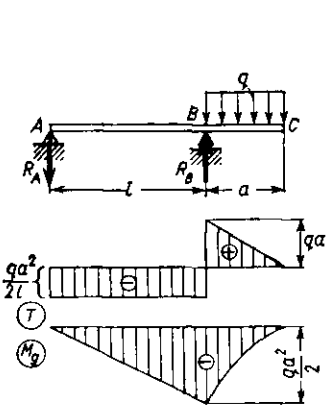
Tablica 5.2 (cd.)

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
4		$R_A = \frac{qa(2l-a)}{2l}, \quad R_B = \frac{qa^2}{2l},$ $M_{\max} = \frac{qa^2(2l-a)^2}{8l^2} \quad \text{dla } x = \frac{a(2l-a)}{2l},$ $\theta_A = -\frac{qa^2(2l-a)^2}{24IEJ}, \quad \theta_B = \frac{qa^2(2l^2-a^2)}{24IEJ},$ $\theta_C = -\frac{qa^2}{24IEJ}(4l^2 - 12la + 7a^2),$ $f_C = \frac{qa^3}{24IEJ}(4l^2 - 7la + 3a^2)$
5		$R_A = -R_B = -\frac{M}{l},$ $M_{\max} = M \quad \text{dla } x = 0,$ $\theta_A = -\frac{Ml}{3EJ}, \quad \theta_B = \frac{Ml}{6EJ},$ $\text{dla } x = \frac{1}{2}l \quad f = \frac{Ml^2}{16EJ},$ $f_{\max} = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EJ} \approx 0,0642 \frac{Ml^2}{EJ}$ $\text{dla } x = l \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0,4226l$
6		$R_A = R_B = \frac{M}{l},$ $\text{jeżeli } a < \frac{1}{2}l, \quad M_{\max} = M \frac{l-a}{l};$ $\theta_A = \frac{M}{6IEJ}(2l^2 - 6la + 3a^2),$ $\theta_B = -\frac{M}{6IEJ}(l^2 - 3a^2),$ $f_C = \frac{Ma}{3IEJ}(l^2 - 3la + 2a^2)$

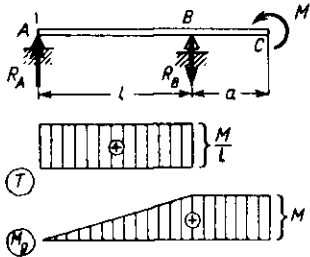
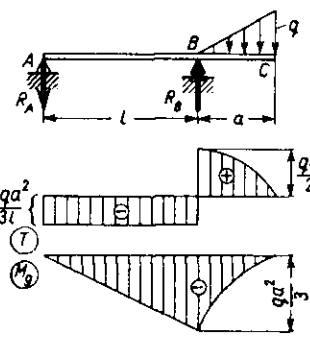
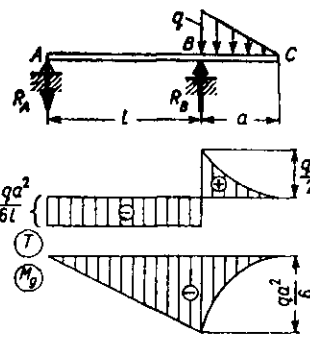
Tablica 5.2 (cd.)

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
7		$R_A = \frac{1}{6}ql, \quad R_B = \frac{1}{3}ql,$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} \approx 0,064ql^2 \quad \text{dla} \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l,$ $\theta_A = -\frac{7}{360} \frac{ql^3}{EJ}, \quad \theta_B = \frac{1}{45} \frac{ql^3}{EJ},$ $\text{dla} \quad x = \frac{1}{2}l \quad f = \frac{5}{768} \frac{ql^4}{EJ} \approx 0,00650 \frac{ql^4}{EJ},$ $f_{\max} \approx 0,00652 \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla} \quad x \approx 0,52l$
8		$R_A = \frac{1}{6}ql, \quad R_B = \frac{1}{12}ql,$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{6}} \approx 0,045ql^2 \quad \text{dla} \quad x = \frac{l}{\sqrt{6}} \approx 0,41l,$ $\theta_A = -\frac{41}{2880} \frac{ql^3}{EJ}, \quad \theta_B = \frac{17}{1440} \frac{ql^3}{EJ},$ $\theta_C = -\frac{1}{720} \frac{ql^3}{EJ}, \quad f_C = \frac{1}{240} \frac{ql^4}{EJ}$
9		$R_A = \frac{1}{24}ql, \quad R_B = \frac{5}{24}ql,$ $M_{\max} = \frac{3\sqrt{6} + 2}{144\sqrt{6}} \frac{ql^2}{EJ} \approx 0,0267 \frac{ql^2}{EJ}$ $\text{dla} \quad x = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 0,705l,$ $\theta_A = -\frac{37}{5760} \frac{ql^3}{EJ}, \quad \theta_B = \frac{53}{5760} \frac{ql^3}{EJ},$ $\theta_C = -\frac{7}{5760} \frac{ql^3}{EJ}, \quad f_C = \frac{3}{1280} \frac{ql^4}{EJ}$

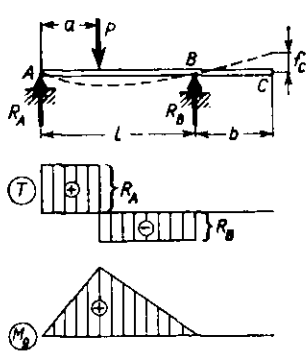
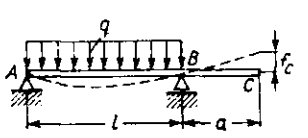
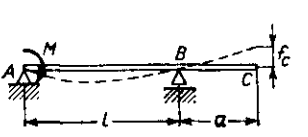
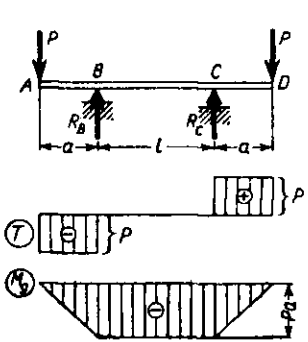
Tablica 5.2 (cd.)

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
10		$R_A = R_B = \frac{1}{4}ql,$ $M_{\max} = \frac{1}{12}ql^2 \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $\theta_B = -\theta_A = \frac{5}{192} \frac{ql^3}{EJ},$ $f_{\max} = f_C = \frac{1}{120} \frac{ql^4}{EJ}$
11		$R_A = P \frac{a}{l}, \quad R_B = P \frac{l+a}{l},$ $M_{\max} = Pa \quad \text{dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{1}{6} \frac{Pla}{EJ}, \quad \theta_B = -\frac{1}{3} \frac{Pla}{EJ},$ $\theta_C = -\frac{1}{6} \frac{Pa}{EJ} (2l+3a),$ $f_C = \frac{1}{3} \frac{Pa^2}{EJ} (l+a),$ $f_{\max} = \frac{Pl^2a}{9\sqrt{3}EJ} \quad \text{dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$
12		$R_A = \frac{qa^2}{2l}, \quad R_B = \frac{qa}{2l} (2l+a),$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{2} \quad \text{dla } x = l,$ $\theta_A = \frac{1}{12} \frac{qla^2}{EJ}, \quad \theta_B = -\frac{1}{6} \frac{qla^2}{EJ},$ $\theta_C = -\frac{1}{6} \frac{qa^2}{EJ} (l+a),$ $f_C = \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EJ} (4l+3a),$ $f_{\max} = \frac{ql^2a^2}{18\sqrt{3}EJ} \quad \text{dla } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$

Tablica 5.2 (cd.)

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
13		$R_A = R_B = \frac{M}{l}, \quad M_{\max} = M,$ $\theta_A = -\frac{1}{6} \frac{Ml}{EJ}, \quad \theta_B = \frac{1}{3} \frac{Ml}{EJ},$ $\theta_C = \frac{1}{3} \frac{M}{EJ} (l + 3a),$ $f_C = \frac{1}{6} \frac{Ma}{EJ} (2l + 3a),$ $f_{\max} = -\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EJ} \quad \text{dla} \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}}$
14		$R_A = \frac{qa^2}{3l}, \quad R_B = \frac{qa}{6l} (2a + 3l),$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{3} \quad \text{dla} \quad x = l,$ $\theta_A = \frac{qla^2}{18EJ}, \quad \theta_B = -\frac{qla^2}{9EJ},$ $\theta_C = -\frac{qa^2}{72EJ} (8l + 9a),$ $f_C = \frac{qa^3}{360EJ} (40l + 33a)$
15		$R_A = \frac{qa^2}{6l}, \quad R_B = \frac{qa}{6l} (a + 3l),$ $M_{\max} = \frac{qa^2}{6} \quad \text{dla} \quad x = l,$ $\theta_A = \frac{qla^2}{36EJ}, \quad \theta_B = -\frac{qla^2}{18EJ},$ $\theta_C = -\frac{qa^2}{72EJ} (4l + 3a),$ $f_C = \frac{qa^3}{90EJ} (5l + 3a)$

Tablica 5.2 (cd.)

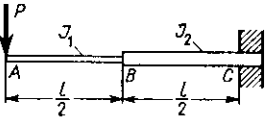
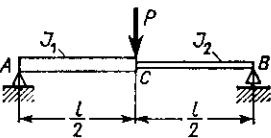
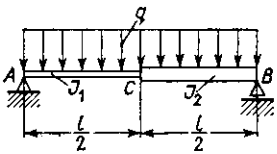
Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
16		$\theta_C = \theta_B = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6EIJ},$ $f_C = \theta_B b \frac{Pab(l^2 - a^2)}{6EIJ},$ dla $a = \frac{1}{2}l$ $\theta_C = \theta_B = \frac{Pl^2}{16EIJ},$ $f_C = \frac{Pl^2b}{16EIJ}$
17		$\theta_B = \theta_C = \frac{ql^3}{24EIJ},$ $f_C = \frac{ql^3a}{24EIJ}$
18		$\theta_B = \theta_C = \frac{Ml}{6EIJ},$ $f_C = \theta_C a = \frac{Mla}{6EIJ}$
19		$R_B = R_C = P, \quad M_{\max} = Pa,$ $\theta_A = -\theta_D = \frac{Pa(l+a)}{2EIJ},$ $\theta_B = -\theta_C = \frac{Pla}{2EIJ}, \quad f_A = f_D = \frac{Pa^2(3l+2a)}{12EIJ},$ dla $x = a + \frac{1}{2}l$ $f_0 = \frac{Pl^2a}{8EIJ}, \quad \theta_0 = 0$

Tablica 5.2 (cd.)

Lp.	Sposób obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, $M_{\max}$, szczególne wartości kątów obrotu i strzałek ugięcia
20		$R_A = R_B = P \frac{l+2a}{l},$ $M_{\max} = Pa \quad \text{dla} \quad x = a \quad \text{oraz} \quad x = l + a,$ $\theta_A = \theta_B = -\frac{Pla}{6EJ}, \quad \theta_C = \theta_D = -\frac{Pd}{6EJ}(l+3a),$ $f_C = -f_D = \frac{Pa^2}{6EJ}(l+2a),$ $\text{dla} \quad x = a + \frac{1}{2}l \quad \theta_0 = \frac{Pla}{12EJ}, \quad f_0 = 0$
21		$R_A = R_B = q\left(a + \frac{1}{2}l\right),$ $M_{\max} = \begin{cases} \frac{q}{8}(l^2 - 4a^2) & \text{dla} \quad a \leq \frac{l\sqrt{2}}{4}, \\ \frac{qa^2}{2} & \text{dla} \quad a \geq \frac{l\sqrt{2}}{4}, \end{cases}$ $\theta_B = -\theta_A = \frac{ql}{24EJ}(l^2 - 6a^2),$ $\theta_D = -\theta_C = \frac{q}{24EJ}(l^3 - 6la^2 + 4a^3),$ $f_C = f_D = \frac{qa}{24EJ}(l^3 - 6la^2 - 3a^3),$ $\text{dla} \quad x = a + \frac{1}{2}l \quad \theta_0 = 0, \quad f_0 = \frac{ql^2}{384EJ}(5l^2 - 24a^2)$

Tablica 5.3. Wykresy i wzory dotyczące zginania belek o sztywności zmiennej skokowo

Oznaczenia jak w tabl. 5.1

Lp.	Schemat belki	Wartości kątów obrotu i ugięć
1		$\theta_A = \frac{Pl^2}{8EJ_2} \left(3 + \frac{J_2}{J_1} \right),$ $\theta_B = \frac{3}{8} \frac{Pl^2}{EJ_2},$ $f_A = \frac{Pl^3}{24EJ_2} \left(7 + \frac{J_2}{J_1} \right),$ $f_B = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ_2}$
2		$\theta_A = -\frac{Pl^2}{48EJ_1} \left(2 + \frac{J_1}{J_2} \right),$ $\theta_B = \frac{Pl^2}{48EJ_1} \left(1 + 2\frac{J_1}{J_2} \right),$ $\theta_C = \frac{Pl^2}{48EJ_1} \left(1 - \frac{J_1}{J_2} \right),$ $f_C = \frac{Pl^3}{96EJ_1} \left(1 + \frac{J_1}{J_2} \right)$
3		$\theta_A = \frac{ql^3}{384EJ_2} \left(5 + 11\frac{J_2}{J_1} \right),$ $\theta_B = \frac{ql^3}{384EJ_2} \left(11 + 5\frac{J_2}{J_1} \right),$ $\theta_C = -\frac{5}{384} \frac{ql^3}{EJ_2} \left(1 - \frac{J_2}{J_1} \right),$ $f_C = \frac{5}{768} \frac{ql^4}{EJ_2} \left(1 + \frac{J_2}{J_1} \right)$

Tablica 5.4. Wzory i wykresy dotyczące zginania jednoprzęsłowych belek statycznie niewyznaczalnych

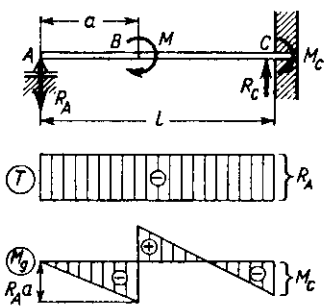
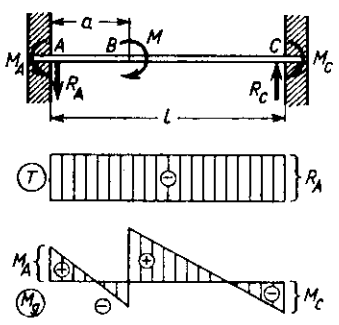
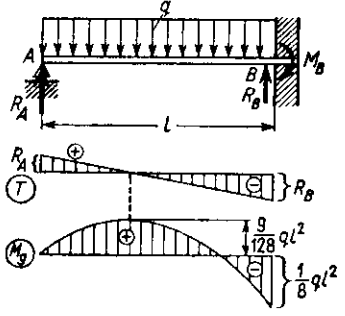
Oznaczenia jak w tabl. 5.1

Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
1		$R_A = \frac{5}{16}P, \quad R_C = \frac{11}{16}P, \quad M_C = \frac{3}{16}Pl,$ $M_{\max} = \frac{3}{16}Pl \quad \text{dla } x = l,$ $\theta_A = -\frac{Pl^2}{32EJ}, \quad f_B = \frac{7}{768} \frac{Pl^3}{EJ},$ $f_{\max} = 0,0093 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{dla } x = \frac{l}{\sqrt{5}} \approx 0,447l$
2		$R_A = P \frac{a^2}{2l^3} (3l - a), \quad R_C = P - R_A,$ $M_C = \frac{Pa}{2l^2} (a^2 - 3al + 2l^2),$ $M_{C\max} = 0,193Pl \quad \text{dla } a = 0,423l,$ $\theta_A = -\frac{Pa^2}{4EJ} \left(1 - \frac{a}{l}\right),$ $f_{\max} = f_B = 0,0098 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{dla } a = 0,586l$
3		$R_A = P \left(1 + \frac{3c}{2l}\right), \quad R_B = \frac{3c}{2l}P,$ $M_B = \frac{1}{2}Pc, \quad M_{\max} = Pc,$ $f_{\max} = \frac{Pl^3}{12EJ} \left[4 \left(\frac{c}{l}\right)^3 + 3 \left(\frac{c}{l}\right)^2 \right] =$ $= \frac{Pc^2}{12EJ} (4c + 3l) \quad \text{dla } x = 0$

Tablica 5.4 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
4		$R_A = R_C = \frac{1}{2}P, \quad M_A = M_C = \frac{1}{8}Pl,$ $M_{\max} = \frac{1}{8}Pl \quad \text{dla} \quad x = 0; \frac{1}{2}l, l,$ $\theta_A = \theta_B = \theta_C = 0, \quad \theta_{\max} = -\frac{Pl^2}{64EJ}$ dla $x = 0,25l$, $f_{\max} = f_B = \frac{Pl^3}{192EJ}$
5		$R_A = \frac{P(l-a)^2}{l^3}(2a+l), \quad R_C = \frac{Pa^2}{l^3}(3l-2a),$ $M_A = P \frac{a(l-a)^2}{l^2}, \quad M_C = P \frac{a^2(l-a)}{l^2},$ $(M_A)_{\max} = 0,148Pl \quad \text{dla} \quad a = \frac{1}{3}l;$ jeżeli $a \leq \frac{1}{2}l$, $f_{\max} = \frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \frac{a^2(l-a)^3}{(3l-2a)^2} \quad \text{dla} \quad x = \frac{l^2}{3l-2a}$
6		$R_A = \frac{3}{2} \frac{M}{l}, \quad R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}, \quad M_B = \frac{1}{2}M,$ $M_{\max} = M \quad \text{dla} \quad x = 0,$ $\theta_A = -\frac{Ml}{4EJ}, \quad f_{\max} = \frac{Ml^2}{27EJ} \quad \text{dla} \quad x = \frac{1}{3}l$

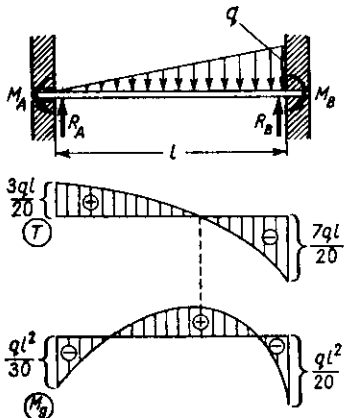
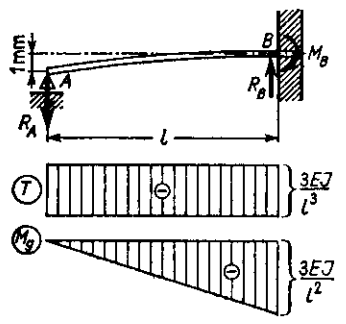
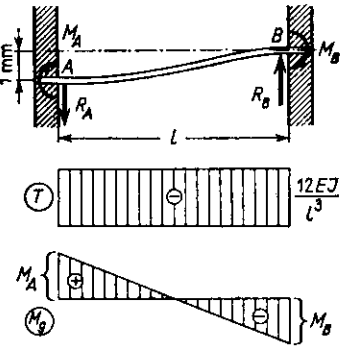
Tablica 5.4 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów tnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
7		$R_A = R_C = \frac{3}{2} \frac{M}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right),$ $M_C = \frac{1}{2} M \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right),$ $\theta_A = \frac{M}{EJ} \left(a - \frac{l}{4} - \frac{3}{4} \frac{a^2}{l} \right),$ $f_B = \frac{Ma}{EJ} \left[l - a + \frac{l^2 - a^2}{4l} \left(\frac{a^2}{l^2} - 3 \right) \right]$
8		$R_A = R_C = \frac{6Ma}{l^3} (l - a),$ $M_A = \frac{M}{l^2} (l^2 - 4la + 3a^2),$ $M_C = \frac{Ma}{l^2} (2l - 3a),$ $y = \frac{1}{6EJ} (R_A x^3 - 3M_A x^2) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq a$
9		$R_A = \frac{3}{8} ql, \quad R_B = \frac{5}{8} ql, \quad M_B = \frac{1}{8} ql^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2 \quad \text{dla } x = l,$ $\theta_A = -\frac{ql^3}{48EJ},$ $f_{\max} = \frac{ql^4}{185EJ} \approx 0,0054 \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla } x = 0,421l$

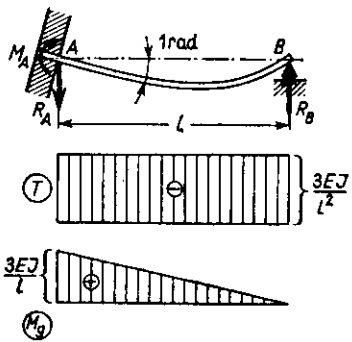
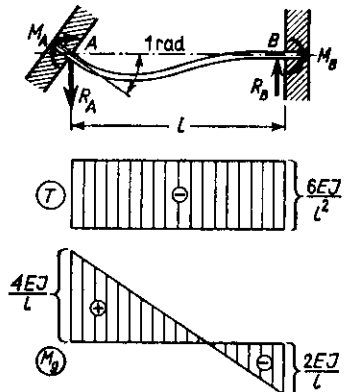
Tablica 5.4 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
10		$R_A = \frac{qc}{4} \left(4 + 3 \frac{c}{l} \right), \quad R_B = \frac{3}{4} \frac{qc^2}{l},$ $M_B = \frac{qc^2}{4}, \quad M_{\max} = \frac{1}{2} qc^2,$ $f_{\max} = \frac{qc^3}{8EJ} (l + c)$
11		$R_A = R_B = \frac{1}{2} ql, \quad M_A = M_B = \frac{ql^2}{12},$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{12} \quad \text{dla } x = 0 \quad \text{oraz } x = l,$ $M_{\theta(x=\frac{1}{2}l)} = \frac{ql^2}{24},$ $f_{\max} = \frac{ql^4}{384EJ} \quad \text{dla } x = \frac{1}{2} l$
12		$R_A = \frac{1}{10} ql, \quad R_B = \frac{4}{10} ql, \quad M_B = \frac{ql^2}{15},$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{15} \quad \text{dla } x = l,$ $\theta_A = -\frac{1}{120} \frac{ql^3}{EJ},$ $f_{\max} = \frac{2\sqrt{5}}{1875} \frac{ql^4}{EJ} \approx 0,00238 \frac{ql^4}{EJ}$ $\text{dla } x = \frac{\sqrt{5}}{5} l \approx 0,447l$

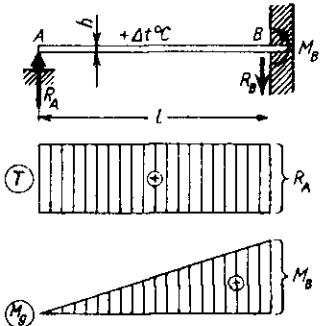
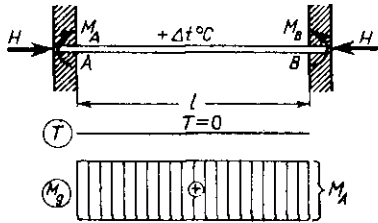
Tablica 5.4 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
13		$R_A = \frac{3}{20}ql, \quad R_B = \frac{7}{20}ql, \quad M_A = \frac{1}{30}ql^2,$ $M_B = \frac{1}{20}ql^2, \quad M_{\max} = \frac{1}{20}ql^2 \quad \text{dla } x = l;$ $f_{\max} = \frac{1}{764} \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla } x = 0,525l$
14	Podpora przegubowa obniżona o 1 mm 	$R_A = \frac{3EJ}{l^3} = R_B, \quad M_B = \frac{3EJ}{l^2},$ $M_{\max} = \frac{3EJ}{l^2} \quad \text{dla } x = l;$ równanie linii ugięcia: $y = -\frac{1}{2l^3} (2l^3 - 3l^2x + x^3),$ $f_{\max} = 1 \text{ mm dla } x = 0,$ $\theta_A = \frac{3}{2l}, \quad \theta_B = 0$
15	Lewa podpora obniżona o 1 mm 	$R_A = \frac{12EJ}{l^3} = R_B, \quad M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2},$ $M_{\max} = \frac{6EJ}{l^2} \quad \text{dla } x = 0 \quad \text{oraz dla } x = l;$ równanie linii ugięcia: $y = \frac{x^2}{l^3} (3l - 2x) - 1;$ $f_{\max} = 1 \text{ mm dla } x = 0,$ $\theta_A = \theta_B = 0$

Tablica 5.4 (cd.)

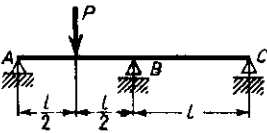
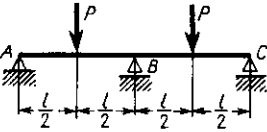
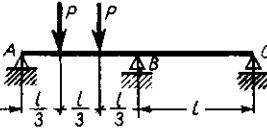
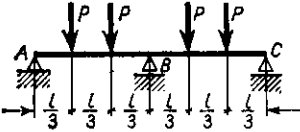
Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
16	Obrót utwierdzonego końca belki o kąt 1 rad 	$R_A = \frac{3EJ}{l^2} = R_B, \quad M_A = \frac{3EJ}{l},$ $M_{\max} = \frac{3EJ}{l} \quad \text{dla } x = 0,$ równanie linii ugięcia: $y = -\frac{x}{2l^2} (x^2 - 3lx + 2l^2),$ $f_{\max} = 0,193l \quad \text{dla } x = 0,422l,$ $\theta_A = -1, \quad \theta_B = \frac{1}{2}$
17	Obrót lewego utwierdzonego końca belki o kąt 1 rad 	$R_A = \frac{6EJ}{l^2} = R_B,$ $M_A = \frac{4EJ}{l}, \quad M_B = \frac{2EJ}{l},$ $M_{\max} = \frac{4EJ}{l} \quad \text{dla } x = 0,$ równanie linii ugięcia: $y = -\frac{x}{l^2} (x - l)^2;$ $f_{\max} = \frac{4}{27}l \quad \text{dla } x = \frac{1}{3}l,$ $\theta_A = -1, \quad \theta_B = 0$

Tablica 5.4 (cd.)

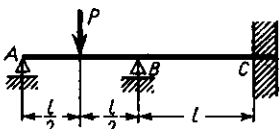
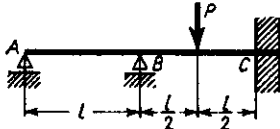
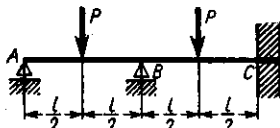
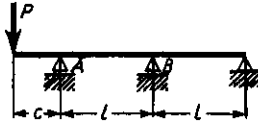
Lp.	Schemat obciążenia. Wykresy sił tnących i momentów gnących	Reakcje, maksymalny moment gnący, szczególne wartości kątów obrotu i ugięć
18	Nierównomierny przyrost temperatury górnych i dolnych włókien belki; górne włókna o temperaturze $\Delta t^{\circ}\text{C}$ wyższej niż dolne; prostoliniowy rozkład temperatury na grubości belki α – współczynnik rozszerzalności liniowej, h – grubość belki 	$R_A = \frac{3\alpha\Delta t EJ}{2hl} = R_B,$ $M_B = \frac{3\alpha\Delta t EJ}{2h},$ równanie linii ugięcia: $y = \frac{\alpha\Delta t x}{4hl} (x-l)^2;$ krzywizna: $\rho = \frac{\alpha\Delta t}{h} \left(\frac{3x}{2l} - 1 \right),$ $f_{\max} = 0,065 \frac{\alpha\Delta t l^2}{h} \quad \text{dla} \quad x = \frac{1}{3}l$
19	Założenia jak w poz. 18; oba końce utwierdzone 	$R_A = R_B = 0, \quad M_A = M_B = \frac{\alpha\Delta t EJ}{h};$ reakcja pozioma: $H = \alpha\Delta t EF,$ F – pole przekroju poprzecznego belki, $M_{\max} = \frac{\alpha\Delta t EJ}{h} \left. \vphantom{\frac{\alpha\Delta t EJ}{h}} \right\} \text{ dla całej długości belki}$ $y = 0$

Tablica 5.5. Wzory i wykresy dotyczące zginania wieloprzęsłowych belek statycznie niewyznaczalnych

Oznaczenia jak w tabl. 5.1

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment giący i strzałka ugięcia
1		$R_A = 0,406P, \quad R_B = 0,688P, \quad R_C = -0,094P,$ $M_B = -\frac{3}{32}Pl \approx -0,094Pl, \quad M_A = M_C = 0,$ $M_{\max} = \frac{13}{64}Pl \approx 0,203Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $f_{\max} = 0,015 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l$
2		$R_A = 0,3125P = R_C, \quad R_B = 1,375P,$ $M_B = -0,1875Pl, \quad M_A = M_C = 0,$ $M_{\max} = 0,156Pl, \quad f_{\max} = 0,00915 \frac{Pl^3}{EJ}$
3		$R_A = 0,833P, \quad R_B = \frac{4}{3}P \approx 1,333P,$ $R_C = -0,167P, \quad M_A = M_C = 0,$ $M_B = -\frac{1}{6}Pl \approx -0,167Pl,$ $M_{\max} = 0,278Pl \text{ w lewym przęśle},$ $f_{\max} = 0,025 \frac{Pl^3}{EJ}$
4		$R_A = R_C = \frac{2}{3}P, \quad R_B = \frac{8}{3}P, \quad M_A = M_C = 0,$ $M_B = -\frac{1}{3}Pl \approx -0,333Pl,$ $M_{\max} = 0,333Pl \text{ nad podporą B},$ $f_{\max} = 0,0147 \frac{Pl^3}{EJ}$

Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gnący i strzałka ugięcia
5		$R_A = \frac{11}{28}P \approx 0,393P, \quad R_B = \frac{43}{56}P \approx 0,767P,$ $R_C = -\frac{9}{56}P \approx -0,161P, \quad M_A = 0,$ $M_B = -\frac{3}{28}Pl \approx -0,107Pl,$ $M_C = \frac{3}{56}Pl \approx -0,0535Pl,$ $M_{\max} = \frac{11}{56}Pl \approx 0,196Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l$
6		$R_A = -\frac{3}{56}P \approx -0,0535P,$ $R_B = \frac{25}{56}P \approx 0,447P, \quad R_C = \frac{17}{28}P \approx 0,607P,$ $M_A = 0, \quad M_B = -\frac{3}{56}Pl \approx -0,0535Pl,$ $M_C = -\frac{9}{56}Pl \approx -0,161Pl,$ $M_{\max} = \frac{9}{56}Pl \approx 0,161Pl \quad \text{w punkcie C}$
7		$R_A = \frac{19}{56}P \approx 0,339P, \quad R_B = \frac{17}{14}P \approx 1,214P,$ $R_C = \frac{25}{56}P \approx 0,447P, \quad M_A = 0,$ $M_B = -\frac{9}{56}Pl \approx -0,161Pl,$ $M_C = -\frac{3}{28}Pl \approx -0,107Pl,$ $M_{\max} = \frac{19}{112}Pl \approx 0,169Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l$
8		$R_A = \left(1 + \frac{5c}{4l}\right)P, \quad R_B = -1,5\frac{c}{l}P,$ $R_C = \frac{c}{4l}P, \quad M_A = -Pc,$ $M_B = \frac{1}{4}Pc, \quad M_C = 0,$ $M_{\max} = Pc \quad \text{w punkcie A}$

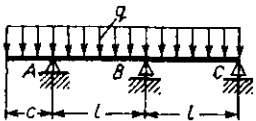
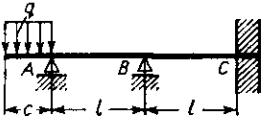
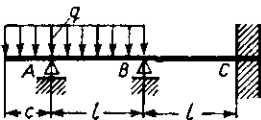
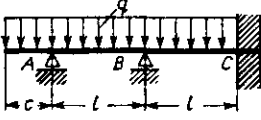
Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gnący i strzałka ugięcia
9		$R_A = P \left(1 + \frac{9}{7} \frac{c}{l} \right), \quad R_B = -\frac{12}{7} \frac{c}{l} P,$ $R_C = \frac{3}{7} \frac{c}{l} P, \quad M_A = -Pc, \quad M_B = \frac{2}{7} Pc,$ $M_C = -\frac{1}{7} Pc,$ $M_{\max} = Pc \text{ w punkcie A}$
10		$R_A = P \left(1 + \frac{3}{2} \frac{c}{l} \right) = R_C, \quad R_B = -3 \frac{c}{l} P,$ $M_A = -Pc, \quad M_B = \frac{1}{2} Pc, \quad M_C = -Pc,$ $M_{\max} = Pc \text{ w punktach A i C}$
11		$R_A = \frac{7}{16} ql = 0,4375ql,$ $R_B = \frac{5}{8} ql = 0,625ql,$ $R_C = -\frac{1}{16} ql = 0,0625ql,$ $M_B = -\frac{1}{16} ql^2 = 0,0625ql^2, \quad M_A = M_C = 0,$ $M_{\max} = \frac{49}{512} ql^2 \approx 0,096ql^2 \quad \text{dla } x = \frac{7}{16} l$
12		$R_A = \frac{3}{8} ql = 0,375ql = R_C,$ $R_B = \frac{5}{4} ql = 1,25ql, \quad M_A = M_C = 0,$ $M_B = -\frac{ql^2}{8} = -0,125ql^2,$ $M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2 = 0,125ql^2 \quad \text{nad podporą B,}$ $f_{\max} = 0,0052 \frac{ql^4}{EJ}$

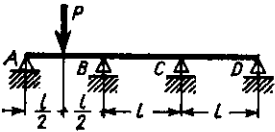
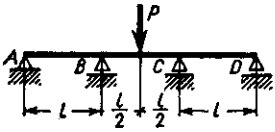
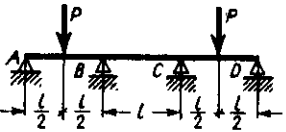
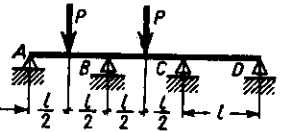
Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gnący i strzałka ugięcia
13		$R_A = \frac{3}{7}ql, \quad R_B = \frac{19}{28}ql, \quad R_C = -\frac{3}{28}ql,$ $M_A = 0, \quad M_B = -\frac{ql^2}{14}, \quad M_C = \frac{ql^2}{28},$ $M_{\max} = \frac{9}{98}ql^2 \approx 0,092ql^2 \quad \text{dla } x = \frac{3}{7}l$
14		$R_A = -\frac{ql}{28}, \quad R_B = \frac{13}{28}ql, \quad R_C = \frac{4}{7}ql,$ $M_A = 0, \quad M_B = -\frac{ql^2}{28}, \quad M_C = -\frac{3}{28}ql^2,$ $M_{\max} = \frac{3}{28}ql^2 \approx 0,107ql^2 \quad \text{w punkcie C}$
15		$R_A = \frac{11}{28}ql, \quad R_B = \frac{8}{7}ql, \quad R_C = \frac{13}{28}ql,$ $M_A = 0, \quad M_B = -\frac{3}{28}ql^2, \quad M_C = -\frac{ql^2}{14},$ $M_{\max} = \frac{3}{28}ql^2 \approx 0,107ql^2 \quad \text{nad podporą B}$
16		$R_A = qc \left(1 + \frac{5c}{8l}\right), \quad R_B = -\frac{3}{4} \frac{qc^2}{l},$ $R_C = \frac{qc^2}{8l}, \quad M_A = -\frac{qc^2}{2}, \quad M_B = \frac{qc^2}{8},$ $M_{\max} = \frac{1}{2}qc^2 \quad \text{nad podporą A}$
17		$R_A = \frac{q}{16l} (7l^2 + 10c^2 + 16lc),$ $R_B = \frac{q}{8l} (5l^2 - 6c^2),$ $R_C = \frac{q}{16l} (2c^2 - l^2),$ $M_A = -\frac{qc^2}{2}, \quad M_C = 0,$ $M_B = \frac{q}{16} (2c^2 - l^2)$

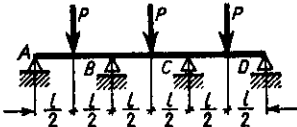
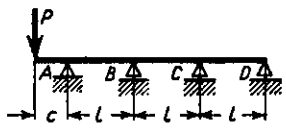
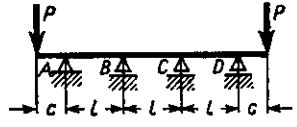
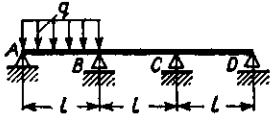
Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gący i strzałka ugięcia
18		$R_A = \frac{q}{8l}(3l^2 + 5c^2 + 8lc),$ $R_B = \frac{q}{4l}(5l^2 - 3c^2), \quad R_C = \frac{q}{8l}(3l^2 + c^2),$ $M_A = -\frac{qc^2}{2}, \quad M_C = 0,$ $M_B = \frac{q}{8}(c^2 - l^2)$
19		$R_A = \frac{qc}{14l}(14l + 9c), \quad R_B = -\frac{6}{7} \frac{qc^2}{l},$ $R_C = \frac{3}{14} \frac{qc^2}{l}, \quad M_A = -\frac{qc^2}{2}, \quad M_B = \frac{qc^2}{7},$ $M_C = -\frac{qc^2}{14}, \quad M_{\max} = \frac{qc^2}{2} \text{ nad podporą } A$
20		$R_A = \frac{q}{14l}(6l^2 + 9c^2 + 14lc),$ $R_B = \frac{q}{28l}(19l^2 - 24c^2),$ $R_C = \frac{3q}{28l}(2c^2 - l^2),$ $M_A = -\frac{qc^2}{2}, \quad M_B = \frac{q}{14}(2c^2 - l^2),$ $M_C = \frac{q}{28}(l^2 - 2c^2)$
21		$R_A = \frac{q}{28l}(11l^2 + 18c^2 + 28lc),$ $R_B = \frac{2}{7} \frac{q}{l}(4l^2 - 3c^2),$ $R_C = \frac{q}{28l}(13l^2 + 6c^2),$ $M_A = -\frac{qc^2}{2}, \quad M_B = \frac{q}{28}(4c^2 - 3l^2),$ $M_C = -\frac{q}{14}(l^2 + c^2)$

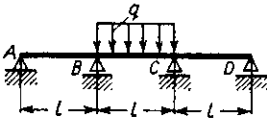
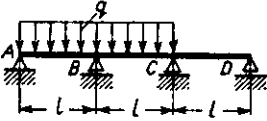
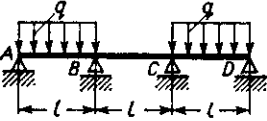
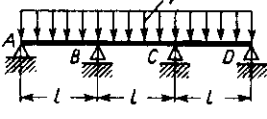
Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gnący i strzałka ugięcia
22		$R_A = \frac{4}{10}P = 0,4P, \quad R_B = \frac{15}{20}P = 0,725P,$ $R_C = -\frac{3}{20}P = -0,15P,$ $R_D = \frac{1}{40}P = 0,025P, \quad M_A = M_D = 0,$ $M_B = -\frac{1}{10}Pl = -0,1Pl,$ $M_C = \frac{1}{40}Pl = 0,025Pl,$ $M_{\max} = 0,2Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $f_{\max} = 0,0146 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l$
23		$R_A = R_D = -0,075P, \quad R_B = R_C = 0,575P,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = M_C = -0,075Pl,$ $M_{\max} = 0,175Pl \quad \text{dla } x = \frac{3}{2}l,$ $f_{\max} = 0,0115 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{pod siłą } P$
24		$R_A = R_D = 0,425P, \quad R_B = R_C = 0,575P,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = M_C = -0,075Pl,$ $M_{\max} = 0,2125Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $f_{\max} = 0,0162 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{pod siłą } P$
25		$R_A = 0,325P, \quad R_B = 1,30P, \quad R_C = 0,425P,$ $R_D = -0,05P, \quad M_A = M_D = 0,$ $M_B = -0,175Pl, \quad M_C = -0,05Pl$ $M_{\max} = 0,175Pl \quad \text{nad podporą } B$

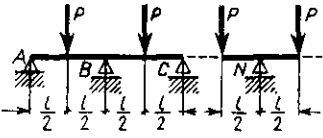
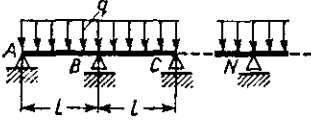
Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment giący i strzałka ugięcia
26		$R_A = R_D = 0,35P, \quad R_B = R_C = 1,15P,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = M_C = -0,15Pl,$ $M_{\max} = 0,175Pl \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $f_{\max} = 0,0115 \frac{Pl^3}{EJ} \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}l,$ $f_{(x=\frac{3}{2}l)} = 0,0021 \frac{Pl^3}{EJ}$
27		$R_A = P \left(1 + 1,267 \frac{c}{l} \right),$ $R_B = -1,60 \frac{c}{l} P, \quad R_C = 0,40 \frac{c}{l} P,$ $R_D = -0,067 \frac{c}{l} P,$ $M_A = -Pc, \quad M_B = 0,2667Pc,$ $M_C = -0,0667Pc, \quad M_D = 0$
28		$R_A = R_D = P \left(1 + 1,20 \frac{c}{l} \right),$ $R_B = R_C = -1,20 \frac{c}{l} P,$ $M_A = M_D = -Pc, \quad M_B = M_C = 0,20Pc,$
29		$R_A = \frac{13}{30} ql \approx 0,433ql,$ $R_B = 0,65ql, \quad R_C = -0,1ql,$ $R_D = 0,0167ql, \quad M_A = M_D = 0,$ $M_B = -0,0667ql^2, \quad M_C = -0,0167ql^2,$ $M_{\max} = 0,0667ql^2 \quad \text{nad podporą B},$ $f_{\max} = 0,0088 \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla przęsła AB}$

Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gnący i strzałka ugięcia
30		$R_A = R_D = -0,05ql, \quad R_B = R_C = 0,55ql,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = M_C = -0,05ql^2,$ $M_{\max} = 0,075ql^2 \quad \text{dla } x = \frac{3}{2}l,$ $f_{\max} = 0,0068 \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla } x = \frac{3}{2}l$
31		$R_A = 0,383ql, \quad R_B = 1,20ql,$ $R_C = 0,450ql, \quad R_D = -0,033ql,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = -0,1167ql^2,$ $M_C = -0,0333ql^2,$ $M_{\max} = 0,1167ql^2 \quad \text{nad podporą B}$
32		$R_A = R_D = 0,45ql, \quad R_B = R_C = 0,55ql,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = M_C = -0,05ql^2,$ $M_{\max} = 0,1013ql^2 \quad \text{w przęśle AB},$ $f_{\max} = 0,0091 \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla przęsła AB}$
33		$R_A = R_D = 0,40ql, \quad R_B = R_C = 1,10ql,$ $M_A = M_D = 0, \quad M_B = M_C = -0,10ql^2,$ $M_{\max} = 0,10ql^2 \quad \text{nad podporą B i C},$ $f_{\max} = 0,0068 \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{dla przęsła AB},$ $f_{(x=\frac{3}{2}l)} = 0,0005 \frac{ql^4}{EJ}$

Tablica 5.5 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Reakcje podporowe, momenty podporowe, maksymalny moment gnący i strzałka ugięcia
34	Belka wielopodporowa: każde przęsło obciążone pośrodku siłą P, długości wszystkich przęseł równe l 	$R_A = 0,3415P, R_B = 1,2009P,$ $R_C = 0,9464P, R_N = P,$ $M_A = 0, M_B = -0,1585Pl,$ $M_C = -0,1161Pl, M_N = -0,125Pl,$ $M_{\max} = 0,1708Pl \text{ dla } x = \frac{1}{2}l,$ w n-tym przęśle $M_{\max} = 0,125Pl$
35	Belka wielopodporowa: długość każdego przęsła jednakowa, równa l, obciążenie ciągłe o intensywności q 	$R_A = 0,3943ql, R_B = 1,134ql,$ $R_C = 0,964ql, R_N = ql,$ $M_A = 0, M_B = -0,1057ql^2,$ $M_C = -0,0774ql^2, M_N = 0,0833ql^2,$ $M_{\max} = 0,1057ql^2 \text{ nad podporą B},$ w n-tym przęśle $M_{\max} = 0,0833ql^2$

5.2. Przykłady rozwiązania belek metodą superpozycji

Przykład 5.1. Obliczyć strzałkę ugięcia w punkcie A belki przedstawionej na rys. 5.3.

Rozwiązanie. Układ powyższy jest superpozycją dwóch układów prostych, podanych na rys. 5.4, więc

$$f_A = f_{A1} + f_{A2}$$

gdzie f_{A1} oznacza ugięcie punktu A układu przedstawionego na rys. 5.4a, f_{A2} zaś – ugięcie punktu A układu 5.4b.

Z tablicy 5.1 (poz. 1) dla $P = P_1$ i $l = a = 2e$ odczytujemy

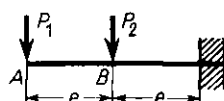
$$f_{A1} = \frac{P_1(2e)^2}{6EJ} (3 \cdot 2e - 2e) = \frac{8P_1e^3}{3EJ}$$

Z tablicy 5.1 (poz. 1) dla $P = P_2$, $l = 2e$ oraz $a = e$ wynika, że

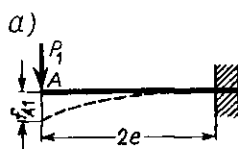
$$f_{A2} = \frac{P_2 e^2}{6EJ} (3 \cdot 2e - e) = \frac{5}{6} \frac{P_2 e^3}{6EJ}$$

Całkowita strzałka ugięcia punktu A ma wartość

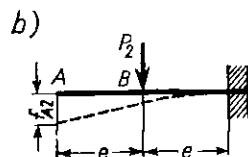
$$f_A = f_{A1} + f_{A2} = \frac{8P_1 e^3}{3EJ} + \frac{5P_2 e^3}{6EJ} = (16P_1 + 5P_2) \frac{e^3}{6EJ}$$



Rys. 5.3



Rys. 5.4



Przykład 5.2. Obliczyć kąt obrotu końca A belki podanej na rys. 5.5.

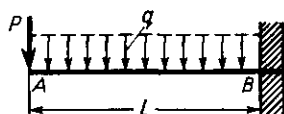
Rozwiązanie. Traktując belkę jako superpozycję belek rozpatrywanych w tabl. 5.1 (poz. 1 i poz. 3), przy czym $a = l$, mamy

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} = \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{ql^3}{6EJ} = (3P + ql) \frac{l^2}{6EJ}$$

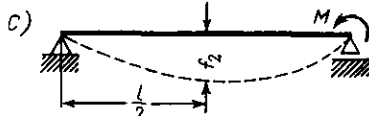
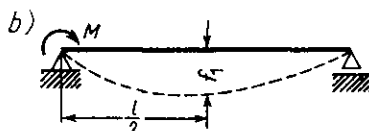
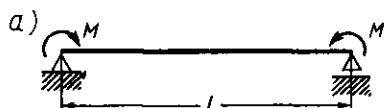
Przykład 5.3. Obliczyć ugięcie f_o w środku długości dla belki podanej na rys. 5.6a.

Rozwiązanie. Belkę traktujemy jako superpozycję układu podanego w tabl. 5.2 poz. 5 (rys. 5.6b) oraz identycznego układu obroconego (rys. 5.6c), zatem

$$f_1 = \frac{Ml^2}{16EJ}, \quad f_2 = \frac{Ml^2}{16EJ}, \quad f_o = f_1 + f_2 = \frac{Ml^2}{16EJ} + \frac{Ml^2}{16EJ} = \frac{Ml^2}{8EJ}$$



Rys. 5.5



Rys. 5.6

6. Obliczanie ram

W odróżnieniu od kratownic, *ramami* nazywamy takie konstrukcje prętowe, w których przenoszenie obciążeń jest uwarunkowane sztywnością węzłów. W obliczeniach przyjmuje się założenie, że kąt obrotu końców wszystkich prętów zbiegających się w danym węźle jest jednakowy.

Wzory obliczeniowe dla niektórych przypadków ram statycznie wyznaczalnych podano w tabl. 6.1, a dla ram statycznie niewyznaczalnych – w tabl. 6.2. W tablicach tych przyjęto, że moment gnący w dowolnym przekroju ramy jest dodatni wówczas, gdy powoduje ściskanie zewnętrznych włókien pręta.

Tablica 6.1. Ramy statycznie wyznaczalne

Oznaczenia: EJ – sztywność zginania prętów ramy, f_x – składowa pozioma przemieszczenia, f_y – składowa pionowa przemieszczenia, θ – kąt obrotu węzła, M – moment gnący

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
1			$H_A = 0,$ $V_A = V_B = \frac{1}{2} P,$ $f_{Bx} = \frac{Phl^2}{8EJ},$ $M_{\max} = \frac{1}{4} Pl \text{ w punkcie } C$
2			$H_A = P, V_A = V_B = P \frac{h}{l},$ $f_{Bx} = \frac{Ph^2}{6EJ} (3l + 2h),$ $f_{Cy} = 0, f_{Cx} = \frac{Ph^2}{3EJ} (l + h),$ $M_{\max} = Ph \text{ w punkcie } D$

Tablica 6.1 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
3			$H_A = P, \quad V_A = V_B = 0,$ $f_{Bx} = \frac{Pl^2}{3EJ} (3l + 2h),$ $M_{\max} = Ph$
4			$H_A = 0, \quad V_A = V_B = \frac{M_0}{l},$ $f_{Bx} = \frac{M_0 h l}{2EJ},$ $M_{\max} = M_0 \text{ w punkcie C}$
5			$H_A = 0, \quad V_A = V_B = \frac{M_0}{l},$ $\theta_C = \frac{Ml}{12EJ},$ $M_{\max} = \frac{1}{2} M_0 \text{ w punkcie C}$
6			$H_A = 0, \quad V_A = V_B = \frac{1}{2} ql,$ $f_{Bx} = \frac{qhl^3}{24EJ},$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \text{ dla } x = \frac{1}{2} l$

Tablica 6.1 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
7			$H_A = qh, V_A = V_B = \frac{qh^2}{2l},$ $f_{Bx} = \frac{qh^3}{24EJ} (6l + 5h),$ $M_{\max} = \frac{1}{2} qh^2 \text{ w punkcie D}$
8			$H_A = qh, V_A = V_B = \frac{qh^2}{2l},$ $f_{Bx} = \frac{qh^3}{24EJ} (18l + 11h),$ $M_{\max} = qh^2 \text{ w punkcie D}$
9			$H_A = 0, V_A = P, M_A = Pl,$ $f_{Cx} = \frac{Plh^2}{2EJ},$ $f_{Cy} = \frac{Pl^2}{2EJ} (l + 3h),$ $\theta_C = \frac{Pl}{2EJ} (l + 2h),$ $M_{\max} = Pl$
10			$H_A = P, V_A = 0, M_A = Ph,$ $f_{Cx} = \frac{Ph^3}{3EJ}, f_{Cy} = \frac{Ph^2 l}{2EJ},$ $M_{\max} = Ph \text{ w punkcie A}$
11			$H_A = 0, V_A = 0, M_A = M_0,$ $f_{Cx} = \frac{M_0 h^2}{2EJ},$ $f_{Cy} = \frac{M_0 l}{2EJ} (l + 2h),$ $\theta_C = \frac{M_0}{EJ} (l + h), M_{\max} = M_0$

Tablica 6.1 (cd.)

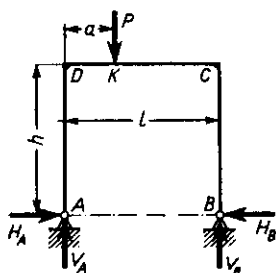
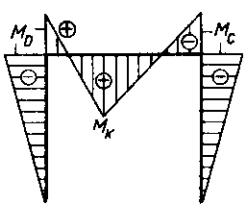
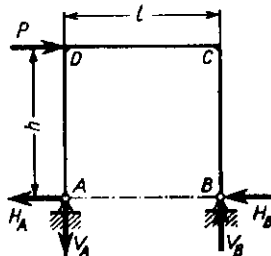
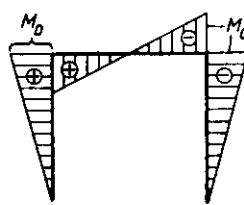
Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
12			$H_A = 0, V_A = ql,$ $M_A = \frac{1}{2} ql^2,$ $f_{Cx} = \frac{qh^2 l^2}{4EJ},$ $f_{Cy} = \frac{ql^3}{8EJ} (l + 4h),$ $M_{\max} = \frac{1}{2} ql^2$
13			$H_A = P, V_A = 0, M_A = M_0,$ $f_{Dx} = \frac{Ph^3}{3EJ} (3l + 2h),$ $f_{Dy} = \frac{Phl}{2EJ} (l + h),$ $M_{\max} = Ph$
14			$H_A = 0, V_A = P, M_A = Pl,$ $f_{Dx} = \frac{Phl}{2EJ} (l + h),$ $f_{Dy} = \frac{Pl^2}{2EJ} (l + 3h),$ $M_{\max} = Pl$
15			$H_A = P, V_A = 0, M_A = Ph,$ $f_{Dx} = \frac{Ph^3}{6EJ}, f_{Dy} = \frac{Plh^2}{2EJ},$ $f_{Cx} = \frac{Ph^3}{3EJ}, f_{Cy} = \frac{Plh^2}{2EJ},$ $M_{\max} = Ph \text{ w punkcie } A$

Tablica 6.1 (cd.)

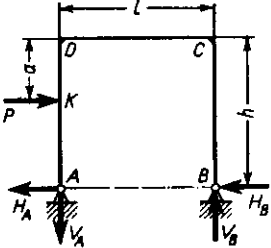
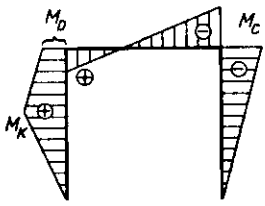
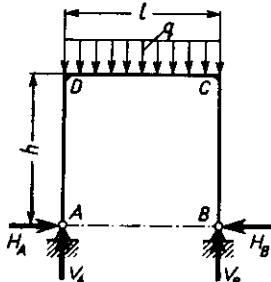
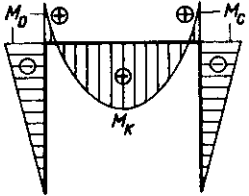
Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
16			$H_A = 0, V_A = 0, M_A = M_0,$ $f_{Dx} = \frac{M_0 h}{EJ} (l + h),$ $f_{Dy} = \frac{M_0 l}{2EJ} (l + 2h),$ $\theta_D = \frac{M_0}{EJ} (l + 2h), M_{\max} = M_0$
17			$H_A = 0, V_A = ql,$ $M_A = \frac{1}{2} ql^2,$ $f_{Dx} = \frac{ql^2 h}{12EJ} (2l + 3h),$ $f_{Dy} = \frac{ql^2}{8EJ} (l + 4h),$ $M_{\max} = \frac{1}{2} ql^2$
18			zbliżenie końców pręta $f = \frac{Pa^2}{3EJ} (2a + 3l),$ $M_{\max} = Pa$
19			zbliżenie końców pręta $f = \frac{M_0 a}{EJ} (a + l),$ $M_{\max} = M_0$
20			zbliżenie końców pręta $f = \frac{qa^2}{4EJ} (a + 2l),$ $M_{\max} = \frac{1}{2} qa^2$

Tablica 6.2. Ramy statycznie niewyznaczalne

Oznaczenia: J_1 – moment bezwładności na zginanie pionowych prętów ramy, J_2 – moment bezwładności na zginanie poziomych prętów ramy, $p = J_2/J_1$, $e = h/l$

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
1			$V_A = P \frac{l-a}{l}, \quad V_B = P \frac{a}{l},$ $H_A = H_B = \frac{3Pa}{2hl} \frac{l-a}{2pe+3},$ $M_C = M_D = \frac{3Pa}{2l} \frac{l-a}{2pe+3},$ $M_K = \frac{Pa(l-a)}{2l} \frac{2pe+3}{pe+3}$
2			$V_A = V_B = P \frac{h}{l},$ $H_A = H_B = \frac{1}{2}P,$ $M_C = M_D = \frac{1}{2}Ph$

Tablica 6.2 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
3			$V_A = V_B = P \frac{h-a}{l},$ $H_A = \frac{P}{2h} \left[h+a - (h-a) \times \right. \\ \left. \times \frac{ap(2h-a)}{h(2hp+3l)} \right],$ $H_B = \frac{P(h-a)}{2h} \times \left[1 + \frac{ap(2h-a)}{h(2hp+3l)} \right],$ $M_C = \frac{1}{2} P(h-a) \times \left[1 + \frac{ap(2h-a)}{h(2hp+3l)} \right],$ $M_D = \frac{1}{2} P(h-a) \times \left[1 - \frac{ap(2h-a)}{h(2hp+3l)} \right],$ $M_K = \frac{P(h-a)}{2h} \left[h+a - (h-a) \frac{ap(2h-a)}{h(2hp+3l)} \right]$
4			$V_A = V_B = \frac{1}{2} ql,$ $H_A = H_B = \frac{ql}{4e(2pe+3)},$ $M_C = M_D = \frac{ql^3}{4(2pe+3)},$ $M_K = \frac{ql^2}{8} \frac{2pe+1}{2pe+3}$

Tablica 6.2 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
5			$V_A = V_B = \frac{qh^2}{2l},$ $H_A = \frac{qh}{8} \frac{11pe + 30}{2pe + 3},$ $H_B = \frac{qh}{8} \frac{5pe + 6}{2pe + 3},$ $M_C = \frac{qh^2}{8} \frac{5pe + 6}{2pe + 3},$ $M_D = \frac{3qh^2}{8} \frac{pe + 2}{2pe + 3}$
6			$V_A = \frac{Pa[l^2(2pe + 3) - a^2]}{2l^3(pe + 1)},$ $V_B = P - V_A,$ $H_A = H_B = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{2hl^2(pe + 1)},$ $M_C = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{2l^2(pe + 1)},$ $M_D = \frac{a}{l} [M_C - P(l - a)]$
7			$V_A = \frac{ql}{8} \frac{4pe + 5}{pe + 1},$ $V_B = \frac{ql}{8} \frac{4pe + 3}{pe + 1},$ $H_A = H_B = \frac{ql^2}{8h(pe + 1)},$ $M_C = \frac{ql^2}{8(pe + 1)}$

Tablica 6.2 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
8			$V_A = \frac{Pa}{l} \left(1 + \frac{2}{l^2} \frac{l^2 - a^2}{3pe + 4} \right),$ $V_B = \frac{P(l-a)}{l} \times$ $\times \left(1 - \frac{2a}{l^2} \frac{l+a}{3pe+4} \right),$ $H_A = H_B = \frac{3Pa}{hl^2} \frac{l^2 - a^2}{3pe+4},$ $M_A = \frac{Pa}{l^2} \frac{l^2 - a^2}{3pe+4},$ $M_C = \frac{2Pa}{l^2} \frac{l^2 - a^2}{3pe+4},$ $M_D = \frac{Pa(l-a)}{l} \times$ $\times \left(1 - \frac{2a}{l^2} \frac{l+a}{3pe+4} \right)$
9			$V_A = V_B =$ $= \frac{3Pa(h-a)^2}{hl^2} \frac{p}{3pe+4},$ $H_A = \frac{Pa}{h} \left[1 + \frac{h-a}{h^2} \times \right.$ $\times \frac{3ape+2(h+a)}{3pe+4} -$ $\left. - \frac{3(h-a)^2}{hl} \frac{p}{3pe+4} \right],$ $H_B = P - H_A$ $M_A = \frac{Pa(h-a)}{h^2} \times$ $\times \frac{3ape+2(h+a)}{3pe+4},$ $M_C = \frac{3Pa(h-a)^2}{hl} \frac{p}{3pe+4},$ $M_D = H_A(h-a) - M_A$

Tablica 6.2 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
10			$V_A = \frac{3}{2}ql \frac{pe+1}{3pe+4},$ $V_B = \frac{ql}{2} \frac{3pe+5}{3pe+4},$ $H_A = H_B = \frac{3ql^2}{4h(3pe+4)},$ $M_A = \frac{ql^2}{4(3pe+4)},$ $M_C = \frac{ql^2}{2(3pe+4)}$
11			$V_A = V_B = \frac{qh}{4} \frac{pe^2}{3pe+4},$ $H_A = \frac{qh}{2} \frac{3pe+5}{3pe+4},$ $H_B = \frac{3}{2}qh \frac{pe+1}{3pe+4},$ $M_A = \frac{qh^2}{4} \frac{pe+2}{3pe+4},$ $M_C = \frac{qh^2}{4} \frac{pe}{3pe+4}$
12			$V_A = \frac{P(l-a)}{2l^3} \times$ $\times \frac{pe[l^2 + (l-a)^2] + 2l(l+a)}{pe+1},$ $V_B = P - V_A,$ $H_A = H_B = \frac{3Pa^2}{2hl^2} \frac{l-a}{pe+1},$ $M_A = \frac{Pa^2}{2l^2} \frac{l-a}{pe+1},$ $M_B = \frac{Pa(l-a)}{2l^2} \times$ $\times \frac{pe(2l-a) + 2(l-a)}{pe+1},$ $M_A = \frac{Pa^2}{l^2} \frac{l-a}{pe+1},$ $M_D = V_B(l-a) - M_B$

Tablica 6.2 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
13			$V_A = \frac{ql}{8} \frac{3pe+4}{pe+1},$ $V_B = \frac{ql}{8} \frac{5pe+4}{pe+1},$ $H_A = H_B = \frac{ql^2}{8h(pe+1)},$ $M_A = \frac{ql^2}{24(pe+1)},$ $M_B = \frac{ql^2}{24} \frac{3pe+2}{pe+1},$ $M_C = \frac{ql^2}{12(pe+1)}$
14			$V_A = V_B = \frac{1}{2}P,$ $H_A = H_B = \frac{3Pl}{8h(pe+2)},$ $M_A = M_B = \frac{Pl}{8(pe+2)},$ $M_C = M_D = \frac{Pl}{4(pe+2)},$ $M_K = \frac{Pl}{4} \frac{pe+1}{pe+2}$
15			$V_A = V_B = \frac{1}{2}ql,$ $H_A = H_B = \frac{ql^2}{4h(pe+2)},$ $M_A = M_B = \frac{ql^2}{12(pe+2)},$ $M_C = M_D = \frac{ql^2}{6(pe+2)},$ $M_K = \frac{ql^2}{24} \frac{3pe+2}{pe+2}$

Tablica 6.2 (cd.)

Lp.	Schemat ramy	Wykres momentów gnących	Wzory obliczeniowe
16			$V_A = V_B = qh \frac{pe^2}{6pe+1},$ $H_A = \frac{qh}{4} \left[\frac{8pe+17}{2(pe+2)} - \frac{4pe+3}{6pe+1} \right],$ $H_B = \frac{qh}{4} \left[\frac{4pe+3}{6pe+1} - \frac{1}{2(pe+2)} \right],$ $M_A = \frac{qh^2}{4} \left[\frac{4pe+1}{6pe+1} + \frac{pe+3}{6(pe+2)} \right],$ $M_B = \frac{qh^2}{4} \left[\frac{4pe+1}{6pe+1} - \frac{pe+3}{6(pe+2)} \right],$ $M_C = qh^2 \frac{pe}{4} \left[\frac{2}{6pe+1} + \frac{1}{6(pe+2)} \right],$ $M_D = qh^2 \frac{pe}{4} \left[\frac{6}{6pe+1} - \frac{1}{6(pe+2)} \right]$

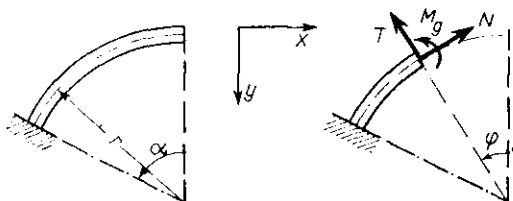
7. Pręty zakrzywione o małej krzywiznie względnej

W rozdziale tym podano wzory obliczeniowe dla prętów zakrzywionych o małej krzywiznie względnej, tj. takich, w których stosunek wysokości h przekroju poprzecznego do promienia r krzywizny pręta jest mniejszy niż $1/5$ lub $1/10$ w zależności od błędu, jaki dopuszczamy w obliczeniach ($h/r \leq 1/5$ lub $h/r \leq 1/10$; w zależności od kształtu przekroju poprzecznego błąd ten osiąga wartość 5 lub 2%).

Promień krzywizny r dotyczy linii utworzonej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pręta w stanie nieodkształconym.

Wzory obliczeniowe dla różnych przypadków prętów zakrzywionych podano w tabl. 7.1-7.4.

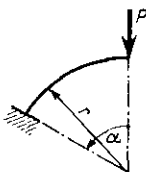
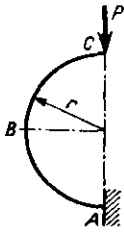
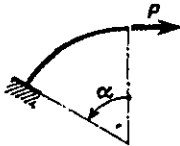
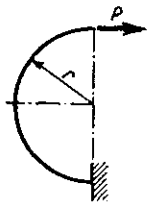
Tablica 7.1. Pręty zakrzywione statycznie wyznaczalne, zginane w płaszczyźnie rysunku



Rys. 7.1

Oznaczenia według rys.7.1: N – siła normalna; T – siła tnąca; M_g – moment gnący w przekroju, określonym kątem φ . Pozostałe oznaczenia: f_x oraz f_y – składowe pozioma i pionowa przemieszczenia (strzałki ugięcia) końca pręta; θ – kąt obrotu przekroju poprzecznego końca pręta; EJ – sztywność zginania

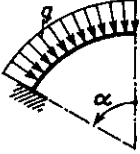
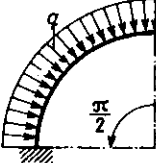
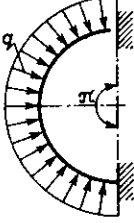
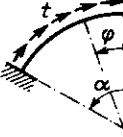
Tablica 7.1 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
1		$N = -P \sin \varphi, \quad T = -P \cos \varphi,$ $M_g = -Pr \sin \varphi,$ $f_x = \frac{Pr^3}{EJ} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}, \quad f_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right),$ $\theta = \frac{Pr^2}{EJ} (1 - \cos \alpha)$
2		$f_x = \frac{2Pr^3}{EJ}, \quad f_y = \frac{\pi Pr^3}{2EJ}, \quad \theta = \frac{2Pr^2}{EJ},$ $M_{\max} = Pr \text{ w punkcie B}$
3		$N = P \cos \varphi, \quad T = -P \sin \varphi,$ $M_g = -Pr(1 - \cos \varphi),$ $f_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right),$ $f_y = \frac{Pr^3}{2EJ} (1 - \cos \alpha)^2,$ $\theta = \frac{Pr^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$
4		$f_x = \frac{3\pi Pr^3}{2EJ}, \quad f_y = \frac{2Pr^3}{EJ},$ $\theta = \frac{\pi Pr^2}{EJ},$ $M_{\max} = 2Pr \text{ w miejscu utwierdzenia}$

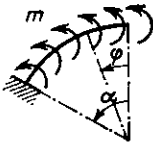
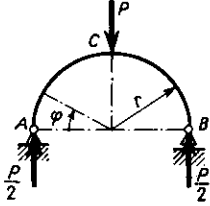
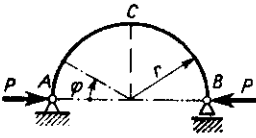
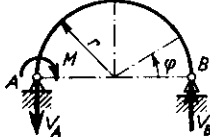
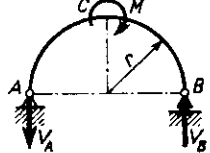
Tablica 7.1 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
5		$N = -P \cos(\alpha - \varphi), \quad T = -P \sin(\alpha - \varphi),$ $M_g = -Pr [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha],$ $f_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \right),$ $f_y = \frac{Pr^3}{2EJ} \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right),$ $\theta = \frac{Pr^2}{EJ} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$
6		$N = P \sin(\alpha - \varphi), \quad T = -P \cos(\alpha - \varphi),$ $M_g = -Pr [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)],$ $f_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{3}{4} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha \right),$ $f_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right),$ $\theta = \frac{Pr^2}{EJ} (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1)$
7		$N = 0, \quad T = 0, \quad M_g = -M,$ $f_x = \frac{Mr^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha),$ $f_y = \frac{Mr^2}{EJ} (1 - \cos \alpha), \quad \theta = \frac{Mr}{EJ} \alpha$
8		$f_x = \frac{Mr^2}{EJ} (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1),$ $f_y = \frac{Mr^2}{EJ} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \quad \theta = \frac{Mr}{EJ} \alpha$

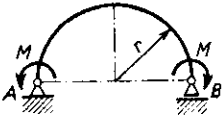
Tablica 7.1 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
9		$N = qr(\cos\varphi - 1), \quad T = -qr\sin\varphi,$ $M_g = qr^2(\cos\varphi - 1),$ $f_x = \frac{qr^4}{EJ} \left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right),$ $f_y = \frac{qr^4}{2EJ} (1 - \cos\alpha)^2,$ $\theta = \frac{qr^3}{EJ} (\alpha - \sin\alpha)$
10		$f_x = \frac{qr^4}{EJ} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right), \quad f_y = \frac{qr^4}{2EJ},$ $\theta = \frac{qr^3}{EJ} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \quad M_{\max} = qr^2 \text{ w miejscu utwierdzenia}$
11		$f_x = \frac{3\pi}{2} \frac{qr^4}{EJ}, \quad f_y = \frac{qr^4}{EJ}, \quad \theta = \frac{\pi qr^3}{EJ},$ $M_{\max} = 2qr^2 \text{ w miejscu utwierdzenia}$
12	Na całej długości działają na pręt siły styczne o natężeniu t N/mm 	$N = tr\sin\varphi, \quad T = tr(1 - \cos\varphi),$ $M_g = -tr^2(\varphi - \sin\varphi),$ $f_x = \frac{tr^4}{EJ} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\sin\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{2} \right),$ $f_y = \frac{tr^4}{2EJ} \left(\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\alpha - \alpha\cos\alpha \right),$ $\theta = \frac{tr^3}{EJ} \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \cos\alpha - 1 \right)$

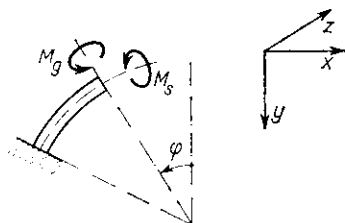
Tablica 7.1 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
13	Na całej długości w płaszczyźnie pręta działają pary sił o momencie m, przypadającym na 1 mm długości pręta: m N-mm/mm 	$N = 0, \quad T = 0, \quad M_g = mr\varphi,$ $f_x = \frac{mr^3}{EJ} (1 - \cos\alpha - \alpha \sin\alpha),$ $f_y = \frac{mr^3}{EJ} (\sin\alpha - \alpha \cos\alpha),$ $\theta = \frac{mr^2}{2EJ} \alpha^2$
14		$N = -P \cos\varphi, \quad T = P \sin\varphi,$ $M_g = \frac{1}{2} Pr (1 - \cos\varphi),$ $M_{\max} = \frac{1}{2} Pr \text{ w punkcie } C,$ $f_B = \frac{Pr^3}{2EJ}$
15		$N = -P \sin\varphi, \quad T = -P \cos\varphi,$ $M_g = -Pr \sin\varphi, \quad M_{\max} = Pr \text{ w punkcie } C,$ $f_B = \frac{\pi}{2} \frac{Pr^3}{EJ} \approx 1,57 \frac{Pr^3}{EJ}$
16		$V_A = V_B = \frac{M}{2r}, \quad N = -\frac{M}{2r} \cos\varphi,$ $T = \frac{M}{2r} \sin\varphi, \quad M_g = \frac{1}{2} M (1 - \cos\varphi),$ $M_{\max} = M \text{ w punkcie } A,$ $f_B = \frac{Mr^2}{EJ}$
17		$V_A = V_B = \frac{M}{2r}, \quad M_{\max} = \frac{1}{2} M \text{ w punkcie } C,$ $f_B = 0$

Tablica 7.1 (cd.)

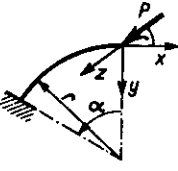
Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
18		$V_A = V_B = 0, H_A = H_B = 0, N = 0, T = 0,$ $M_g = -M, f_B = \frac{2Mr^2}{EJ}$

Tablica 7.2. Pręty zakrzywione statycznie wyznaczalne, obciążone prostopadłe do płaszczyzny rysunku

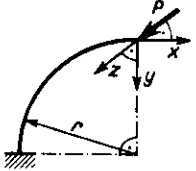
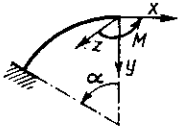
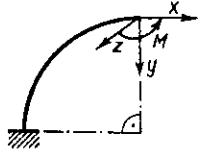
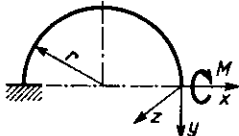


Rys. 7.2

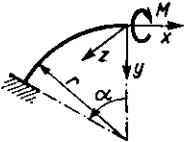
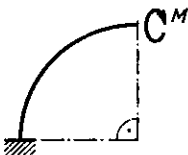
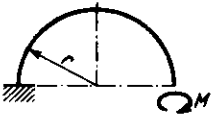
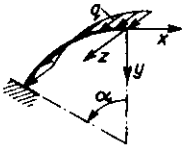
Oznaczenia: N – siła normalna, T – siła tnąca; M_s – moment skracający względem osi normalnej do przekroju poprzecznego pręta, M_g – moment gnący w płaszczyźnie prostopadłej do rys. 7.2, zawierającej normalną do przekroju poprzecznego pręta; EJ_1 – sztywność zginania w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku; GJ_s – sztywność skręcania swobodnego (por. rozdz. 4); $k = \frac{EJ_1}{GJ_s}$; f_z – przemieszczenie przekroju końcowego w kierunku osi z , prostopadłej do rysunku; θ_x , θ_y – kąty obrotu przekroju końcowego względem osi x , y

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
1	Siła P prostopadła do płaszczyzny rysunku 	$M_g = Pr \sin \varphi, M_s = Pr(1 - \cos \varphi),$ $f_z = \frac{Pr^3}{EJ_1} \left(\frac{1+3k}{2} \alpha + \frac{k-1}{4} \sin 2\alpha - 2k \sin \alpha \right),$ $\theta_x = \frac{Pr^2}{EJ_1} \left(\frac{k+1}{2} \alpha + \frac{k-1}{4} \sin 2\alpha - k \sin \alpha \right),$ $\theta_y = \frac{Pr^2}{EJ_1} \left(\frac{k-1}{2} \sin^2 \alpha + k - k \cos \alpha \right)$

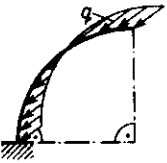
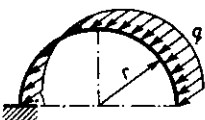
Tablica 7.2 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
2	Siła P prostopadła do płaszczyzny rysunku 	$f_z = \frac{Pr^3}{EJ_1} \left(\pi \frac{1+3k}{4} - 2k \right),$ $\theta_x = \frac{Pr^2}{EJ_1} \left(\pi \frac{k+1}{4} - k \right),$ $\theta_y = \frac{Pr^2}{2EJ_1} (3k-1)$
3	Siła P prostopadła do płaszczyzny rysunku 	$f_z = \frac{Pr^3}{2EJ_1} \pi (3k+1),$ $\theta_x = 2k \frac{Pr^2}{EJ_1} = \frac{2Pr^2}{GJ_s},$ $\theta_y = \frac{Pr^2}{2EJ_1} \pi (k+1)$
4	Moment M w płaszczyźnie xz 	$M_g = M \cos \varphi, \quad M_s = M \sin \varphi,$ $f_z = \frac{Mr^2}{EJ_1} \left(\frac{k-1}{2} \sin^2 \alpha + k - k \cos \alpha \right),$ $\theta_x = \frac{Mr}{EJ_1} \frac{k-1}{2} \sin^2 \alpha, \quad \theta_z = 0,$ $\theta_y = \frac{Mr}{EJ_1} \left(\frac{k+1}{2} \alpha - \frac{k-1}{4} \sin 2\alpha \right)$
5	Moment M w płaszczyźnie xz 	$f_z = \frac{Mr}{2EJ_1} (3k-1), \quad \theta_x = \frac{Mr}{2EJ_1} (k-1),$ $\theta_y = \frac{\pi Mr}{4EJ_1} (k+1)$
6	Moment M w płaszczyźnie yz 	$f_z = \frac{2Mr^2}{EJ_1} k = \frac{2Mr^2}{GJ_s},$ $\theta_x = \frac{\pi}{2} \frac{Mr}{EJ_1} (k+1), \quad \theta_y = 0$

Tablica 7.2 (cd.)

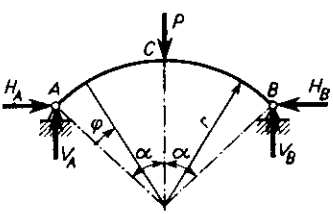
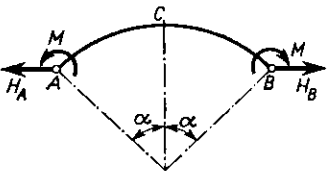
Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
7	Moment M w płaszczyźnie yz 	$M_s = M \sin \varphi, \quad M_z = -M \cos \varphi,$ $f_z = \frac{Mr^2}{EJ_1} \left(\frac{k+1}{2} \alpha - k \sin \alpha + \frac{k-1}{4} \sin 2\alpha \right),$ $\theta_z = \frac{Mr}{EJ_1} \left(\frac{k+1}{2} \alpha + \frac{k-1}{4} \sin 2\alpha \right),$ $\theta_y = \frac{Mr}{EJ_1} \frac{k-1}{2} \sin^2 \alpha$
8	Moment M w płaszczyźnie yz 	$f_z = \frac{Mr^2}{EJ_1} \left(\frac{k+1}{4} \pi - k \right),$ $\theta_x = \frac{Mr}{EJ_1} \frac{k+1}{4} \pi, \quad \theta_y = \frac{Mr}{EJ_1} \frac{k-1}{2}$
9	Moment M w płaszczyźnie xz 	$f_z = \frac{Mr^2}{2EJ_1} \frac{k+1}{2} \pi, \quad \theta_x = 0,$ $\theta_y = \frac{Mr}{EJ_1} \frac{k+1}{2} \pi$
10	Obciążenie ciągle q N/mm prostopadłe do płaszczyzny rysunku 	$M_s = qr^2 (1 - \cos \varphi),$ $M_z = qr^2 (\varphi - \sin \varphi),$ $f_z = \frac{qr^4}{EJ_1} \left[k(\alpha - \sin \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha)^2 \right],$ $\theta_x = \frac{qr^3}{EJ_1} \left[(k+1)(1 - \cos \alpha) - \frac{k-1}{4}(1 - \cos 2\alpha) - k\alpha \sin \alpha \right],$ $\theta_y = \frac{qr^3}{EJ_1} \left[(k+1) \left(\sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{k-1}{4} \sin 2\alpha - k\alpha \cos \alpha \right]$

Tablica 7.2 (cd.)

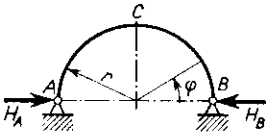
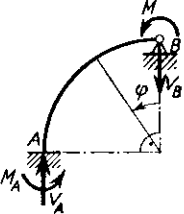
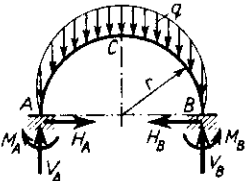
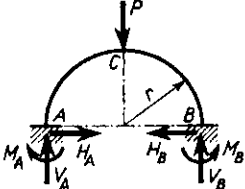
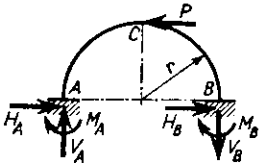
Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
11	Obciążenie ciągle q N/mm prostopadłe do płaszczyzny rysunku 	$f_z = \frac{qr^4}{EJ_1} \left[k \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 + 1 \right] \approx \frac{qr^4}{EJ_1} (0,326k + 1),$ $\theta_x = \frac{qr^3}{2EJ_1} [3 - k(\pi - 1)] \approx \frac{qr^3}{2EJ_1} (3 - 2,142k),$ $\theta_y = \frac{qr^3}{EJ_1} (k + 1) \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \approx 0,215 \frac{qr^3}{2EJ_1} (k + 1)$
12	Obciążenie ciągle q N/mm prostopadłe do płaszczyzny rysunku 	$f_z = \frac{qr^4}{EJ_1} (\pi^2 k + 4) \approx \frac{qr^4}{EJ_1} (9,87k + 4),$ $\theta_x = \frac{qr^3}{2EJ_1} (k - 1) \pi \approx 1,57 \frac{qr^3}{2EJ_1} (k - 1),$ $\theta_y = \frac{2qr^3}{EJ_1} (k + 1)$

Tablica 7.3. Pręty zakrzywione statycznie niewyznaczalne

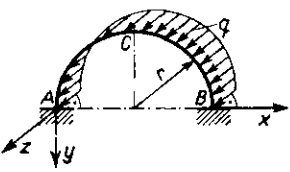
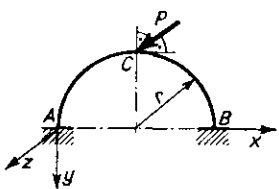
Oznaczenia: N – siła normalna, T – siła tnąca, M_g – moment gnący w przekroju określonym kątem φ , H – składowa pozioma reakcji, V – składowa pionowa reakcji

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
1		$V_A = V_B = \frac{1}{2} P,$ $H_A = H_B = \frac{P}{2} \frac{4 \cos \alpha - 3 \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha - 1}{2\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 3 \sin 2\alpha},$ $N = -\frac{1}{2} P \sin(\alpha - \varphi) - H_A \cos(\alpha - \varphi),$ $T = \frac{1}{2} P \cos(\alpha - \varphi) - H_A \sin(\alpha - \varphi),$ $M_g = \frac{1}{2} P r [\sin(\alpha - \varphi) - \sin \varphi] - H_A r [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha]$
2		$V_A = V_B = 0,$ $H_A = H_B = H = \frac{4M}{r} \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 3 \sin \alpha},$ $M_{\max} = M - H r (1 - \cos \alpha)$

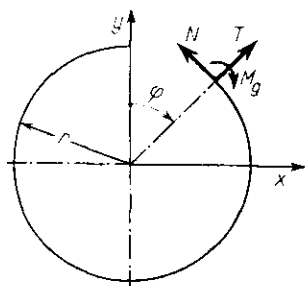
Tablica 7.3 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
3	Równomierne nagrzanie o Δt K 	$H_A = H_B = H = \frac{4\alpha \Delta t EJ}{r^2}$ (α – współczynnik rozszerzalności liniowej), $V_A = V_B = 0, N = -H \sin \varphi,$ $T = -H \cos \varphi, M_g = -Hr \sin \varphi,$ $M_{\max} = \frac{4\alpha \Delta t EJ}{r} \text{ w punkcie C}$
4		$V_A = -V_B = \frac{4}{\pi} \frac{M}{r} \approx 1,273 \frac{M}{r},$ $M_A = M \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \approx 0,2732 M,$ $N = -\frac{4}{\pi} \frac{M}{r} \sin \varphi, T = -\frac{4}{\pi} \frac{M}{r} \cos \varphi,$ $M_g = -M \left(\frac{4}{\pi} \sin \varphi - 1 \right),$ $M_{\max} = M \text{ w punkcie B}$
5	Pionowe obciążenie ciągłe q N/mm 	$V_A = V_B = qr, H_A = H_B = 0,5516 qr,$ $M_A = M_B = 0,0987 qr^2,$ $M_C = 0,0470 qr^2$
6		$V_A = V_B = \frac{1}{2} P, H_A = H_B = 0,4551 P,$ $M_A = M_B = 0,1065 Pr,$ $M_C = 0,1514 Pr$
7		$V_A = V_B = 0,3197 P, H_A = H_B = \frac{1}{2} P,$ $M_A = M_B = 0,1802 Pr = M_{\max}, M_C = 0$

Tablica 7.3 (cd.)

Lp.	Schemat pręta	Wzory obliczeniowe
8	Obciążenie ciągłe q N/mm prostopadłe do płaszczyzny rysunku 	$M_{x,A} = -M_{x,B} \approx 0,3qr^2, \quad M_{x,C} = 0;$ moment gnący w płaszczyźnie yz: $M_A = M_B = qr^2;$ moment gnący w płaszczyźnie xz: $M_C \approx qr^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \approx 0,2732qr^2$
9	Sila P prostopadła do płaszczyzny rysunku 	$M_{x,A} = -M_{x,B} \approx \frac{1}{2}Pr, \quad M_{x,C} = 0;$ moment gnący w płaszczyźnie yz: $M_A = M_B = \frac{Pr}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,1815Pr;$ moment gnący w płaszczyźnie xz: $M_C = -\frac{Pr}{\pi} \approx -0,3183Pr$

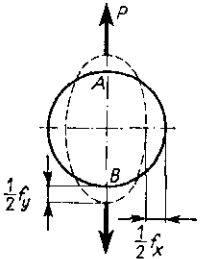
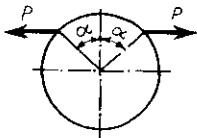
Tablica 7.4. Pierścienie koliste zginane w swej płaszczyźnie



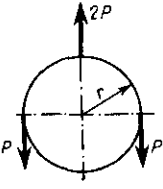
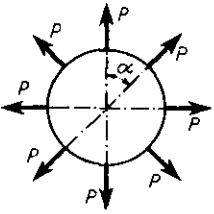
Rys. 7.3

Oznaczenia według rys. 7.3: N – siła normalna, T – siła tnąca, M_g – moment gnący w przekroju określonym kątem φ . Pozostałe oznaczenia: f_x – wydłużenie średnicy poziomej pierścienia kolistego, f_y – wydłużenie średnicy pionowej pierścienia kolistego

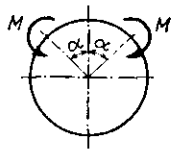
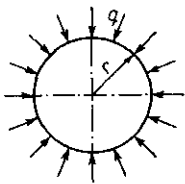
Tablica 7.4 (cd.)

Lp.	Schemat pierścienia	Wzory obliczeniowe
1		$N = \frac{1}{2} P \sin \varphi, \quad T = \frac{1}{2} P \cos \varphi,$ $M_{\pm} = Pr \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{1}{\pi} \right),$ $M_{\max} = \frac{1}{\pi} Pr \approx 0,3183 Pr \text{ w punktach A i B,}$ $f_x = -0,137 \frac{Pr^3}{EJ},$ $f_y = +0,149 \frac{Pr^3}{EJ}$
2		dla φ zawartego w przedziale $0 \leq \varphi \leq \alpha$: $N = P \left[\frac{1}{\pi} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - 1 \right] \cos \varphi,$ $T = P \left[\frac{1}{\pi} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - 1 \right] \sin \varphi,$ $M_{\pm} = Pr \left[\frac{1}{\pi} \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \sin 2\alpha \right) - \cos \varphi + \cos \alpha \right];$ dla φ zawartego w przedziale $\alpha \leq \varphi \leq \pi$: $N = \frac{1}{\pi} P \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \cos \varphi,$ $T = \frac{1}{\pi} P \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \sin \varphi,$ $M_{\pm} = \frac{1}{\pi} Pr \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \varphi \right),$ $f_x = -\frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{2}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \frac{1}{2} (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \right],$ $f_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{2}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right]$

Tablica 7.4 (cd.)

Lp.	Schemat pierścienia	Wzory obliczeniowe
3		dla φ zawartego w przedziale $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$: $N = P \left(\frac{1}{\pi} \cos \varphi + \sin \varphi \right), \quad T = P \left(\frac{1}{\pi} \sin \varphi - \cos \varphi \right),$ $M_s = Pr \left(\frac{1}{\pi} \cos \varphi + \sin \varphi - 0,8183 \right);$ dla φ zawartego w przedziale $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$: $N = \frac{1}{\pi} P \cos \varphi, \quad T = \frac{1}{\pi} P \sin \varphi,$ $M_s = Pr(0,1817 + 0,3183 \cos \varphi),$ $f_x = -0,1366 \frac{Pr^3}{EJ}, \quad f_y = +0,1488 \frac{Pr^3}{EJ}$
4	n sił P równomiernie rozłożonych na obwodzie 	dla $\varphi = \frac{1}{2} \alpha$, gdzie $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ $M_s = \frac{Pr}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left(\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} - 1 \right),$ $M_{\max} = \frac{1}{2} Pr \left(\frac{n}{\pi} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right);$ promieniowe przemieszczenie punktu przyłożenia siły: $f = \frac{Pr^3}{EJ} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\sin \alpha}{4} - \frac{2}{\alpha} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$

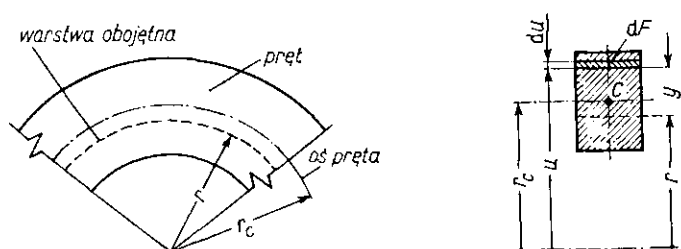
Tablica 7.4 (cd.)

Lp.	Schemat pierścienia	Wzory obliczeniowe
5		$N = \frac{2}{\pi} \frac{M}{r} \sin \alpha \cos \varphi \approx 0,6366 \frac{M}{r} \sin \alpha \cos \varphi,$ $T = \frac{2}{\pi} \frac{M}{r} \sin \alpha \sin \varphi \approx 0,6366 \frac{M}{r} \sin \alpha \sin \varphi,$ $M_s = M \left[\frac{1}{\pi} (2 \sin \alpha \cos \varphi + \alpha) - 1 \right] \text{ dla } 0 \leq \varphi \leq \alpha,$ $M_s = M \left(\frac{2}{\pi} \cos \varphi + \frac{1}{2} \right) \quad \text{dla } \alpha \leq \varphi \leq \pi,$ $f_x = \frac{Mr^2}{EJ} (0,6366 \alpha - \sin \alpha),$ $f_y = \frac{Mr^2}{EJ} (0,6366 \alpha + \cos \alpha - 1)$
6	Równomierne obciążenie promieniowe q N/mm 	$N = -qr, \quad T = 0, \quad M_s = 0,$ $f_x = f_y = -\frac{2qr^2}{EF},$ gdzie F jest polem przekroju poprzecznego pręta

8. Pręty zakrzywione o dużej krzywiznie względnej

W rozdziale tym podano wzory obliczeniowe dla prętów zakrzywionych o dużej krzywiznie względnej, gdy stosunek wysokości h przekroju poprzecznego do promienia krzywizny r_c jest większy niż $1/5$, tzn. $h/r_c > 1/5$. Promień krzywizny r_c dotyczy linii utworzonej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pręta.

Przy zginaniu prętów zakrzywionych o dużej krzywiznie względnej, oś obojętna nie przechodzi przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pręta, lecz jest zawsze położona nieco bliżej środka krzywizny pręta (rys. 8.1).



Rys. 8.1

Promień krzywizny warstwy obojętnej oblicza się ze wzoru

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{1}{u} dF} \quad (8.1)$$

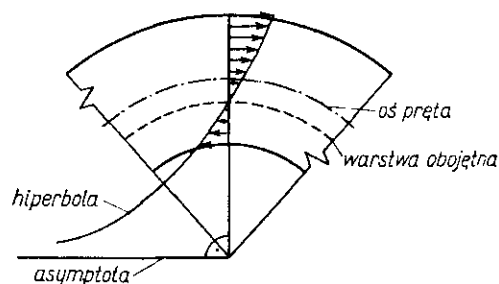
gdzie: F – pole powierzchni przekroju poprzecznego, u – odległość dowolnego włókna od środka krzywizny pręta.

Rozkład naprężeń normalnych od zginania jest określony wzorem

$$\sigma = \frac{M_g}{Fe} \frac{y}{r + y} \quad (8.2)$$

gdzie: M_g – moment gnący, r – promień krzywizny warstwy obojętnej, $e = r_c - r$ – odległość osi obojętnej od osi pręta, r_c – promień krzywizny linii utworzonej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pręta, y – odległość punktu, w którym obliczamy naprężenie, od osi obojętnej (według rys. 8.1).

Rozkład naprężeń normalnych przy zginaniu prętów o dużej krzywiznie względnej podano na rys. 8.2.



Rys. 8.2

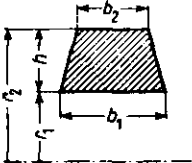
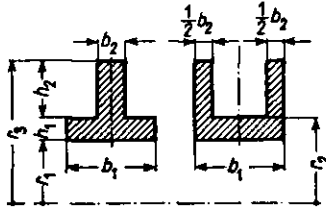
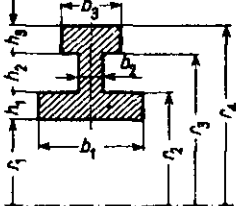
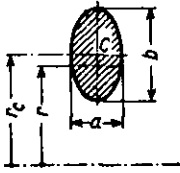
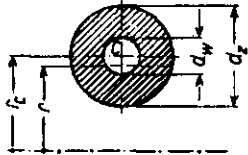
Wartości liczbowe promieni krzywizn r występujących we wzorze (8.1) i (8.2) dla kilku typowych kształtów przekrojów poprzecznych prętów podano w tabl. 8.1.

Tablica 8.1. Wartości liczbowe promieni krzywizn r warstwy obojętnej przy zginaniu prętów o dużej krzywiznie względnej

Oznaczenia: C – środek ciężkości przekroju poprzecznego, r_c – promień krzywizny linii utworzonej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych, r – promień krzywizny warstwy obojętnej [do wzoru (8.2)], $r_1 + r_2$ – promienie krzywizn włókien pręta

Lp.	Przekrój poprzeczny pręta	Promień krzywizny warstwy obojętnej
1		$r = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$
2		$r = \frac{h}{2 \left(\frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)}$

Tablica 8.1 (cd.)

Lp.	Przekrój poprzeczny pręta	Promień krzywizny warstwy obojętnej
3		$r = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left[\left(b_2 + r_2 \frac{b_1 - b_2}{h} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2) \right]}$
4		$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_3}{r_2}}$
5		$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_3}{r_2} + b_3 \ln \frac{r_4}{r_3}}$
6		$r = \frac{1}{2} \left(r_c + \sqrt{r_c^2 - \frac{d^2}{4}} \right)$
7	Elipsa 	$r = \frac{1}{2} \left(r_c + \sqrt{r_c^2 - \frac{b^2}{4}} \right)$
8		$r = \frac{d_c^2 - d_w^2}{8 \left(\sqrt{r_c^2 - \frac{d_w^2}{4}} - \sqrt{r_c^2 - \frac{d_c^2}{4}} \right)}$

9. Belki na sprężystym podłożu

Z zależności (5.3) wyprowadzonej w rozdz. 5

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x \quad (9.1)$$

oraz ze wzorów (5.1) i (5.2)

$$T_x = \frac{dM_x}{dx}, \quad q_x = -\frac{dT_x}{dx}$$

wynikają związki

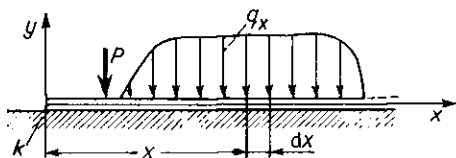
$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = T_x \quad (9.2)$$

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -q_x \quad (9.3)$$

Jeżeli belka spoczywa na sprężystym podłożu, do obciążenia ciągłego q_x (N/mm), pochodzącego od obciążeń działających na belkę, dochodzi dodatkowo obciążenie ciągłe ky , pochodzące od reakcji podłoża (teoria Winklera). Równanie (9.3) przybiera wówczas postać (por. [18], str. 276)

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -q_x - ky \quad (9.4)$$

gdzie (wg rys. 9.1): EJ – sztywność zginania belki, q_x – obciążenie ciągłe przypadające na 1 mm długości belki (N/mm), k – stała sprężysta podłoża (N/mm²), tj. siła, jaką należy przyłożyć do odcinka belki o długości 1 mm, by zagłębić go na 1 mm.



Rys. 9.1

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (9.5)$$

równanie (9.4) przybiera postać

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 y = -\frac{q_x}{EJ}$$

Rozwiązanie tego równania przedstawia się następująco

$$y = e^{\beta x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) - \frac{q_x}{k} \quad (9.6)$$

gdzie: A , B , C oraz D – stałe całkowania, które wyznacza się z warunków brzegowych. Dla belek długich (gdy $\beta l \geq 5$) dwie pierwsze stałe całkowania są równe zeru i równanie linii ugięcia belki spoczywającej na sprężystym podłożu ma postać

$$y = e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) - \frac{q_x}{k} \quad (9.7)$$

Wartości liczbowe funkcji występujących w równaniach (9.6) i (9.7) podano w tabl. 9.1, a wzory dotyczące różnych przypadków belek na sprężystym podłożu – w tabl. 9.2.

Tablica 9.1. Wartości funkcji występujących w równaniach belek spoczywających na sprężystym podłożu

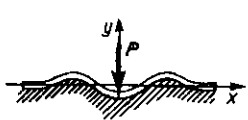
βx	$e^{-\beta x} \sin \beta x$	$e^{-\beta x} \cos \beta x$	$e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x)$	$e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$
0	0	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,0903	0,9003	0,9907	0,8100
0,2	0,1627	0,8024	0,9651	0,6398
0,3	0,2189	0,7077	0,9267	0,4888
0,4	0,2610	0,6174	0,8784	0,3564
0,5	0,2908	0,5323	0,8231	0,2415
0,6	0,3099	0,4530	0,7628	0,1431
0,7	0,3199	0,3798	0,6997	0,0599
0,8	0,3223	0,3131	0,6354	-0,0093
0,9	0,3185	0,2527	0,5712	-0,0657
1,0	0,3096	0,1988	0,5083	-0,1108
1,1	0,2967	0,1510	0,4476	-0,1457
1,2	0,2807	0,1091	0,3899	-0,1716
1,3	0,2626	0,0729	0,3355	-0,1897

Tablica 9.1 (cd.)

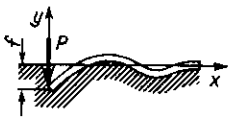
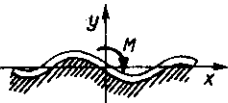
βx	$e^{-\beta x} \sin \beta x$	$e^{-\beta x} \cos \beta x$	$e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x)$	$e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$
1,4	0,2430	0,0419	0,2849	-0,2011
1,5	0,2226	0,0158	0,2384	-0,2068
$\pi/2$	0,2079	0	0,2079	-0,2079
1,6	0,2018	-0,0059	0,1959	-0,2077
1,7	0,1812	-0,02335	0,1576	-0,2047
1,8	0,1610	-0,0376	0,1234	-0,1985
1,9	0,1415	-0,0484	0,09332	-0,1899
2,0	0,1230	-0,0563	0,0667	-0,1794
2,2	0,0895	-0,0652	-0,0244	-0,1548
2,5	0,0492	-0,0658	-0,0166	-0,1149
3,0	0,0070	-0,0493	-0,0423	-0,0563
π	0	-0,0432	-0,0432	-0,0432
3,5	-0,0106	-0,0283	-0,0389	-0,0177
4,0	-0,0139	-0,0120	-0,0259	0,0019
4,5	-0,0108	-0,0023	-0,0131	0,0085
5,0	-0,0065	0,0019	-0,0046	0,0084
5,5	-0,0029	0,0029	0,0000	0,0058
6,0	-0,0007	0,0024	0,0017	0,0031

Tablica 9.2. Wzory dotyczące zginania belek na sprężystym podłożu

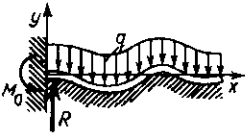
Oznaczenia: EJ – sztywność zginania, θ – kąt nachylenia stycznej do linii ugięcia, k – stała sprężysta podłoża, $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$. Wzory dotyczą belek długich, gdy $\beta l \geq 5$

Lp.	Schemat belki	Warunki brzegowe do równania (9.7)	Równanie linii ugięcia i momentu gnącego. Wartości ugięć, kątów obrotu i momentów gnących
1		dla $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ $T = -\frac{P}{2}$	$y = \frac{-P}{8\beta^3 EJ} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x),$ $M_x = \frac{-P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x);$ dla $x = 0$ $y_{\max} = \frac{-P}{8\beta^3 EJ},$ $M_{\max} = \frac{P}{4\beta}$

Tablica 9.2 (cd.)

Lp.	Schemat belki	Warunki brzegowe do równania (9.7)	Równanie linii ugięcia i momentu gnącego. Wartości ugięć, kątów obrotu i momentów gnących
2		dla $x = 0$ $M_x = 0$, $T = -P$	$y = \frac{-P}{2\beta^3 EJ} e^{-\beta x} \cos \beta x,$ $M_{\max} = \frac{P}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x;$ dla $x = 0$ $f = y_{\max} = \frac{-P}{2\beta^3 EJ}, \quad \theta = \frac{P}{2\beta^2 EJ};$ dla $\beta x = 0,8 \quad M_{\max} = 0,3223 \frac{P}{\beta}$
3		dla $x = 0$ $y = 0$, $M_x = \frac{1}{2} M$	$y = \frac{-M}{4\beta^2 EJ} e^{-\beta x} \sin \beta x,$ $M_x = \frac{1}{2} M e^{-\beta x} \cos \beta x;$ dla $x = 0$ $\theta = \frac{-M}{4\beta EJ}, \quad M_x = M_{\max} = \frac{1}{2} M$
4		dla $x = 0$ $T = 0$, $M_x = M$	$y = \frac{M}{2\beta^2 EJ} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x),$ $M_x = M e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x);$ dla $x = 0$ $y_{\max} = \frac{M}{2\beta^2 EJ}, \quad \theta = \frac{-M}{\beta EJ}, \quad M_{\max} = M$
5		dla $x = 0$ $y = 0$, $M_x = M$	$y = \frac{q}{k} (1 - e^{-\beta x} \cos \beta x),$ $M_{\max} = \frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x;$ dla $x = 0$ $\theta = -\frac{q\beta}{k}, \quad R = \frac{q}{2\beta};$ dla $\beta x = 0,8 \quad M_{\max} = 0,3228 \frac{q}{2\beta^2}$

Tablica 9.2 (cd.)

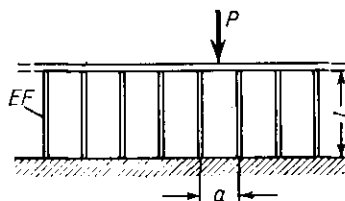
Lp.	Schemat belki	Warunki brzegowe do równania (9.7)	Równanie linii ugięcia i momentu gnącego. Wartości ugięć, kątów obrotu i momentów gnących
6		dla $x = 0$ $y = 0$, $\theta = 0$	$y = \frac{q}{k} \left[1 - e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \right],$ $M_x = \frac{-q}{2\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$ dla $x = 0$ $M_{\max} = M_0 = \frac{q}{2\beta^2}, \quad R = \frac{q}{\beta}$

Naprężenia maksymalne w belkach na sprężystym podłożu oblicza się jak dla zwykłych belek ze wzoru $\sigma = M_x / W$ po wyznaczeniu maksymalnej wartości momentu gnącego M_x za pomocą tabl. 9.1.

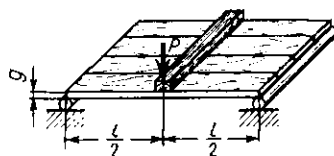
W przypadku belki spoczywającej na gęsto rozmieszczonych prętach (rys. 9.2) naprężenia i odkształcenia oblicza się jak dla belki na sprężystym podłożu, o stałej podłoża

$$k = \frac{EF}{la} \quad (9.8)$$

gdzie F – pole przekroju poprzecznego pręta.



Rys. 9.2

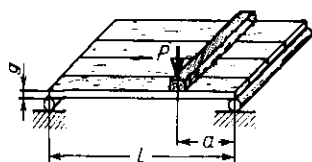


Rys. 9.3

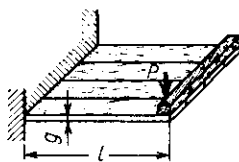
Dla belki przymocowanej do podłogi, wykonanej z desek o grubości g oraz z materiału o module Younga E_1 , stała sprężysta podłoża wynosi:

– dla podłogi według rys. 9.3

$$k = \frac{4E_1 g^3}{l^3} \quad (9.9)$$



Rys. 9.4



Rys. 9.5

– dla podłogi według rys. 9.4

$$k = \frac{E_1 l g^3}{4a^2(l-a)^2} \quad (9.10)$$

– dla pomostu wykonanego z desek utwierdzonych w jednym końcu (rys. 9.5)

$$k = \frac{E_1 g^3}{4l^3} \quad (9.11)$$

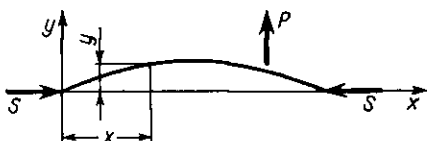
10. Pręty smukłe obciążone siłami poprzecznymi i osiowymi

10.1. Pręty smukłe ściskane i zginane

Moment gnący w przekroju poprzecznym określonym współrzędną x pręta smukłego (wiotkiego) poddanego działaniu sił poprzecznych i siły ściskającej S (rys. 10.1) wyraża się związkiem

$$M_g = M_x - Sy \quad (10.1)$$

gdzie: M_x – moment gnący w przekroju określonym współrzędną x od sił poprzecznych działających na pręt, S – siła osiowa ściskająca pręt.



Rys. 10.1

Po podstawieniu powyższej zależności do wzoru (5.3) otrzymujemy

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x - Sy \quad (10.1a)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$p = \sqrt{\frac{S}{EJ}} \quad (10.2)$$

równanie linii ugięcia pręta smukłego przybiera postać

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = \frac{M_x p^2}{S} \quad (10.3)$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

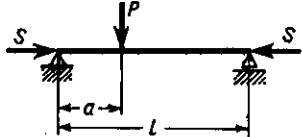
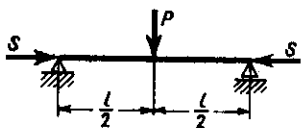
$$y = A \sin px + B \cos px + y_0 \quad (10.4)$$

gdzie: A i B – stałe całkowania wyznaczone z warunków brzegowych, y_0 – całka szczególna równania (10.3).

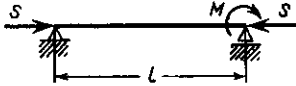
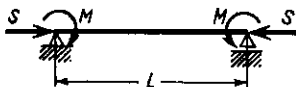
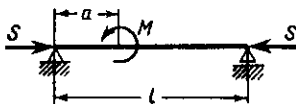
Wzory dotyczące linii ugięcia i momentów gnących dla prętów smukłych podano w tabl. 10.1.

Tablica 10.1. Przykłady obliczeń prętów smukłych zginanych i ściskanych

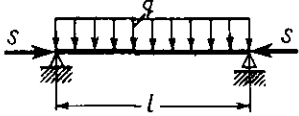
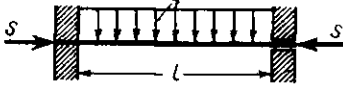
Oznaczenia: S – siła osiowa ściskająca pręt, EJ – sztywność zginania pręta, $p = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
1		dla $x \leq a$ $y = \frac{P}{EJp^3} \left[\frac{\sin p(l-a)}{\sin pl} \sin px - \left(1 - \frac{a}{l}\right) px \right],$ $M_x = -\frac{P}{p} \frac{\sin p(l-a)}{\sin pl} \sin px;$ dla $x = a$ $y = \frac{P}{EJp^3} \left[\frac{\sin p(l-a)}{\sin pl} \sin pa + \frac{pa^2}{l} - pa \right],$ $M_x = -\frac{P}{p} \frac{\sin p(l-a)}{\sin pl} \sin pa;$ dla $x = \frac{1}{2}l$ $M_x = -\frac{P}{p} \frac{\sin p(l-a)}{2 \cos \frac{pl}{2}}$
2		$y = \frac{P}{2EJp^3} \left(\operatorname{tg} \frac{pl}{2} - \frac{pl}{2} \right),$ $M_x = M_{\max} = \frac{P}{2p} \operatorname{tg} \frac{pl}{2};$ dla $x = 0$ $\theta = \frac{P}{2EJp^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right)$

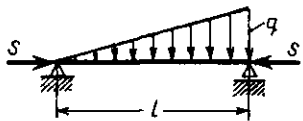
Tablica 10.1 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
3		$y = \frac{M}{EJp^2} \left(\frac{x}{l} - \frac{\sin px}{\sin pl} \right),$ $M_x = -M \frac{\sin px}{\sin pl},$ dla $x = \frac{1}{2}l$ $y = \frac{M}{2EJp^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{pl}{2}} \right),$ $M_x = -\frac{M}{2 \cos \frac{pl}{2}},$ $\theta_{x=0} = -\frac{M}{EJp} \left(\frac{1}{\sin pl} - \frac{1}{pl} \right),$ $\theta_{x=l} = \left(\frac{M}{EJp} \operatorname{ctg} pl - \frac{1}{pl} \right)$
4		dla $x = \frac{1}{2}l$ $y = \frac{M}{2EJp^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right),$ $\theta_{x=l} = -\theta_{x=0} = \frac{M}{EJp} \left(\operatorname{ctg} \frac{pl}{2} - \frac{2}{pl} \right)$
5		dla $x \leq a$ $y = \frac{M}{EJp^2} \left[\frac{\cos p(l-a)}{\sin pl} \sin px - \frac{x}{l} \right],$ $M_x = M \frac{\cos p(l-a)}{\sin pl} \sin px,$ dla $x = a$ $y = \frac{M}{EJp^2} \left[\frac{\cos p(l-a)}{\sin pl} \sin pa - \frac{a}{l} \right],$ $M_x = M \frac{\cos p(l-a)}{\sin pl} \sin pa$

Tablica 10.1 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
6		$y = \frac{q}{EJp^4} \left[\frac{\cos p \left(x - \frac{1}{2} l \right)}{\cos \frac{pl}{2}} - \frac{p^2 lx}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - 1 \right],$ $M_s = \frac{q}{p^2} \left[\frac{\cos p \left(x - \frac{1}{2} l \right)}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right],$ dla $x = \frac{1}{2} l$ $y = \frac{q}{EJp^4} \left[\frac{1}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 - \frac{pl^2}{8} \right],$ $M_s = M_{\max} = \frac{q}{p^2} \left(\frac{1}{\cos \frac{pl}{2}} - 1 \right),$ $\theta_{x=l} = \theta_{x=0} = \frac{q}{EJp^3} \left(\operatorname{tg} \frac{pl}{2} - \frac{pl}{2} \right)$
7		$y = \frac{ql}{2EJp^3} \left[px \left(\frac{x}{l} - 1 \right) - \operatorname{ctg} \frac{pl}{2} + \frac{\cos p \left(x - \frac{1}{2} l \right)}{\sin \frac{pl}{2}} \right],$ $M_s = \frac{q}{p^2} \left[\frac{pl}{2} \frac{\cos p \left(x - \frac{1}{2} l \right)}{\sin \frac{pl}{2}} - 1 \right],$ $y \left(\frac{1}{2} l \right) = \frac{ql}{2EJp^3} \left(\frac{pl}{4} - \operatorname{tg} \frac{pl}{4} \right),$ $M_s(0) = \frac{q}{p^2} \left(\frac{pl}{2 \operatorname{tg} \frac{pl}{2}} - 1 \right),$ $M_s \left(\frac{1}{2} l \right) = \frac{q}{p^2} \left(\frac{pl}{2 \sin \frac{pl}{2}} - 1 \right)$

Tablica 10.1 (cd.)

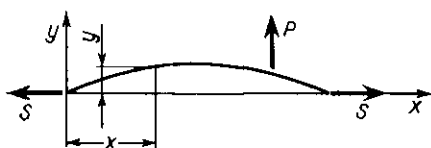
Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
8		$y = \frac{q}{EJp^2} \left(\frac{x^3}{6l} + \frac{\sin px}{p^2 \sin pl} - \frac{x}{p^2 l} - \frac{lx}{6} \right),$ $M_s = \frac{q}{p^2} \left(\frac{\sin px}{\sin pl} - \frac{x}{l} \right),$ $M_{\max} \text{ występuje dla } x = \frac{1}{p} \arccos \left(\frac{\sin pl}{pl} \right)$

10.2. Pręty smukłe zginane i rozciągane

Linia ugięcia pręta smukłego poddanego rozciąganiu i zginaniu jest określona równaniem różniczkowym, analogicznym do równania (10.1a)

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x + Sy \quad (10.5)$$

gdzie: EJ – sztywność pręta na zginanie, M_x – moment gnący od obciążeń poprzecznych (rys. 10.2), S – siła osiowa rozciągająca pręt.



Rys. 10.2

Po wprowadzeniu oznaczenia (10.2) $p^2 = S/EJ$ otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - p^2 y = p^2 \frac{M_x}{S} \quad (10.6)$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

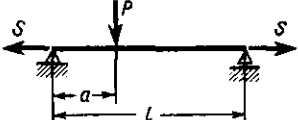
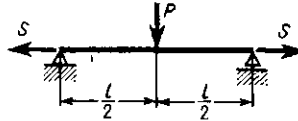
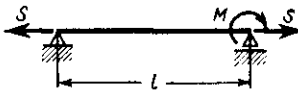
$$y = Ce^{px} + De^{-px} + y_0$$

gdzie: C , D – stałe całkowania wyznaczone z warunków brzegowych, e – podstawa logarytmów naturalnych, y_0 – całka szczególna równania (10.6).

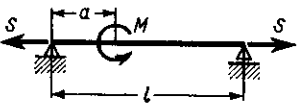
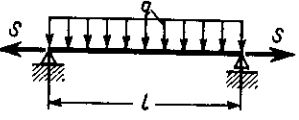
Wzory obliczeniowe dla kilku przypadków prętów smukłych zginanych i rozciąganych podano w tabl. 10.2.

Tablica 10.2. Przykłady obliczeń prętów smukłych zginanych i rozciąganych

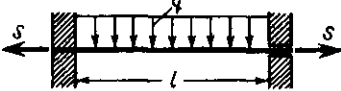
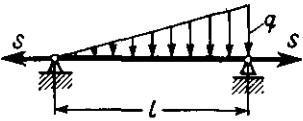
Oznaczenia: S – siła osiowa rozciągająca pręt, EJ – sztywność zginania pręta, $p = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
1		dla $x \leq a$ $y = \frac{P}{EJp^3} \left[\left(1 - \frac{a}{l}\right) px - \frac{\sinh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh px \right],$ $M_s = \frac{P}{p} \frac{\sinh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh px,$ dla $x = a$ $y = \frac{P}{EJp^3} \left[\left(1 - \frac{a}{l}\right) pa - \frac{\sinh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh pa \right],$ $M_s = \frac{P}{p} \frac{\sinh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh pa$
2		dla $x = \frac{1}{2}l$ $y = \frac{P}{2EJp^3} \left(\frac{pl}{2} - \operatorname{tgh} \frac{pl}{2} \right),$ $M_s = \frac{P}{2p} \operatorname{tgh} \frac{pl}{2}$
3		$y = \frac{M}{EJp^2} \left(\frac{\sinh px}{\sinh pl} - \frac{x}{l} \right),$ $M_s = M \frac{\sinh px}{\sinh pl},$ dla $x = \frac{1}{2}l$ $y = \frac{M}{2EJp^2} \left(\frac{1}{\cosh \frac{pl}{2}} - 1 \right), \quad M_s = \frac{M}{2 \cosh \frac{pl}{2}}$

Tablica 10.2 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
4		dla $x \leq a$ $y = \frac{M}{EJp^2} \left[\frac{\cosh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh px - \frac{x}{l} \right],$ $M_s = M \frac{\cosh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh px,$ dla $x = a$ $y = \frac{M}{EJp^2} \left[\frac{\cosh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh pa - \frac{a}{l} \right],$ $M_s = M \frac{\cosh p(l-a)}{\sinh pl} \sinh pa$
5		$y = \frac{q}{EJp^4} \left[\frac{\cosh px}{\cosh \frac{pl}{2}} + \frac{p^2 lx}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - 1 \right],$ $M_s = \frac{q}{p^2} \left(\frac{\cosh px}{\cosh \frac{pl}{2}} - 1 \right),$ dla $x = \frac{1}{2} l$ $y = \frac{q}{EJp^4} \left(\frac{1}{\cosh \frac{pl}{2}} + \frac{p^2 l^2}{8} - 1 \right),$ $M_s = \frac{q}{p^2} \left(\frac{1}{\cosh \frac{pl}{2}} - 1 \right)$

Tablica 10.2 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
6		$y = \frac{ql}{2EJp^3} \left[\frac{\cosh p \left(x - \frac{l}{2} \right) - \cosh \frac{pl}{2}}{\sinh \frac{pl}{2}} + px \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right],$ $M_x = \frac{q}{p^2} \left[1 - \frac{pl}{2} \frac{\cosh p \left(x - \frac{1}{2} l \right)}{\sinh \frac{pl}{2}} \right],$ dla $x = 0$ $M_x = \frac{q}{p^2} \left(1 - \frac{pl}{2 \operatorname{th} \frac{pl}{2}} \right);$ dla $x = \frac{1}{2} l$ $y = \frac{ql}{2EJp^3} \left(\frac{pl}{4} - \operatorname{th} \frac{pl}{4} \right),$ $M_x = \frac{q}{p^2} \left(1 - \frac{pl}{2 \sinh \frac{pl}{2}} \right)$
7		$y = \frac{q}{EJp^2} \left(\frac{\sinh px}{p^2 \sinh pl} - \frac{x^3}{6l} - \frac{x}{p^2 l} + \frac{lx}{6} \right),$ $M_x = \frac{q}{p^2} \left(\frac{\sinh px}{\sinh pl} - \frac{x}{l} \right),$ $M_{\max} \text{ występuje dla } x = \frac{1}{p} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sinh pl}{pl} \right)$

11. Obliczanie płyt

11.1. Cienkie płyty kołowsymetryczne

11.1.1. Podstawy teoretyczne i wzory ogólne

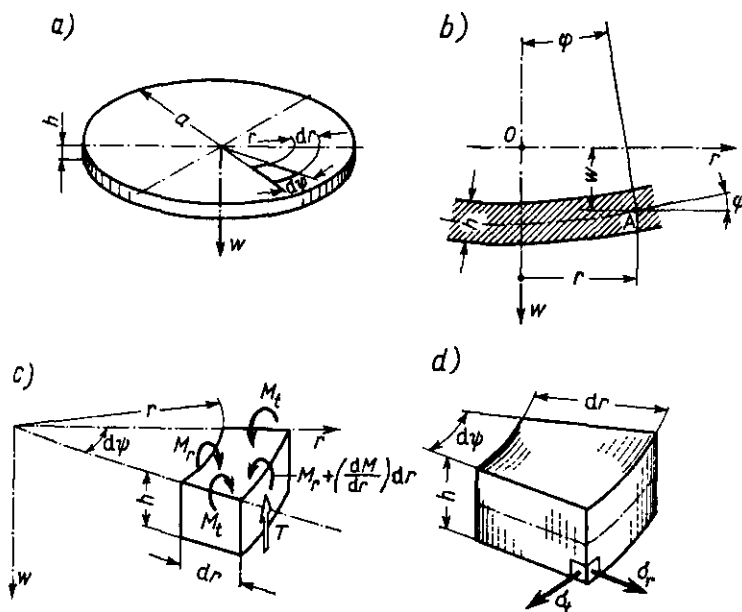
Podane w tym rozdziale wzory dotyczą małych ugięć płyt cienkich, tj. takich przypadków, gdy grubość h płyty jest mała w porównaniu z wymiarami poprzecznymi [$h \leq a/5$, gdzie a jest promieniem zewnętrznym płyty okrągłej (lub szerokością płyty prostokątnej)], ugięcie zaś maksymalne f płyty (strzałka ugięcia) jest nie większe niż połowa grubości płyty ($f \leq h/2$). Dla płyt kołowsymetrycznych (w których kształty, sposoby podparcia i obciążenia spełniają warunki symetrii osiowej) położenie dowolnego punktu A powierzchni środkowej płyty (tj. warstwy obojętnej przy zginaniu), znajdującego się w odległości r od osi płyty, określone jest współrzędną ugięcia w oraz kątem ugięcia φ (rys. 11.1b).

Na ściankach elementarnego wycinka płyty odciętego dwoma przekrojami osiowymi odchylonymi od siebie o kąt $d\varphi$ oraz dwoma przekrojami obwodowymi, poprowadzonymi na promieniu r oraz $r + dr$ (rys. 11.1a), działają pary sił o momencie M_t oraz M_r , jak również siły poprzeczne T , jak to podano na rys. 11.1c, przy czym wszystkie te wielkości odniesione są do jednostki długości powierzchni środkowej płyty.

Oznacza to, że moment M_t , zginający w kierunku obwodowym, oraz moment M_r , zginający w kierunku promieniowym, w układzie SI mają wymiar niutonometr na metr (N·m/m).

Maksymalne naprężenia od zginania powstają w skrajnych włóknach płyty i dla tych właśnie największych wartości naprężeń przyjęto oznaczenia: σ_r – dla naprężeń w kierunku promieniowym (radialnym) i σ_t – dla naprężeń obwodowych (tangencjalnych), jak to podano na rys. 11.1d.

Momenty gnące M_r oraz M_t można wyrazić w funkcji kąta ugięcia φ , jaki tworzy styczna do południka powierzchni środkowej ugiętej płyty z płaszczyzną płyty nieobciążonej (rys. 11.1b)



Rys. 11.1

$$M_r = B \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \quad (11.1)$$

$$M_t = B \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

gdzie B oznacza sztywność płytową

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11.2)$$

przy czym h – grubość płyty.

Równanie różniczkowe powierzchni środkowej (warstwy obojętnej przy zginaniu) płyty kołowsymetrycznej ma postać

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{T}{B} \quad (11.3)$$

czyli inaczej

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{T}{B} \quad (11.4)$$

Maksymalne naprężenia od zginania wyrażają się wzorami

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} \quad \text{oraz} \quad \sigma_t = \frac{6M_t}{h^2} \quad (11.5)$$

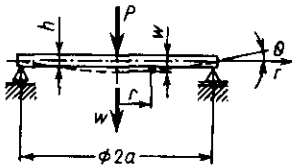
Wyznaczając dla konkretnego przypadku wartość siły tnącej T , przypadającą na jednostkę obwodu odpowiadającego promieniowi r , otrzymuje się równanie danej płyty, z którego – po wyznaczeniu stałych całkowania – można obliczyć ugięcia, a następnie – wykorzystując wzory (11.1) oraz (11.5) – również naprężenia (por. [18], str. 359).

Wzory dla różnych przypadków płyt kołowsymetrycznych podano w tabl. 11.1.

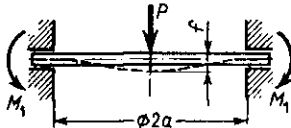
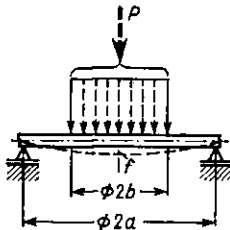
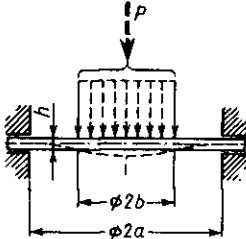
Tablica 11.1. Wzory dotyczące cienkich płyt kołowsymetrycznych

Oznaczenia: f – strzałka ugięcia, w – ugięcie warstwy środkowej odpowiadające promieniowi r , θ – kąt nachylenia stycznej do południka zgiętej płyty, M_1 – moment gnący promieniowy przypadający na jednostkę obwodu, M_2 – moment gnący obwodowy przypadający na jednostkę długości, a – zewnętrzny promień płyty, h – grubość płyty, B – sztywność płytowa

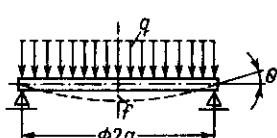
$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nu - \text{liczba Poissona.}$$

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
1	Płyta podparta na obwodzie, obciążona w środku siłą P działającą na małej powierzchni, by naprężenia dociskowe nie przekroczyły σ_{prop} 	$f = \frac{Pa^2(3+\nu)}{16\pi B(1+\nu)},$ $f = 0,55 \frac{Pa^2}{Eh^2} \quad \text{dla } \nu = 0,3,$ $w = \frac{P}{16\pi B} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right],$ $\theta = \frac{3Pa(1-\nu)}{\pi Eh^3},$ $\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{h^2} \left[(1+\nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right],$ $\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{h^2} \left(0,63 \ln \frac{a}{h} + 1,16 \right) \quad \text{dla } \nu = 0,3$

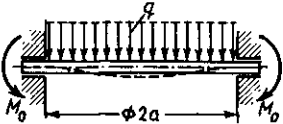
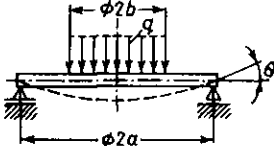
Tablica 11.1 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
2	Płyta utwierdzona na obwodzie, obciążona siłą P przyłożoną jak wyżej 	$f = \frac{Pa^2}{16\pi B}, \quad f = 0,218 \frac{Pa^2}{Eh^3} \quad \text{dla } \nu = 0,3,$ na obwodzie płyty $M_1 = \frac{P}{4\pi}, \quad \sigma_r = \frac{6M_1}{h^2} = \frac{3P}{2\pi h^2},$ $M_2 = -\nu \frac{P}{4\pi}, \quad \sigma_r = \frac{3P\nu}{2\pi h^2};$ w środku płyty $\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{h^2} (1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right),$ $\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{h^2} \left(0,63 \ln \frac{a}{h} + 0,68 \right) \quad \text{dla } \nu = 0,3,$ $w = \frac{P}{8\pi B} \left[r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} (a^2 - r^2) \right]$
3	Płyta podparta na obwodzie, obciążona siłą P rozłożoną równomiernie na obwodzie koła o promieniu b 	dla wszystkich punktów $r < b$ $\sigma_{\text{max}} = \sigma_r = \sigma_t = \frac{3P}{2\pi h^2} \times$ $\times \left[\frac{1}{2} (1 - \nu) + (1 + \nu) \ln \frac{a}{b} - (1 - \nu) \frac{b^2}{2a^2} \right],$ $f = \frac{3P(1 - \nu^2)}{2\pi h^3 E} \times$ $\times \left[\frac{(3 + \nu)a^2 - (1 - \nu)b^2}{2(1 + \nu)} - b^2 \left(\ln \frac{a}{b} + 1 \right) \right]$
4	Płyta utwierdzona na obwodzie, obciążona siłą P rozłożoną równomiernie na obwodzie koła o promieniu b 	dla wszystkich punktów $r < b$ $\sigma_r = \sigma_t = \frac{3P}{4\pi h^2} \times$ $\times \left[(1 + \nu) \left(2 \ln \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \right] =$ $= \sigma_{\text{max}}, \quad \text{gdy } b < 0,31a,$ gdy $b > 0,31a$, naprężenie maksymalne występuje na obwodzie $\sigma_{\text{max}} = \sigma_r = \sigma_t = \frac{3P}{2\pi h^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)$

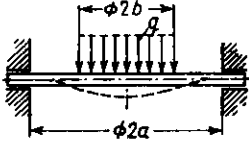
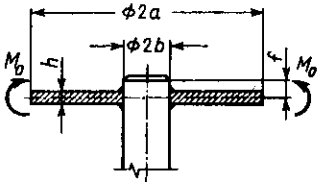
Tablica 11.1 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
5	Płyta obciążona na obwodzie momentami o natężeniu M_0 na jednostkę długości obwodu; wymiar momentu M_0 N (N·mm/mm) 	$f = \frac{M_0 a^2}{2B(1+\nu)} = \frac{6(1-\nu)M_0 a^2}{Eh^3},$ $\theta = \frac{M_0 a}{B(1+\nu)} = \frac{12(1-\nu)M_0 a}{Eh^3},$ $\rho = \frac{B(1+\nu)}{M_0} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)M_0},$ dla całej płyty $M_r = M_t = M_0,$ $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_{\max} = \frac{6M_0}{h^2}$
6	Płyta podparta na obwodzie, poddana działaniu obciążenia rozłożonego równomiernie na całej powierzchni płyty, o natężeniu q MPa 	$f = \frac{(5+\nu)qa^4}{64B(1+\nu)}, \quad f = \frac{0,7qa^4}{Eh^3} \quad \text{dla } \nu = 0,3,$ $\theta = \frac{qa^3}{8B(1+\nu)};$ w środku płyty $\sigma_{\max} = \sigma_r = \sigma_t = \frac{3(3+\nu)qa^2}{8h^2},$ $\sigma_{\max} = 1,24q \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad \text{dla } \nu = 0,3,$ na brzegu $\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = 0,52q \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad \text{dla } \nu = 0,3$

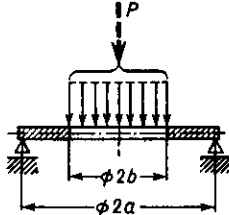
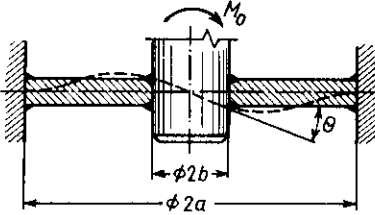
Tablica 11.1 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
7	Płyta utwardzona przesuwnie na obwodzie, obciążenie q przyłożone jak wyżej 	$f = \frac{qa^4}{64B} = \frac{3qa^4(1-\nu^2)}{16Eh^3},$ $f = 0,17 \frac{qa^4}{Eh^3} \text{ dla } \nu = 0,3,$ $M_0 = \frac{qa^2}{8};$ na brzegu $\sigma_{\max} = (\sigma_r)_{r=a} = \frac{6M_0}{h^2} = \frac{3qa^2}{4h^2},$ $\sigma_t = \nu\sigma_r = \frac{3qa^2\nu}{4h^2},$ w środku płyty dla $\nu = 0,3$ $\sigma_r = \sigma_t = 0,49 \frac{qa^2}{h^2}$
8	Płyta podparta na obwodzie, obciążenie równomierne q działa na powierzchnię koła o promieniu b 	w środku płyty $f = \frac{3qb^2(1-\nu^2)}{16Eh^3} \times$ $\times \left[\frac{4a^2(3+\nu)}{1+\nu} - 4b^2 \ln \frac{a}{b} - \frac{(7-3\nu)b^2}{1+\nu} \right];$ dla $\nu = 0,3$ $f = \frac{qa^2b^2}{Eh^3} \left[1,73 - 1,03 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 0,68 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \ln \frac{b}{a} \right],$ $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_{\max} =$ $= \frac{3qb^2}{2h^2} \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{a}{b} - (1-\nu) \frac{b^2}{4a^2} \right];$ dla $\nu = 0,3$ $\sigma_{\max} = \frac{qb^2}{h^2} \left[1,5 - 0,262 \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1,95 \ln \frac{b}{a} \right]$

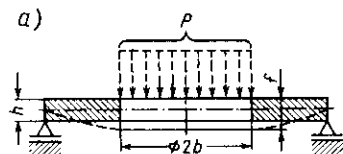
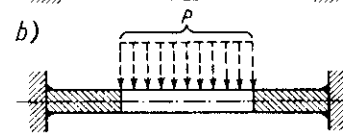
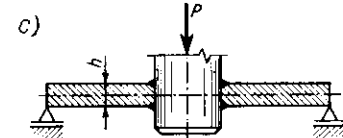
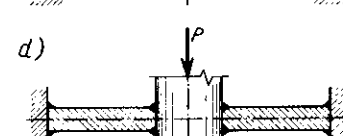
Tablica 11.1 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
9	Płyta utwierdzona przesuwnie na obwodzie, obciążenie równomierne q działa na powierzchnię koła o promieniu b 	w środku płyty dla $\nu = 0,3$ $f = \frac{qa^2b^2}{Eh^3} \left[0,68 - 0,51 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 0,68 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \ln \frac{b}{a} \right],$ $\sigma_r = \sigma_t = 0,49q \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 4 \ln \frac{b}{a} \right],$ na brzegu $\sigma_r = 0,75q \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left[2 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right], \quad \sigma_t = \nu \sigma_r,$
10	Płyta przymocowana do wałka o średnicy $2b$, obciążona na obwodzie momentami o natężeniu M_0 przypadającym na jednostkę długości obwodu; wymiar momentu M_0: N (N-mm/mm) 	dla $\nu = 0,3$ $f = 5,46 \frac{M_0 a^2}{Eh^3} \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(2 \ln \frac{a}{b} + 1 \right)}{0,7 + 1,3 \left(\frac{b}{a} \right)^2},$ dla $r = b$ $\sigma_r = \frac{M_0}{h^2} \frac{12}{1,3 + 0,7 \left(\frac{b}{a} \right)^2}, \quad \sigma_t = \nu \sigma_r;$ na obwodzie ($r = a$) $\sigma_r = \frac{6M_0}{h^2}, \quad \sigma_t = \frac{M_0}{h^2} \frac{6 \left[1,3 - 0,7 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]}{1,3 + 0,7 \left(\frac{b}{a} \right)^2}$

Tablica 11.1 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe																				
11	Płyta z otworem w środku, podparta na obwodzie, obciążona siłą P rozłożoną równomiernie na obwodzie otworu 	$f = \frac{3P(1-\nu^2)}{4\pi Eh^2} \times \left[\frac{(a^2-b^2)(3+\nu)}{1+\nu} + \frac{4a^2b^2(1+\nu)}{(a^2-b^2)(1-\nu)} \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 \right],$ $\sigma_{\max} = \sigma_t =$ $= \frac{3P}{2\pi h^2} \left[\frac{2a^2(1+\nu)}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} + (1-\nu) \right];$ na obwodzie $\theta = \frac{Pb}{8\pi B} \times \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \right]$																				
12	Płyta utwardzona nieprzesuwnie na obwodzie, przymocowana do sztywnego wałka o średnicy $2b$; wałek działa na płytę wypadkowym momentem M_0; wymiar momentu M_0: N (N-mm/mm) 	na promieniu $r = b$, dla $\nu = 0,3$ $\theta = k_1 \frac{M_0}{Eh^3},$ $\sigma_r = \sigma_{\max} = k_2 \frac{M_0}{ah^2},$ na promieniu $r = a$ $\sigma_r = k_3 \frac{M_0}{ah^2},$ wartości liczbowe współczynników k_1, k_2, k_3 dla $\nu = 0,3$ podano w poniższej tabelce: <table><tr><th>a/b</th><th>0,5</th><th>0,6</th><th>0,7</th><th>0,8</th></tr><tr><td>k_1</td><td>0,081</td><td>0,035</td><td>0,0128</td><td>0,0032</td></tr><tr><td>k_2</td><td>1,14</td><td>0,685</td><td>0,465</td><td>0,262</td></tr><tr><td>k_3</td><td>0,573</td><td>0,452</td><td>0,325</td><td>0,212</td></tr></table>	a/b	0,5	0,6	0,7	0,8	k_1	0,081	0,035	0,0128	0,0032	k_2	1,14	0,685	0,465	0,262	k_3	0,573	0,452	0,325	0,212
a/b	0,5	0,6	0,7	0,8																		
k_1	0,081	0,035	0,0128	0,0032																		
k_2	1,14	0,685	0,465	0,262																		
k_3	0,573	0,452	0,325	0,212																		

Tablica 11.1 (cd.)

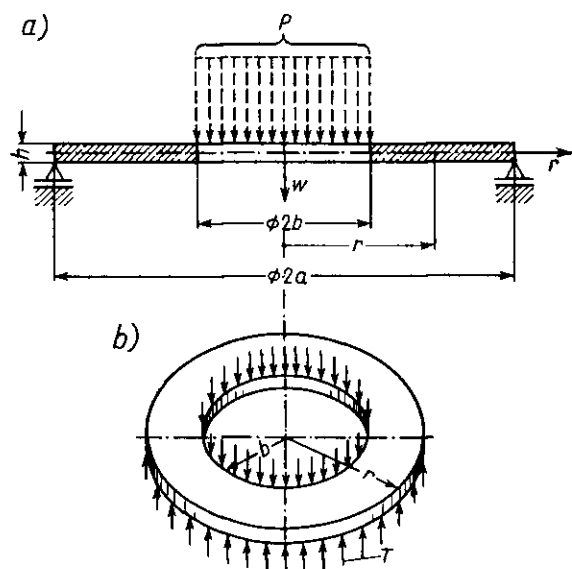
Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe										
13	Płyta poddana działaniu siły P rozłożonej równomiernie na obwodzie otworu o promieniu b, warunki brzegowe jak na poniższych rysunkach a)  b)  c)  d) 	dla $\nu = 0,3$ $\sigma_{\max} = k_1 \frac{P}{h^2},$ $f = k_2 \frac{Pa^2}{Eh^3},$ wartości współczynników k_1 i k_2 dla przypadków przedstawionych na rysunkach a-d podano w poniższej tabelce:										
alb	1,25	1,5	2	3	4	5						
rys.	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
a	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
b	0,194	0,00504	0,32	0,0242	0,454	0,0810	0,673	0,172	1,021	0,217	1,305	0,238
c	0,227	0,00510	0,43	0,0249	0,753	0,0877	1,205	0,209	1,514	0,293	1,743	0,350
d	0,115	0,00129	0,22	0,0064	0,405	0,0237	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114

Tablica 11.1 (cd.)

Lp.	Schemat płyty						Wzory obliczeniowe					
14							Płyta z otworem w środku o promieniu b, poddana działaniu obciążenia rozłożonego równomiernie na całej powierzchni płyty; natężenie obciążenia q MPa dla $\nu = 0,3$ $\sigma_{\max} = k_1 \frac{qa^2}{h^2},$ $f = k_2 \frac{qa^4}{Eh^3},$ wartości współczynników k_1 i k_2 podano w poniższej tabelce:					
a/b	1,25		1,5		2		3		4		5	
rys.	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
a	0,592	0,184	0,976	0,414	1,44	0,664	1,880	0,82	2,08	0,830	2,19	0,813
b	0,66	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902	3,34	1,22	4,30	1,300	5,10	1,310
c	0,105	0,00199	0,259	0,0139	0,48	0,0575	0,657	0,13	0,710	0,162	0,73	0,175
d	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938	2,15	0,29	2,99	0,448	3,69	0,564
e	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,74	0,125	1,21	0,29	1,45	0,417	1,59	0,492
f	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,71	0,0329	1,54	0,11	2,23	0,179	2,80	0,234

11.1.2. Przykłady obliczania płyt kołowsymetrycznych

Przykład 11.1. Wyznaczyć równanie powierzchni ugięcia oraz naprężenia maksymalne płyty pokazanej na rys. 11.2a. Płyta ma kształt pierścienia o promieniu zewnętrznym a i promieniu wewnętrznym b . Na obwodzie zewnętrznym płyta jest swobodnie podparta i obciążona siłą P rozłożoną równomiernie na obwodzie wewnętrznym.



Rys. 11.2

Rozwiązanie: Siłę poprzeczną T , przypadającą na jednostkę obwodu o promieniu r , wyznaczamy z warunków równowagi środkowej części płyty, odciętej (w myśli) promieniem r (rys. 11.2b). Z rzutów sił na oś płyty znajdujemy

$$T \cdot 2\pi r = P, \quad \text{stad} \quad T = \frac{P}{2\pi r}$$

Równanie różniczkowe (11.4) powierzchni środkowej płyty ma postać

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{P}{2\pi r B} \quad (a)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy

$$\varphi = -\frac{Pr}{8\pi B} (2 \ln r - 1) + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (b)$$

Z rysunku 11.1b wynika, że

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} \quad (c)$$

więc po scałkowaniu wyrażenia (b) ugięcie w wyrazi się zależnością

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi B} (\ln r - 1) - \frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3 \quad (d)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych: ugięcie w dla $r = a$ jest równe zero oraz momenty promieniowe M_r dla $x = a$ oraz dla $x = b$ są równe zero, co po wykorzystaniu zależności (11.1) daje

$$C_1 = \frac{P}{4\pi B} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

$$C_2 = -\frac{P}{4\pi B} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a^2 b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a}$$

$$C_3 = \frac{Pa^2}{8\pi B} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

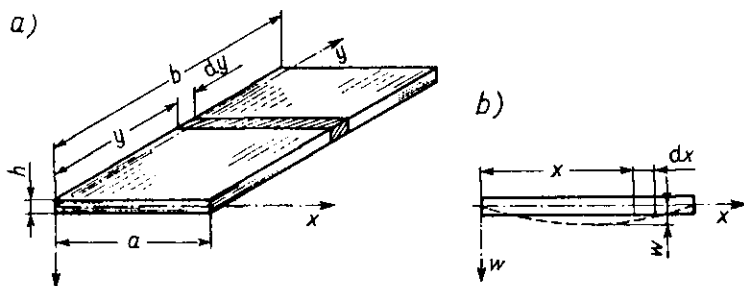
Ze wzorów (11.5) – po wykorzystaniu wzorów (11.1) – otrzymano dla tej płyty wzory określające strzałki ugięcia, naprężenia maksymalne $\sigma_{\max}$ i kąt nachylenia θ południka na obwodzie płyty podane w tabl. 11.1, poz. 11.

11.2. Zginanie cienkich płyt prostokątnych

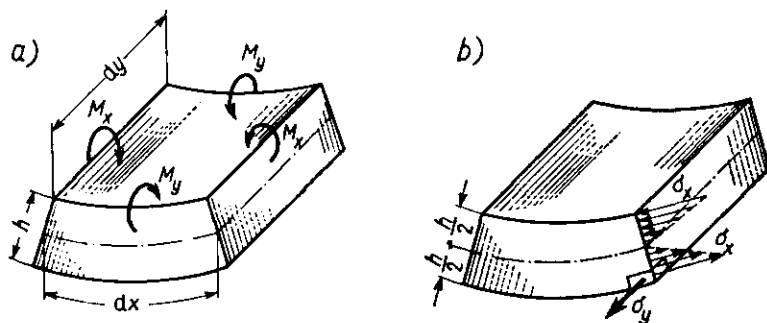
11.2.1. Oznaczenia i wzory ogólne

W przypadku zginania płyt prostokątnych przez w oznaczamy przemieszczenie dowolnego punktu powierzchni środkowej płyty, określonego współrzędnymi x i y . Położenie paska płyty o szerokości dy określonego współrzędną y podano na rys. 11.3a, a linię ugięcia warstwy środkowej tego paska – na rys. 11.3b. Jeżeli z paska przedstawionego na rys. 11.3b wytniemy w myśli odcinek o długości dx , to na odcięty w ten sposób fragment płyty zginanej działają momenty gnące, których wartości przypadające na jednostkę długości płyty oznaczmy M_x oraz M_y , jak to podano na rys. 11.4a. Wymiarem momentu M_x oraz M_y jest więc jednostka siły (niuton N), przy czym dla podkreślenia sensu fizycznego używa się nieraz oznaczenia N·m/m.

W przypadku czystego zginania naprężenia w warstwie środkowej płyty są równe zero i zwiększają się proporcjonalnie do wartości maksymalnych rozciągających (we włóknach rozciąganych) lub ściskających (we włóknach ściskanych). Dla uproszczenia zapisów maksymalne wartości tych naprężeń oznaczmy σ_x oraz σ_y , jak to przedstawiono na rys. 11.4b.



Rys. 11.3



Rys. 11.4

Jeżeli promień krzywizny warstwy obojętnej w płaszczyźnie xw oznaczmy ρ_1 , w płaszczyźnie yw zaś odpowiednio ρ_2 , to dla odkształconej płyty słuszne są zależności

$$\begin{aligned} M_x &= B \left(\frac{1}{\rho_1} + \nu \frac{1}{\rho_2} \right) \\ M_y &= B \left(\frac{1}{\rho_2} + \nu \frac{1}{\rho_1} \right) \end{aligned} \quad (11.6)$$

gdzie B oznacza sztywność płytową, określoną wzorem (11.2)

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

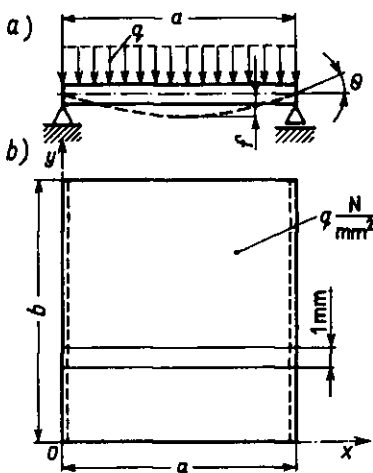
Maksymalne wartości naprężeń w płycie poddanej czystemu zginaniu występują w skrajnych (przypowierzchniowych) włóknach płyty i zgodnie z przyjętymi oznaczeniami wynoszą

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2} \quad \text{oraz} \quad \sigma_y = \frac{6M_y}{h^2} \quad (11.7)$$

11.2.2. Walcowe zginanie płyt

W przypadku szczególnym zginania płyt, gdy warstwa obojętna tworzy powierzchnię walcową (tzw. *walcowe zgięcie płyt*), można stosować wzory takie same jak dla odpowiednich belek zginanych, z tą różnicą, że zamiast sztywności EJ belki należy wstawić sztywność płytową B , tj. sztywność beleczki o szerokości 1 mm i wysokości h , wyciętej z płyty dwoma przekrojami prostokątnymi do osi y (według rys. 11.3a).

Tak na przykład dla płyty prostokątnej o szerokości a , długości b i grubości h , podpartej swobodnie wzdłuż dłuższych boków (rys. 11.5) i poddanej działaniu obciążenia ciągłego q , rozłożonego równomiernie na całej powierzchni płyty (wymiar obciążenia q : N/mm^2), wzory do obliczenia naprężeń i odkształceń są identyczne jak dla belki o długości a , podpartej na końcach i poddanej działaniu obciążenia q , rozłożonego równomiernie na całej długości belki (tutaj wymiar obciążenia q : N/mm). Wykorzystując wzory dla belki odpowiadającej rys. 11.5a (por. [18], str. 213) dla płyty przedstawionej w dwóch rzutach na rys. 11.5, otrzymuje się następujące wyniki:



Rys. 11.5

– strzałka ugięcia (tj. maksymalne ugięcie $w_{\max}$)

$$f = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{B} = \frac{5}{32} \frac{qa^4(1-\nu^2)}{Eh^3}$$

– kąt nachylenia stycznej na podporach

$$\theta = \frac{qa^3}{24B} = \frac{qa^3(1-\nu^2)}{2Eh^3}$$

Napężenia maksymalne od zginania w kierunku osi x

$$\sigma_{\max} = \sigma_x = \frac{\frac{1}{8}qa^2}{\frac{1}{6}h^2} = \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2}$$

Napężenia te występują w skrajnych (przypowierzchniowych) punktach płyty.

Ponieważ odkształcenia względne ε w kierunku osi y przy zgięciu walcowym są równe zero, przeto zgodnie ze wzorem (2.4)

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_{\max}) = 0$$

stąd

$$\sigma_y = \nu\sigma_{\max} \quad (11.8)$$

W punktach przypowierzchniowych płyty powstaje więc dwukierunkowy stan naprężeń rozciągających w warstwie dolnej i ściskających przy górnej powierzchni płyty (według rys. 11.5), przy czym nie uwzględniamy tu wpływu naprężeń dociskowych q , działających na górnej powierzchni płyty, jako małych w porównaniu z naprężeniami σ_x i σ_y .

Maksymalne naprężenia zredukowane występują więc w dolnych i górnych punktach przy powierzchniach płyty w przekroju określonym współrzędną $x = a/2$ (według rys. 11.5) i według hipotezy Hubera wynoszą [wzór (2.46)]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{red}} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \nu\sigma_x)^2 + (\nu\sigma_x)^2 + \sigma_x^2]} = \\ &= \sigma_x \sqrt{1 + \nu^2 - \nu} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Dla materiałów o liczbie Poissona $\nu = 0,3$ (np. stal) naprężenia zredukowane wynoszą wówczas

$$\sigma_{\text{red}} = 0,889\sigma_x = 0,889\sigma_{\max} \quad (11.9a)$$

W podobny sposób jak dla płyty przedstawionej na rys. 11.5 można obliczyć naprężenia i odkształcenia dowolnych płyt poddanych walcowemu zginaniu, wykorzystując wzory otrzymane dla odpowiednich belek i podstawiając sztywność płytową B .

11.2.3. Przykłady zginania cienkich płyt prostokątnych

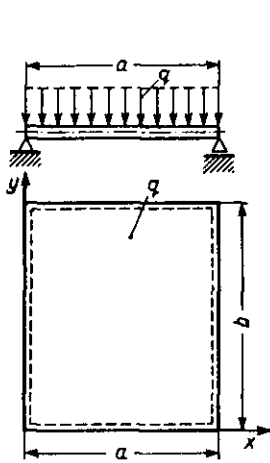
Podstawowe przypadki zginania cienkich płyt prostokątnych podano w tabl. 11.2. Na szkicach umieszczonych w tabl. 11.2 podparcia swobodne krawędzi płyt w widoku z góry zaznaczono linią przerywaną, podobnie jak to podano poprzednio na rys. 11.5b.

Płyty prostokątne o długości b znacznie większej od szerokości a można obliczać jak płyty nieskończenie długie, dla których zachodzi zginanie walcowe (por. p. 11.2.2). Gdy $b \geq 3a$, w obliczeniu naprężeń błąd jest wówczas mniejszy niż 5%, w obliczeniach zaś ugięć błąd jest mniejszy niż 6% i maleje szybko w miarę wzrostu stosunku b/a .

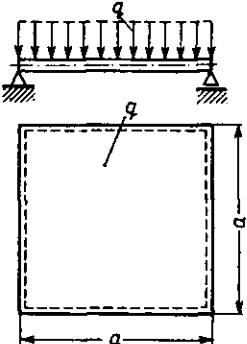
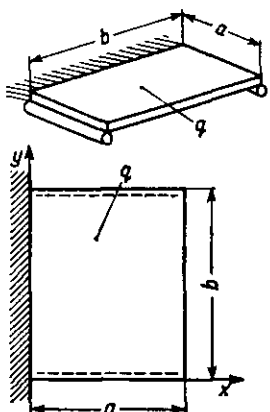
Tablica 11.2. Wzory dotyczące cienkich płyt prostokątnych

Oznaczenia: a – szerokość płyty, b – długość płyty, przy czym $b \geq a$; h – grubość płyty; f – strzałka ugięcia płyty; σ_x – naprężenie maksymalne wzdłuż osi x (rys. 11.4); σ_y – naprężenie

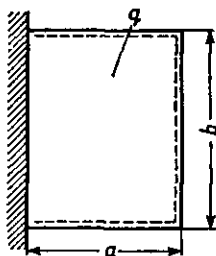
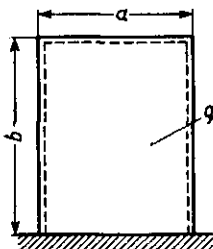
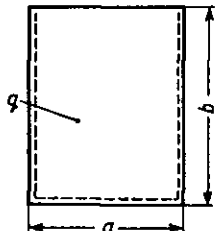
maksymalne wzdłuż osi y ; B – sztywność płytowa $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; ν – liczba Poissona.

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
1	Obciążenie q MPa rozłożone równomiernie na całej powierzchni płyty, wszystkie brzozy podparte. Ponieważ naroża płyty mają tendencję do podnoszenia się w górę, brzozy płyty w tych miejscach są dociskane do podpór 	w środku płyty, dla $\nu = 0,3$ (por. poz. 10) $\sigma_x = \frac{0,75qa^2b^2}{h^2(a^2 + 1,61b^2)},$ $\sigma_y = \frac{qa^2(0,225b^3 + 0,382b^2a - 0,320a^3)}{h^2b^3},$ $f = \frac{0,1422qa^4b^3}{Eh^3(b^3 + 2,21a^3)}$

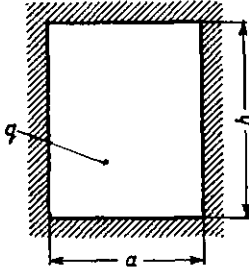
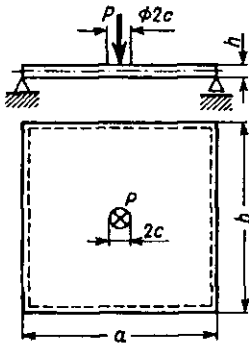
Tablica 11.2 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
2	Płyta kwadratowa ($a = b$); obciążenie i warunki brzegowe jak wyżej 	w środku płyty $\sigma_x = \sigma_y = \frac{0,2208qa^2(1+\nu)}{h^2},$ $f = \frac{0,0487qa^4(1-\nu^2)}{Eh^3};$ gdy rogi płyty nie są dociśnięte (unoszą się do góry), dla $\nu = 0,3$: w środku płyty $\sigma_x = \sigma_y = \frac{0,2214qa^2}{h^2},$ $f = \frac{0,0443qa^4}{Eh^3};$ w rogach płyty, wzdłuż przekątnych $\sigma_{\max} = \frac{0,2778qa^2}{h^2}$
3	Obciążenie równomierne q MPa na całej powierzchni płyty; jeden dłuższy bok utwierdzony, drugi – swobodny; boki krótsze swobodnie podparte 	dla $\nu = 0,3$: w środku boku utwierdzonego $\sigma_x = \sigma_{\max} = \frac{3qa^2b^3}{h^2(b^3 + 3,2a^3)};$ w środku swobodnego boku $\sigma_y = \frac{0,75qb^2a^4}{h^2(a^4 + 0,285b^4)};$ $f = \frac{1,37qa^4b^3}{Eh^3(b^3 - 10a^3)}$

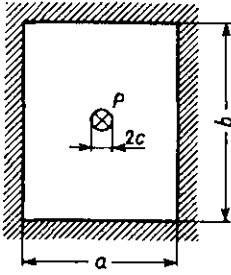
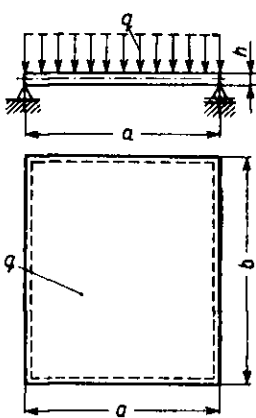
Tablica 11.2 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe																								
4	Obciążenie równomierne q MPa na całej powierzchni płyty, jeden dłuższy bok utwierdzony, pozostałe trzy boki podparte 	dla $\nu = 0,3$ $\sigma_{\max} = \sigma_x = k_1 \frac{qa^2}{h^2}, \quad f = k_2 \frac{qa^4}{Eh^3};$ wartości współczynników k_1 i k_2 podano w poniższej tabelce: <table><tr><th>b/a</th><td>1</td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>2,5</td><td>3,0</td><td>3,5</td><td>4,0</td></tr><tr><th>k_1</th><td>0,50</td><td>0,67</td><td>0,73</td><td>0,74</td><td>0,75</td><td>0,75</td><td>0,75</td></tr><tr><th>k_2</th><td>0,030</td><td>0,046</td><td>0,054</td><td>0,056</td><td>0,058</td><td>0,058</td><td>0,058</td></tr></table>	b/a	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	k_1	0,50	0,67	0,73	0,74	0,75	0,75	0,75	k_2	0,030	0,046	0,054	0,056	0,058	0,058	0,058
b/a	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0																			
k_1	0,50	0,67	0,73	0,74	0,75	0,75	0,75																			
k_2	0,030	0,046	0,054	0,056	0,058	0,058	0,058																			
5	Obciążenie równomierne q MPa na całej powierzchni płyty, jeden krótszy bok utwierdzony, pozostałe trzy boki podparte 	dla $\nu = 0,3$ $\sigma_{\max} = k_1 \frac{qa^2}{h^2}, \quad f = k_2 \frac{qa^4}{Eh^3};$ wartości współczynników k_1 i k_2 podano w poniższej tabelce: <table><tr><th>b/a</th><td>1</td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>2,5</td><td>3,0</td><td>3,5</td><td>4,0</td></tr><tr><th>k_1</th><td>0,50</td><td>0,67</td><td>0,73</td><td>0,74</td><td>0,75</td><td>0,75</td><td>0,75</td></tr><tr><th>k_2</th><td>0,030</td><td>0,071</td><td>0,101</td><td>0,122</td><td>0,132</td><td>0,137</td><td>0,139</td></tr></table>	b/a	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	k_1	0,50	0,67	0,73	0,74	0,75	0,75	0,75	k_2	0,030	0,071	0,101	0,122	0,132	0,137	0,139
b/a	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0																			
k_1	0,50	0,67	0,73	0,74	0,75	0,75	0,75																			
k_2	0,030	0,071	0,101	0,122	0,132	0,137	0,139																			
6	Obciążenie równomierne q MPa na całej powierzchni płyty, jeden krótszy bok swobodny, pozostałe trzy boki podparte 	dla $\nu = 0,3$ $\sigma_{\max} = k_1 \frac{qb^2}{h^2}, \quad f = k_2 \frac{qb^4}{Eh^3};$ wartości współczynników k_1 i k_2 podano w poniższej tabelce: <table><tr><th>b/a</th><td>1</td><td>1,5</td><td>2,0</td></tr><tr><th>k_1</th><td>0,67</td><td>0,45</td><td>0,36</td></tr><tr><th>k_2</th><td>0,140</td><td>0,106</td><td>0,080</td></tr></table>	b/a	1	1,5	2,0	k_1	0,67	0,45	0,36	k_2	0,140	0,106	0,080												
b/a	1	1,5	2,0																							
k_1	0,67	0,45	0,36																							
k_2	0,140	0,106	0,080																							

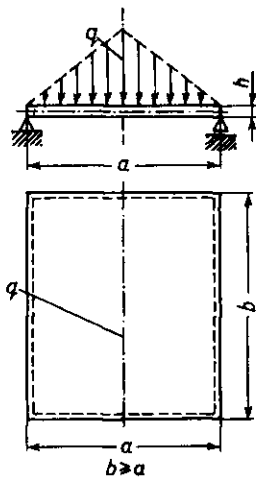
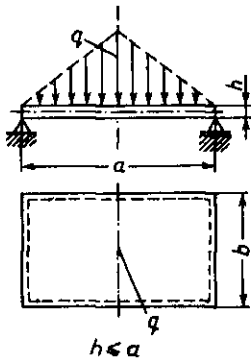
Tablica 11.2 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe
7	Obciążenie równomierne q MPa na całej powierzchni płyty; wszystkie brzegi utwierdzone (utwierdzenie przesuwne, bez sił rozciągających płytę) 	dla $\nu = 0,3$: w środku płyty $\sigma_x = \frac{0,75qa^2b^4}{h^2(3b^4 - 4a^4)},$ w środku dłuższego boku, na brzegu płyty $\sigma_x = \sigma_{\max} = \frac{qa^2b^6}{2h^2(b^6 + 0,623a^6)}$
8	Siła P przyłożona w środku płyty, obciążająca równomiernie obszar płyty o małym promieniu c; wszystkie brzegi płyty podparte 	w środku płyty $\sigma_{\max} = \sigma_x = \frac{3Pa\nu}{2bh^2} \left[\ln \frac{a}{2c\nu} (1 + \nu) + \frac{1}{\nu} \left(\frac{0,914a^2}{a^2 + 1,6b^2} + 0,4 \right) \right],$ $f = \frac{0,203Pa^2b^4(1 - \nu^2)}{Eh^3(b^4 + 0,462a^4)}$

Tablica 11.2 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe																																																																
9	Siła P N przyłożona w środku płyty, obciążająca równomiernie obszar o małym promieniu c; wszystkie brzegi płyty utwardzone (utwardzenie przesuwne, nie wywołujące sił rozciągających płytę) 	$\sigma_{\max} = \sigma_x = \frac{3P\nu}{2\pi h^2} \left[\ln \frac{a}{2c\nu} (1+\nu) + 5 \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right],$ $f = \beta \frac{Pa^2(1-\nu^2)}{Eh^3},$ gdzie współczynnik β wynosi <table><tr><td>b/a</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>β</td><td>0,0624</td><td>0,0816</td><td>0,072</td></tr></table>	b/a	1	2	4	β	0,0624	0,0816	0,072																																																								
b/a	1	2	4																																																															
β	0,0624	0,0816	0,072																																																															
10	Obciążenie q MPa rozłożone równomiernie na całej powierzchni płyty; wszystkie brzegi podparte, naroża dociskane do podpór, by się nie odchyłały do góry (por. poz. 1) 	w środku płyty $f = k_1 \frac{qa^4}{B} = k_1 \frac{12qa^4(1-\nu^2)}{Eh^3},$ $\sigma_x = k_2 \frac{qa^2 \cdot 6}{h^2}, \quad M_{x\max} = k_2 qa^2,$ $\sigma_y = k_3 \frac{qa^2 \cdot 6}{h^2}, \quad M_{y\max} = k_3 qa^2,$ wartości współczynników k_1, k_2 i k_3 podano w poniższej tabelce: <table><tr><td>b/a</td><td>k_1</td><td>k_2</td><td>k_3</td></tr><tr><td>1,0</td><td>0,00406</td><td>0,0479</td><td>0,0479</td></tr><tr><td>1,1</td><td>0,00485</td><td>0,0554</td><td>0,0493</td></tr><tr><td>1,2</td><td>0,00564</td><td>0,0627</td><td>0,0501</td></tr><tr><td>1,3</td><td>0,00638</td><td>0,0694</td><td>0,0503</td></tr><tr><td>1,4</td><td>0,00705</td><td>0,0755</td><td>0,0502</td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,00702</td><td>0,0812</td><td>0,0498</td></tr><tr><td>1,6</td><td>0,00830</td><td>0,0862</td><td>0,0492</td></tr><tr><td>1,7</td><td>0,00883</td><td>0,0908</td><td>0,0486</td></tr><tr><td>1,8</td><td>0,00931</td><td>0,0948</td><td>0,0479</td></tr><tr><td>1,9</td><td>0,00974</td><td>0,0985</td><td>0,0471</td></tr><tr><td>2,0</td><td>0,01013</td><td>0,1017</td><td>0,0464</td></tr><tr><td>3,0</td><td>0,01223</td><td>0,1189</td><td>0,0406</td></tr><tr><td>4,0</td><td>0,01282</td><td>0,1235</td><td>0,0384</td></tr><tr><td>5,0</td><td>0,01297</td><td>0,1246</td><td>0,0375</td></tr><tr><td>∞</td><td>0,01302</td><td>0,1250</td><td>0,0375</td></tr></table>	b/a	k_1	k_2	k_3	1,0	0,00406	0,0479	0,0479	1,1	0,00485	0,0554	0,0493	1,2	0,00564	0,0627	0,0501	1,3	0,00638	0,0694	0,0503	1,4	0,00705	0,0755	0,0502	1,5	0,00702	0,0812	0,0498	1,6	0,00830	0,0862	0,0492	1,7	0,00883	0,0908	0,0486	1,8	0,00931	0,0948	0,0479	1,9	0,00974	0,0985	0,0471	2,0	0,01013	0,1017	0,0464	3,0	0,01223	0,1189	0,0406	4,0	0,01282	0,1235	0,0384	5,0	0,01297	0,1246	0,0375	∞	0,01302	0,1250	0,0375
b/a	k_1	k_2	k_3																																																															
1,0	0,00406	0,0479	0,0479																																																															
1,1	0,00485	0,0554	0,0493																																																															
1,2	0,00564	0,0627	0,0501																																																															
1,3	0,00638	0,0694	0,0503																																																															
1,4	0,00705	0,0755	0,0502																																																															
1,5	0,00702	0,0812	0,0498																																																															
1,6	0,00830	0,0862	0,0492																																																															
1,7	0,00883	0,0908	0,0486																																																															
1,8	0,00931	0,0948	0,0479																																																															
1,9	0,00974	0,0985	0,0471																																																															
2,0	0,01013	0,1017	0,0464																																																															
3,0	0,01223	0,1189	0,0406																																																															
4,0	0,01282	0,1235	0,0384																																																															
5,0	0,01297	0,1246	0,0375																																																															
∞	0,01302	0,1250	0,0375																																																															

Tablica 11.2 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe																																																								
11	Obciążenie zmieniające się w kształcie przysmaku trójkątnego o wartości maksymalnej q MPa, wszystkie brzozy podparte, gdy $b > a$ 	w środku płyty, gdy $b \geq a$ $f = k_1 \frac{qa^4}{B} = k_1 \frac{12qa^4(1-\nu^2)}{Eh^3},$ $\sigma_x = k_2 \frac{qa^2 \cdot 6}{h^2}, \quad M_{x\max} = k_2 qa^2,$ $\sigma_y = k_3 \frac{qa^2 \cdot 6}{h^2}, \quad M_{y\max} = k_3 qa^2;$ wartości współczynników k_1, k_2 oraz k_3 podano w poniższej tabelce: <table border="1"> <thead> <tr> <th>b/a</th><th>k_1</th><th>k_2</th><th>k_3</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1,0</td><td>0,00263</td><td>0,0340</td><td>0,0317</td></tr> <tr><td>1,1</td><td>0,00314</td><td>0,0390</td><td>0,0326</td></tr> <tr><td>1,2</td><td>0,00364</td><td>0,0436</td><td>0,0330</td></tr> <tr><td>1,3</td><td>0,00411</td><td>0,0479</td><td>0,0332</td></tr> <tr><td>1,4</td><td>0,00455</td><td>0,0518</td><td>0,0331</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,00496</td><td>0,0554</td><td>0,0329</td></tr> <tr><td>1,6</td><td>0,00533</td><td>0,0586</td><td>0,0325</td></tr> <tr><td>1,7</td><td>0,00567</td><td>0,0615</td><td>0,0321</td></tr> <tr><td>1,8</td><td>0,00597</td><td>0,0641</td><td>0,0316</td></tr> <tr><td>1,9</td><td>0,00625</td><td>0,0664</td><td>0,0311</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>0,00649</td><td>0,0685</td><td>0,0306</td></tr> <tr><td>3,0</td><td>0,00783</td><td>0,0794</td><td>0,0270</td></tr> <tr><td>∞</td><td>0,00833</td><td>0,0833</td><td>0,0250</td></tr> </tbody> </table>	b/a	k_1	k_2	k_3	1,0	0,00263	0,0340	0,0317	1,1	0,00314	0,0390	0,0326	1,2	0,00364	0,0436	0,0330	1,3	0,00411	0,0479	0,0332	1,4	0,00455	0,0518	0,0331	1,5	0,00496	0,0554	0,0329	1,6	0,00533	0,0586	0,0325	1,7	0,00567	0,0615	0,0321	1,8	0,00597	0,0641	0,0316	1,9	0,00625	0,0664	0,0311	2,0	0,00649	0,0685	0,0306	3,0	0,00783	0,0794	0,0270	∞	0,00833	0,0833	0,0250
b/a	k_1	k_2	k_3																																																							
1,0	0,00263	0,0340	0,0317																																																							
1,1	0,00314	0,0390	0,0326																																																							
1,2	0,00364	0,0436	0,0330																																																							
1,3	0,00411	0,0479	0,0332																																																							
1,4	0,00455	0,0518	0,0331																																																							
1,5	0,00496	0,0554	0,0329																																																							
1,6	0,00533	0,0586	0,0325																																																							
1,7	0,00567	0,0615	0,0321																																																							
1,8	0,00597	0,0641	0,0316																																																							
1,9	0,00625	0,0664	0,0311																																																							
2,0	0,00649	0,0685	0,0306																																																							
3,0	0,00783	0,0794	0,0270																																																							
∞	0,00833	0,0833	0,0250																																																							
12	Obciążenie zmieniające się w kształcie przysmaku trójkątnego o wartości maksymalnej q MPa, wszystkie brzozy podparte 	w środku płyty, gdy $b \leq a$, $f = k_4 \frac{qb^4}{B} = k_4 \frac{12qb^4(1-\nu^2)}{Eh^3},$ $\sigma_x = k_5 \frac{qb^2 \cdot 6}{h^2}, \quad M_{x\max} = k_5 qb^2,$ $\sigma_y = k_6 \frac{qb^2 \cdot 6}{h^2}, \quad M_{y\max} = k_6 qb^2;$																																																								

Tablica 11.2 (cd.)

Lp.	Schemat płyty	Wzory obliczeniowe																																																								
12 cd.		wartości współczynników k_4 , k_5 oraz k_6 podano w poniższej tabelce: <table><tr><th>a/b</th><th>k_4</th><th>k_5</th><th>k_6</th></tr><tr><td>1,0</td><td>0,00263</td><td>0,0340</td><td>0,0317</td></tr><tr><td>1,1</td><td>0,00316</td><td>0,0356</td><td>0,0369</td></tr><tr><td>1,2</td><td>0,00367</td><td>0,0368</td><td>0,0418</td></tr><tr><td>1,3</td><td>0,00418</td><td>0,0376</td><td>0,0464</td></tr><tr><td>1,4</td><td>0,00464</td><td>0,0382</td><td>0,0508</td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,00508</td><td>0,0386</td><td>0,0548</td></tr><tr><td>1,6</td><td>0,00549</td><td>0,0388</td><td>0,0585</td></tr><tr><td>1,7</td><td>0,00588</td><td>0,0390</td><td>0,0609</td></tr><tr><td>1,8</td><td>0,00624</td><td>0,0391</td><td>0,0651</td></tr><tr><td>1,9</td><td>0,00656</td><td>0,0392</td><td>0,0681</td></tr><tr><td>2,0</td><td>0,00686</td><td>0,0392</td><td>0,0707</td></tr><tr><td>3,0</td><td>0,00868</td><td>0,0387</td><td>0,0922</td></tr><tr><td>∞</td><td>0,01302</td><td>0,0375</td><td>0,1250</td></tr></table>	a/b	k_4	k_5	k_6	1,0	0,00263	0,0340	0,0317	1,1	0,00316	0,0356	0,0369	1,2	0,00367	0,0368	0,0418	1,3	0,00418	0,0376	0,0464	1,4	0,00464	0,0382	0,0508	1,5	0,00508	0,0386	0,0548	1,6	0,00549	0,0388	0,0585	1,7	0,00588	0,0390	0,0609	1,8	0,00624	0,0391	0,0651	1,9	0,00656	0,0392	0,0681	2,0	0,00686	0,0392	0,0707	3,0	0,00868	0,0387	0,0922	∞	0,01302	0,0375	0,1250
a/b	k_4	k_5	k_6																																																							
1,0	0,00263	0,0340	0,0317																																																							
1,1	0,00316	0,0356	0,0369																																																							
1,2	0,00367	0,0368	0,0418																																																							
1,3	0,00418	0,0376	0,0464																																																							
1,4	0,00464	0,0382	0,0508																																																							
1,5	0,00508	0,0386	0,0548																																																							
1,6	0,00549	0,0388	0,0585																																																							
1,7	0,00588	0,0390	0,0609																																																							
1,8	0,00624	0,0391	0,0651																																																							
1,9	0,00656	0,0392	0,0681																																																							
2,0	0,00686	0,0392	0,0707																																																							
3,0	0,00868	0,0387	0,0922																																																							
∞	0,01302	0,0375	0,1250																																																							

11.3. Zginanie płyt grubych

W przypadku płyt grubych, w których grubość h płyty nie jest mała w porównaniu z wymiarami a i b ($h > a/5$, por. rys. 11.1 i 11.3), dla kilku rozwiązanych przypadków strzałka ugięcia f_1 jest większa od strzałki ugięcia takiej samej płyty cienkiej.

Tak więc dla pełnej płyty okrągłej utwardzonej przesuwnie na obwodzie, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia q , strzałka ugięcia f_1 płyty grubej wynosi [29]

$$f_1 = f \left[1 + 3,33 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]$$

gdzie f – strzałka ugięcia takiej samej płyty cienkiej, podana w tabl. 11.1 (poz.7). Gdy ta sama płyta gruba utwardzona jest na obwodzie nieprzesuwnie, co powoduje powstawanie sił rozciągających, strzałka ugięcia wynosi

$$f_1 = f \left[1 + 0,7 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right]$$

przy czym f dotyczy płyty cienkiej przedstawionej w tabl. 11.1 (poz.7).

Dla płyty prostokątnej o szerokości a i długości b , gdy $b \geq a$, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego na całej powierzchni płyty obciążenia q MPa, podpartej na całym obwodzie, strzałka ugięcia f_1 płyty grubej jest następującą funkcją strzałki f takiej samej płyty cienkiej, przedstawionej w tabl. 11.2 (poz. 1)

$$f_1 = f \left[1 + k_1 \left(\frac{h}{2a} \right)^2 \right] \quad (11.10)$$

przy czym wartość współczynnika k_1 należy odczytać z tabl. 11.3.

Tablica 11.3. Wartości współczynnika k_1 we wzorze (11.10)

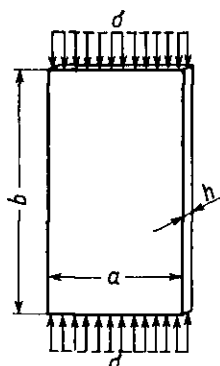
b/a	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2	3	4	5	∞
k_1	1,18	0,98	0,87	0,80	0,75	0,72	0,64	0,62	0,61	0,61

11.4. Stateczność płyt cienkich

Utrata stateczności płyt może powstać wówczas, gdy siły obciążające działają w płaszczyźnie płyty. Tego rodzaju obciążenie płyt bywa zwane *obciążeniem tarczowym*, płyty zaś tak obciążone – *tarczami*.

Przykład 1.

Schemat płyty: Płyta swobodnie podparta, ściskana równomiernie rozłożoną siłą, której wartość na jednostkę długości brzegu wynosi N (rys. 11.6).



Rys. 11.6

Wzory obliczeniowe: Krytyczna wartość siły, przy której następuje wyboczenie

$$N_{kr} = k_1 \frac{\pi^2 B}{a^2} = k_1 \frac{\pi^2 E h^3}{12(1 - \nu^2) a^2} \quad (11.11)$$

czemu odpowiada naprężenie ściskające (rys. 11.6)

$$\sigma_{kr} = \frac{N_{kr}}{h} = k_1 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (11.11a)$$

Wartość współczynnika k_1 w powyższych wzorach podano w tabl. 11.4. W tablicy tej podano również wartości naprężeń krytycznych dla stali ($E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$) dla stosunku $a/h = 100$ (według [37]).

Tablica 11.4. Wartości współczynnika k_1 we wzorach (11.11) oraz σ_{kr} MPa dla płyt stalowych o stosunku $a/h = 100$

b/a	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
k_1	27,0	13,2	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20	4,04	4,00	4,04	4,13	4,28	4,47
σ_{kr}	514,0	251,5	160,4	118,8	97,7	86,5	79,9	77,3	75,8	77,3	78,7	81,6	85,0

Przykład 2.

Schemat płyty: Jeden bok płyty dla $x = 0$ swobodnie podparty, drugi dla $x = a$ zupełnie swobodny, gdy przy wyboczeniu płyty tworzy się jedna półfala (rys. 11.7). Takie warunki brzegowe są realizowane np. w przypadku kątownika ściskanego równomiernie rozłożonymi siłami o natężeniu N niutonów na milimetr wymiaru a płyty. Jedna półfala tworzy się, gdy kątownik jest krótki: $b/a \leq 2,2$.

Wzory obliczeniowe: Przy wyboczeniu wspólna krawędź AB obu półek kątownika pozostaje prosta, wówczas

$$N_{kr} = k_1 \frac{\pi^2 B}{a^2} = k_1 \frac{\pi^2 E h^3}{12(1-\nu^2) a^2} \quad (11.12)$$

czemu odpowiada naprężenie ściskające (rys. 11.7)

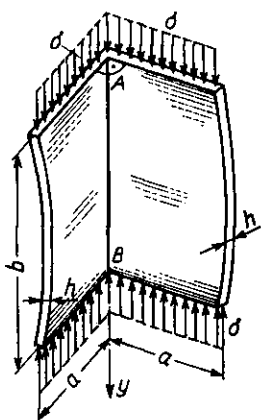
$$\sigma_{kr} = \frac{N_{kr}}{h} = k_1 \frac{\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2) a^2} \quad (11.12a)$$

gdzie wartość współczynnika k_1 należy odczytać z tabl. 11.5.

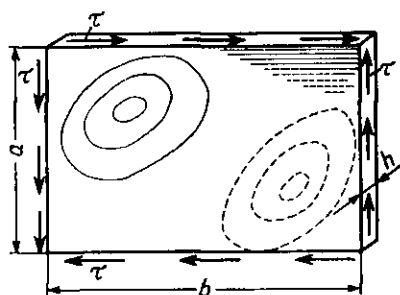
Tablica 11.5. Wartości współczynnika k_1 we wzorach (11.12)

b/a	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
k_1	4,4	3,7	3,0	2,35	1,70	1,44	1,135	0,952	0,835	0,755	0,698	0,66

Uwaga: Kątowniki o większej długości ulegają wyboczeniu tak jak zwykłe pręty, tj. zgięciu względem osi obojętnej, dla której moment bezwładności całego przekroju osiąga minimum (por. rozdz. 3).



Rys. 11.7



Rys. 11.8

Przykład 3.

Schemat płyty: Płyta swobodnie podparta na brzegach, poddana na wszystkich krawędziach działaniu naprężeń stycznych τ (rys. 11.8).

Wzory obliczeniowe: Krytyczna wartość naprężeń, przy których następuje wybrzuszenie płyty (zaznaczone warstwicami na rys. 11.8), wynosi

$$\tau_{kr} = k_1 \frac{\pi^2 B}{a^2 h} = k_1 \frac{\pi^2 E h^2}{12(1 - \nu^2) a^2} \quad (11.13)$$

gdzie wartości współczynnika k_1 należy odczytać z tabl. 11.6.

Tablica 11.6. Wartości współczynnika k_1 we wzorze (11.13)

b/a	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3	4	∞
k_1	9,34	8,0	7,3	7,0	6,8	6,6	6,1	5,9	5,7	5,35

Przykład 4.

Schemat płyty: Płyta kolista ściskana w swej płaszczyźnie równomiernie rozłożonymi na obwodzie siłami o natężeniu N (N/mm) (rys. 11.9).

Wzory obliczeniowe: Wyboczenie płyty następuje przy sile

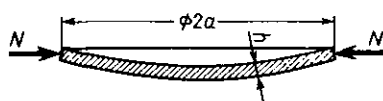
$$N_{kr} = \frac{14,68 B}{a^2} = \frac{1,22 E h^3}{(1 - \nu^2) a^2} \quad (11.14)$$

czemu odpowiadają naprężenia ściskające

$$\sigma_{kr} = \frac{N_{kr}}{h} = \frac{1,222E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (11.14a)$$



Rys. 11.9



Rys. 11.10

Przykład 5.

Schemat płyty: Płyta kołista, brzegi swobodnie podparte, ściskana siłami N (N/mm) rozłożonymi równomiernie na obwodzie (rys. 11.10).

Wzory obliczeniowe: Wyboczenie płyty następuje przy sile

$$N_{kr} = \frac{4,20B}{a^2} = \frac{0,358Eh^3}{(1-\nu^2)a^2} \quad (11.15)$$

czemu odpowiadają naprężenia ściskające

$$\sigma_{kr} = \frac{N_{kr}}{h} = \frac{0,358E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (11.15a)$$

Inne przypadki warunków brzegowych i obciążeń można znaleźć w literaturze dotyczącej stateczności płyt [35].

Dla elementów pełnościennych (pasów) ustrojów nośnych dźwignic (belek podtorowych, słupów itp.) – uproszczona metoda przeprowadzania obliczeń miejscowej utraty stateczności podana jest w normie [38].

12. Obliczanie rur i zbiorników

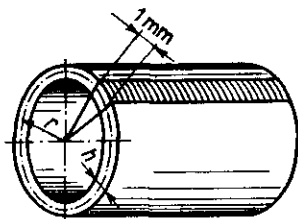
12.1. Obliczanie rur cienkościennych lub powłok walcowych

12.1.1. Osiowosymetryczne zginanie rur cienkościennych

Przy zginaniu rur (oraz powłok walcowych) dowolny pasek wycięty z rury dwoma przekrojami zawierającymi oś rury (rys. 12.1) zachowuje się podobnie jak analogiczny pasek wycięty z płyty (por. rys. 11.1). Powierzchnia środkowa, która w przypadku płyty utworzona była przez punkty równo oddalone od obu powierzchni zewnętrznych płyty, w przypadku rury ma kształt powierzchni walcowej (w stanie nieodkształconym rury) o promieniu średnim r . Powierzchnia ta, zwana *powierzchnią średnią rury*, jest zbiorem punktów równo oddalonych od powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej rury. Jeżeli grubość rury oznaczmy literą h , to dla rur cienkościennych (gdy $h/r \leq 1/5$) sztywność zginania B beleczki wyciętej z rury w ten sposób, by szerokość tej beleczki mierzona wzdłuż obwodu średniego była równa jedności (1 mm), wynosi

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (12.1)$$

Tak określona sztywność zwana jest *sztywnością zginania rury*, a postać wzoru (12.1) jest identyczna z postacią wzoru (11.2), określającego sztywność zginania płyt.

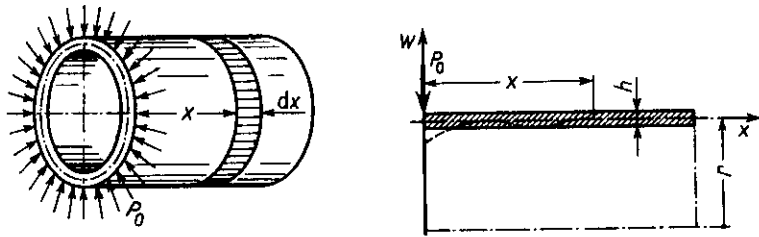


Rys. 12.1

Oddziaływanie sąsiednich elementów rury na beleczkę wyciętą w omówiony wyżej sposób sprowadza się do sił oddziaływania podłoża sprężystego o stałej k określonej wzorem (por. rozdz. 9)

$$k = \frac{Eh}{r^2} \quad (12.2)$$

Zagadnienia związane z analizą stanu naprężeń i odkształceń rury cienkościennej poddanej zginaniu osiowoosymetrycznemu sprowadzają się więc do badania belki na sprężystym podłożu o stałej k [wzór (12.2)] i sztywności belki określonej wzorem (12.1). Jeżeli przemieszczenie promieniowe punktu powierzchni środkowej rury, określonego współrzędną x , oznaczymy w (jak to podano na rys. 12.2 dla



Rys. 12.2

rury obciążonej równomiernie rozłożonymi siłami P_0 , działającymi w płaszczyźnie przekroju końcowego rury), to naprężenia maksymalne od zginania, powstające w przypowierzchniowych punktach rury, wyrażą się wzorami:

– w kierunku wzdłużnym (wzdłuż tworzącej rury)

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2} \quad (12.3)$$

– w kierunku obwodowym (prostopadle do płaszczyzny xw)

$$\sigma_y = \frac{Ew}{r} + \nu\sigma_x = \frac{Ew}{r} + \nu \frac{6M_x}{h^2} \quad (12.4)$$

Przemieszczenie w dowolnego punktu przekroju rury, określonego współrzędną x , ujęte jest równaniem analogicznym do równania dla belek na sprężystym podłożu [równanie (9.4)]

$$w = e^{\beta x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (12.5)$$

w którym stałe całkowania A , B , C oraz D wyznaczamy z warunków brzegowych w sposób omówiony w rozdz. 9 (por. [18], str. 278), współczynnik β zaś jest określony wzorem

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4B}} = \sqrt[4]{\frac{Eh \cdot 12(1-\nu^2)}{4r^2 Eh^3}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2}} \quad (12.6)$$

Podobnie jak w przypadku belek na sprężystym podłożu, rurę można traktować jako nieskończenie długą, gdy spełniony jest warunek $\beta l \geq 5$, co dla rur – po uwzględnieniu zależności (12.6) – wyrazi się związkiem

$$l \geq \frac{5}{\beta} = \frac{5}{\sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2}}} = 3,9\sqrt{rh}$$

Przy spełnieniu tego warunku pierwsze dwie stałe całkowania w równaniu (12.5) są równe zero ($A = B = 0$) i wówczas wpływ warunków brzegowych istniejących na jednym brzegu na rozkład naprężeń i odkształceń istniejących na drugim brzegu rury można pominąć.

Wzory do obliczania naprężeń i odkształceń dla kilku przypadków kołowsymetrycznego zginania rur podano w tabl. 12.1. W tablicy tej zamieszczono wzory dla rur długich, dla których $\beta l \geq 5$ lub inaczej – $l \geq 3,9\sqrt{rh}$; w praktyce traktuje się często rurę jako długą, gdy spełniony jest warunek $\beta l \geq 3\sqrt{rh}$, popełniając błąd nie większy niż 5%. Wartości funkcji trygonometrycznych i potęgowych występujących w równaniu (12.5) oraz we wzorach podanych w tabl. 12.1 można odczytać z tabl. 9.1.

12.1.2. Naprężenia w rurach cienkościennych lub powłokach walcowych poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego lub zewnętrznego

Pod wpływem ciśnienia wewnętrznego lub zewnętrznego powstają w rurach cienkościennych naprężenia obwodowe, które wyrażają się wzorem

$$\sigma_1 = \frac{pr}{h} = \frac{pd}{2h} \quad (12.7)$$

przy czym przyjmuje się, że naprężenia te mają jednakową wartość na całej grubości rury, gdy $h/r \leq 1/5$. Jeżeli rura zamknięta jest dnami (przeponami, zaślepkami), to w części walcowej powstają dodatkowo naprężenia wzdłużne, których wartość w miejscach dostatecznie odległych od den wynosi

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2h} = \frac{pd}{4h} = \frac{1}{2}\sigma_1 \quad (12.8)$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera wyraża się wzorem

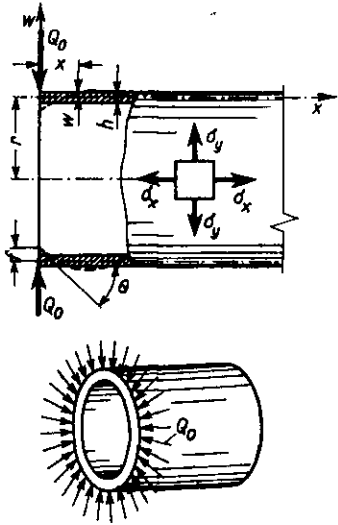
$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 0,866\sigma_1 \quad (12.9)$$

przy czym przyjęto, że naprężenie σ_3 równe ciśnieniu p jest małe w porównaniu z naprężeniem σ_1 .

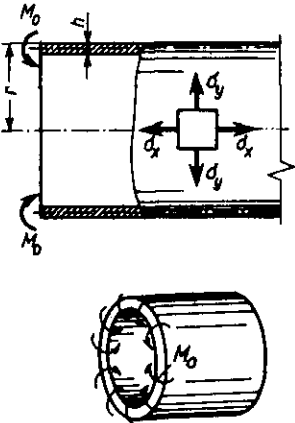
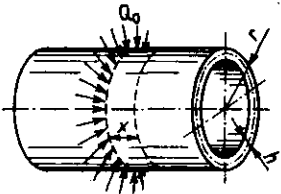
Tablica 12.1. Wzory obliczeniowe dla kilku przypadków kołosymetrycznych zginania rur cienkościennych lub powłok walcowych

Oznaczenia: h – grubość rury, r – średni promień rury, ν – liczba Poissona, E – moduł Younga, w – ugięcie warstwy środkowej rury odpowiadające współrzędnej x , f – strzałka ugięcia, θ – kąt nachylenia stycznej do tworzącej dla $x = 0$, σ_x – naprężenie maksymalne wzdłuż tworzącej (równoległe do osi x), σ_y – naprężenie maksymalne obwodowe, Q_x – siła poprzeczna (promieniowa) przypadająca na 1 mm obwodu średniego rury, M_x – moment gnący przypadający na 1 mm obwodu średniego w przekroju rury określonym współrzędną x .

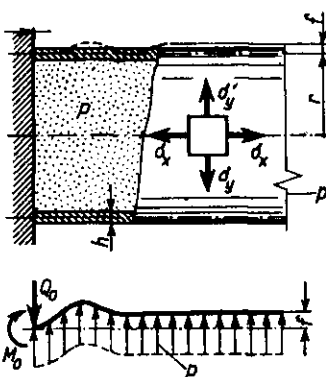
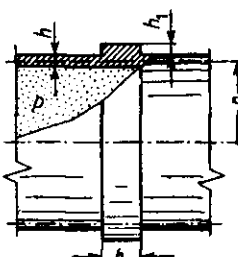
Zależności: $B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $k = \frac{Eh}{r^2}$, $\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}$, $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4B}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2h^2}}$

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
1	Siły Q_0 N/mm równomiernie rozłożone w płaszczyźnie końcowego przekroju rury 	$f = \frac{Q_0}{2B\beta^3}, \quad w = \frac{Q_0}{2B\beta^3} e^{-\beta x} \cos \beta x,$ $\theta = \frac{Q_0}{2B\beta^2}, \quad M_x = \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x,$ $M_{max} = 0,322 \frac{Q_0}{\beta} \quad \left(\text{dla } x = \frac{\pi}{4\beta} \right),$ naprężenie wzdłużne $\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_{xmax} = \frac{1,932Q_0}{\beta h^2};$ na brzegu ($x = 0$) $\sigma_y = \frac{2r}{h} \beta Q_0$

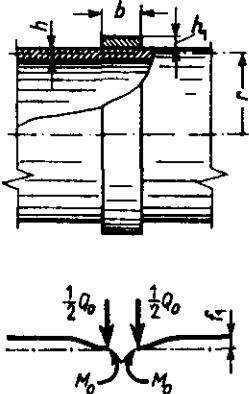
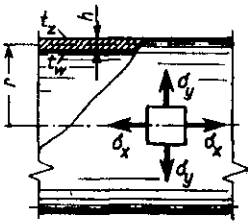
Tablica 12.1 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
2	Momenty M_0 (N-mm/mm) rozłożone równomiernie na całym obwodzie w przekroju końcowym rury (przypadające na 1 mm obwodu średniego) 	$f = \frac{M_0}{2B\beta^2}, \quad w = \frac{M_0}{2B\beta^2} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x),$ $\theta = \frac{M_0}{B\beta},$ $M_x = M_0 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x),$ $M_{\max} = M_0, \quad Q_x = 2\beta M_0 e^{-\beta x} \sin \beta x,$ $Q_{\max} = 0,644\beta M_0 \quad \left(\text{dla } x = \frac{\pi}{4\beta} \right);$ naprężenia na brzegu ($x = 0$) $\sigma_x = \frac{6M_0}{h^2}, \quad \sigma_y = \frac{6M_0}{h^2} \left(\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{3} + \nu \right)$
3	W płaszczyźnie poprzecznej rury równomiernie rozłożone siły promieniowe o natężeniu Q_0 N/mm (przypadającym na 1 mm obwodu średniego) 	$f = -\frac{\beta r^2}{2Eh} Q_0 \quad (\text{ugięcie w dla } x = 0),$ $w = -\frac{Q_0}{8B\beta^3} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x),$ $M_{\max} = \frac{Q_0}{4\beta},$ $\sigma_x = \frac{3Q_0}{2h^2\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x),$ $\sigma_y = \frac{Ew}{r} + \nu\sigma_x,$ dla $x = 0$ $\sigma_x = \frac{3Q_0}{2h^2\beta},$ $\sigma_y = -\frac{Q_0}{2h^2\beta} \left(\sqrt{3(1-\nu^2)} - 3\nu \right)$

Tablica 12.1 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
4	Rura poddana działaniu ciśnienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) p MPa; brzeg rury utwierdzony w nieodkształcalnej płycie 	$f = \frac{pr^2}{Eh}$ (odkształcenie promieniowe rury dla $\beta l > 5$), $M_0 = \frac{prh}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{p}{2\beta^2},$ $Q_0 = 2\beta M_0 = \frac{p}{\beta} = p\sqrt{\frac{r^2 h^2}{3(1-\nu^2)}}$ napężenie maksymalne σ_x dla $x = 0$ $\sigma_{\text{max}} = \frac{6M_0}{h^2} = \frac{3pr}{2h\sqrt{3(1-\nu^2)}},$ $M_x = \frac{p}{2\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$
5	Cylinder z pierścieniem wzmacniającym o przekroju $F = b(h + h_1)$, poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) p MPa 	na powierzchni wewnętrznej dla $x = 0$ $\sigma_x = \sigma_{\text{max}} = \frac{3pr\beta(F - bh_1)}{h\sqrt{3(1-\nu^2)}(F\beta + 2h)},$ $\sigma_y = \frac{Ef}{r} + \nu\sigma_x,$ $f = \frac{pr^2(\beta b + 2)}{E(F\beta + 2h)},$ w pierścieniu $\sigma_{\text{max}} = \frac{pr(\beta b + 2)}{E(F\beta + 2h)},$ przy czym $F = b(h + h_1)$

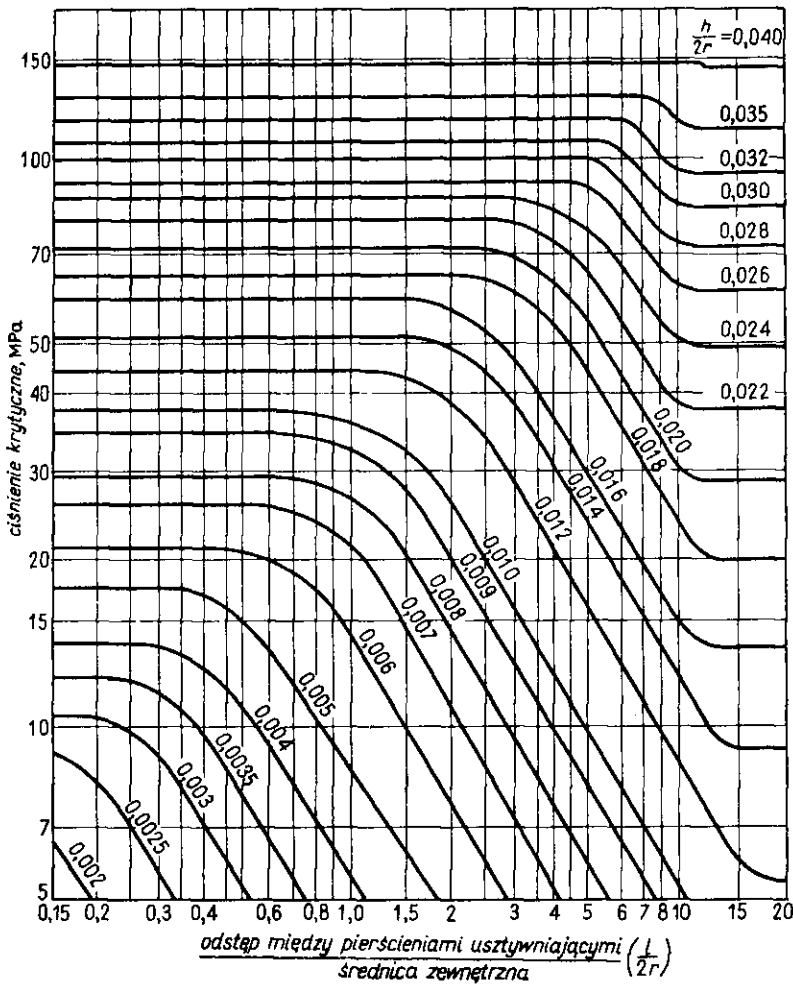
Tablica 12.1 (cd.)

Lp.	Schemat obciążenia	Wzory obliczeniowe
6	Pierścień nałożony na gorąco na rurę; średnica wewnętrzna pierścienia przed ogrzaniem jest o wymiar $2e$ mniejsza 	$Q_0 = \frac{2Ee}{\frac{r}{h} \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \left[r + \frac{1}{2}(h+h_1)\right]^2}};$ w rurze $M_0 = M_{\text{max}} = \frac{Q_0}{4\beta},$ $\sigma_{\text{max}} = \frac{6}{h^2} \frac{P}{4\beta} = \frac{3Q_0}{2h^2} \sqrt[4]{\frac{r^2 h^2}{3(1-\nu^2)}},$ $f_1 = \frac{Q_0 r}{2Eh} \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \left(\frac{r}{h}\right)^2};$ w pierścieniu $\sigma = \frac{Q_0 \left[r + \frac{1}{2}(h+h_1)\right]}{2bh_1}$
7	Rura równomiernie nagrzana wewnątrz do temperatury t_w, gdy temperatura warstwy zewnętrznej rury wynosi t_z 	napężenie maksymalne $\sigma_y = \frac{E\alpha(t_w - t_z)}{2(1-\nu)}$ α – współczynnik rozszerzalności liniowej (tabl. 19.1 i 19.2)

W przypadku rury lub powłoki walcowej, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego na powierzchni walcowej zewnętrznej ciśnienia radialnego p , może nastąpić utrata stateczności (wyboczenie) powłoki lub płaszcza rury. W zależności od długości rury (powłoki) oraz od stosunku grubości do promienia (h/r), pod wpływem ciśnienia zewnętrznego tworzą się na powierzchni rury fale, przy czym liczba tych fal powstających na powierzchni wyboczenia wzrasta, gdy długość i grubość powłoki maleją.

Odpowiednie wzory dotyczące obliczeń fal i naprężenia krytycznego można znaleźć w literaturze [35]. W przypadku stalowych powłok walcowych wartość ciśnienia krytycznego p_{kr} lub grubość ścianki h można wyznaczyć posługując się rys. 12.3, sporządzonym dla modułu Younga $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa oraz $\nu = 0,3$. Ponieważ sposób podparcia brzegu nie wywiera większego wpływu na wartość ciśnienia krytycznego, z wykresu 12.3 można korzystać dla dowolnych warunków istniejących na brzegach powłoki walcowej.

Jeżeli powłoka ma na swej długości pierścienie usztywniające, jako długość l powłoki przy korzystaniu z wykresu 12.3 można przyjąć odległość między pierś-



Rys. 12.3

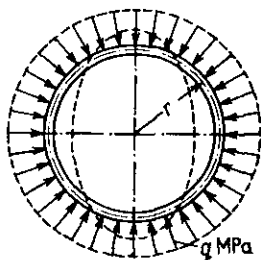
cieniami usztywniającymi, pod warunkiem, że sztywność zginania tych pierścieni jest tak duża, aby one same mogły przenieść obciążenie radialne całej powłoki, nie ulegając wyboczeniu.

Wyboczenie pierścienia kolistego pod wpływem równomiernie rozłożonego promieniowego obciążenia q , przypadającego na jednostkę długości obwodu linii średniej pierścienia (utworzonej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pierścienia), następuje przy krytycznej wartości obciążenia q_{kr} , określonej wzorem ([35], str. 269)

$$q_{kr} = \frac{3EJ}{r^3} \quad (12.10)$$

gdzie J – moment bezwładności przekroju poprzecznego pierścienia względem osi obojętnej przy zginaniu, prostopadłej do płaszczyzny pierścienia.

Pod wpływem ciśnienia krytycznego q_{kr} , określonego wzorem (12.10), przekroje poprzeczne pierścienia ulegają spłaszczeniu zaznaczonemu na rys. 12.4 linią przerywaną.



Rys. 12.4

Wzór (12.10) można stosować nie tylko do pierścieni, lecz również do obliczania ciśnienia krytycznego p_{kr} długich rur kołowych, traktując rurę jako zbiór pierścieni o szerokości 1 mm (wówczas $J = 1 \cdot h^3/12$) i zachowując prostokątny kształt przekroju poprzecznego przy zginaniu [wówczas moduł Younga E we wzorze (12.10) należy zastąpić wyrażeniem $E/(1-\nu^2)$]. Ciśnienie krytyczne, przy którym długa rura kolistą ulega wyboczeniu przejawiającemu się spłaszczeniem rury, jest określone wzorem

$$p_{kr} = \frac{EJ}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{r} \right)^3 \quad (12.11)$$

12.1.3. Wyboczenie rur lub powłok walcowych poddanych równomiernemu ścisłaniu osiowemu

Przy równomiernym osiowym ścisłaniu rur lub powłok walcowych w zależności od grubości powłok h , promienia średniego r i długości l powstają różne postacie wyboczenia.

1. Gdy powłoka (rura) jest długa, a grubość h ścianki mała, powierzchnia rury ulega pofalowaniu i naprężenie krytyczne w ścisłanej rurze przybiera najniższą wartość (przy wyboczeniu sprężystym), określoną wzorem ([35], str.421)

$$\sigma_{kr} = \frac{3}{5} \frac{Eh}{r\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (12.12)$$

2. Długa rura o małej grubości może ulec wyboczeniu tak jak pręt ściskany osiowo, a wówczas przekroje poprzeczne pozostaną koliste, na długości l rury tworzy się jedna półfala i naprężenie krytyczne wyraża się wzorem

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E r^2}{2l^2} \quad (12.13)$$

3. Jeżeli brzegi powłoki ściskanej osiowo mogą się swobodnie przemieszczać w kierunku radialnym, może wystąpić spłaszczenie przekrojów poprzecznych przy naprężeniach krytycznych

$$\sigma_{kr} = \frac{3Eh^2}{10(1-\nu^2)r^2} \left[\frac{4}{3} \frac{l^2}{r^2} + 2(1-\nu) \right] \quad (12.14)$$

4. W przypadku krótkich walców cienkościennych, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{r\pi^3}{l^2} > \frac{2}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}$$

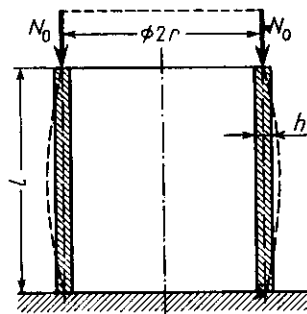
powierzchnia wyboczenia w kierunku osiowym ma tylko jedną półfalę (rys. 12.5) i naprężenie krytyczne wyraża się wzorem

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 Eh^2}{12(1-\nu^2)l^2} \quad (12.15)$$

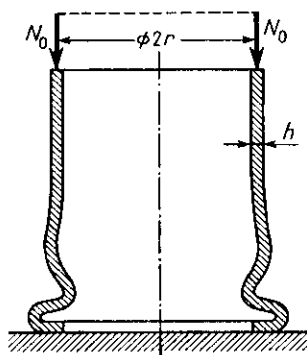
5. Jeżeli naprężenia krytyczne obliczone z powyższych wzorów są większe od granicy plastyczności, co zachodzi w przypadku rur o większej grubości, występują miejscowe odkształcenia plastyczne i na rurze tworzą się osiowosymetryczne fale przedstawione na rys. 12.6. Fale takie zaczynają powstawać przy naprężeniach krytycznych

$$\sigma_{kr} = \frac{E_t h}{r \sqrt[3]{3(1-\nu^2)}} \quad (12.16)$$

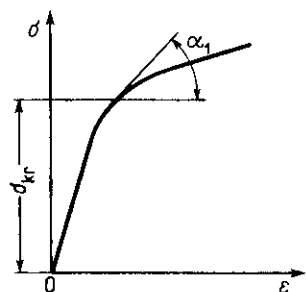
W powyższym wzorze tzw. *moduł styczny* E_t jest równy pochodnej $d\sigma/d\varepsilon$ i określony jest tangensem kąta nachylenia stycznej do krzywej rozciągania σ - ε materiału rury (rys. 12.7).



Rys. 12.5



Rys. 12.6



Rys. 12.7

12.2. Obliczanie naczyń i powłok cienkościennych

W przypadku naczyń cienkościennych o kształcie powierzchni obrotowych, poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego p , naprężenia normalne (rozciągające) w powłoce ujęte są zależnością

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h} \quad (12.17)$$

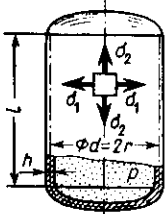
gdzie: σ_1 – naprężenia normalne w przekrojach południkowych (w przekroju poprowadzonym w danym punkcie przez oś naczynia i południk), zwane *naprężeniami równoleżnikowymi*; σ_2 – naprężenia normalne w przekrojach prostopadłych do południka w rozpatrywanym punkcie, zwane *naprężeniami południkowymi*; ρ_1 – promień krzywizny równoleżnika powierzchni środkowej powłoki w danym punkcie; ρ_2 – promień krzywizny południka powierzchni środkowej powłoki w danym punkcie; p – nadciśnienie wewnętrzne; h – grubość powłoki.

Dalszą zależność otrzymuje się z warunków równowagi powłoki przeciętej przekrojem równoleżnikowym. Wzory obliczeniowe dla prostszych kształtów powłok obrotowych poddanych działaniu różnych obciążeń podano w tabl. 12.2.

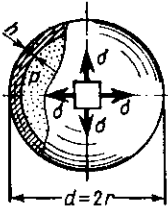
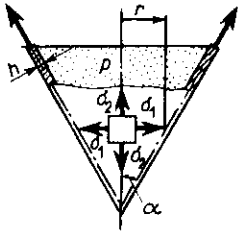
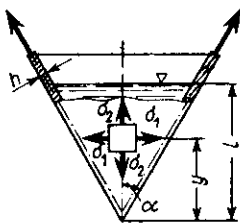
Należy podkreślić, że zarówno wzór (12.17), jak i wszystkie zależności podane w tabl. 12.2 dotyczą stanu błonowego, gdy nie występuje zginanie powłok, a więc dla miejsc dostatecznie oddalonych od brzegów. Wartości naprężeń maksymalnych z uwzględnieniem zginania dla kilku naczyń ciśnieniowych i zbiorników otwartych podano w tabl. 12.3.

Tablica 12.2. Wzory obliczeniowe dla zbiorników cienkościennych w stanie błonowym (bez uwzględnienia zginania)

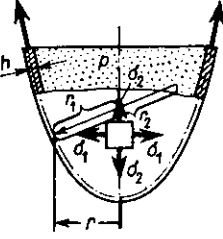
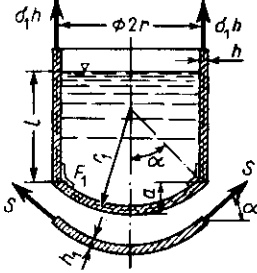
Oznaczenia: p – ciśnienie (wewnętrzne lub zewnętrzne), σ_1 – naprężenie obwodowe, σ_2 – naprężenie wzdłużne (wzdłuż południka), ε_1 – wydłużenie względne równoleżnika, ε_2 – wydłużenie względne południka, h – grubość powłoki, E – moduł Younga, ν – liczba Poissona.

Lp.	Kształt powłoki	Wzory obliczeniowe
1	Plaszcz walczaka lub rura; ciśnienie wewnętrzne (lub zewnętrzne) p MPa 	$\sigma_1 = \frac{pd}{2h} = \frac{pr}{h}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pd}{4h} = \frac{pr}{2h},$ $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{pd}{4Eh}(2 - \nu),$ $\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{pd}{4Eh}(1 - 2\nu);$ powiększenie średnicy $\Delta d = d\varepsilon_1 = \frac{pd^2}{4Eh}(2 - \nu);$ powiększenie długości $\Delta l = l\varepsilon_2 = \frac{pdl}{4Eh}(1 - 2\nu)$

Tablica 12.2 (cd.)

Lp.	Kształt powłoki	Wzory obliczeniowe
2	Kula pod wpływem ciśnienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) p MPa 	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pd}{4h} = \frac{pr}{2h};$ wydłużenie względne $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon = \frac{\sigma}{E} (1 - \nu);$ powiększenie średnicy $\Delta d = \frac{pd}{4Eh} (1 - \nu)$
3	Powłoka stożkowa – ciśnienie wewnętrzne (lub zewnętrzne) p MPa 	napężenie obwodowe $\sigma_1 = \frac{pr}{h \cos \alpha};$ napężenie wzdłuż tworzącej $\sigma_2 = \frac{pr}{2h \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sigma_1;$ wydłużenie promienia r $\Delta r = \frac{r}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{pr^2}{Eh \cos \alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \nu\right)$
4	Zbiornik stożkowy wypełniony cieczą do wysokości l, ciężar właściwy cieczy γ 	napężenia obwodowe na wysokości y od dna $\sigma_1 = \frac{y(l-y)\gamma \tan \alpha}{h \cos \alpha};$ napężenia maksymalne (dla $y = \frac{1}{2}l$) $\sigma_{1\max} = \frac{l^2 \gamma \tan \alpha}{4h \cos \alpha};$ napężenie wzdłuż tworzącej stożka: na wysokości y od dna $\sigma_2 = \frac{y \gamma \tan \alpha}{2h \cos \alpha} \left(l - \frac{2}{3}y\right);$ napężenia maksymalne (dla $y = \frac{3}{4}l$) $\sigma_{2\max} = \frac{3l^2 \gamma \tan \alpha}{16h \cos \alpha}$

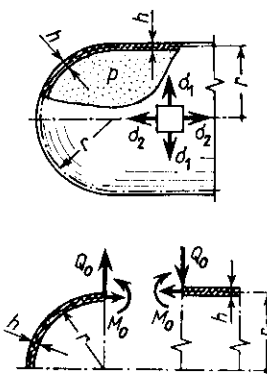
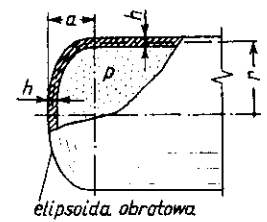
Tablica 12.2 (cd.)

Lp.	Kształt powłoki	Wzory obliczeniowe
5	Powłoka obrotowa – ciśnienie wewnętrzne (lub zewnętrzne) p MPa 	naprężenia obwodowe (wzdłuż równoleżnika) $\sigma_1 = \frac{pr_1}{2h} \left(2 - \frac{r_1}{r_2} \right);$ naprężenia wzdłuż tworzącej (wzdłuż południka) $\sigma_2 = \frac{pr_1}{2h};$ wydłużenie promienia r $\Delta r = \frac{r}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2);$ r_2 – promień krzywizny południka w rozpatrywanym miejscu powłoki
6	Zbiornik walcowy z dnem w kształcie czaszy kulistej, wypełniony do wysokości $\alpha + l$ cieczą o ciężarze właściwym γ 	naprężenia w części walcowej (przy połączeniu z czaszą): obwodowe $\sigma_2 = \frac{\gamma l r}{h},$ wzdłużne $\sigma_1 = \frac{G}{2\pi r h},$ przy czym G jest ciężarem cieczy zawartej w zbiorniku $G = \gamma \pi \left[l r^2 + \frac{a}{6} (3r^2 + a^2) \right];$ naprężenia w środku dna $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\gamma (l + a) r_1}{2h};$ siła rozciągająca, przypadająca na 1 mm obwodu krawędzi czaszy $S = \frac{G}{2\pi r \sin \alpha}$ Powyższe wzory można stosować wówczas, gdy naprężenia rozciągające w pierścieniu wzmacniającym o polu F_1 przekroju poprzecznego nie przekraczają dopuszczalnych $\sigma = \frac{r S \cos \alpha}{F_1} = \frac{G \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi F_1} \leq k_r$

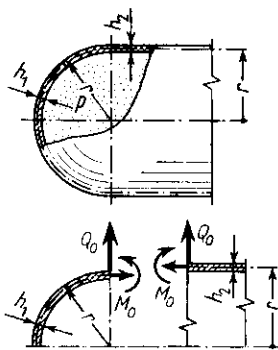
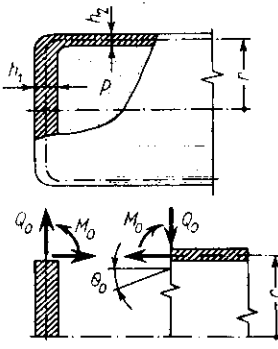
Tablica 12.3. Wzory obliczeniowe dla zbiorników cienkościennych z uwzględnieniem zginania

Oznaczenia: p – ciśnienie (wewnętrzne lub zewnętrzne), σ_1 – naprężenie równoleżnikowe, σ_2 – naprężenie wzdłużne (południkowe), h – grubość powłoki, E – moduł Younga, ν – liczba Poissona,

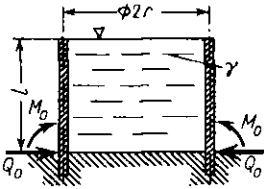
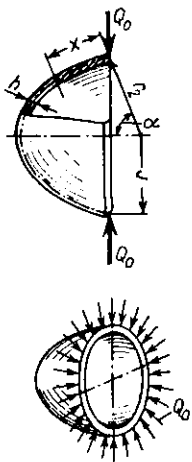
$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2h^2}}$$

Lp.	Kształt zbiornika	Wzory obliczeniowe
1	Zbiornik cylindryczny zamknięty dnem półkulistym, poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) p MPa, gdy grubość dna i części cylindrycznej jest jednakowa, równa h 	$\sigma_{2\max} = \frac{pr}{2h} \left(1 + \frac{3}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right) e^{-\pi/4} \sin \frac{\pi}{4} = 1,293 \frac{pr}{h}$ (występuje na zewnętrznej powierzchni części walcowej w przekroju styku z dnem); $\sigma_1 = \frac{pr}{h} \left[1 - \frac{1}{4} e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{3\nu}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-\beta x} \sin \beta x \right];$ dla $\nu = 0,3$ maksimum występuje, gdy $\beta x = 1,85$ i wynosi $\sigma_{1\max} = 1,032 \frac{pr}{h}$
2	Zbiornik jak wyżej, z tym że dno ma kształt elipsoidy obrotowej o stosunku osi $a/r = 2$  <i>elipsoida, obrotowa</i>	naprężenia maksymalne w części walcowej w miejscu styku elipsoidy z walcem $\sigma_{1\max} = \frac{pr}{2h} \left(1 + \frac{6}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-\pi/4} \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1,086 \frac{pr}{h},$ $\sigma_{2\max} = 1,128 \frac{pr}{h}$

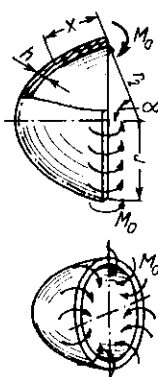
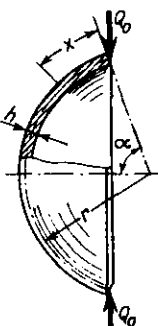
Tablica 12.3 (cd.)

Lp.	Kształt zbiornika	Wzory obliczeniowe
3	Zbiornik jak w poz. 1, z tym że grubość dna kulistego wynosi h_1, a części cylindrycznej h_2 	$M_0 = \frac{prh_1}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{(1-c^2)[c(2-\nu)-(1-\nu)]}{(1-c^2)^2 - 2(1+c^2\sqrt{c})(1-c\sqrt{c})},$ $Q_0 = 2M_0\beta_1 \frac{c^2\sqrt{c}+1}{c^2-1},$ przy czym $c = h_1/h_2$, a β_1 dotyczy dna; naprężenia maksymalne w dnie $\sigma_{\max} = \frac{6M_0}{h_1^2}$ Naprężenia w powłoce walcowej można obliczyć ze wzorów podanych w tabl. 12.1 (poz. 1 i 2) oraz ze wzorów (12.7) i (12.8).
4	Zbiornik cylindryczny zamknięty dnem płaskim, poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) p MPa 	$M_0 = \frac{pr^3\beta_2^2B_2}{4B_1(1+\nu)} + \frac{4pr^2\beta_2^3B_2}{Eh_2(2-\nu)[Eh_1+2r\beta_2^3B_2(1-\nu)]},$ $2\beta_2 + \frac{2r\beta_2^2B_2}{B_1(1+\nu)} - \frac{Eh_1\beta_2}{Eh_1+2r\beta_2^3B_2(1-\nu)},$ $Q_0 = M_0 \left[2\beta_2 + \frac{2r\beta_2^2B_2}{B_1(1+\nu)} \right] - \frac{pr^3\beta_2^2B_2}{4B_1(1+\nu)}$ (indeks 1 dotyczy dna (płyty), indeks 2 zaś – powłoki walcowej). Naprężenia w płycie można obliczyć ze wzorów podanych w tabl. 11.1 (poz. 5 i 6). Naprężenia w powłoce walcowej można obliczyć ze wzorów podanych w tabl. 12.1 (poz. 1 i 2) oraz ze wzorów (12.7) i (12.8).

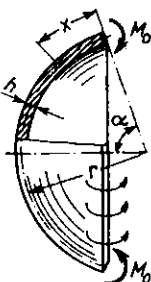
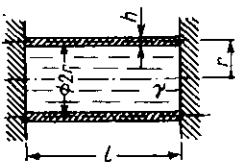
Tablica 12.3 (cd.)

Lp.	Kształt zbiornika	Wzory obliczeniowe
5	Zbiornik walcowy otwarty, wypełniony cieczą o ciężarze właściwym γ, dolne krawędzie utwardzone 	$M_{\max} = M_0 = \left(1 - \frac{1}{\beta l}\right) \frac{\gamma r l h}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}},$ $\sigma_{\max} = \frac{M_0 \cdot 6}{h^2}$
6	Powłoka obrotowa, równomiernie obciążona na brzegu siłami Q_0 N/mm, działającymi w płaszczyźnie prostopadłej do osi powłoki 	$M_x = \frac{r Q_0}{\beta r_2} e^{-\beta x} \sin \beta x,$ $\max M_x = 0,322 \frac{r}{r_2} \frac{Q_0}{\beta} \quad \left(\text{dla } x = \frac{\pi}{4\beta}\right),$ $\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}, \quad \max \sigma_x = 1,932 \frac{r}{r_2} \frac{Q_0}{\beta h^2},$ $\sigma_y = -\frac{r^2}{r_2} \frac{2Q_0}{h} \beta e^{-\beta x} \cos \beta x;$ na brzegu (dla $x = 0$) $\max \sigma_2 = -\frac{r^2}{r_2} \frac{2Q_0}{h} \beta,$ $\theta = \frac{Q_0}{2\beta^2 B} \sin \alpha;$ dla półkuli: $r = r_2$ oraz $\alpha = \pi/2$ (por. poz. 8)

Tablica 12.3 (cd.)

Lp.	Kształt zbiornika	Wzory obliczeniowe
7	Powłoka obrotowa; na brzegu działają równomiernie rozłożone momenty M_0 N-mm/mm 	$M_x = \frac{r}{r_2} e^{-\beta x} M_0 (\cos \beta x + \sin \beta x),$ $Q_x = 2\beta M_0 \sqrt{\left(\frac{r}{r_2}\right)^3} e^{-\beta x} \sin \beta x,$ $\max Q_x = 0,644 M_0 \sqrt{\left(\frac{r}{r_2}\right)^3} \left(\text{dla } x = \frac{\pi}{4\beta} \right),$ $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_{x=0} = \frac{6M_0}{h^2};$ naprężenia obwodowe $\sigma_y = \frac{2\beta^2 M_0 r^2}{h r_2} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x);$ na brzegu $f = \frac{M_0}{2B\beta^2} \sin \alpha, \quad \theta = \frac{M_0}{B\beta}$
8	Powłoka kulista równomiernie obciążona na brzegu siłami Q_0 N/mm działającymi w płaszczyźnie prostopadłej do osi powłoki (por. poz. 6) 	przemieszczenie promieniowe na brzegu $f = \frac{r Q_0}{E h} \sin \alpha (2r\beta \sin \alpha - \nu \cos \alpha);$ kąt obrotu na brzegu $\theta = \frac{Q_0}{2B\beta^2} \sin \alpha;$ naprężenia południkowe $\sigma_x = \frac{1}{h} Q_0 e^{-\beta x} \left[\frac{6}{\beta h} \sin \alpha \sin \beta x + \sqrt{2} \cos \alpha \cos \left(\beta x + \frac{\pi}{4} \right) \right];$ naprężenia równoleżnikowe $\sigma_y = \frac{1}{h} Q_0 e^{-\beta x} \left(\frac{6\nu}{\beta h} \sin \alpha \sin \beta x + 2r\beta \sin \alpha \cos \beta x \right)$

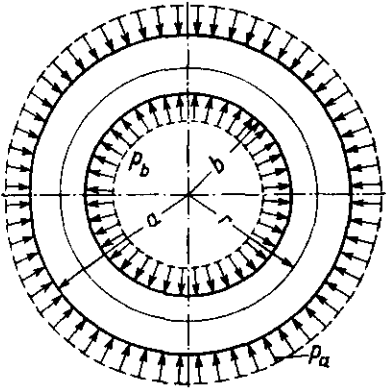
Tablica 12.3 (cd.)

Lp.	Kształt zbiornika	Wzory obliczeniowe
9	Powłoka kulista, równomiernie rozłożony na obwodzie moment M_0 N·mm/mm 	przesunięcie promieniowe na brzegu $f = \frac{M_0}{2B\beta^2} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}M_0 r \sqrt{1-\nu^2}}{Eh^2};$ kąt obrotu na brzegu $\theta = \frac{M_0}{B\beta};$ naprężenia południkowe $\sigma_x = \frac{2M_0}{h} e^{-\beta x} \left[\frac{3\sqrt{2}}{h} \cos \left(\beta x - \frac{\pi}{4} \right) - \beta \cot \alpha \sin \beta x \right];$ naprężenia równoleżnikowe $\sigma_z = \frac{2M_0}{h} e^{-\beta x} \left[\nu \frac{3\sqrt{2}}{h} \cos \left(\beta x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2}\beta^2 r \sin \left(\beta x - \frac{\pi}{4} \right) \right]$
10	Rura wypełniona cieczą o ciężarze właściwym γ, końce rury utwierdzone 	maksymalne naprężenie wzdłużne $\sigma_{\max} = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{l^2}{24} + \nu r^2 \right)$

12.3. Obliczanie rur i naczyń grubościennych

W przypadku rury grubościennej o średnicy zewnętrznej $2a$ i wewnętrznej $2b$ (rys. 12.8), poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego p_a i ciśnienia wewnętrznego p_b , w punktach rury określonych promieniem r naprężenia promieniowe σ_r są określone wzorem (tzw. zadanie Lamégo)

$$\sigma_r = \frac{p_a - p_b}{a^2 - b^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{a^2 - b^2} \quad (12.18)$$



Rys. 12.8

naprężenia obwodowe zaś

$$\sigma_t = -\frac{p_a - p_b}{a^2 - b^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{a^2 - b^2} \quad (12.19)$$

Przemieszczenie promieniowe punktu rury określonego promieniem r

$$u = -\frac{1}{E(a^2 - b^2)} \left[r(p_a a^2 - p_b b^2)(1 - \nu) + \frac{1}{r} a^2 b^2 (p_a - p_b)(1 + \nu) \right] \quad (12.20)$$

W przypadku gdy działa tylko ciśnienie wewnętrzne p_b (tzn. $p_a = 0$), największe naprężenia powstają przy wewnętrznej powierzchni rury i wynoszą

$$\sigma_r = -p_b, \quad \sigma_t = \frac{p_b(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$$

powiększenie się zaś promienia wewnętrznej rury

$$u = \frac{p_b b}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \nu \right)$$

Dla kuli o promieniu zewnętrznym a i promieniu wewnętrznym b , poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego p_a i wewnętrznego p_b , w punktach kuli określonych promieniem r (por. rys. 12.8) naprężenia promieniowe σ_r wynoszą

$$\sigma_r = -p_b \frac{b^3}{r^3} \frac{a^3 - r^3}{a^3 - b^3} - p_a \frac{a^3}{r^3} \frac{r^3 - b^3}{a^3 - b^3} \quad (12.21)$$

a naprężenia obwodowe (styczne)

$$\sigma_t = p_b \frac{b^3}{2r^3} \frac{a^3 + 2r^3}{a^3 - b^3} - p_a \frac{a^3}{r^3} \frac{b^3 + 2r^3}{a^3 - b^3} \quad (12.22)$$

W przypadku gdy działa tylko ciśnienie wewnętrzne p_b , największe naprężenia powstają w punktach kuli położonych przy wewnętrznej powierzchni i wynoszą

$$\sigma_r = -p_b, \quad \sigma_t = p_b \frac{a^3 + 2b^3}{2(a^3 - b^3)}$$

Przyrost długości wewnętrznego promienia b kuli wyraża się wówczas zależnością

$$\Delta b = p_b \frac{b}{E} \left[\frac{a^3 + 2b^3}{2(a^3 - b^3)} (1 - \nu) + \nu \right]$$

zewnątrznego zaś

$$\Delta a = p_b \frac{a}{E} \frac{3b^3}{2(a^3 - b^3)} (1 - \nu)$$

13. Obliczanie zbiorników ciśnieniowych i połączeń śrubowo-kołnierzowych według metod wzorowanych na przepisach Urzędu Dozoru Technicznego

13.1. Obliczanie zbiorników ciśnieniowych

13.1.1. Obliczanie elementów walcowych

Zbiorniki ciśnieniowe pracujące przy nadciśnieniu większym niż 70 kPa (0,7 atm) podlegają zgłoszeniu do Urzędu Dozoru Technicznego, który sprawuje tzw. urzędowy dozór nad zbiornikami (nie podlegają dozorowi zbiorniki będące elementami maszyn, jak cylindry silników spalinowych, sprężarek itp.). Zestawy wzorów i tabel, z których należy korzystać przy przeprowadzaniu obliczeń wytrzymałościowych takich zbiorników, podane są w specjalnych przepisach [24].

Do obliczeń wstępnych oraz dla zbiorników nie podlegających dozorowi można stosować następujący wzór na obliczenie grubości ścianki g_0 mm beznitowych elementów walcowych podlegających ciśnieniu wewnętrznemu

$$g_0 \geq \frac{p_0 D_z}{\frac{2,3}{e} k z + p_0} \quad (13.1)$$

gdzie: p_0 – ciśnienie nominalne w MPa ⁽¹⁾; D_z – zewnętrzna średnica elementu walcowego w mm; k – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie lub zginanie w danej temperaturze w MPa; z – współczynnik wytrzymałościowy, uwzględniający m.in. jakość i rodzaj spoin wzdlużnych elementu walcowego (por. rozdz. 14); e – współczynnik uwzględniający nierównomierność rozkładu naprężeń na grubości blachy walca.

⁽¹⁾ 1 MPa = 1 $\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ = 1 $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Występująca w powyższym wzorze liczba 2,3 wynika z obliczenia naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera; jest to iloczyn liczb występujących we wzorach (12.7) i (12.9), tj. $\frac{1}{0,866} \cdot 2 = 2,3$.

Współczynnik e zależy od stosunku średnicy zewnętrznej D_z do wewnętrznej D_w elementu walcowego i jest równy jedności, gdy $D_z/D_w \leq 1,4$. Oznacza to, że równomierny rozkład naprężeń na grubości blachy przyjmuje się już wówczas, gdy stosunek promienia średniego $r = (D_z + D_w)/4$ do grubości blachy $g = h$ spełnia warunek $r/h \geq 3$, podczas gdy w normalnych obliczeniach wytrzymałościowych stosunek ten powinien wynosić $r/h \geq 5$ (por. rozdz. 12). Dla stosunku średnic $D_z/D_w = 2$ współczynnik $e = 1,15$, a więc wzór (13.1) dotyczy również rur grubościennych o stosunku $r/h \geq 1,5$.

Naprężenia dopuszczalne k we wzorze (13.1) wyznacza się w następujący sposób:

- dla stali węglowych, dla których obowiązujące normy ustalają wymagania co do udarności, oraz dla stali stopowych i dla stalowych rur kotłowych, jeżeli przy tym temperatury nie przekraczają $200 \div 300^\circ\text{C}$ (por. rozdz. 16), $k = R_e/1,6$ (gdzie R_e – granica plastyczności),
- dla pozostałych stali węglowych (i temperatur do $200 \div 300^\circ\text{C}$) $k = R_e/1,8$,
- dla staliwa współczynnik bezpieczeństwa powinien być o 40% większy niż dla stali [tj. $k = R_e/(1,6 \cdot 1,4) = R_e/2,24$ lub $k = R_e/(1,8 \cdot 1,4) = R_e/2,52$],
- dla brązu, mosiądzu, wyżarzanej miedzi i wyżarzonego aluminium $k = R_m/4$,
- dla żeliwa $k = R_m/7$, gdzie R_m – wytrzymałość na rozciąganie.

W przypadku działania ciśnienia zewnętrznego ciśnienie krytyczne powodujące wyboczenie wyznacza się z wykresu analogicznego do rys. 12.3 podanego w przepisach Dozoru Technicznego [24].

13.1.2. Obliczanie den zbiorników ciśnieniowych

W przypadku den o kształcie kulistym, elipsoidalnym lub koszykowym, podlegających ciśnieniu od strony powierzchni wklęsłej, grubość obliczeniowa dna w najcięższym miejscu, tj. w wyobleniach, powinna spełniać warunek

$$g_1 \geq \frac{D_z p_0 y_w}{4k} \quad (13.2)$$

Wartości współczynnika y_w w powyższym wzorze wyznacza się z tabl. 13.1.

W tablicy 13.1 oraz na rys. 13.1 przyjęto następujące oznaczenia (w milimetrach): H_z – zewnętrzna wysokość dna (mierzona od części walcowej dna), R_w – wewnętrzny promień dna, r_w i r_z – wewnętrzny i zewnętrzny promień wyoblenia dna, g_1 – grubość dna w miejscu wyoblenia, D_z – zewnętrzna średnica części

walcowej dna, d – średnica największego otworu w dnie (gdy dno jest pełne, $d = 0$).

Dno musi być tak wykonane, by długość e_1 części walcowej spełniała warunek:

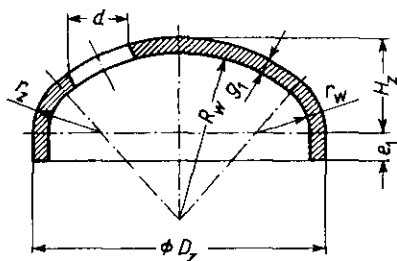
$$\begin{aligned} e_1 &\geq 3g_1, & \text{gdy grubość dna} & g_1 \leq 50 \text{ mm}, \\ e_1 &\geq 150 \text{ mm}, & \text{gdy grubość dna} & g_1 > 50 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Spełnienie powyższego warunku zapewnia przenoszenie przez dno miejscowych naprężeń gnących, wynikających ze współpracy dna z częścią walcową (por. tabl. 12.3). Dzięki temu zarówno część walcową zbiornika [wzór (13.1)], jak i spoinę łączącą tę część z dnem, można liczyć tylko na rozciąganie od ciśnienia wewnętrznego.

Tablica 13.1. Wartości liczbowe współczynników y_w we wzorze (13.2)

(oznaczenia według rys. 13.1)

$\frac{H_z}{D_z}$ $\frac{d}{\sqrt{D_z g_1}}$	0,18	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	3,37	2,90	2,00	1,53	1,30	1,18	1,12	1,10
0,5	3,37	2,90	2,00	1,65	1,42	1,30	1,13	1,20
1,0	3,37	2,90	2,30	2,00	1,81	1,70	1,63	1,60
2,0	3,92	3,68	3,21	2,92	2,69	2,50	2,33	2,20
3,0	4,87	4,61	4,10	3,77	3,52	3,32	3,15	3,00
4,0	5,78	5,53	4,99	4,58	4,28	4,04	3,86	3,70
5,0	6,77	6,50	5,90	5,41	5,03	4,76	4,52	4,35



Rys. 13.1

Dna o profilu elipsoidalnym i koszykowym można liczyć według wzoru (13.2) wówczas, gdy spełnione są następujące trzy warunki (według oznaczeń podanych na rys. 13.1):

$$H_z \geq 0,18D_z, \quad R_w \leq D_z, \quad r_w \geq 0,1D_z$$

Napężenia dopuszczalne k występujące we wzorze (13.2) wynoszą:

- dla stali węglowych, dla których obowiązujące normy ustalają wymagania co do uderzenia, oraz dla stali stopowych $k = R_e/1,4$,
- dla pozostałych stali $k = R_e/1,55$,
- dla staliwa współczynnik bezpieczeństwa powinien być o 40% większy niż dla stali [tj. $k = R_e/(1,4 \cdot 1,4) = R_e/1,96$ lub $k = R_e/(1,55 \cdot 1,4) = R_e/2,17$],
- dla brązu, mosiądzu, wyżarzanej miedzi i wyżarzonego aluminium $k = R_m/3,4$,
- dla żeliwa $k = R_m/7$.

Jeżeli ciśnienie działa od strony wypukłej powierzchni dna, grubość dna obliczona ze wzoru (13.2) powinna być co najmniej o 30% większa. Ponadto należy wówczas sprawdzić dno na stateczność. Ciśnienie krytyczne, przy którym powstaje utrata stateczności (zakłębienie) części środkowej dna, oblicza się ze wzoru

$$p_{kr} = 36,6 \frac{g_1^2}{R_w^2} \quad (13.3)$$

Współczynnik bezpieczeństwa ze względu na wyboczenie (zakłębienie) powinien wynosić co najmniej 3,5, zatem musi być spełniony warunek: $p_0 \leq p_{kr}/3,5$.

W przypadku płaskich den pełnych o konstrukcji podanej na rys. 13.2 grubość powinna spełniać warunek

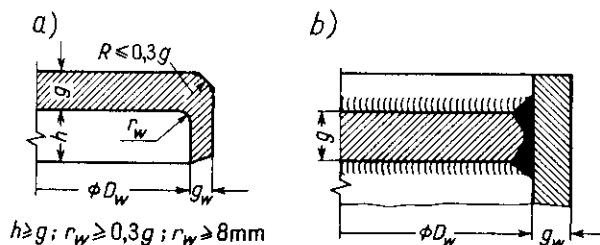
$$g \geq 0,35D_w \sqrt{\frac{p_0}{k}} \quad (13.4)$$

przy czym dla stali węglowych, dla których obowiązujące normy ustalają wymagania co do uderzenia, i dla stali stopowych $k = R_e/1,5$, dla pozostałych zaś stali węglowych $k = R_e/1,65$.

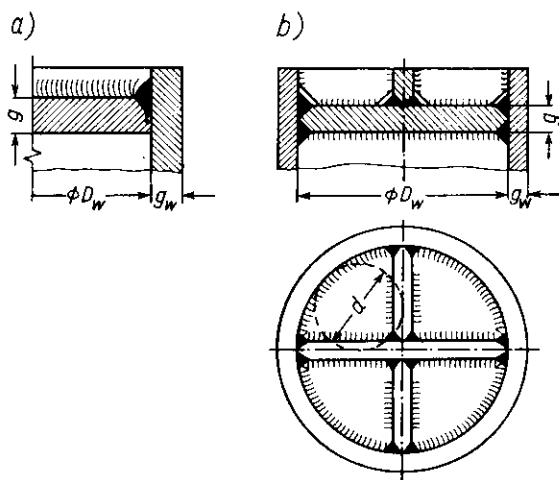
Dla den płaskich przyspawanych jednostronnie, poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego (rys. 13.3a)

$$g \geq 0,45D_w \sqrt{\frac{p_0}{k}} \quad (13.5)$$

Dla płaskich den wzmocnionych kotwiami (rys. 13.3b) grubość dna powinna spełniać warunek



Rys. 13.2



Rys. 13.3

$$g \geq 0,45d \sqrt{\frac{p_0}{k}} \quad (13.6)$$

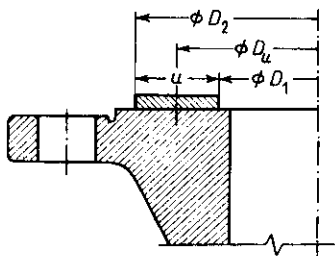
gdzie d (mm) – średnica największego koła przechodzącego przez co najmniej trzy punkty usztywnionego dna płaskiego.

13.2. Obliczanie połączeń śrubowo-kołnierzowych

W szczelnych połączeniach śrubowo-kołnierzowych siła naciągu montażowego N_m wszystkich śrub danego połączenia (rys. 13.4) jest równa większej z dwóch sił N'_m i N''_m , obliczonych ze wzorów

$$N'_m = \pi D_u u_{cz} \sigma'_s \quad (13.7)$$

$$N''_m = C N_r \quad (13.8)$$



Rys. 13.4

Naciąg ruchowy śrub N_r oblicza się ze wzoru

$$N_r = P + bS_1 \quad (13.9)$$

przy czym P jest siłą parcia czynnika

$$P = \frac{\pi D_u^2}{4} p_0 \quad (13.10)$$

S_1 zaś – siłą zapewniającą szczelność połączenia

$$S_1 = \pi D_u u_{cz} \sigma_s'' \quad (13.11)$$

Oznaczenia w powyższych wzorach:

p_0 – ciśnienie obliczeniowe czynnika w MPa;

D_u – średnia średnica uszczelki w mm; według rys. 13.4

$$D_u = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

C – współczynnik zabezpieczający, by naciąg N był dostatecznie duży:

$C = 1,2$ – dla połączeń o średnicy $D_u \leq 500$ mm,

$C = 1,4$ – dla połączeń o średnicy $D_u > 500$ mm;

b – współczynnik zabezpieczający, by siła S nie spadła – na skutek pełzania materiału uszczelki – poniżej wartości wymaganej. Wartości tego współczynnika należy przyjmować według tabeli podanej na str. 128 *Przepisów Dozoru Technicznego* [24]. Kilka danych z tej tabeli przytoczono w tabl. 13.2;

σ_s', σ_s'' – naprężenia minimalne zapewniające szczelność połączenia, podane w tabl. 13.3;

u_{cz} – czynna szerokość uszczelki, wyznaczona w zależności od szerokości nominalnej u (rys. 13.4) z tabl. 13.4.

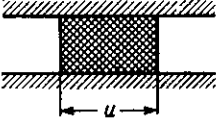
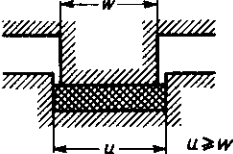
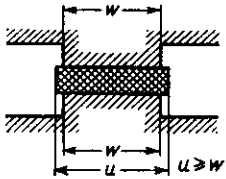
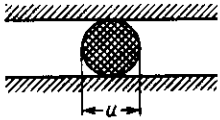
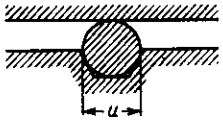
Tablica 13.2. Wartości współczynnika b we wzorze (13.9)

Materiał	b dla temperatury w °C		
	20	200	300
Masa azbestowo-kauczukowa (itp.)	1,1	1,6	2,0
Płyta azbestowa prasowana	1,1	1,6	2,0
Wypełniona azbestem płaska koszulka metalowa:			
z aluminium	1,0		2,3
z miedzi lub mosiądzu	1,0		2,0
z miękkiej stali	1,0		1,7

Tablica 13.3. Wartości naprężeń dociskowych σ'_s oraz σ''_s we wzorach (13.7) i (13.11)

Rodzaj uszczelki		σ'_s MPa	σ''_s MPa
Skóra, korek prasowany, filc techniczny lub tektura techniczna impregnowana i grafitowana lub pokostowana		5	$3,0p_0$
Fibra, masa kauczukowa lub płyta azbestowa	o grubości 1 mm	40	$6,4p_0$
	o grubości 2 mm	21	$5,0p_0$
	o grubości 3 mm	12	$4,1p_0$
Płaski, rowkowy lub soczewkowy pierścień metalowy albo okrągły pierścień metalowy (druć)	z ołowiu	55	$7,5p_0$
	z wyżarzzonego aluminium	62	$8,0p_0$
	z wyżarzonej miedzi lub mosiądzu	91,5	$9,5p_0$
	z żelaza lub miękkiej stali	126,5	$11,0p_0$
	ze stali nierdzewnej lub kwasoodpornej	183	$13,0p_0$
Wypełniona azbestem płaska koszulka metalowa	z wyżarzzonego aluminium	38,5	$6,0p_0$
	z wyżarzonej miedzi lub mosiądzu	46	$7,0p_0$
	z żelaza lub miękkiej stali	53,5	$7,5p_0$
	ze stali nierdzewnej lub kwasoodpornej	63,5	$7,5p_0$

Tablica 13.4. Czynna szerokość uszczelki u_{cz} występująca we wzorach (13.7) i (13.11)

Schemat uszczelnienia (wymiaru w milimetrach)	Czynna szerokość uszczelki u_{cz} przy szerokości:	
	$u \leq 12 \text{ mm}$	$u > 12 \text{ mm}$
	u	$3,47 \sqrt{u}$
	w	$3,47 \sqrt{w}$
	w	$3,47 \sqrt{w}$
	Czynna szerokość uszczelki	
	miękkiej	metalowej
	$2u$	$\frac{u}{2,5}$ dla $u \leq 3 \text{ mm}$
	$2u$	$\frac{u}{3,5}$ dla $u \leq 3 \text{ mm}$

Po obliczeniu naciągu montażowego N_m [równego większej z sił otrzymanych ze wzorów (13.7) i (13.8)] oblicza się średnicę rdzenia d_r śruby co najmniej równą większej z dwóch wartości d'_r i d''_r otrzymanych ze wzorów

$$d'_r = 1,13 \sqrt{\frac{N_m}{\psi k_{\perp i}}} \quad (13.12)$$

$$d_r'' = 1,13 \sqrt{\frac{N_m}{\psi k_2 i}} \quad (13.13)$$

Oznaczenia w powyższych wzorach:

N_m – naciąg montażowy równy większej z dwóch sił N'_m i N''_m , obliczonych ze wzorów (13.7) i (13.8);

i – liczba śrub danego połączenia śrubowo-kołnierzowego (zaleca się przyjmować liczbę śrub będącą wielokrotnością liczby 4);

ψ – współczynnik uwzględniający wykonanie śrub, nakrętek i powierzchni pod nakrętkami:

$\psi = 0,5$ – wykonanie zgrubne,

$\psi = 1$ – dokładna obróbka śrub, nakrętek i powierzchni pod nakrętkami,

$\psi = 0,75$ – pośrednia (zwykła) obróbka śrub, nakrętek i powierzchni pod nakrętkami;

k_1 – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie materiału śrub, liczone dla temperatury 20°C

$$k_1 = \frac{R_e}{x'_1}$$

przy czym:

$x'_1 = 1,1$ dla stali stopowych,

$x'_1 = 1,2$ dla stali węglowych;

k_2 – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie materiału śrub w temperaturze t_0 pracy śruby

$$k_2 = \frac{R_{et_0}}{x'_2}$$

gdzie:

R_{et_0} – granica plastyczności materiału w temperaturze t_0 ,

$x'_2 = 1,5$ dla stali stopowych,

$x'_2 = 1,65$ dla stali węglowych.

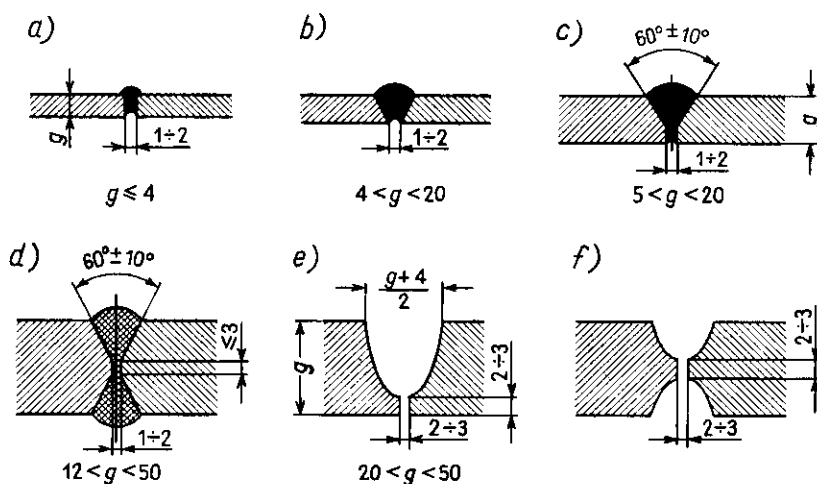
14. Obliczanie połączeń spawanych

W zakresie projektowania i obliczania połączeń spawanych występujących w stalowych konstrukcjach budowlanych obowiązuje norma [38], w zakresie dźwignic – norma [39], natomiast w zakresie kotłów i zbiorników ciśnieniowych – odrębne przepisy [24].

Podstawowym warunkiem prawidłowej pracy spoin jest jakość ich wykonania, którą osiąga się m.in. przez zapewnienie odpowiednich kwalifikacji spawaczy (które sprawdzane są egzaminami kontrolnymi), przez spawanie automatami oraz przez ciągłą lub wyrywkową kontrolę rentgenograficzną spoin, stosowaną np. w budowie dźwignic, rurociągów, zbiorników ciśnieniowych itp.

W zależności od grubości łączonych elementów spoiny czołowe wykonuje się w sposób podany na rys. 14.1, oznaczając rodzaj spoiny odpowiednio I, V, Y, X, U, 2U.

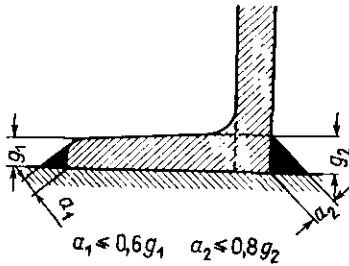
W przypadku łączenia elementów o różnych grubościach grubość spoiny czołowej przyjmuje się równą grubości elementu cieńszego. Naprężenia dopuszczalne dla prawidłowo wykonanych spoin czołowych przy obciążeniach stałych



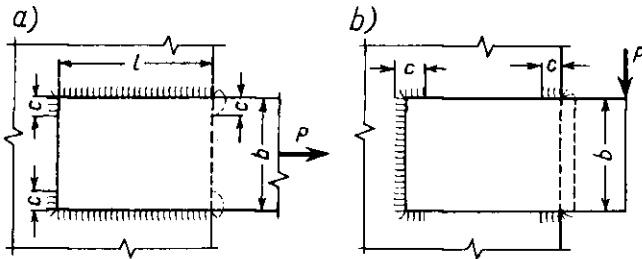
Rys. 14.1

przyjmuje się takie, jak dla elementów łączonych, jak to wynika z kolumny 4 tabl. 14.1. Najmniejsza grubość a spoiny pachwinowej może wynosić $0,2g$, jednak nie mniej niż 3 mm (g – grubość cieńszego z łączonych elementów), największa zaś grubość nie powinna przekraczać $0,7g$. Największą grubość spoin pachwinowych w połączeniach profili walcowych (kątowników, ceowników, dwuteowników itp.) należy przyjmować według rys. 14.2.

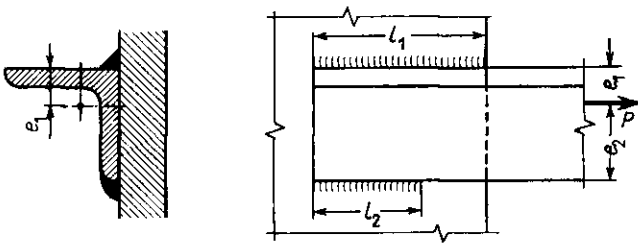
Minimalna długość spoin pachwinowych nie powinna być mniejsza niż $15a$, lecz nie mniejsza niż 50 mm. Spoiny pachwinowe zastosowane w połączeniu jako tylko podłużne (rys. 14.3a) lub jako tylko poprzeczne (rys. 14.3b) zaleca się przeciągać poza naroża na długości $c \geq 2a$, przy czym uzyskane przez to zwiększenie długości spoiny pomija się w obliczeniach.



Rys. 14.2



Rys. 14.3



Rys. 14.4

W połączeniach profili niesymetrycznych spoiny powinny być tak rozmieszczone, aby ich środek ciężkości pokrywał się ze środkiem ciężkości (w rzucie) przyspawanego profilu. Tak więc w przypadku kątownika rozciąganego siłą P długości spoin oblicza się z następujących zależności (według oznaczeń podanych na rys. 14.4)

$$l_1 e_1 = l_2 e_2 \quad (14.1)$$

oraz

$$(l_1 a_1 + l_2 a_2) k'_t = F k_r \quad (14.2)$$

po podstawieniu zaś wartości naprężeń dopuszczalnych na ścinanie k'_t dla spoin pachwinowych (z tabl. 14.1 poz. 15) $k'_t = 0,65 k_r$,

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 = \frac{1}{0,65} F = 1,54 F \quad (14.2a)$$

gdzie: F – pole przekroju poprzecznego kątownika, k_r – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie dla materiału kątownika.

W połączeniach zginanych momentem M_g i ścinanych siłą poprzeczną Q (rys. 14.5) zredukowane naprężenia tnące w spoinie powinny spełniać warunek

$$\tau_{\text{red}} = \sqrt{\tau_M^2 + \tau_Q^2} \leq 0,7 k_r \quad (14.3)$$

gdzie

$$\tau_M = \frac{M_g z_1}{J_x}, \quad \tau_Q = \frac{Q}{al} \leq 0,65 k_r \quad (14.4)$$

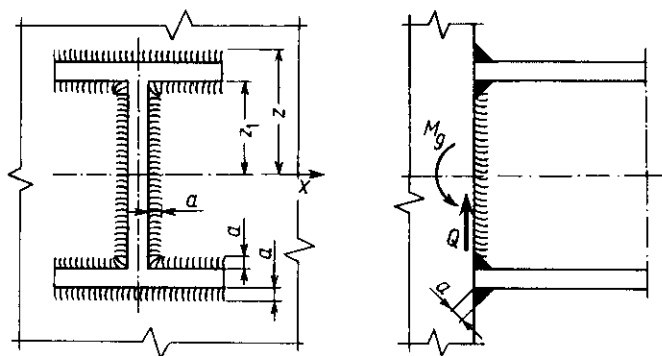
przy czym: J_x – moment bezwładności figury utworzonej przez kład przekroju podłużnego spoin o grubości a na płaszczyznę styku belki; l – długość tych spoin, które ze względu na swe położenie mogą przenosić siłę tnącą (dla przekrojów dwuteowych lub ceowych – długość spoin mocujących środknik; dla dwuteownika podanego na rys. 14.5 $l = 4z_1$).

Ponadto musi być spełniony warunek

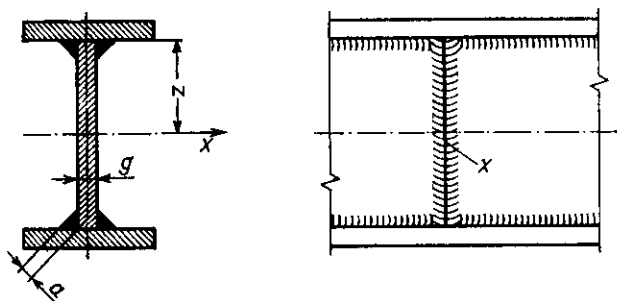
$$\tau = \frac{M_g z}{J_x} \leq 0,65 k_r \quad (14.5)$$

W połączeniach przenoszących moment gnący M_g oraz siłę poprzeczną Q , przedstawionych przykładowo na rys. 14.6, naprężenia zredukowane w spoinie czołowej X powinny spełniać warunek

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_g}{s}\right)^2 + 3\tau^2} \leq 1,1 k_r \quad (14.6)$$



Rys. 14.5



Rys. 14.6

w którym

$$\sigma_g = \frac{M_g z}{J_x} \leq s k_r, \quad \tau = \frac{Q}{2gz} \leq 0,6 k_r \quad (14.7)$$

gdzie (według rys. 14.6): J_x – moment bezwładności całkowitego przekroju poprzecznego elementu zginanego (obie półki + środnik według rys. 14.6), s – współczynnik wytrzymałościowy spoiny. Wartość tego współczynnika przyjmuje się:

– dla spoin czołowych:

$s = 1$ – przy osiowym ściskaniu i przy zginaniu,

$s = 0,8$ – przy osiowym rozciąganiu i przy zginaniu (jeżeli zapewniona jest jakość wykonania spoin, np. przez prześwietlenie, można zwiększyć wartość współczynnika do 1,0),

$s = 0,6$ – przy ścinaniu;

– dla spoin pachwinowych przyjmuje się przy ścinaniu $s = 0,65$.

Naprężenia w spoinach łączących pas (półkę) ze środnikiem (rys. 14.6) w belkach zginanych powinny spełniać warunki

$$\tau = \frac{QS}{J_x \cdot 2a} \leq sk_r \quad (14.8)$$

oraz

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_g^2 + 3\tau^2} \leq 1,1k_r \quad (14.9)$$

przy czym

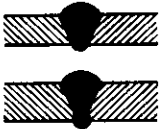
$$\sigma_g = \frac{M_g z}{J_x} \leq k_r, \quad \tau = \frac{QS}{J_x \cdot 2a} \quad (14.10)$$

gdzie: S – moment statyczny względem osi obojętnej tej części przekroju poprzecznego belki, która leży ponad spoiną (według rys. 14.6), J_x – moment bezwładności całego przekroju, k_r – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie materiału belki.

Wartości liczbowe naprężeń dopuszczalnych dla spoin na rozciąganie k'_r lub na ścinanie k'_s w zależności od naprężeń dopuszczalnych na rozciąganie k_r słabszego z elementów łączonych podano w kolumnie 4 tabl. 14.1. W dalszych kolumnach tej tablicy podano wartości współczynników spiętrzenia naprężeń β przy obciążeniach zmiennych, jakie stosuje się w obliczeniach zmęczeniowych (por. rozdz. 17).

Omówienie podstawowych zasad obliczania spoin podano przykładowo dla obliczeń metodą naprężeń dopuszczalnych. Taki sam tok postępowania obowiązuje w obliczeniach metodą stanów granicznych, a istotne różnice dotyczą jedynie obliczeń zmęczeniowych, co omówiono w rozdz. 17.

Tablica 14.1. Wartości naprężeń dopuszczalnych i współczynników spiętrzenia naprężeń β dla połączeń spawanych

Lp.	Opis złącza spawanego	Schemat złącza	Obciążenie stałe	Wartości współczynników spiętrzenia naprężeń przy obciążeniach zmiennych		
				rozciąganie β_r	zginanie ⁽¹⁾ β_g	skręcanie β_s
1	Jednostronne złącza doczołowe z podspawaniem (nie obrabiane)		$k'_r = k_r$	2,0	1,8	2,5

⁽¹⁾ Oś obojętna przy zginaniu jest równoległa do osi spoiny. Współczynniki spiętrzenia naprężeń β dotyczą stali St3.

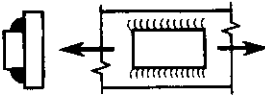
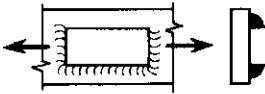
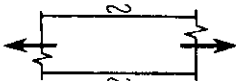
Tablica 14.1 (cd.)

Lp.	Opis złącza	Schemat złącza	Obciążenie stałe	β_r	β_a	β_s
2	Dwustronne złącze doczołowe (nie obrabiane)		$k'_r = k_r$	2,0	1,8	2,5
3	Jedno- i dwustronne złącza doczołowe (z podspawaniem) obrabiane		$k'_r = k_r$	1,55	1,55	2,0
4	Jednostronne złącza doczołowe bez podspawania (nie obrabiane)		$k'_r = 0,8k_r$	2,8	2,5	3,4
5	Jednostronne złącza doczołowe, podspawane, nie obrabiane, ukośne		$k'_r = k_r$	1,75	1,55	2,1
6	Złącza z obustronnymi spoinami pachwinowymi z ukosowaniem, nie obrabiane		$k'_r = k_r$	2,5	1,75	3,1
7	Złącza z obustronnymi spoinami pachwinowymi bez ukosowania, nie obrabiane		$k'_r = 0,85k_r$	3,4	1,7	3,4
8	Jednostronna spoina pachwinowa z ukosowaniem, bez podspawania, nie obrabiana		$k'_r = 0,8k_r$	2,4	1,75	2,8

Tablica 14.1 (cd.)

Lp.	Opis złącza	Schemat złącza	Obciążenie stałe	β_r	β_s	β_t
9	Jednostronna spoina pachwinowa bez ukośowania, bez podspawania, nie obrabiana		$k'_r = 0,7k_r$	3,1	2,65	3,8
10	Złącze nakładkowe, spoiny wypukłe		$k'_r = 0,85k_r$	4,4	2,2	4,4
11	Złącze nakładkowe, spoiny wklęsłe		$k'_r = 0,85k_r$	3,4	1,8	3,4
12	Złącze z obustronnymi spoinami pachwinowymi, wypukłymi		$k'_r = 0,85k_r$	4,4	2,0	4,4
13	Jednostronna spoina pachwinowa płaska, nie obrobiona			6,4	12,8	6,4
14	Złącze nakładkowe symetryczne		$k'_t = 0,65k_r$	4,5		
15	Złącze nakładkowe		$k'_t = 0,65k_r$	5,0		
			$k'_t = 0,65k_r$	4,2		

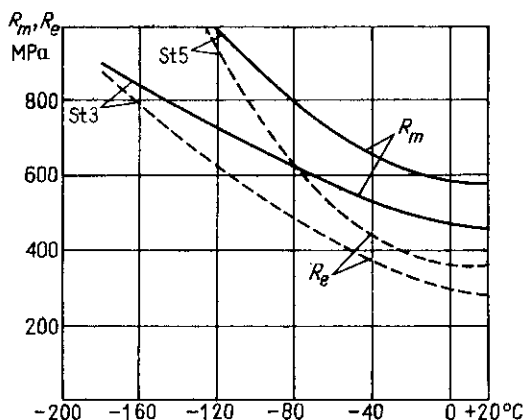
Tablica 14.1 (cd.)

Lp.	Opis złącza	Schemat złącza	Obciążenie stałe	β_r	β_s	β_t
16	Płaskownik ze złączem pachwinowym, rozciągany			2,0		
17	Złącze przykładkowe (przyspawana blacha)		$k'_t = 0,65k_r$	4,2		
18	Złącze przykładkowe (przyspawana blacha)			2,0		
19	Płaskownik wycinany z blachy palnikiem gazowym lub elektrycznym ręcznie $\beta_r = 2,0$ automatem $\beta_r = 1,55$		$k'_r = k_r$	2,0 1,55		

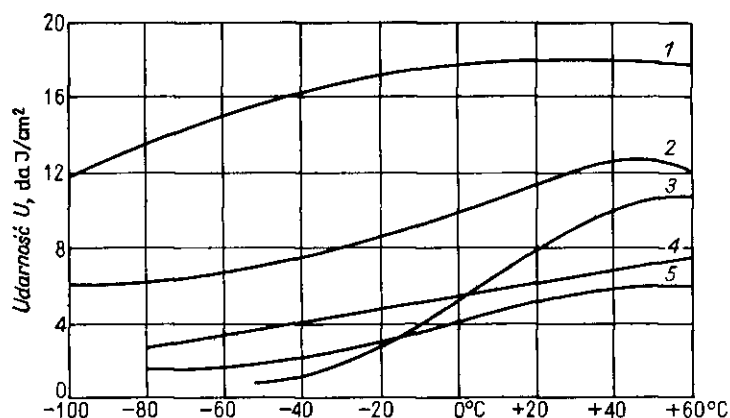
15. Własności wytrzymałościowe metali w temperaturach obniżonych

W miarę obniżania się temperatury wytrzymałość na rozciąganie metali i granica plastyczności rośnie, uderność zaś maleje, jak to przedstawiono na rys. 15.1 dla stali o własnościach zbliżonych do St3 oraz St5. Szczególną uwagę należy zwrócić na spadek uderności, który dla niektórych materiałów przebiega w sposób łagodny, zbliżony do wprost proporcjonalnej zależności zmniejszania się uderności w miarę obniżania temperatur (krzywe 1 i 2 na rys. 15.2). Dla niektórych natomiast materiałów gwałtowny spadek uderności zachodzi przy małych spadkach temperatur, nieraz w temperaturze pokojowej (rys. 15.3), co może stwarzać poważne zagrożenie w eksploatacji maszyn i urządzeń. Temperaturę, w której pojawia się gwałtowny spadek uderności, nazywamy *górną temperaturą kruchości materiału*.

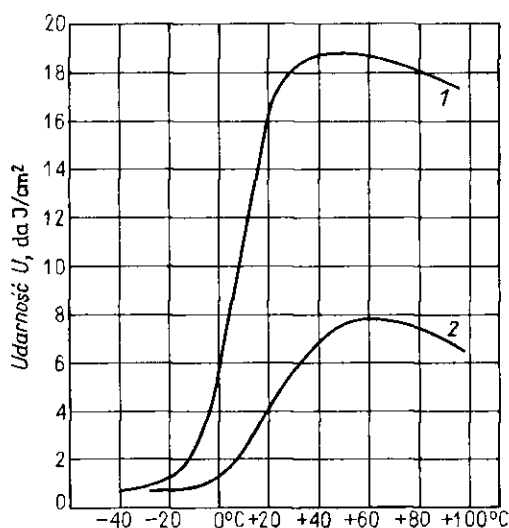
Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe materiałów w temperaturach obniżonych w dużym stopniu zależą od dodatków stopowych podwyższających uderność, a więc w przypadku stali będą to chrom, nikiel, molibden itp. Wartości stosunku wytrzymałości zmęczeniowej w temperaturze obniżonej do wytrzymałości zmęczeniowej w temperaturze pokojowej (20°C) dla kilku metali podano w tabl. 15.1. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe niektórych metali w temperaturach obniżonych podano w tabl. 15.2.



Rys. 15.1



Rys. 15.2



Rys. 15.3

Tablica 15.1. Własności zmęczeniowe metali w temperaturach obniżonych

Materiał	Wartości stosunku: $\frac{\text{wytrzymałość zmęczeniowa w temp. obniżonej}}{\text{wytrzymałość zmęczeniowa w temp. pokojowej}}$				
	próbki gładkie			próbki z podcięciem (karbem)	
	-40°C	-78°C	-190°C	-78°C	-190°C
Stale węglowe	1,2	1,3	2,57	1,10	1,47
Stale stopowe	1,06	1,13	1,61	1,06	1,23
Stale nierdzewne	1,15	1,21	1,54		
Stopy aluminium	1,14	1,16	1,69		1,35

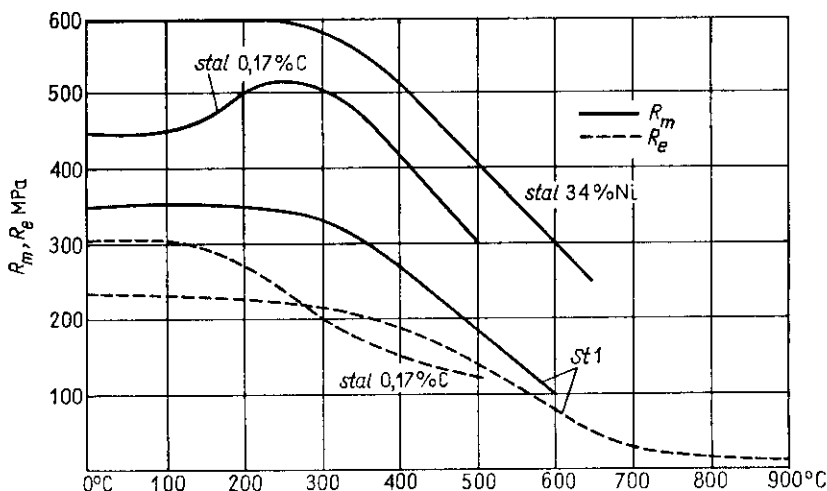
Tablica 15.2. Własności wytrzymałościowe i zmęczenia metali w temperaturach obniżonych

Materiał (nazwa, gatunek)	Przybliżone oznaczenie wg PN	Skład chemiczny (orientacyjny)	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r), MPa			Granica plastyczności R_e (Q_r), MPa			Liczba cykli	Wytrzymałość zmęzeniowa, MPa			
				w temperaturach, °C			w temperaturach, °C				rodzaj wytrzymałości zmęzeniowej	w temperaturach, °C		
				+20	-78	-190	+20	-78	-190			+20	-78	-190
Stal węglowa	St3	0,2 C	surowy	450	570	900	280	460	850	10^7	Z_{ro}	130	165	320
	St5	0,3 C	surowy	580	800		320	670		10^7	Z_{ro}	180	230	550
Stal konstrukcyjna wyższej jakości	08X	0,08 C; 0,59 Mn	normalizowany	410	500	780	280	370		10^6	Z_{ro}	200	270	560
	40	0,40 C; 0,78 Mn; 0,43 Si	wyżarzony	600	720	920	340	480		10^6	Z_{ro}	230	320	630
	65	0,64 C; 0,75 Mn	normalizowany	775	870	980	400	450	970	10^6	Z_{ro}	270	370	670
Stale konstrukcyjne stopowe do nawęglania	Cr-Mo	0,22 C; 0,60 Mn 0,83 Cr; 0,22 Mo	hartowane i odpuszczane	940	1050	1320	830	960	1250	10^6	Z_{ro}	480	550	730
	Cr-Ni-Mo	0,34 C; 0,45 Mn; 2,27 Ni, 1,88 Cr; 0,4 Mo	hartowane i odpuszczane	1020	1150	1400	870	980	1240	10^6	Z_{ro}	550	610	780
Stale nierdzewne	Cr-Ni	18,5 Cr, 8,82 Ni	walcowane na zimno	1450	1650	2000	1000	1350		10^6	Z_{go}	760	860	1050
	Cr-Ni	17,0 Cr, 6,5 Ni 0,37 Ti; 0,12 Al	wyżarzony	1250	1380	1650	1200	1350		10^6	Z_{go}	650	850	1100
Aluminium	Al	0,99 Al	półtwardy	140	150	200	120	120		10^6	Z_{go}	90	105	
Stop Al	Pa28	3,8÷4,4 Cu		480	520	600	330	340	470	10^6	Z_{go}	230	260	370
Dural	PA9	5,7 Zn; 2,8 Mg; 1,5 Cu		570	600	690	490	510	610	10^6	Z_{go}	230	260	410
Braz aluminiowy	BA94A	9,0 Al		540	570	660	340	370		10^6	Z_{go}	270	340	420

16. Własności wytrzymałościowe metali w temperaturach podwyższonych

16.1. Zmiany własności wytrzymałościowych metali w temperaturach podwyższonych

W miarę wzrostu temperatur wytrzymałość na rozciąganie, granica plastyczności, moduły sprężystości E oraz G i twardość wszystkich materiałów w zasadzie maleją, natomiast wzrasta wydłużenie i przewężenie. Na rysunku 16.1 podano m.in. zmianę wytrzymałości na rozciąganie stali St1 i stali niklowej 34% Ni oraz granicę plastyczności stali St1 jako funkcję temperatury. Wpływ temperatury na własności innych stali konstrukcyjnych i stopowych przedstawia się podobnie jak dla tych dwóch gatunków stali, a więc w granicach do 200°C nie dostrzega się większych zmian, w granicach do 300°C zmniejszenie wytrzymałości na rozciąganie i granicy plastyczności jest nieznaczne (około 2%), po czym następuje dość wyraźne zmniejszenie się tych wartości. Zdarzają się przypadki, że przy wzroście temperatur w granicach 200÷300°C wytrzymałość metali wzrasta, jak to podano na rys. 16.1 dla stali węglowej 0,17%C.



Rys. 16.1

Tablica 16.1. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe niektórych stali i żeliw w podwyższonych temperaturach ⁽¹⁾

Nazwa lub oznaczenie materiału		Orientacyjny skład chemiczny	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_t)$, MPa									
				w temperaturach, °C									
				20	200	300	400	500	550	600	700	800	900
Stal nierdzewna	1H13	0,15 C; 13 Cr	H. 1040°C olej O.750°C	610			500	370					
	2H13	0,2 C; 13 Cr	H. 1010°C powietrze O.710°C	720		550	530	440					
Cr-Ni		17,5 Cr; 12,0 Ni; 0,8 Nb	wyżarzanie 1100°C	400		284	280	260		240	210		
Cr-Mo		10,5 Cr; 0,65 Mo	H. 1150°C O.650°C	670		570	560	480		360	230		
Cr-Ni-Co		13 Cr; 13 Ni; 10 Co	wyżarzanie 1300°C	460		380	370	350		340	310	250	170
Cr-Ni-Co		19 Cr; 12 Ni; 45 Co	wyżarzanie 1280°C	660		580	550	520		480	450	380	210
Stal żaroodporna 4H14N-14W2M		0,45 C; 14 Cr; 14 Ni; 2 W	H. 1175°C woda stabilizowanie 750°C	790					580	500			
Żeliwo żaroodporne		2,6 C; 1,2 Mn; 2 Cr; 2,1 Si 14 Ni; 7 Cu	austenit	250	210		200			140			
Żeliwo żaroodporne		2,8 C; 1 Mn; 1,5 Si; 0,3 Cr; 0,2 Ni		350	320		260			180			

Obrobka cieplna: H. – hartowanie, O. – odpuszczanie.

⁽¹⁾ Według [19] i [33].

Granica plastyczności $R_e (Q_r)$, MPa						Wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie obukierunkowe Z_{go} , MPa								
w temperaturach, °C						w temperaturach, °C								
20	300	400	500	550	600	20	200	300	400	500	550	600	700	800
410		370	220			370			260	220	190			
520	400	400	260			370	350	320	310	240				
210						195			160	140		130		
230						310		250	220	170		130		
						220						235	175	
						265							230	170
390				260	260	450					340	320		
						100	120		90			70		
						150	120		90			70		

Tablica 16.2. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe niektórych metali nieżelaznych w podwyższonych temperaturach

Nazwa lub oznaczenie materiału		Orientacyjny skład chemiczny	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$, MPa						
				w temperaturach, °C						
				20	100	150	200	250	300	400
Dural PA7		4 Cu; 1,6 Mg	przesycony	460	440	400	340	230		
Durale po obróbce plastycznej	PA9	1,7 Cu; 2,4 Mg; 6 Zn	naturalnie starzony	570	500	400	310	240		
	PA30	1,4 C; 2,1 Cu; 1,6 Mg	naturalnie starzony	460	440	400	320	240	160	
	PA33	1 Si; 4,6 Cu; 0,6 Mg; 0,8 Mn	naturalnie starzony	490	460	400	320	200	120	
Brąz aluminiowy Al-Ni-Fe		10 Al; 5 Ni; 5 Fe		800			760		670	490
Stopy Al odlew		2,4 Si; 1,3 Cu; 0,87 Ni	sztucznie starzony	270					75	40
	Al-Si-Cu	4,6 Cu; 2,8 Si		160	150		140		95	

Aby uzyskać zmniejszenie spadku własności wytrzymałościowych w wyższych temperaturach, dodaje się do stali dodatki stopowe, jak chrom, nikiel, molibden, wanad, wolfram itp. Badania zmęczeniowe przeprowadzone w podwyższonych temperaturach wykazują znaczne obniżenie się wytrzymałości zmęczeniowej Z ze wzrostem temperatury.

Metale kolorowe i ich stopy wykazują zmniejszenie wytrzymałości już w temperaturze do 60°C. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali i żeliw w podwyższonych temperaturach podano w tabl. 16.1, niektórych zaś metali nieżelaznych – w tabl. 16.2.

16.2. Pełzanie materiałów i relaksacja naprężeń

W czasie pracy elementów maszyn w podwyższonych temperaturach obserwuje się – oprócz zmniejszenia wytrzymałości – także powolne zwiększenie odkształceń, mimo że obciążenie w tym czasie nie ulega zmianie. Zjawisko to nosi nazwę *pełzania*.

Z pełzaniem materiału związane jest zjawisko *relaksacji*, tj. zmniejszanie się naprężeń w miarę upływu czasu pracy przy zachowaniu nie zmienionych wymiarów ciała.

Granica plastyczności $R_e (Q_r)$, MPa						Liczba cykli	Wytrzymałość zmęczeniowa na zginanie obukierunkowe Z_{go} , MPa					
w temperaturach, °C							w temperaturach, °C					
20	100	150	200	250	300		20	100	150	200	250	300
320	300	280	250	180		10^8	150	140	140	100	70	
500	400	360	240	120		10^8	153	138	112	75	59	
380	380	360	300	200	140	10^8	143	138	120	92	70	52
420	400	360	290	190	80	10^8	130	118	100	70	45	39
						10^7	310			270		250
						10^7	38		33			24
						$5 \cdot 10^7$	60	54		58		41

Wykresy pełzania wykonywane we współrzędnych: odkształcenie względne ε – czas t podano przykładowo na rys. 16.2. Iloraz przyrostu wydłużenia względnego przez przyrost czasu określa tzw. *prędkość pełzania*

$$\nu_p = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (16.1)$$

Znając prędkość pełzania ν_p , można z powyższego wzoru obliczyć wydłużenie względne ε dla dowolnego czasu od chwili t_1 do t_2

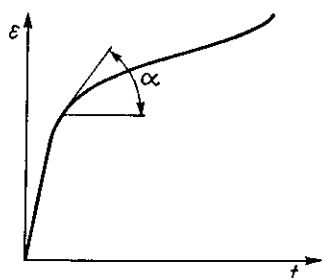
$$\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \nu_p dt \quad (16.2)$$

Jeżeli nie dysponuje się wykresem pełzania danego materiału przy danych naprężeniach w danej temperaturze, prędkość pełzania ν_p można wyznaczyć np. ze wzoru empirycznego

$$\nu_p = B\sigma^n \quad (16.3)$$

Wartości współczynników B i n dla kilku materiałów podano w tabl. 16.3.

Prędkość pełzania obliczona ze wzoru (16.3) powinna być mniejsza od prędkości dopuszczalnej $\nu_{p\text{dop}}$. Dla kilku przypadków wartości $\nu_{p\text{dop}}$ podano w tabl. 16.4.



Rys. 16.2

Korzystanie z wzoru (16.3) jest niedogodne, ponieważ wymaga znajomości współczynników doświadczalnych B i n dla danego materiału i danej temperatury, a ponadto konfrontacji otrzymanego wyniku z dopuszczalną prędkością pełzania, nie zawsze ustaloną dla danego typu konstrukcji.

Metody obliczania na pełzanie blach kotłowych, rur itp. są podane w normach [40].

Tablica 16.3. Wartości współczynników B i n we wzorze (16.3) na prędkość pełzania

Rodzaj stali	Temperatura °C	B $\frac{\text{mm}^2}{\text{N} \cdot \text{h}}$	n
0,39% C	400	$22,75 \cdot 10^{-46}$	8,6
0,30% C	400	$68,25 \cdot 10^{-38}$	6,9
0,3% C; 1,4% Mn	450	$112,40 \cdot 10^{-27}$	4,7
2 % Ni; 0,8% Cr; 0,4% Mn	450	$28,45 \cdot 10^{-23}$	3,2
12% Cr	454	$14,23 \cdot 10^{-27}$	4,4
12% Cr; 3% W; 0,4% Mn	550	$21,35 \cdot 10^{-16}$	1,9

Tablica 16.4. Prędkości dopuszczalne pełzania

Nazwa części	v_p dop na godzinę
Tarcze turbin nasadzone na wał	10^{-9}
Śruby, kołnierze, cylindry turbin parowych	10^{-8}
Przewody parowe, połączenia spawane rur kotłowych	10^{-7}
Rury przegrzewaczy pary	$10^{-6} \div 10^{-5}$

Część druga

Obliczenia wytrzymałościowe w przypadku obciążeń zmęczeniowych

17. Tok przeprowadzania obliczeń zmęczeniowych

17.1. Wpływ spiętrzenia naprężeń, stanu powierzchni i wielkości przedmiotu na wytrzymałość zmęczeniową

17.1.1. Wprowadzenie

W przypadku działania obciążeń zmiennych we wszystkich materiałach następuje utrata wewnętrznych sił spójności przy naprężeniach mniejszych od wytrzymałości doraźnej. Istota tego zjawiska nie jest dotychczas dostatecznie wyjaśniona, co w znacznym stopniu rzutuje na niedoskonałość metod obliczeniowych, opartych wyłącznie na empirycznych uogólnieniach.

Punktem wyjściowym wszelkich obliczeń zmęczeniowych jest wykres Wöhlera, pozwalający wyznaczyć maksymalne naprężenie, przy którym próbka wykonana z danego materiału może przepracować nieograniczoną liczbę cykli. Naprężenie to zwane jest *wytrzymałością zmęczeniową* Z . Spośród wielu istniejących metod obliczeniowych szerokie zastosowanie znalazł sposób oparty na wykorzystaniu współczynników wprowadzonych przede wszystkim przez Moszyńskiego [14] do metod Bacha, Wöhlera, Thuma, Hubera i innych. Można nadmienić, że inne metody obliczeniowe różnią się na ogół nieco odmiennym zdefiniowaniem wprowadzanych współczynników, zaakcentowaniem dodatkowych cech stanu naprężenia (np. gradientu wzrostu naprężeń w obszarze karbu), wprowadzeniem elementów probabilistyki itp.

17.1.2. Współczynniki kształtu α_k

W przypadku nagłych zmian kształtu przedmiotu – przy założeniu, że przedmiot jest idealnie gładki, wykonany z materiału izotropowego idealnie sprężystego – występuje spiętrzenie naprężeń, określone tzw. *współczynnikiem kształtu* α_k (por. [17], rozdz. III)

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad (17.1)$$

gdzie: $\sigma_{\max}$ – naprężenie maksymalne związane z istnieniem zmian kształtu przedmiotu, σ_n – naprężenie nominalne obliczone z konwencjonalnych wzorów wytrzymałościowych dla najbardziej osłabionego przekroju przedmiotu (w przypadku skręcania lub ścinania – odpowiednio $\tau_{\max}$ i τ_n).

Wartości współczynnika kształtu α_k dla zmian przekroju najczęściej spotykanych w budowie maszyn, ujęte w formie wykresów, podano w rozdz. 18 (rys. 18.11÷18.45).

Aby wyznaczyć współczynnik kształtu α_k za pomocą wymienionych wyżej wykresów, należy m.in. znać *promień dna karbu* ρ , tj. minimalny promień w miejscu nagłej zmiany kształtu przedmiotu. W przypadku ostrych podcięć promień oblicza się ze wzoru

$$\rho = \rho_k + \rho_m \quad (17.2)$$

przy czym: ρ_k – promień rzeczywisty (konstrukcyjny) dna karbu, ρ_m – promień minimalny dna karbu (wartość tego promienia należy odczytać z wykresu podanego na rys.18.8).

Jak wynika z rys.18.8, dopiero dla dostatecznie dużych promieni dna karbu, gdy $\rho_k > 5$ mm, promienia minimalnego ρ_m można nie uwzględniać, przyjmując $\rho_k = \rho_m$.

17.1.3. Współczynnik działania karbu β_k

Śpiętrzenia naprężeń określonego współczynnikiem α_k [wzór (17.1)] przy działaniu obciążeń stałych w ogóle się nie uwzględnia w obliczeniach wytrzymałościowych, natomiast w przypadku obciążeń zmiennych spiętrzenie naprężeń powoduje dość istotne zmniejszenie wytrzymałości przedmiotu.

Stosunek wytrzymałości zmęczeniowej próbek gładkich bez karbu (Z_{bk}) do wytrzymałości zmęczeniowej próbek gładkich z karbem (Z_k) określa się tzw. *zmęczeniowym współczynnikiem działania karbu* lub krócej – *współczynnikiem karbu* β_k

$$\beta_k = \frac{Z_{bk}}{Z_k} \quad (17.3)$$

Ponieważ współczynnik karbu β_k zależy od właściwości materiału, przeto wprowadzono tzw. *współczynnik η wrażliwości materiału na działanie karbu* lub krócej *współczynnik wrażliwości*, określony wzorem

$$\eta = \frac{\beta_k - 1}{\alpha_k - 1} \quad (17.4)$$

Współczynnik ten wynosi:

dla szkła	$\eta = 1,$
dla stali w stanie ulepszonym cieplnie	$\eta = 0,7 \div 1,0,$
dla stali w stanie surowym	$\eta = 0,5 \div 0,9,$
dla stali w stanie wyżarzonym	$\eta = 0,4 \div 0,8,$
dla żeliwa szarego	$\eta \approx 0.$

Wartości liczbowe współczynnika η dla stali można odczytać z wykresu 18.9, dla stopów aluminium zaś z wykresu 18.10, przy czym dla aluminium współczynnik η zależy od promienia dna karbu ρ . Po wyznaczeniu współczynników α_k (z wykresów 18.11÷18.45) oraz η (z wykresów 18.9 lub 18.10) współczynnik karbu β_k wyraża się wzorem wynikającym z zależności (17.4)

$$\beta_k = 1 + \eta(\alpha_k - 1) \quad (17.5)$$

17.1.4. Współczynnik stanu powierzchni β_p

Współczynnik stanu powierzchni β_p określony jest wzorem

$$\beta_p = \frac{Z_{gt}}{Z_p} \quad (17.6)$$

gdzie: Z_{gt} – wytrzymałość zmęczeniowa próbki gładkiej (polerowanej), Z_p – wytrzymałość zmęczeniowa próbki o danym stanie powierzchni.

Wartości liczbowe współczynnika stanu powierzchni β_p odczytać można z wykresów podanych na rys. 18.6 dla stali i 18.7 – dla żeliwa szarego z naskórkiem odlewniczym.

Dla części toczonych można przyjąć:

dla żeliwa (po usunięciu naskórka odlewniczego)	$\beta_p = 1,$
dla duraluminium	$\beta_p = 1,1 \div 1,2,$
dla stopów magnezu	$\beta_p = 1,25 \div 1,4.$

W przypadku skręcania współczynnik stanu powierzchni jest dla stali znacznie mniejszy niż dla pozostałych przypadków obciążeń i oznaczony jest β_{ps} . Wartości liczbowe β_{ps} dla stali można odczytać na prawej skali wykresu podanego na rys. 18.6. Z braku bliższych danych dla innych metali można przyjąć $\beta_{ps} \approx \beta_p$.

17.1.5. Zmęczeniowy współczynnik spiętrzenia naprężeń β

Łączny wpływ działania karbu i stanu powierzchni danego elementu maszyn uwzględnia się przez obliczenie *współczynnika spiętrzenia naprężeń* β , określonego zależnością

$$\beta = \frac{Z}{Z_{kp}} \quad (17.7)$$

gdzie: Z – wytrzymałość zmęczeniowa próbki laboratoryjnej (próbka bez karbu, wypolerowana, o średnicy $7 \div 10$ mm), Z_{kp} – wytrzymałość zmęczeniowa próbki z karbem o danym stanie powierzchni.

Współczynnik β można obliczyć jako iloczyn współczynników cząstkowych: $\beta = \beta_k \beta_p$, co po podstawieniu wzoru (17.5) daje

$$\beta = [1 + \eta(\alpha_k - 1)]\beta_p \quad (17.8)$$

a wówczas wartość liczbową współczynnika spiętrzenia naprężeń dla konkretnych kształtów i wymiarów przedmiotu można obliczyć, korzystając z wykresów podanych w rozdz. 18.

17.1.6. Współczynnik wielkości przedmiotu γ

Własności wytrzymałościowe określone na podstawie prób statycznych w dużym stopniu zależą od wymiarów przedmiotu, a więc od grubości odlewów lub wyrobów walcowanych, a w jeszcze większym stopniu od grubości elementów poddanych obróbce cieplnej. Również w przypadku obciążeń zmiennych wytrzymałość zmęczeniowa Z_w próbek o dużych wymiarach jest mniejsza od wytrzymałości zmęczeniowej normalnych próbek laboratoryjnych. Z tego powodu w obliczeniach zmęczeniowych wprowadza się *współczynnik wielkości przedmiotu* γ , określony zależnością

$$\gamma = \frac{Z}{Z_w} \quad (17.9)$$

Wartości liczbowe współczynnika γ można odczytać z wykresów podanych na rys. 18.1÷18.5. Z braku bliższych danych takie same wartości jak dla zginania (np. dla stali) można stosować do rozciągania i skręcania, dla ściskania zaś przyjmuje się $\gamma = 1$.

17.2. Obliczenia zmęczeniowe w przypadku symetrycznych cykli obciążeń

W przypadku symetrycznych cykli obciążeń obliczenia zmęczeniowe sprowadzają się do sprawdzenia warunku

$$x_z = \frac{Z_o}{\beta \gamma \sigma_a} \geq x_{zw} \quad (17.10)$$

gdzie: x_z – zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa, Z_o – wytrzymałość zmęczeniowa przy naprężeniach obustronnie zmiennych (cykl symetryczny oscylujący, wahadłowy), dla danego stanu obciążeń, a więc: dla rozciągania i ściskania – Z_{ro} , dla zginania – Z_{go} , dla skręcania – Z_{so} . Wartości liczbowe Z_{ro} , Z_{go} oraz Z_{so} dla różnych metali podano w tabl.19.4÷19.14; σ_a – amplituda naprężeń nominalnych, w przypadku cyklu obustronnego (symetrycznego) równa naprężeniom maksymalnym, obliczonym z konwencjonalnych wzorów wytrzymałościowych; β – współczynnik spiętrzenia naprężeń określony wzorem (17.8); γ – współczynnik wielkości przedmiotu (z wykresów podanych na rys.18.1÷18.5); x_{zw} – wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa. Z braku bliższych danych dotyczących x_{zw} dla danego elementu maszyn można obliczyć orientacyjną wartość zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa posługując się tabl.1.1, tzn. wyznaczając współczynniki cząstkowe i przyjmując $x_{zw} \approx x_w$.

17.3. Obliczenia zmęczeniowe w przypadku niesymetrycznych cykli obciążeń

17.3.1. Wprowadzenie

W przypadku cykli niesymetrycznych obliczenia zmęczeniowe sprowadzają się do sprawdzenia warunku

$$x_z = \frac{Z}{\sigma_{z\max}} \geq x_{zw} \quad (17.11)$$

gdzie: Z – wytrzymałość zmęczeniowa, odpowiadająca danym cyklom naprężeń; $\sigma_{z\max}$ – maksymalne naprężenie zmęczeniowe, obliczone z zależności

$$\sigma_{z\max} = \sigma_m + \sigma_{az} \quad (17.12)$$

przy czym: σ_m – naprężenia średnie cyklu, σ_{az} – amplituda naprężeń zmęczeniowych obliczona z zależności

$$\sigma_{az} = \beta\gamma\sigma_a \quad (17.13)$$

gdzie σ_a jest amplitudą naprężeń nominalnych.

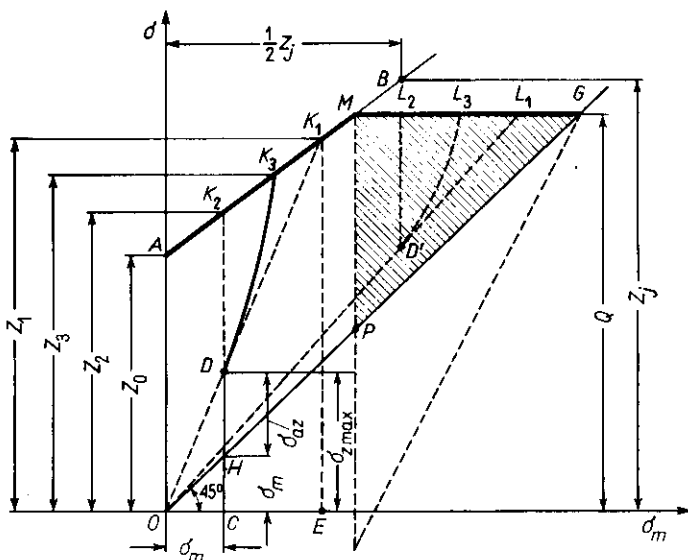
Po podstawieniu zależności (17.13) do (17.12) otrzymujemy

$$\sigma_{z\max} = \sigma_m + \beta\gamma\sigma_a \quad (17.14)$$

17.3.2. Budowa uproszczonego wykresu Smitha

Aby wyznaczyć wytrzymałość zmęczeniową Z , odpowiadającą danemu cyklowi naprężeń [wzór (17.11)], zastosujemy metodę wykreslną, budując w tym celu uproszczony wykres Smitha. W układzie współrzędnych σ_m - σ (rys.17.1) wyzna-

czamy położenie punktu A , odkładając na osi rzędnych $OA = Z_0$, a następnie punkt B o współrzędnych $(\frac{1}{2} Z_j, Z_j)$, gdzie Z_j – wytrzymałość zmęczeniowa przy naprężeniach jednostronnie zmiennych (odzerowo tętniących). Punkty te łączymy linią AB , a następnie prowadzimy prostą poziomą, odpowiadającą granicy plastyczności $Q(R_s)$, otrzymując punkt M przecięcia się tej linii z prostą AB oraz punkt G na prostej OG , poprowadzonej pod kątem 45° do osi $O\sigma_m$. Otrzymaliśmy w ten sposób górną gałąź wykresu Smitha, złożoną z dwóch odcinków: AM oraz MG .



Rys. 17.1

Wykres taki wystarcza do przeprowadzania obliczeń zmęczeniowych dla materiałów plastycznych (stal, staliwo, metale kolorowe), w których przyjmuje się, że granica plastyczności na rozciąganie jest taka sama jak na ściskanie oraz stosuje się drugie założenie upraszczające, że zmęczeniowe naprężenia ściskające są tak samo niebezpieczne, jak i rozciągające. W przypadku więc gdy cykl naprężeń zmienia się, np. od $+40$ MPa do -120 MPa, obliczenia zmęczeniowe dla takiego cyklu można przeprowadzać jak dla cyklu o naprężeniach maksymalnych $+120$ MPa i minimalnych -40 MPa, co na ogół nieznacznie zwiększa pewność obliczeń (jeżeli zachowany jest dostateczny współczynnik bezpieczeństwa ze względu na utratę stateczności). Przy tych założeniach punkt D , określający stan naprężeń przy danym cyklu obciążeń, znajdzie się w obszarze $OAMGO$ wykresu Smitha podanego na rys. 17.1. Położenie punktu D wyznaczone jest każdorazowo naprężeniem średnim $\sigma_m = OC$ oraz naprężeniem maksymalnym

$$CD = CH + HD = \sigma_m + \sigma_{az} = \sigma_{zmax} \quad (17.15)$$

17.3.3. Przeprowadzanie obliczeń zmęczenia za pomocą wykresu Smitha

Wyznaczenie wytrzymałości zmęczeniowej Z , odpowiadającej danemu cyklowi zmian naprężeń, tj. punktowi D na rys. 17.1, zależy od tego jak się będzie zmieniać naprężenie średnie σ_m i amplituda naprężenia zmiennego σ_{az} cyklu w miarę wzrostu obciążeń działających na obliczany element.

Jeżeli przy wzroście obciążeń stosunek amplitud σ_{az} do naprężeń średnich σ_m w danym elemencie będzie stały ($\sigma_{az}/\sigma_m = \text{const}$), wartość wytrzymałości zmęczeniowej odpowiadająca danemu cyklowi określona będzie punktem K_1 otrzymanym na przecięciu się prostej poprowadzonej przez punkty O i D z prostą AM (rys. 17.1). Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa x_z jest wówczas równy ilorazowi

$$x_z = \frac{Z_1}{\sigma_{z \max}} = \frac{EK_1}{CD} \quad (17.16)$$

Jeżeli przy wzroście obciążeń naprężenie średnie cyklu pozostaje stałe ($\sigma_m = \text{const}$), wytrzymałość zmęczeniowa odpowiadająca punktowi D jest określona punktem K_2 na rys. 17.1 i zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa wyraża się zależnością

$$x_z = \frac{Z_2}{\sigma_{z \max}} = \frac{CK_2}{CD} \quad (17.17)$$

Poza wymienionymi wyżej dwoma zasadniczymi schematami wzrostu naprężeń w rzeczywistych warunkach pracy elementów maszyn mogą istnieć różnorodne przypadki innych schematów wzrostu obciążeń, przedstawione na rys. 17.1 dowolną krzywą DK_3 .

W przypadku gdy punkt D , określający wartość naprężeń cyklu, znajdzie się w obszarze trójkąta PMG wykresu Smitha, zakreskowanym na rys. 17.1 (oznaczonym D'), wówczas dla każdego schematu zmian naprężeń wytrzymałość zmęczeniowa jest jednakowa, równa Q , gdyż punkty L_1 , L_2 i L_3 wyznaczone w analogiczny jak poprzednio sposób znajdują się na linii MG . Oznaczenia Z_o , Z_j oraz Q podane na rys. 17.1 dotyczą odpowiednich rodzajów obciążeń, a więc dla rozciągania Z_{ro} , Z_{rj} oraz Q_r , dla zginania Z_{go} , Z_{gj} oraz Q_g , dla skręcania zaś Z_{so} , Z_{sj} oraz Q_s . Wartości liczbowe tych wielkości dla różnych materiałów można odczytać z tabl. 19.1÷19.14.

17.3.4. Analityczne obliczanie współczynnika bezpieczeństwa przy stałym stosunku amplitud do naprężeń $\sigma_{az}/\sigma_m = \text{const}$

Po wyznaczeniu równania prostej AB z rys. 17.1 i wykorzystaniu zależności (17.16) warunek wytrzymałościowy, jaki musi być spełniony w przypadku cyklu

niesymetrycznych o stałym stosunku amplitud do naprężeń $\sigma_a/\sigma_m = \text{const}$, wyraża się zależnością (por. [17], rozdz. 4)

$$x_z = \frac{Z_o}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m \left(\frac{2Z_o}{Z_j} - 1 \right)} \geq x_{zw} \quad (17.18)$$

przy czym musi być sprawdzony drugi warunek

$$x_z = \frac{Q}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m} \geq x_{zw} \quad (17.19)$$

17.3.5. Analityczne obliczanie współczynnika bezpieczeństwa przy stałych naprężeniach średnich $\sigma_m = \text{const}$

Obliczenia zmęczeniowe elementów pracujących przy cyklach niesymetrycznych o stałych naprężeniach średnich $\sigma_m = \text{const}$ sprowadzają się do sprawdzenia warunku wynikającego z zależności (17.17) (por. [17], rozdz. 4)

$$x_z = \frac{Z_o + 2\sigma_m \left(1 - \frac{Z_o}{Z_j} \right)}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m} \geq x_{zw} \quad (17.20)$$

przy czym musi być spełniony warunek ujęty wzorem (17.19)

$$x_z = \frac{Q}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m} \geq x_{zw}$$

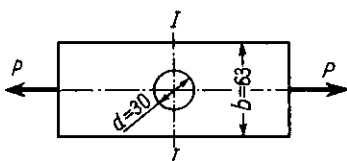
Ponieważ wymagania określone wzorem (17.20) są ostrzejsze od ujętych wzorem (17.18), przeto we wszystkich przypadkach, gdy brak jest bliższych danych dotyczących schematu wzrostu obciążeń, należy korzystać ze wzoru (17.20) oraz (17.19).

Oznaczenia użyte we wzorach (17.18)÷(17.20): x_z – zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa; x_{zw} – wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa (z braku bliższych danych można go ewentualnie obliczyć jako iloczyn współczynników cząstkowych $x_{zw} = x_1 x_2 x_3 x_4$ na podstawie tabl. 1.1); Z_o – wytrzymałość zmęczeniowa dla cykli obustronnie zmiennych (symetrycznych) i danego rodzaju naprężeń (tj. Z_{ro} , Z_{go} , Z_{so})⁽¹⁾, odczytana np. z tabl. 19.4÷19.14; Z_j – wytrzymałość zmęczeniowa dla cyklu jednostronnie zmiennego i danego rodzaju

⁽¹⁾ Właściwym oznaczeniem dla tego przypadku jest symbol Z_{rc} . Dla ujednolicenia oznaczeń pozostawiono Z_{ro} .

naprężeń (tj. Z_{r_f} , Z_{r_g} , Z_{r_j}) odczytana np. z tabl. 19.4÷19.14; σ_m – średnia wartość naprężeń nominalnych (średnie naprężenie cyklu); σ_a – amplituda zmian naprężeń obliczona dla obciążeń nominalnych (bez uwzględniania spiętrzenia naprężeń i wielkości przedmiotu); β – współczynnik spiętrzenia naprężeń [wzór (17.8)]; γ – współczynnik wielkości przedmiotu (z wykresów podanych na rys. 18.1÷18.5); Q – granica plastyczności materiału dla danego rodzaju naprężeń (tj. Q_r , Q_g lub Q_s) odczytana z tabl. 19.4÷19.14.

Przykład 17.1. Obliczyć wymaganą szerokość płaskownika (rys. 17.2) obciążonego siłą osiową zmienną od 0 do $P_{\max} = 42 \text{ kN}$.



Rys. 17.2

Płaskownik został wykonany w piątej klasie chropowatości ($\sqrt[5]{}$), ze stali St3. Wymagany zmęzeniowy współczynnik bezpieczeństwa wynosi $x_{zw} = 1,5$.

Rozwiązanie

Obliczenia wstępne. Szerokość płaskownika wyznaczamy z warunku, by naprężenia maksymalne nie przekroczyły wartości naprężeń dopuszczalnych przy cyklu jednostronnie zmiennym (tętniącym), oznaczanych k_{r_f}

$$F_{\min} = g(b-d) \geq \frac{P_{\max}}{k_{r_f}}, \quad \text{stad} \quad b \geq \frac{P_{\max}}{gk_{r_f}} + d$$

Dla stali St3 wartość naprężeń dopuszczalnych k_{r_f} znajdujemy z tabl. 19.4: $k_{r_f} = (65 \div 100) \text{ MPa} = (65 \div 100) \text{ N/mm}^2$.

Do obliczeń wstępnych przyjmujemy wartość $k_{r_f} = 65 \text{ MPa}$

$$b \geq \frac{42000}{20 \cdot 65} + 30 = 32,4 + 30 = 62,4 \text{ mm}$$

Przyjmujemy $b = 63 \text{ mm}$ (rys. 17.2).

Obliczenia sprawdzające. Najbardziej niebezpiecznym przekrojem jest przekrój I-I płaskownika. Obliczamy naprężenia maksymalne w tym przekroju

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{g(b-d)} = \frac{42000}{20(63-30)} = 64 \text{ MPa}$$

Naprężenia minimalne $\sigma_{\min} = 0$, a naprężenia średnie

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{64 + 0}{2} = 32 \text{ MPa}$$

Amplituda cyklu ma wartość

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{64 - 0}{2} = 32 \text{ MPa}$$

Istotną sprawą jest ustalenie, jak zmieniają się wartości σ_m i σ_a przy zmianie (wzroście) obciążenia. Ponieważ siła obciążająca płaskownik, wzrastająca od zera do $P_{\max}$, jest siłą tętniącą, wydaje się więc, że zwiększenie obciążenia płaskownika może nastąpić poprzez wzrost siły $P_{\max}$, przy zachowaniu wartości minimalnej równej zeru. Przy zmianie obciążenia zmieni się zarówno wartość $\sigma_{\max}$, jak też naprężeń średnich σ_m i amplitudy σ_a , natomiast stosunek $\sigma_m/\sigma_a = 1$ pozostanie wartością stałą: $\sigma_m/\sigma_a = \text{const}$.

Jest to więc cykl o stałym stosunku naprężeń średnich do amplitudy i dla obliczenia zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa skorzystamy ze wzoru (17.18)

$$x_z = \frac{Z_o}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m \left(\frac{2Z_o}{Z_j} - 1 \right)} \geq x_{rw}$$

Wartości wytrzymałości zmęczeniowej dla stali St3 przy różnych cyklach znajdujemy w tabl. 19.4

$$Z_{ro} = 130 \text{ MPa}, \quad Z_{rj} = 210 \text{ MPa}$$

Obliczymy następnie wartość współczynnika spiętrzenia naprężeń ze wzoru (17.8)

$$\beta = [1 + \eta(\alpha_k - 1)]\beta_p$$

gdzie: β_p – współczynnik stanu powierzchni (rys. 18.6). Dla stali St3 o wytrzymałości doraźnej na rozciąganie $R_r = 400 \text{ MPa}$ i dla 5 klasy chropowatości powierzchni $\beta_p = 1,1$; η – współczynnik wrażliwości materiału na działanie karbu (rys. 18.9). Dla stali St3 o $Z_{go} = 170 \text{ MPa}$, w stanie surowym, $\eta = 0,66$; α_k – współczynnik kształtu dla rozciąganego płaskownika z otworem. Dla stosunku $d/b = \frac{30}{63} = 0,475$ z wykresu na rys. 18.38 odczytano

$$\alpha_k = 2,2.$$

Współczynnik spiętrzenia naprężeń wynosi więc

$$\beta = [1 + 0,66(2,2 - 1)] \cdot 1,1 = 1,98$$

Współczynnik γ jest współczynnikiem wielkości przedmiotu dla stali o $Z_{go} = 170 \text{ MPa}$, $\alpha_k = 2,2$ oraz pola powierzchni przekroju poprzecznego $F = 20(63 - 30) = 660 \text{ mm}^2$.

Z wykresu na rys. 18.1 odczytujemy $\gamma = 1,2$.

Po podstawieniu danych zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa obliczony według wzoru (17.18) ma wartość

$$x_z = \frac{130}{1,98 \cdot 1,2 \cdot 32 + 32 \left(2 \cdot \frac{130}{210} - 1 \right)} = 1,56 > 1,5$$

Jednocześnie należy sprawdzić drugi warunek, wyrażony wzorem (17.19)

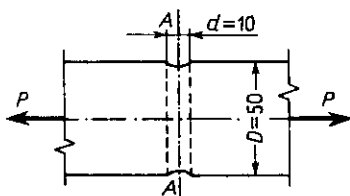
$$x_z = \frac{Q_r}{\beta \gamma \sigma_a + \sigma_m} \geq x_{zw}$$

gdzie Q_r – granica plastyczności przy rozciąganiu. Dla stali St3 z tabl. 19.4 odczytujemy $Q_r = 240 \text{ MPa}$, a zatem

$$x_z = \frac{240}{1,98 \cdot 1,2 \cdot 32 + 32} = 2,22 > 1,5$$

Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa, jako równy mniejszej z dwu obliczonych powyżej wielkości, wynosi $x_z = 1,56$ i jest większy od wymaganego zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa $x_{zw} = 1,5$, a zatem płaskownik może pracować bezpiecznie.

Przykład 17.2. Sprawdzić wytrzymałość zmęczeniową pręta przedstawionego na rys. 17.3, rozciąganego siłą zmienną od $P_{\min} = 90 \text{ kN}$ do $P_{\max} = 150 \text{ kN}$. Część została wykonana w siódmej klasie chropowatości, ze stali St45 w stanie normalizowanym; pęknięcie pręta spowoduje uszkodzenie maszyny.



Rys. 17.3

Rozwiązanie: Niebezpiecznym przekrojem pręta będzie przekrój A-A, którego pole powierzchni wynosi

$$F \approx \frac{\pi D^2}{4} - dD = \frac{\pi \cdot 50^2}{4} - 10 \cdot 50 \approx 1460 \text{ mm}^2$$

Naprężenia minimalne i maksymalne wynoszą odpowiednio

$$\sigma_{\min} = \frac{P_{\min}}{F} = \frac{90\,000}{1460} = 61,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{F} = \frac{150\,000}{1460} = 102,6 \text{ MPa}$$

a naprężenia średnie i amplituda naprężeń cyklu mają wartość

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{102,6 + 61,6}{2} = 81,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{102,6 - 61,6}{2} = 20,5 \text{ MP}$$

Własności wytrzymałościowe stali St45 znajdujemy w tabl. 19.5:

$$Z_{ro} = 210 \text{ MPa}, \quad Z_{\eta} = 360 \text{ MPa},$$

$$R_r = 650 \text{ MPa}, \quad Q_r = 420 \text{ MPa}, \quad Z_{go} = 280 \text{ MPa}.$$

Współczynnik η wrażliwości materiału na działanie karbu (z rys. 18.9) dla stali $Z_{go} = 280 \text{ MPa}$ w stanie normalizowanym (wyżarzonym) wynosi $\eta = 0,62$.

Współczynnik kształtu α_k znajdziemy z wykresu na rys. 18.23. Promień minimalny dla stali o $R_r = 650 \text{ MPa}$ wynosi z rys. 18.8 $\rho_m = 0,57 \text{ mm}$, więc obliczeniowa średnica otworu jako równa sumie średnicy konstrukcyjnej d i podwójnego promienia minimalnego wynosi

$$d_o = d + 2\rho_m = 10 + 2 \cdot 0,57 \approx 11 \text{ mm}$$

Dla stosunku $d_o/D = \frac{11}{50} = 0,22$ znajdujemy z wykresu na rys. 18.23 wartość $\alpha_k = 2,26$.

Współczynnik stanu powierzchni β_p dla stali o $R_r = 650 \text{ MPa}$ i dla siódmej klasy chropowatości powierzchni wynosi według wykresu na rys. 18.6 $\beta_p = 1,13$.

Współczynnik spiętrzenia naprężeń β obliczamy na podstawie wzoru (17.8)

$$\beta = [1 + \eta(\alpha_k - 1)]\beta_p = [1 + 0,62(2,26 - 1)] \cdot 1,13 = 2,02$$

Współczynnik wielkości przedmiotu γ znajdujemy z rys.18.1; dla stali o $Z_{go} = 280$ MPa dla części o współczynniku kształtu $\alpha_k = 2,26$ i o polu powierzchni przekroju $F = 14,6$ cm² odczytujemy $\gamma = 1,41$. Z charakteru zmienności siły P nie można stwierdzić, jak zmieni się cykl naprężeń przy zmianie obciążenia. Nie wiemy zatem, który wzór należy zastosować: (17.20) – dla cyklu o stałym naprężeniu średnim σ_m , czy (17.18) – dla cyklu o stałym stosunku naprężeń średnich do amplitudy $\sigma_m/\sigma_a = \text{const}$. Obliczymy wobec tego zmęczeniowe współczynniki bezpieczeństwa z obu przytoczonych wyżej wzorów.

Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa dla cyklu o stałym naprężeniu średnim σ_m ma wartość obliczoną ze wzoru (17.20)

$$x_z = \frac{Z_{ro} + 2\sigma_m \left(1 - \frac{Z_{ro}}{Z_\eta}\right)}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m} = \frac{210 + 2 \cdot 81,8 \left(1 - \frac{210}{360}\right)}{2,02 \cdot 1,41 \cdot 20,5 + 81,8} = 1,96$$

Należy jednocześnie sprawdzić drugi warunek określony wzorem (17.19) – zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa względem granicy plastyczności

$$x_z = \frac{Q_r}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m} = \frac{420}{2,02 \cdot 1,41 \cdot 20,5 + 81,8} = 3,0$$

Gdyby cykl naprężeń był cyklem o stałym naprężeniu średnim σ_m , zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa miałby wartość mniejszą z wyżej obliczonych $x_{z1} = 1,96$.

Dla cyklu o stałym stosunku naprężeń średnich do amplitudy $\sigma_m/\sigma_a = \text{const}$ zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa należy obliczyć ze wzoru (17.18)

$$x_z = \frac{Z_{ro}}{\beta\gamma\sigma_a + \sigma_m \left(\frac{2Z_{ro}}{Z_\eta} - 1\right)} = \frac{210}{2,02 \cdot 1,41 \cdot 20,5 + 81,8 \left(\frac{2 \cdot 210}{360} - 1\right)} = 2,89$$

i wybrać mniejszą z wartości otrzymanych ze wzorów (17.18) i (17.19). Gdyby cykl naprężeń traktować jako cykl o stałym stosunku $\sigma_m/\sigma_a = \text{const}$, zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa wynosiłby $x_{z2} = 2,89$.

Ponieważ w danym przypadku nie wiemy, jaki charakter ma cykl naprężeń, więc z zasady wybieramy rozwiązanie bezpieczniejsze i do obliczeń przyjmujemy mniejszą z wartości zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa,

czyli dla cyklu o stałym naprężeniu średnim σ_m obliczoną ze wzoru (17.20) i (17.19): $x_z = x_{z1} = 1,96$. Wartość tę należy porównać z wartością wymaganego zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa, w braku bliższych danych obliczonego na przykład z tabl. 1.1:

- dla obliczeń metodami o zwykłej dokładności i dla znanego gatunku stali przyjmujemy wartość współczynnika pewności $x_1 = 1,3$;
- zniszczenie części spowoduje uszkodzenie maszyny, więc współczynnik ważności przedmiotu x_2 ma wartość $x_2 = 1,2$;
- dla materiału walcowanego współczynnik jednorodności wynosi $x_3 = 1,1$;
- ponieważ dokładna kontrola geometrii kształtu (np. przecinanie się osi otworu i osi pręta) po obróbce skrawaniem jest utrudniona, bierzemy górną wartość współczynnika zachowania wymiarów $x_4 = 1,1$.

Wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa wynosi

$$x_{rw} = x_1 x_2 x_3 x_4 = 1,3 \cdot 1,2 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 1,89$$

Ponieważ $x_z = 1,96 > x_{rw} = 1,89$, więc wytrzymałość zmęczeniowa pręta przedstawionego na rys. 17.3 jest dostateczna.

17.4. Obliczenia zmęczeniowe w złożonym stanie naprężeń

17.4.1. Obliczenia wytrzymałościowe w przypadku zmęczeniowego rozciągania i zginania

W przypadku występowania nakładających się na siebie (tj. jednakowo skierowanych) naprężeń normalnych od rozciągania i od zginania wyznaczamy amplitudę σ_{aw} cyklu wypadkowego ze wzoru empirycznego

$$\sigma_{aw} = \beta_g \gamma_g \sigma_{ag} + \frac{Z_{go}}{Z_{ro}} \beta_r \gamma_r \sigma_{ar} \quad (17.21)$$

W przypadku cyklu obustronnie zmiennego (symetrycznego) zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa wyrazi się wzorem

$$x_z = \frac{Z_{go}}{\sigma_{aw}} \quad (17.22)$$

Dla dowolnego cyklu naprężenie średnie cyklu wypadkowego

$$\sigma_{mw} = \sigma_{mr} + \sigma_{mg} \quad (17.23)$$

współczynnik bezpieczeństwa zaś jest określony zależnościami:

- a) jeżeli przy wzroście obciążeń amplitudy naprężenia są proporcjonalne do naprężeń średnich $\sigma_a/\sigma_m = \text{const}$, według wzoru (17.18)

$$x_z = \frac{Z_{go}}{\sigma_{aw} + \sigma_{mw} \left(\frac{2Z_{go}}{Z_{gj}} - 1 \right)} \geq x_{zw} \quad (17.24)$$

b) jeżeli naprężenia średnie cykli są stałe przy wzroście obciążeń ($\sigma_m = \text{const}$) oraz dla przypadków, gdy nie ma pewności, że słuszny jest schemat $\sigma_a/\sigma_m = \text{const}$, według wzoru (17.20)

$$x_z = \frac{Z_{go} + 2\sigma_{mw} \left(1 - \frac{Z_{go}}{Z_{gj}} \right)}{\sigma_{aw} + \sigma_{mw}} \geq x_{zw} \quad (17.25)$$

przy czym w obu powyższych przypadkach należy również sprawdzić warunek wyrażony wzorem analogicznym do wzoru (17.19)

$$x_z = \frac{Q_g}{\sigma_{aw} + \sigma_{mw}} \geq x_{zw} \quad (17.26)$$

Jeżeli amplitudy naprężeń od rozciągania σ_{ar} są znacznie większe od σ_{ag} , zamiast wzoru (17.21) można stosować analogiczny wzór przybliżony, redukujący naprężenia od zginania do naprężeń od rozciągania

$$\sigma_{aw} = \beta_r \gamma_r \sigma_{ar} + \frac{Z_{ro}}{Z_{go}} \beta_g \gamma_g \sigma_{ag} \quad (17.27)$$

a następnie przeprowadzać obliczenia według wzorów (17.22)÷(17.26), w których zamiast własności dotyczących zginania należy podstawić odpowiednio Z_{ro} , Z_{rj} , Q_r .

Oznaczenia we wzorach (17.21)÷(17.27): σ_{ar} – amplituda naprężeń nominalnych przy rozciąganiu; σ_{ag} – amplituda naprężeń nominalnych przy zginaniu; σ_{mg} , σ_{mr} – nominalne naprężenie średnie przy rozciąganiu, zginaniu; β_r , β_g – współczynnik spiętrzenia β naprężeń rozciągających, zginających (jak wynika z rys. 18.11÷18.45, współczynniki β przy rozciąganiu mają nieraz inne wartości niż przy zginaniu); γ_r , γ_g – współczynniki wielkości przedmiotu (na ogół $\gamma_g = \gamma_r = \gamma$); Z_{go} , Z_{gj} – wytrzymałość zmęczeniowa danego materiału na zginanie (obustronne, jednostronne); Z_{ro} – wytrzymałość zmęczeniowa materiału na obustronne (symetryczne) rozciąganie-ściskanie; σ_{aw} , σ_{mw} – amplituda i naprężenie średnie cyklu wypadkowego; Q_r , Q_g – granica plastyczności (na rozciąganie, zginanie); x_{zw} – wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa, w braku bliższych danych obliczony z tabl. 1.1.

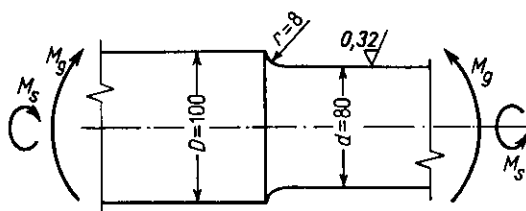
17.4.2. Obliczenia wytrzymałościowe w przypadku zmęczeniowego działania naprężeń normalnych i naprężeń stycznych

W przypadku jednoczesnego działania naprężeń normalnych σ od rozciągania, ściskania lub zginania oraz naprężeń stycznych τ od skręcania lub ścinania obliczenia zmęczeniowe sprowadzają się do sprawdzenia warunku (por. [17], rozdz. 4)

$$x_z = \frac{x_{zr} x_{zs}}{\sqrt{x_{zr}^2 + x_{zs}^2}} \geq x_{zw} \quad (17.28)$$

gdzie: x_{zr} – współczynnik bezpieczeństwa dla rozciągania (lub zginania czy ściskania) obliczony ze wzoru (17.10) (gdy występuje cykl symetryczny) lub ze wzorów (17.18)÷(17.20) (dla cykli niesymetrycznych); x_{zs} – współczynnik bezpieczeństwa dla skręcania (lub ścinania), obliczony ze wzorów (17.10) lub (17.18)÷(17.20), w których zamiast naprężeń normalnych σ należy wstawić naprężenia styczne τ .

Przykład 17.3. Obliczyć zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa dla wału skręcanego i zginanego, przedstawionego na rys. 17.4. Moment gnący wynosi $M_g = \pm 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$, a moment skręcający zmienia się od zera do $M_s = 4500 \text{ N}\cdot\text{m}$. Wał jest wykonany ze stali St35 w stanie normalizowanym.



Rys. 17.4

Rozwiązanie. Dla obustronnie zmiennego cyklu zginania wału naprężenie średnie $\sigma_{mg} = 0$, a amplituda naprężeń

$$\sigma_{ag} = \sigma_{g\max} = \frac{M_g}{W} = \frac{32 M_g}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 2000 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80^3} = 39,8 \text{ MPa}$$

Dla jednostronnie zmiennego cyklu skręcania naprężenie średnie τ_m równe jest amplitudzie τ_a i równe połowie naprężeń maksymalnych

$$\tau_m = \tau_a = \frac{1}{2} \tau_{\max} = \frac{1}{2} \frac{16 M_s}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 4500 \cdot 10^3}{2 \pi \cdot 80^3} \approx 22,4 \text{ MPa}$$

Własności wytrzymałościowe stali St35 są następujące (według tabl. 19.5):

$$\begin{aligned}
 R_r &= 550 \text{ MPa}, & Z_{go} &= 250 \text{ MPa}, & Z_{gj} &= 421 \text{ MPa}, \\
 Q_g &= 430 \text{ MPa}, & Z_{ro} &= 150 \text{ MPa}, & Z_{sj} &= 300 \text{ MPa}, \\
 Q_s &= 230 \text{ MPa}.
 \end{aligned}$$

Według wykresu z rys. 18.8 dla stali St35 promień minimalny

$$\rho_m = 0,65 \text{ mm, więc } \rho = \rho_k + \rho_m = 8 + 0,65 = 8,65 \text{ mm}$$

Dla stosunków

$$\frac{D}{d} = \frac{100}{80} = 1,25 \quad \text{oraz} \quad \frac{\rho}{d} = \frac{8,65}{80} = 0,11$$

odczytujemy wartości współczynników kształtu α_k : dla zginania z wykresu na rys. 18.12 $\sigma_{kg} = 1,6$, dla skręcania z wykresu na rys. 18.13 $\alpha_{ks} = 1,35$. Współczynnik wrażliwości $\eta = 0,6$ (z rys. 18.9), a współczynniki stanu powierzchni (z rys. 18.6) dla zginania β_p i dla skręcania β_{ps} (dla dziewiątej klasy chropowatości) mają wartości $\beta_p = 1,06$ i $\beta_{ps} = 1,03$.

Współczynniki spiętrzenia naprężeń według wzoru (17.18) wynoszą

$$\beta_g = [1 + \eta(\alpha_{kg} - 1)]\beta_p = [1 + 0,6(1,6 - 1)] \cdot 1,06 = 1,44$$

$$\beta_s = [1 + \eta(\alpha_{ks} - 1)]\beta_{ps} = [1 + 0,6(1,35 - 1)] \cdot 1,03 = 1,25$$

Z wykresu na rys. 18.1 odczytujemy dla $\alpha_{kg} = 1,6$ współczynnik wielkości przedmiotu $\gamma_g = 1,45$, a dla $\alpha_{ks} = 1,35$ współczynnik $\gamma_s = 1,35$.

Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa dla cyklu wypadkowego obliczymy ze wzoru (17.28)

$$x_z = \frac{x_{zg} x_{zs}}{\sqrt{x_{zg}^2 + x_{zs}^2}}$$

gdzie: x_{zg} – zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa z uwzględnieniem tylko zginania, x_{zs} – zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa z uwzględnieniem tylko skręcania.

Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa x_{zg} obliczony (dla cyklu symetrycznego) ze wzoru (17.10) wynosi

$$x_{zg} = \frac{Z_{go}}{\beta_g \gamma_g \sigma_{ag}} = \frac{250}{1,44 \cdot 1,45 \cdot 39,8} = 3,03$$

Ponieważ stosunek $\tau_m / \tau_a = \text{const}$, więc zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa x_{zs} obliczamy ze wzoru (17.18)

$$x_{zs} = \frac{Z_{so}}{\beta_s \gamma_s \tau_a + \tau_m \left(\frac{2Z_{so}}{Z_{sj}} - 1 \right)} = \frac{150}{1,25 \cdot 1,35 \cdot 22,4 + 22,4 \left(\frac{2 \cdot 150}{300} - 1 \right)} = 4,0$$

i ze wzoru (17.19)

$$x_{zs} = \frac{Q_s}{\beta_s \gamma_s \tau_a + \tau_m} = \frac{230}{1,25 \cdot 1,35 \cdot 22,4 + 22,4} = 3,81$$

Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa dla skręcania jest równy mniejszej z otrzymanych wartości i wynosi $x_{zs} = 3,81$.

Zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa obliczanego wału ma wartość

$$x_z = \frac{x_{zg} x_{zs}}{\sqrt{x_{zg}^2 + x_{zs}^2}} = \frac{3,03 \cdot 3,81}{\sqrt{3,03^2 + 3,81^2}} = 2,35$$

Wartość ta musi być większa od wymaganego współczynnika bezpieczeństwa x_{zw} (obliczanego na przykład z tabl. 1.1).

17.5. Wytrzymałość zmęczeniowa żeliw, staliw i metali nieżelaznych

17.5.1. Wytrzymałość żeliw

W odróżnieniu od innych metali stosowanych w budowie maszyn żeliwo charakteryzuje się tym, że ma znacznie wyższą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie, a ponadto nie podlega prawu Hooke'a, gdyż ma zmienną – w zależności od naprężeń – wartość modułu Younga E . Z tej właściwości żeliwa wynika następna cecha, a mianowicie: oś obojętna przy zginaniu nie przechodzi w żeliwie przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych, jak na przykład w przypadku innych metali. Dokładne obliczenia naprężeń rozciągających i ściskających przy zginaniu żeliwa są więc dość kłopotliwe (por. [18], str. 399). W praktyce przyjmuje się na ogół założenie upraszczające, że wszystkie obliczenia dla żeliwa prowadzi się tak jak dla materiału podlegającego prawu Hooke'a, natomiast specyficzne własności wytrzymałościowe żeliwa uwzględnia się przez przyjęcie znacznie wyższego naprężenia dopuszczalnego na zginanie. O ile w materiałach podlegających prawu Hooke'a w zasadzie $k_g = k_r$, o tyle dla żeliwa przyjmuje się (por. uwagi do tabl. 19.11):

$k_g = 1,5 k_r$ – dla przekroju prostokątnego,

$k_g = 1,7 k_r$ – dla przekroju kołowego,

$k_g = 1,4 k_r$ – dla przekroju dwuteowego.

Napężenia dopuszczalne na ściskanie przyjmuje się $k_c = 2,5k_r$, a wytrzymałość na ściskanie $R_c = (3 \div 4)R_r$.

Ponieważ żeliwo jest materiałem kruchym, wydłużenie $A_5 \approx 0$, zatem w obliczeniach nie należy stosować wzorów Hubera, lecz wzory oparte na przykład na hipotezie największych wydłużeń (por. p. 2.6), a więc na napężenie dopuszczalne na skręcanie lub ścinanie należałoby przyjąć $k_s = 0,77k_r$ (nie zaś $0,578 k_r$, jak dla materiałów plastycznych). Uwzględniając ponadto znacznie większą wytrzymałość na ściskanie, przyjmuje się dla żeliwa napężenia dopuszczalne na skręcanie $k_s = 1,2 k_r$. Współczynniki bezpieczeństwa dla żeliwa przyjmuje się dość duże, przeważnie w odniesieniu do wytrzymałości na rozciąganie R_r . Tak na przykład w obliczeniach naczyń ciśnieniowych przyjmuje się dla żeliwa współczynnik bezpieczeństwa na rozciąganie $x_r = 7$ przy stosowaniu konwencjonalnych wzorów wytrzymałościowych, a więc napężenia dopuszczalne na rozciąganie wynoszą

$$k_r = \frac{R_r}{x_r} = \frac{R_r}{7} = 0,14 R_r$$

Zbiorniki ciśnieniowe są często narażone na zmiany temperatury, a ponadto stanowią obiekty zagrożające – w razie wybuchu – poważnym wypadkiem, przeto wartość $x_r = 7$ można traktować jako dostatecznie dużą i w mniej odpowiedzialnych konstrukcjach przyjmować nieco niższe wartości, np. $x_r = 5 \div 7$, a więc

$$k_r = (0,14 \div 0,2) R_r$$

Uwzględniając fakt, że żeliwo ma znacznie większą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie, w obliczeniach zmęzeniowych nie można posługiwać się tylko górną linią wykresu Smitha (tj. linią *AMG* według rys.17.1), jak to się stosuje dla wszystkich materiałów o jednakowych własnościach wytrzymałościowych na rozciąganie i ściskanie. Nie wolno więc zmieniać znaków naprężeń maksymalnych w przypadku, gdy bezwzględna wartość naprężeń ściskających jest większa od bezwzględnej wartości naprężeń rozciągających: $|\sigma_{\min}| > |\sigma_{\max}|$, lecz wytrzymałość zmęzeniową odczytywać należy wówczas na dolnej gałęzi wykresu Smitha. Wykres Smitha dla żeliwa szarego Zl 250 podano na rys. 17.5. Własności wytrzymałościowe żeliw zamieszczono w tabl. 19.11.

W przypadku działania obciążeń zmiennych żeliwo wykazuje minimalną wrażliwość na działanie karbu ($\eta \approx 0$). Dalszą cechą żeliwa jest duża zdolność tłumienia drgań. Nie należy jednak zapominać, że żeliwo jest materiałem kruchym ($A_5 \approx 0$) i wszelkiego rodzaju uderowe działanie sił może łatwo spowodować miejscowe przekroczenie wytrzymałości i zapoczątkowanie pęknięcia doraźnego lub zmęzeniowego. Z tego powodu współczynniki bezpieczeństwa dla żeliwa przy obciążeniach stałych przyjmuje się zazwyczaj dwa razy większe niż dla stali.

należy odczytać z wykresu na rys.18.7. Wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa x_{zw} , obliczony na przykład na podstawie tabl. 1.1, należy dla żeliwa powiększyć o 100%.

17.5.2. Obliczanie wytrzymałościowe staliw

Wszystkie obliczenia wytrzymałościowe i zmęczeniowe staliw wykonuje się analogicznie jak dla stali, na podstawie odpowiednich wzorów wytrzymałościowych i wykresów zmęczeniowych. Współczynnik wielkości przedmiotu γ należy odczytać z osobnego dla staliwa wykresu na rys.18.2, a wpływ naskórka odlewniczego – w celu zwiększenia pewności obliczeń – z wykresu na rys.18.7.

Dla obciążeń stałych *przepisy Dozoru Technicznego* [24] obowiązujące w zakresie zbiorników ciśnieniowych nakazują przyjmować współczynniki bezpieczeństwa o 40% wyższe niż dla stali. Jest rzeczą wskazaną przyjęcie tego rodzaju zalecenia również dla wszystkich innych przypadków obliczeń, w tym także dla obliczeń zmęczeniowych. Wymagany zmęczeniowy współczynnik bezpieczeństwa x_{zw} , obliczany na przykład z tabl. 1.1, należy więc dla staliwa powiększyć o 40%.

17.5.3. Wytrzymałość stopów lekkich

Główną zaletą stopów aluminium i magnezu jest ich mała gęstość, dość duża wytrzymałość i odporność na działanie czynników atmosferycznych. Stopy aluminium są produkowane w dwóch rodzajach: stopy odlewnicze, zawierające zazwyczaj dość dużo krzemu (4÷23%), oraz stopy do obróbki plastycznej. Ponadto znajduje zastosowanie aluminium technicznie czyste. Własności wytrzymałościowe częściej stosowanych stopów aluminium podano w tabl. 19.12. Wszystkie stopy aluminium poddaje się z zasady obróbce cieplnej, polegającej na nagrzanu do około 500°C i studzeniu w wodzie. Operację taką nazywa się *przesycaniem*. Otrzymany tym sposobem stan stopu nie jest stały, własności wytrzymałościowe niektórych stopów z biegiem czasu polepszają się. Procesy te noszą nazwy:

a) *starzenie naturalne (samorzutne)* lub *samoulepszenie* – odbywa się samorzutnie podczas przebywania stopu w temperaturze otoczenia;

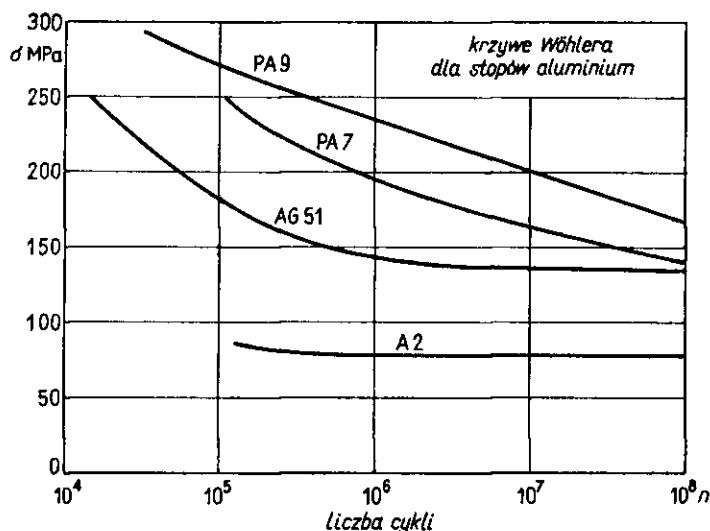
b) *starzenie sztuczne* – stop wygrzewa się w temperaturze 120÷200°C i studzi. Po przesyceniu i starzeniu stopy aluminium można wyżarzać. Rozróżnia się wyżarzanie:

a) *zmiękczone* w temperaturze 280÷400°C,

b) *rekrytalizujące* w temperaturze 270÷350°C,

c) *odprężające* w temperaturze 150÷170°C.

Charakterystyczną cechą stopów aluminium, wyróżniającą je spośród innych metali stosowanych w budowie maszyn, jest to, że niektóre stopy nie mają w ogóle nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, a niektóre osiągają wytrzymałość nieograniczoną dopiero po bardzo dużej liczbie cykli, np. 10^8 lub 10^{10} .



Rys. 17.6

Na rysunku 17.6 podano przykładowo krzywe Wöhlera dla trzech stopów aluminium [6] o składach chemicznych zbliżonych do PA9, PA7 oraz AG51, a następnie dla aluminium A2 (99,2% Al). Jak widać z rys.17.6, krzywe Wöhlera dla stopów do obróbki plastycznej PA9 (6% Zn, 2,5% Mn, 1,34% Cu) oraz PA7 (4,25% Cu) wykazują tendencję do dalszego obniżania się nawet przy liczbie 10^8 cykli. Z tego względu wytrzymałość zmęczeniową stopów aluminium określa się z zasady podaniem odpowiadającej liczby cykli (por. tabl. 19.12, kolumna 13).

Stopy aluminium charakteryzują się między innymi tym, że mimo takiej samej wytrzymałości na rozciąganie R_t , wytrzymałość zmęczeniowa wykazuje dość duży rozrzut i np. Z_{go} może wynosić dla jednych stopów 0,2 R_t , dla innych 0,5 R_t , w zależności od różnych czynników, między innymi od wielkości ziarn w strefie przypowierzchniowej przedmiotu. Zarówno bowiem odlewy, jak i przedmioty walcowane, mają tendencję do tworzenia powłoki gruboziarnistej w strefie przypowierzchniowej, co w znacznym stopniu zmniejsza wytrzymałość zmęczeniową danego przedmiotu. Gruboziarnistość warstwy przypowierzchniowej wywiera też duży wpływ na wartość współczynnika śpiętrzenia naprężeń β , uniemożliwiając przeprowadzenie dokładniejszych obliczeń zmęczeniowych w sposób ogólny, analogiczny jak dla stali. O ile bowiem dla stali współczynnik η wrażliwości na działanie karbu i współczynnik stanu powierzchni β_p , a ponadto promień (obliczeniowy) dna karbu $\rho = \rho_k + \rho_m$ jest pewną na ogół zbadaną i ustaloną funkcją wytrzymałości na rozciąganie R_t (por. rys. 18.6÷18.9), o tyle w odniesieniu do stopów lekkich zależności takich nie daje się ustalić. Jak wspomniano w p. 17.1.3, orientacyjną wartość współczynnika stanu powierzchni dla części toczonych można przyjąć:

dla duraluminium $\beta_p = 1,1 \div 1,2$,

dla stopów magnezu $\beta_p = 1,25 \div 1,4$.

Dokładniejsze obliczenia zmęczeniowe można zatem przeprowadzać, opierając się na danych doświadczalnych dotyczących w zasadzie danego stopu, przy tym odlewane lub walcowane w danych warunkach technologicznych, a ponadto dla elementów o danych wymiarach i zmianach kształtu. Wszelkie inne obliczenia, prowadzone na przykład w sposób analogiczny jak dla stali, mogą mieć jedynie charakter obliczeń przybliżonych. Wszystkie podane wyżej uwagi dotyczą również stopów magnezu.

Obliczenia wytrzymałościowe dla obciążeń stałych należy przeprowadzać dla stopów aluminium analogicznie jak dla stali, przyjmując współczynnik bezpieczeństwa w stosunku do wytrzymałości na rozciąganie $x_r = 4$ (taką wartość współczynnika bezpieczeństwa nakazują stosować np. *przepisy Dozoru Technicznego* [24], obowiązujące w zakresie zbiorników ciśnieniowych, dla wszystkich stopów aluminium w stanie wyżarzonym).

W przypadku braku dokładnych danych doświadczalnych wytrzymałość zmęczeniową Z dla stopów lekkich należy traktować jako odpowiadającą danej liczbie cykli, a więc obliczenia z zasady dotyczyć mogą ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej.

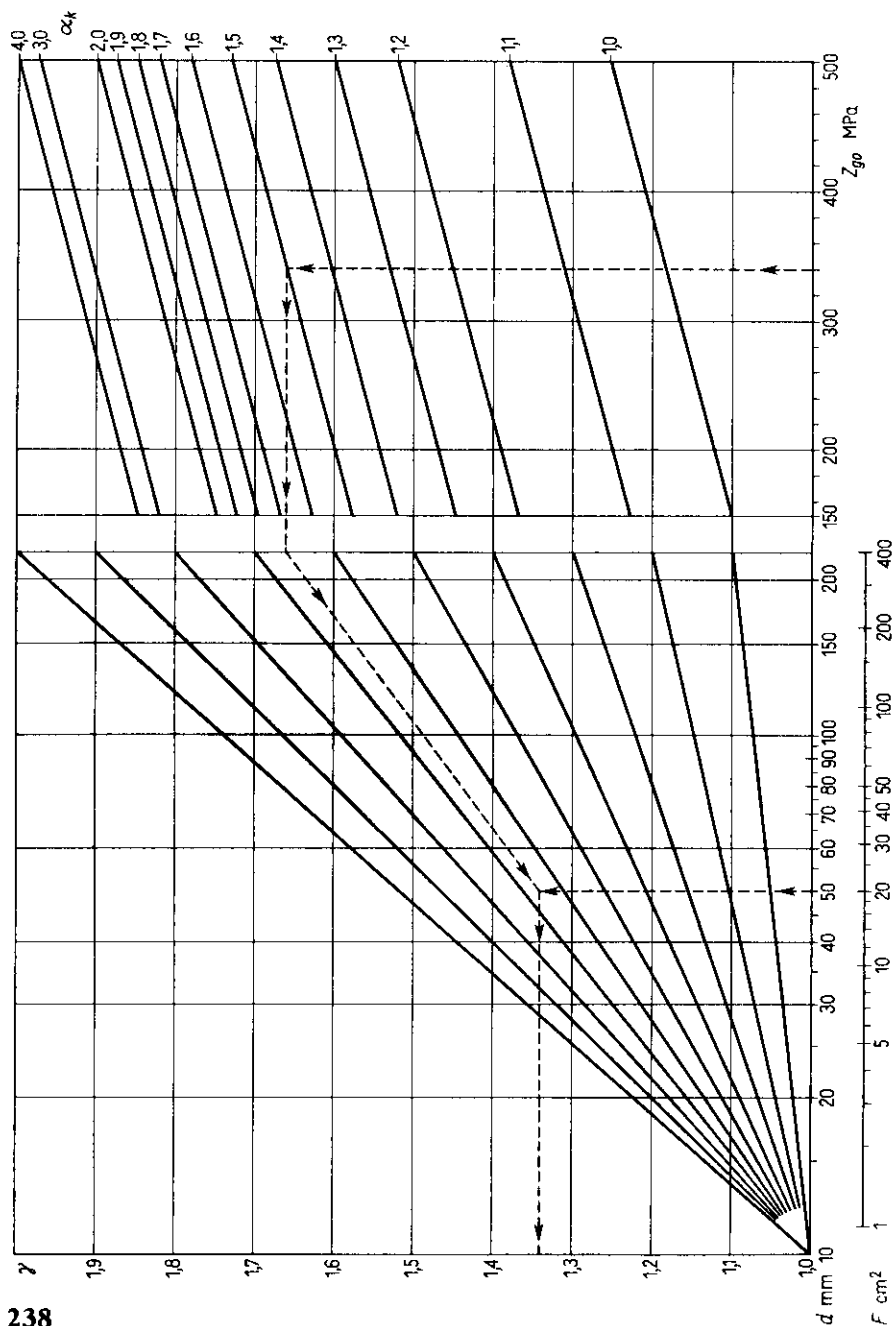
W podwyższonych temperaturach, które dla stopów lekkich zaczynają się od 60°C , obliczenia wytrzymałościowe i zmęczeniowe należy przeprowadzać z uwzględnieniem własności omówionych dokładniej w rozdz. 16.

17.6. Obliczenia zmęczeniowe elementów dźwignic

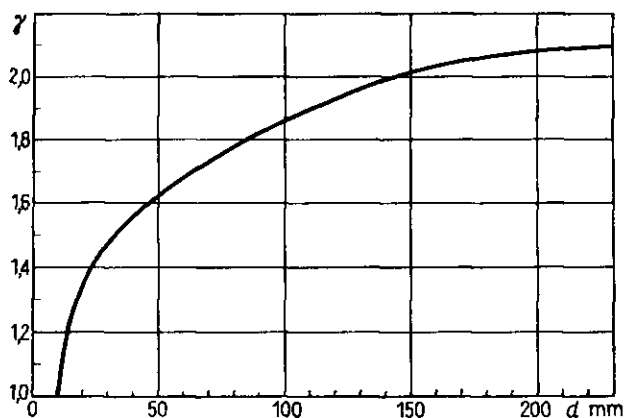
Jak wspomniano w p. 1.7, wydawane ostatnio normy wprowadzają metodę stanów granicznych jako obowiązującą w zakresie obliczeń wytrzymałościowych stalowych konstrukcji budowlanych, dźwignicowych itp. Norma [39], obowiązująca w zakresie stalowych ustrojów dźwignic, wprowadza trzy stany graniczne, w tym stan II dotyczy obliczeń zmęczeniowych. W normie tej podano tok postępowania i pełny zestaw wzorów do obliczeń zmęczeniowych z uwzględnieniem liczby cykli zmian naprężeń, stopnia asymetrii cykli, grup natężenia pracy dźwignic itp. Tak więc obliczenia zmęczeniowe elementów stalowych ustrojów dźwignic należy przeprowadzić na podstawie wzorów podanych w p. 3.3 powyższej normy, stanowiących praktyczne zastosowanie ogólnych metod i wzorów zmęczeniowych omówionych w p. 17.1÷17.4.

18. Wykresy stosowane w obliczeniach zmęczeniowych

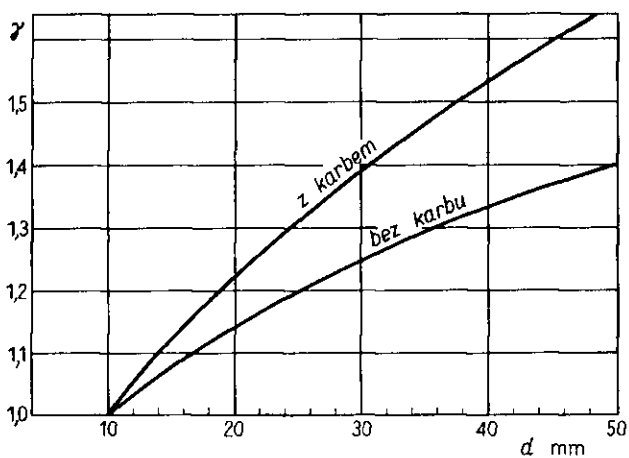
18.1. Współczynniki wielkości przedmiotu γ



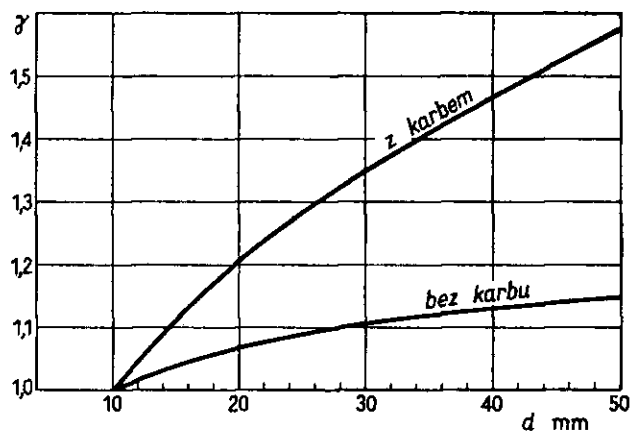
Rys. 18.1. Współczynnik wielkości przedmiotu γ dla elementów stalowych. Przykład: dla $Z_{g0} = 340$ MPa, $\alpha_k = 1,5$ oraz $d = 50$ mm odczytujemy $\gamma = 1,34$ (wg [14])



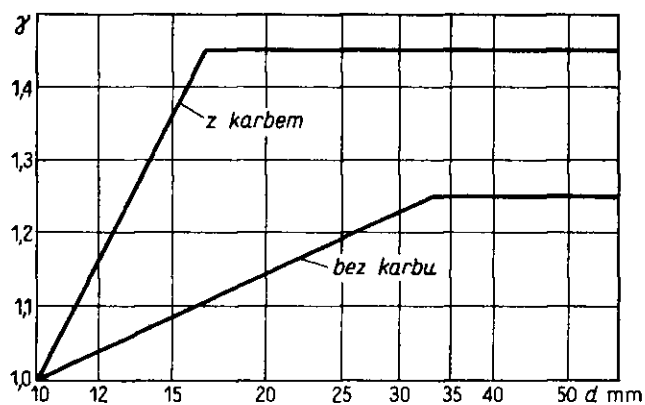
Rys. 18.2. Współczynnik wielkości przedmiotu γ dla zginanych części wykonanych ze staliwa



Rys. 18.3. Współczynnik wielkości przedmiotu γ dla zginanych elementów żeliwnych

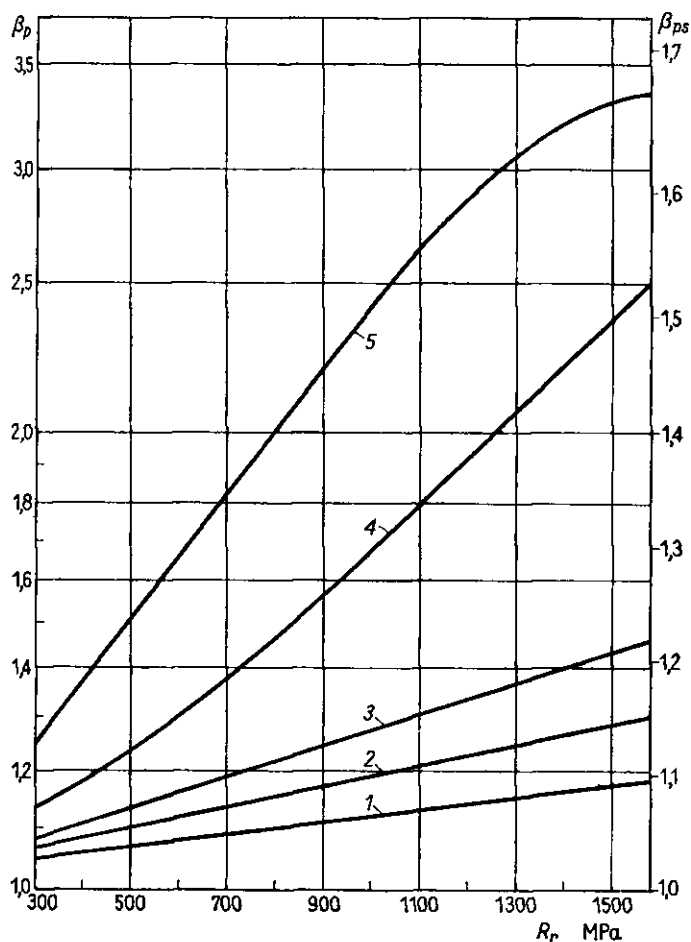


Rys. 18.4. Współczynnik wielkości przedmiotu γ dla skręcanych elementów żeliwnych

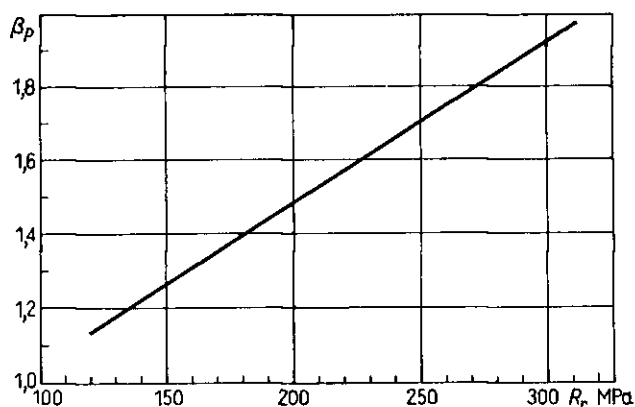


Rys. 18.5. Współczynnik wielkości przedmiotu γ przy skręcaniu i zginaniu elementów wykonanych ze stopów lekkich

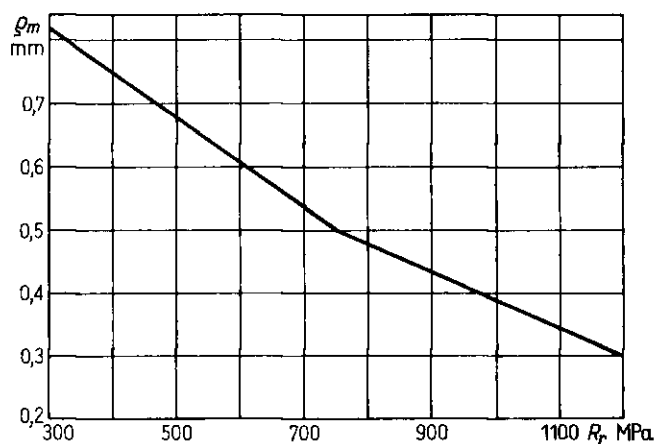
18.2. Współczynniki stanu powierzchni β_p , wrażliwości η oraz promienie minimalne ρ_m



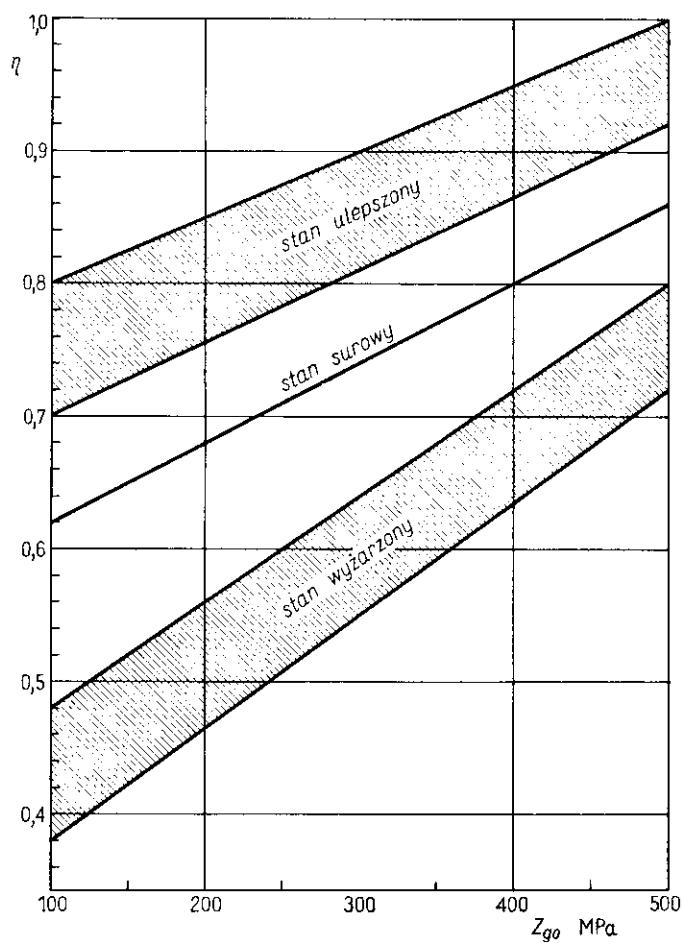
Rys. 18.6. Współczynnik stanu powierzchni dla stalowych części rozciąganych i zginanych β_p oraz skręcanych β_{ps} , 1 – obróbka szlifowaniem ($\sqrt[0,32]{}$), 2 – staranne toczenie ($\sqrt[2,5]{}$ ÷ $\sqrt[1,25]{}$), 3 – zwykłe toczenie ($\sqrt[10]{}$ ÷ $\sqrt[5]{}$), 4 – ostry karb o kącie rozwarcia 60° i głębokości 0,1 mm na próbce o średnicy $\varnothing 7,5$ mm, 5 – część pokryta naskórkierem walcowniczym



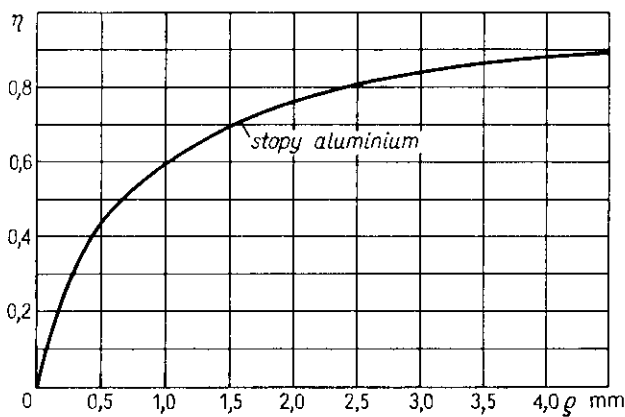
Rys. 18.7. Współczynnik stanu powierzchni β_p dla części z żeliwa szarego, pokrytych naskórką odlawniczym



Rys. 18.8. Promień minimalny graniczny ρ_m dla stali konstrukcyjnych

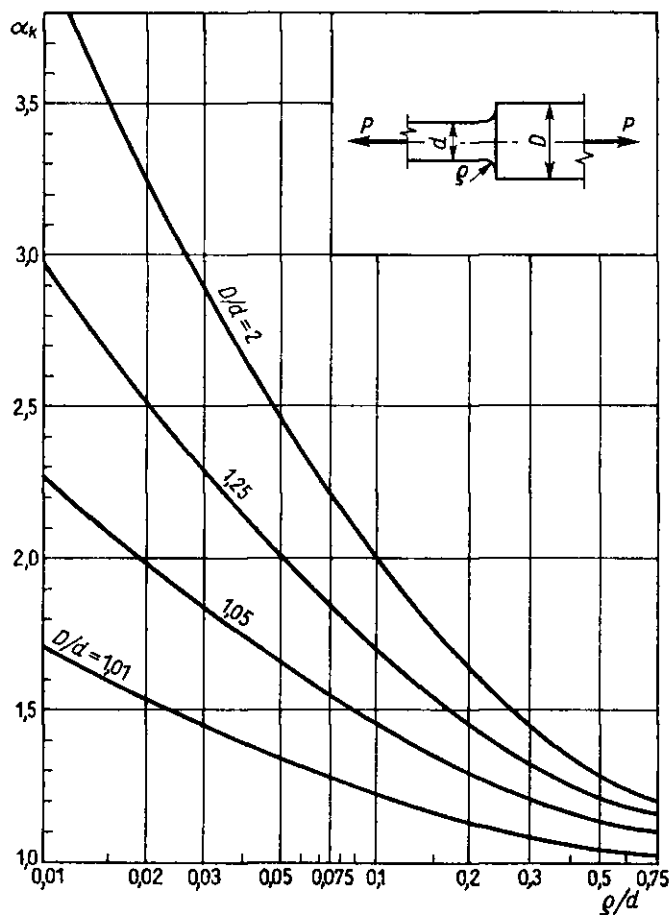


Rys. 18.9. Współczynnik wrażliwości na działanie karbu η dla stali konstrukcyjnych

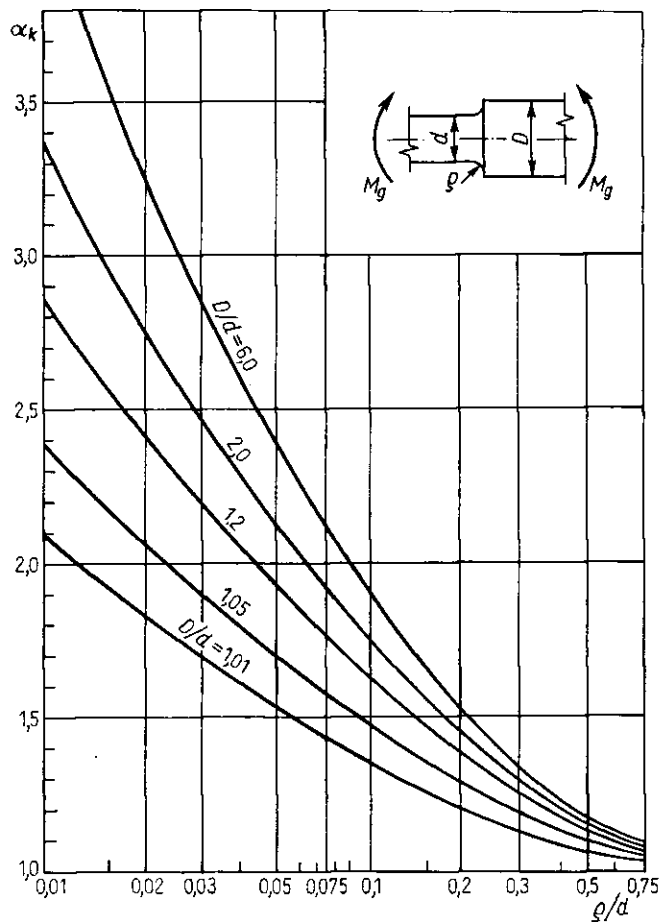


Rys. 18.10. Współczynnik wrażliwości η dla stopów aluminium

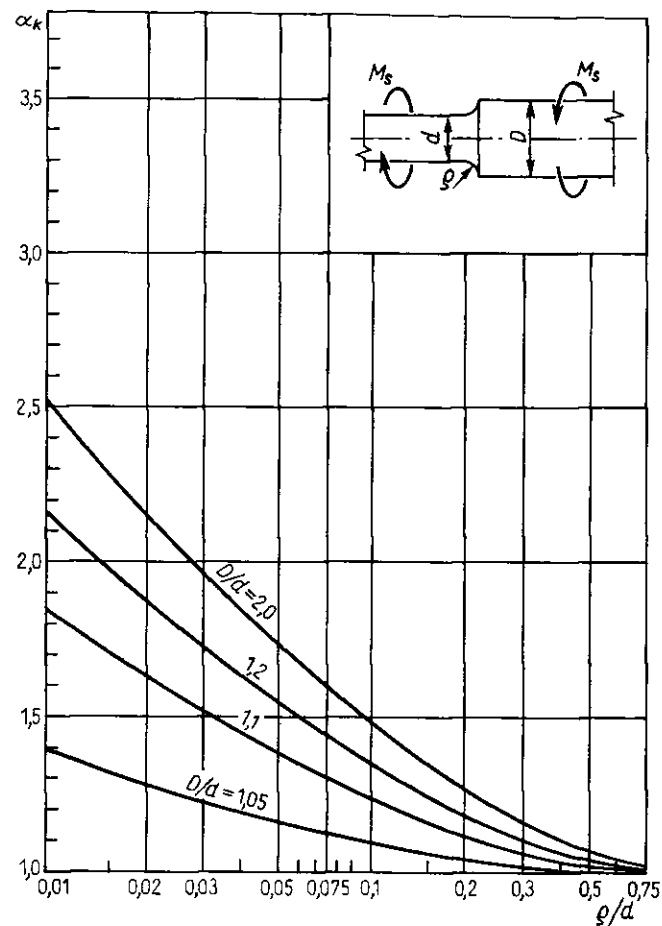
18.3. Współczynniki kształtu α_k dla prętów okrągłych (wałów) pełnych



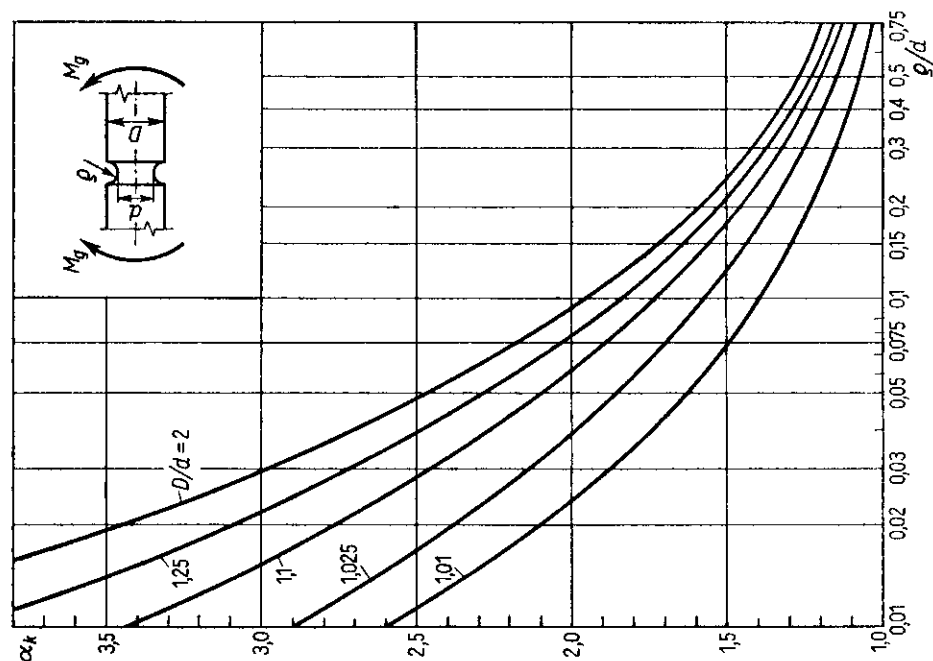
Rys. 18.11. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu próbki okrągłej z odsadzeniem



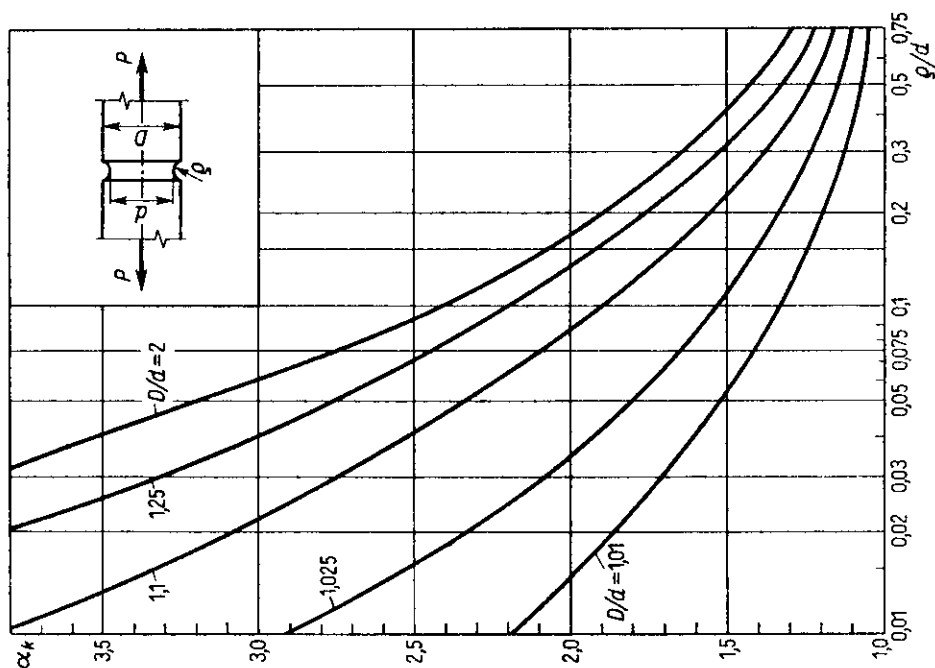
Rys. 18.12. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z odsadzeniem



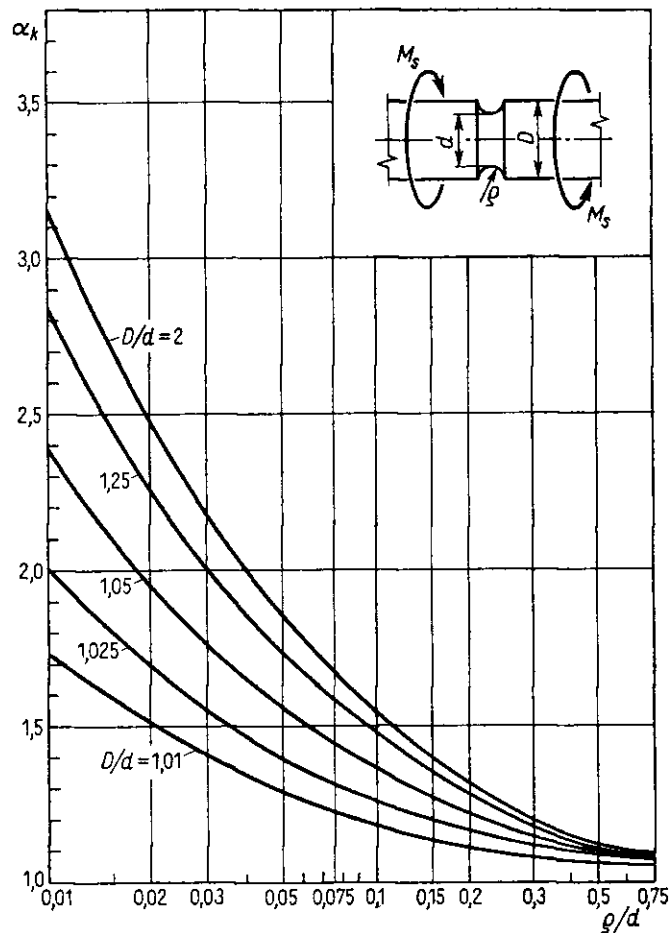
Rys. 18.13. Współczynnik kształtu α_k przy skręcaniu próbki okrągłej z odsadzeniem



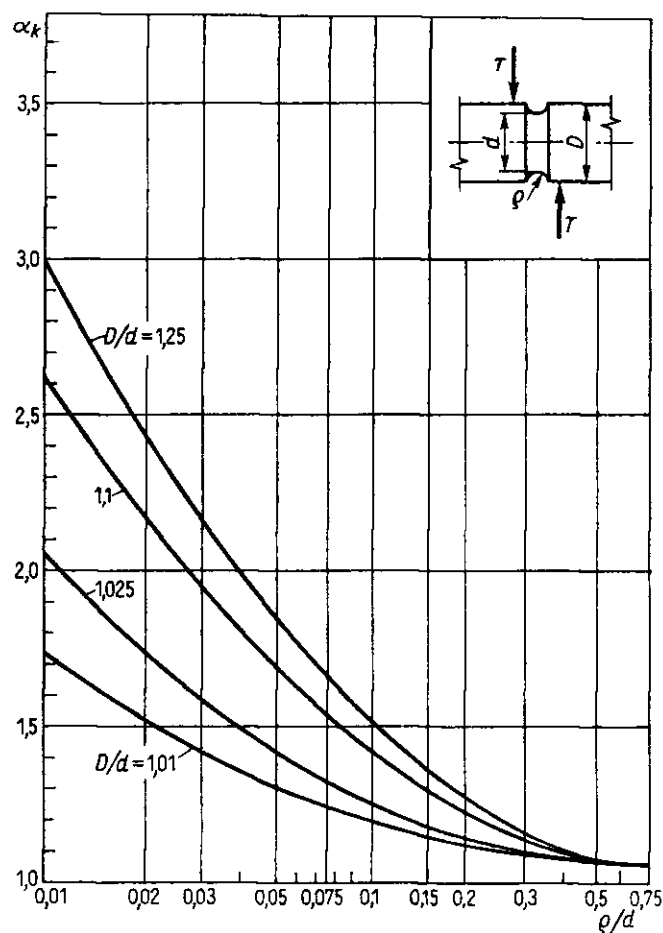
Rys. 18.15. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z karkbem obrączkowym



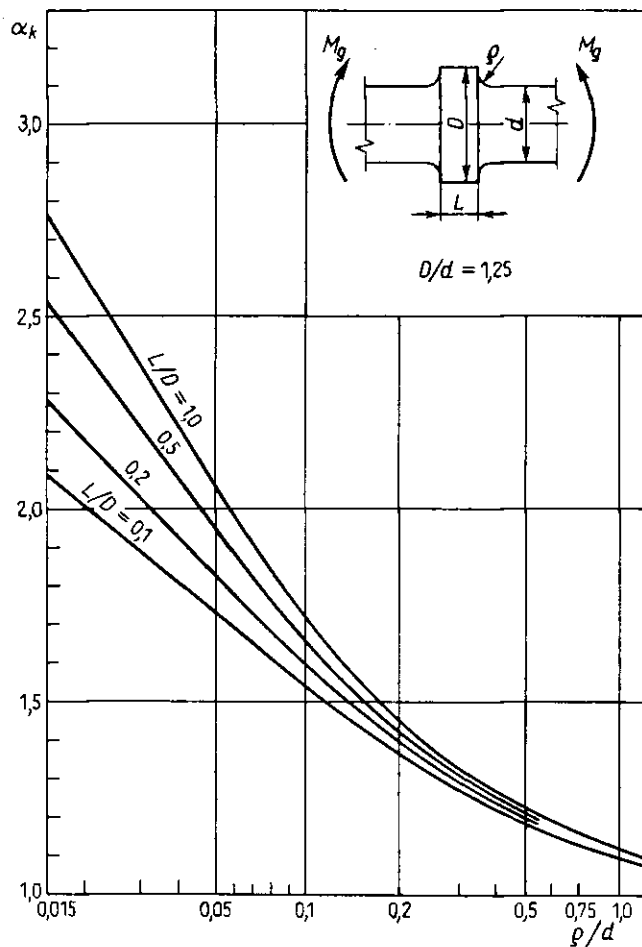
Rys. 18.14. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu próbki okrągłej z karkbem obrączkowym



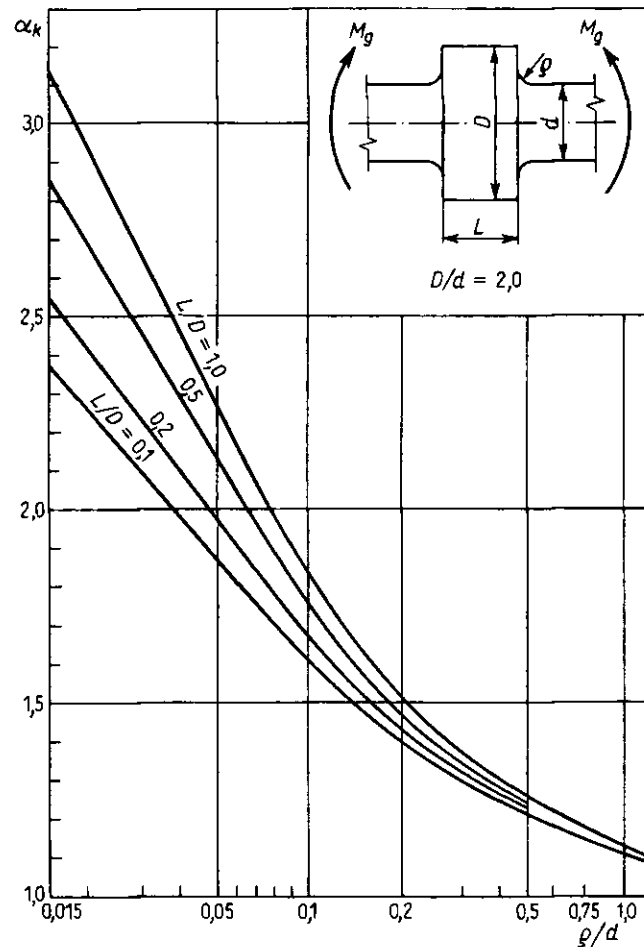
Rys. 18.16. Współczynnik kształtu α_k przy skręcaniu próbki okrągłej z karbem obrączkowym



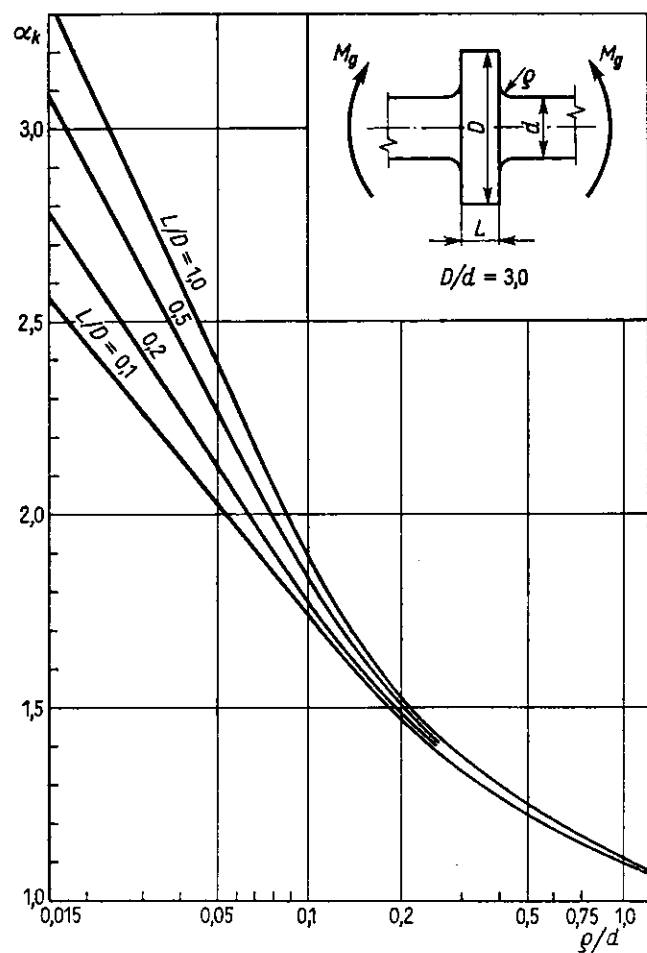
Rys. 18.17. Współczynnik kształtu α_k przy ścinaniu próbki okrągłej z karbem obrączkowym



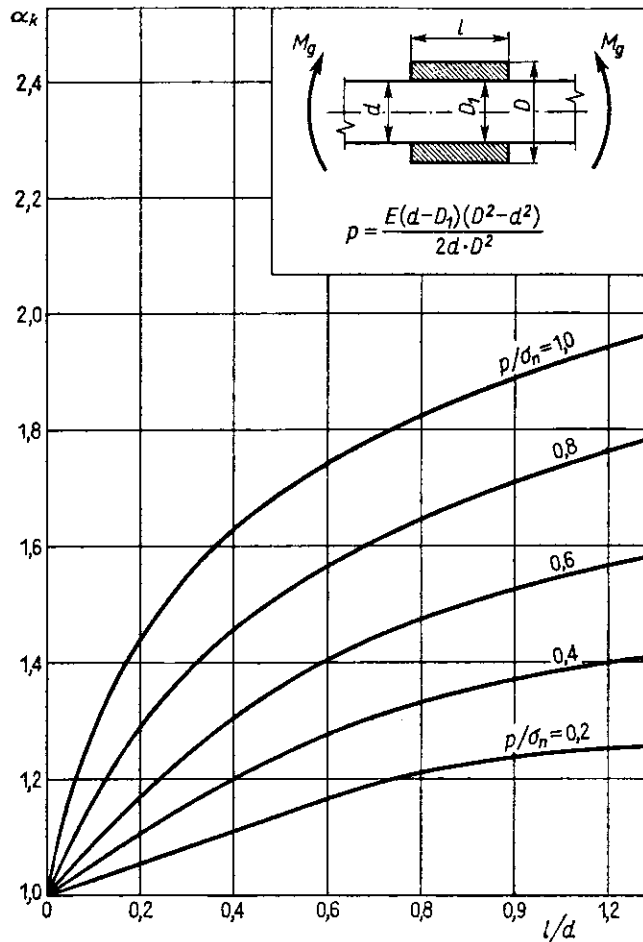
Rys. 18.18. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z podwójnym odsadzeniem o stosunku $D/d = 1,25$



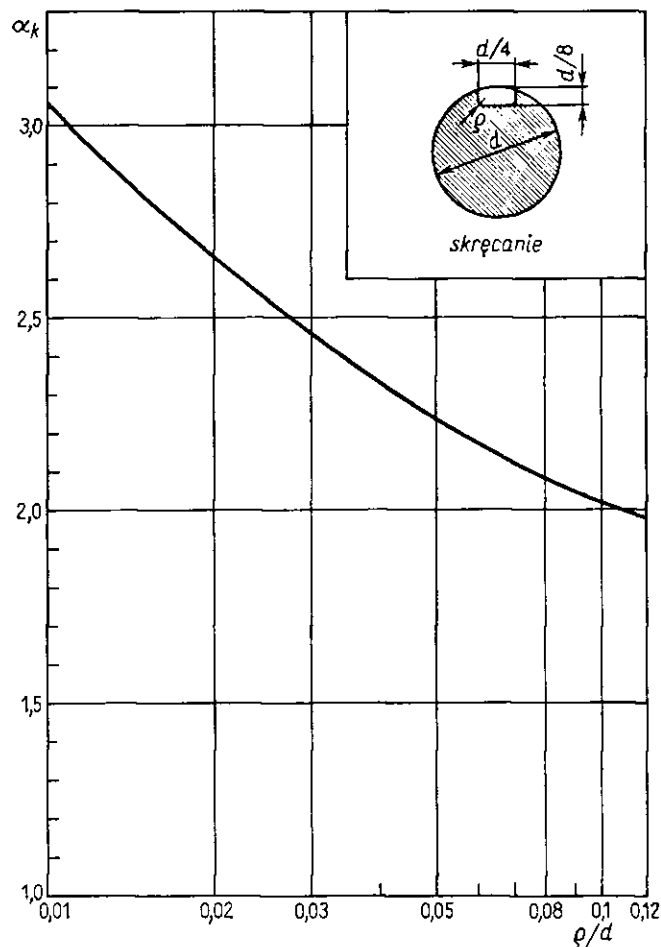
Rys. 18.19. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z podwójnym odsadzeniem o stosunku $D/d = 2,0$



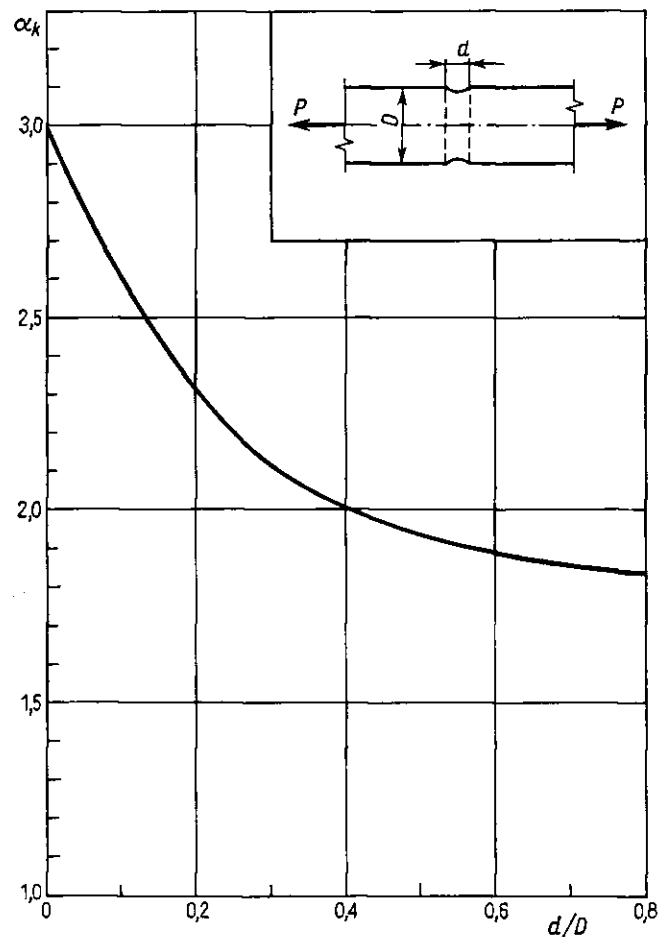
Rys. 18.20. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z podwójnym odsadzeniem o stosunku $D/d = 3,0$



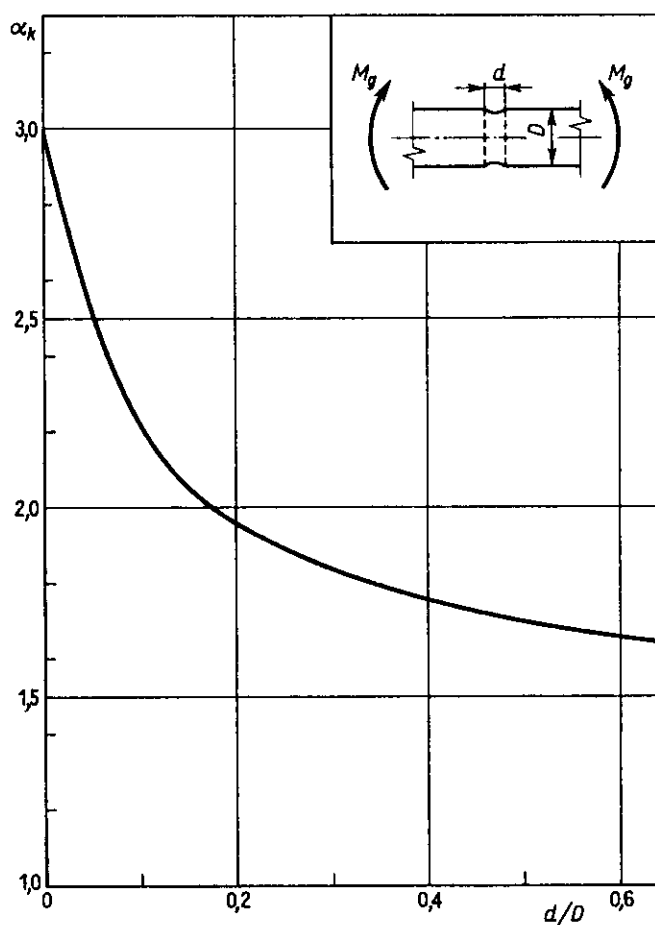
Rys. 18.21. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z odsadzoną tuleją z naciskiem p ; D_1 – średnica wewnętrzna tulei przed montażem



Rys. 18.22. Współczynnik kształtu α_k przy skręcaniu okrągłego wału z rowkiem wpustowym

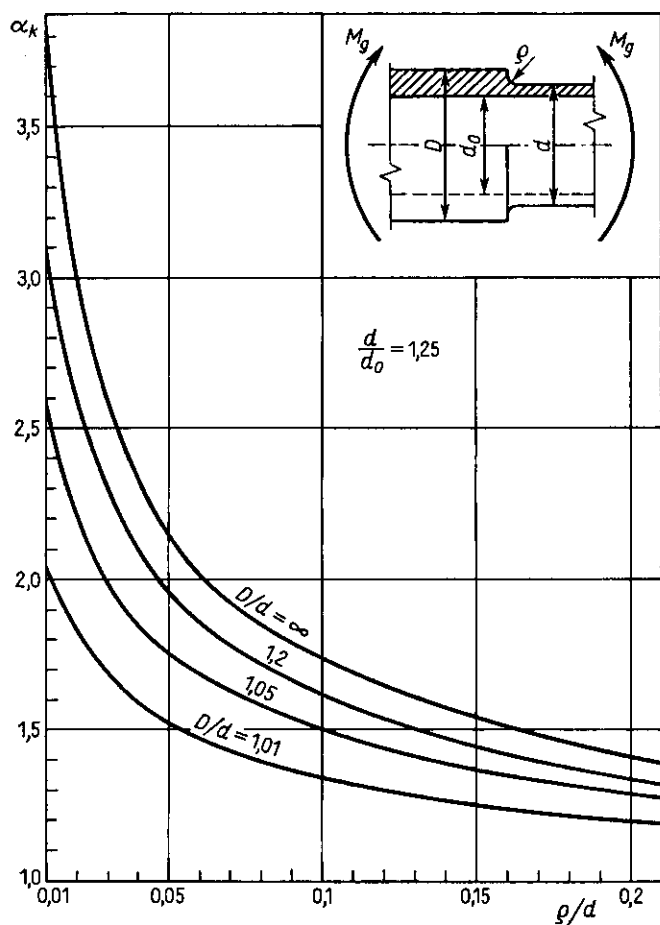


Rys. 18.23. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu próbki okrągłej z poprzecznym otworem

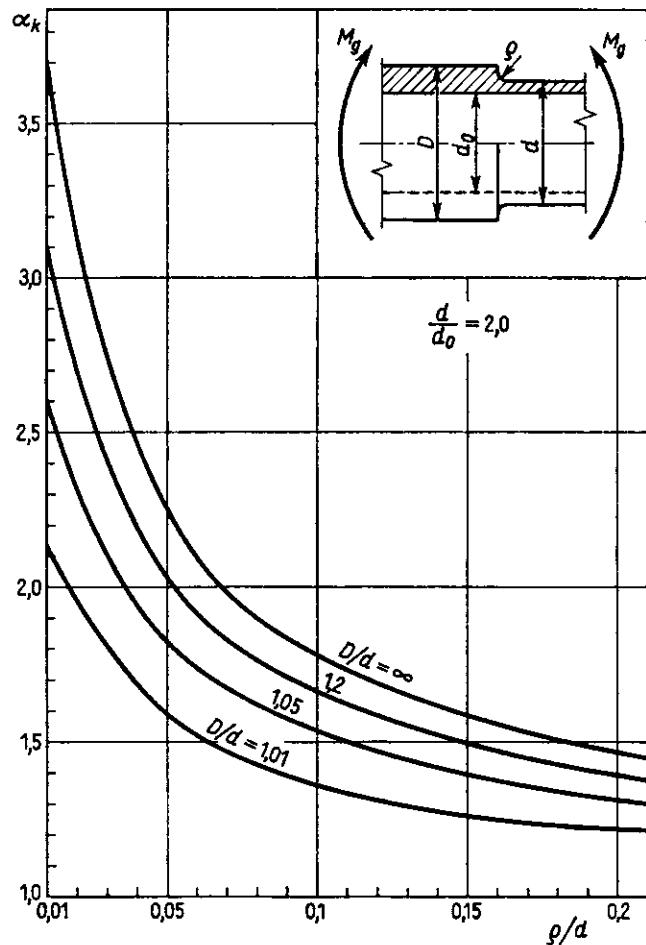


Rys. 18.24. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej z poprzecznym otworem

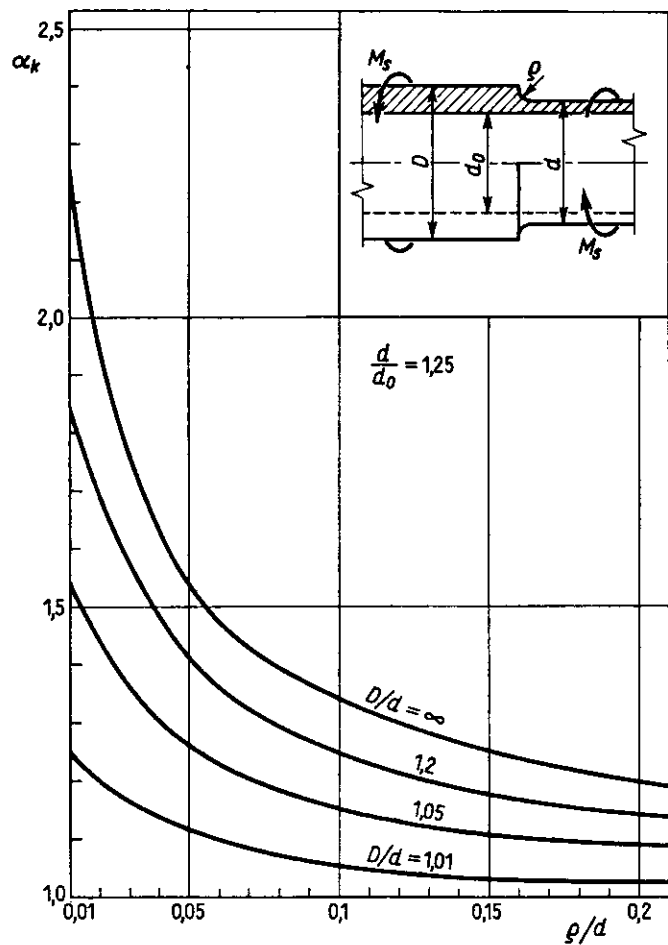
18.4. Współczynniki kształtu α_k dla wałów wydrążonych



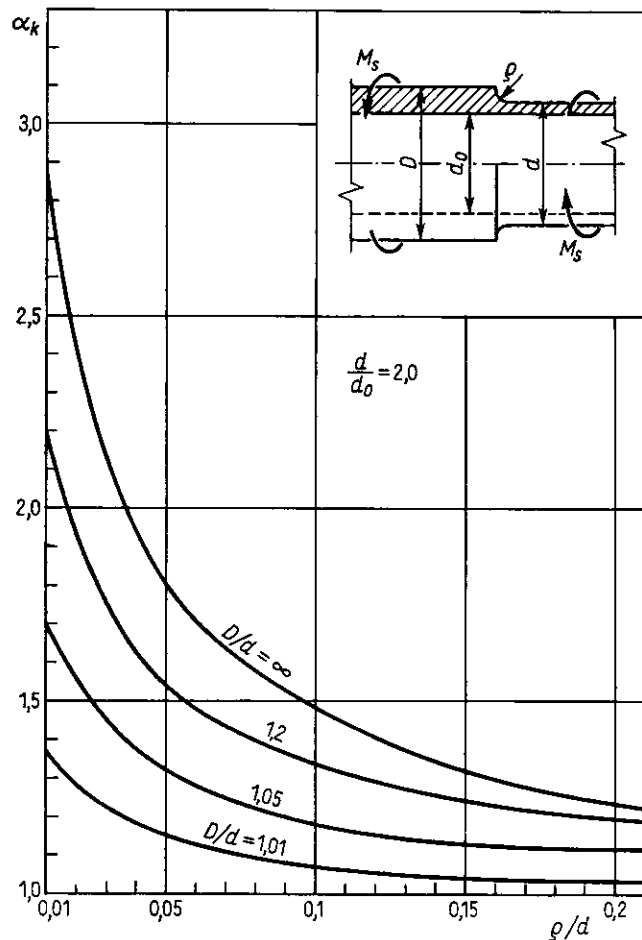
Rys. 18.25. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej wydrążonej z odsadzeniem o stosunku $d/d_0 = 1,25$



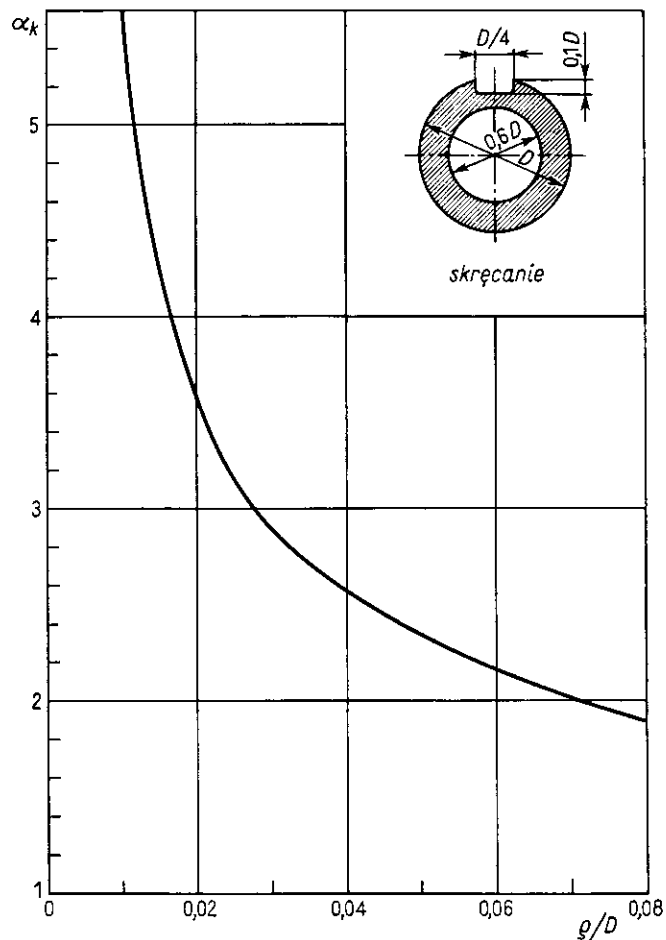
Rys. 18.26. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu próbki okrągłej wydrążonej z odsadzeniem o stosunku $d/d_0 = 2.0$



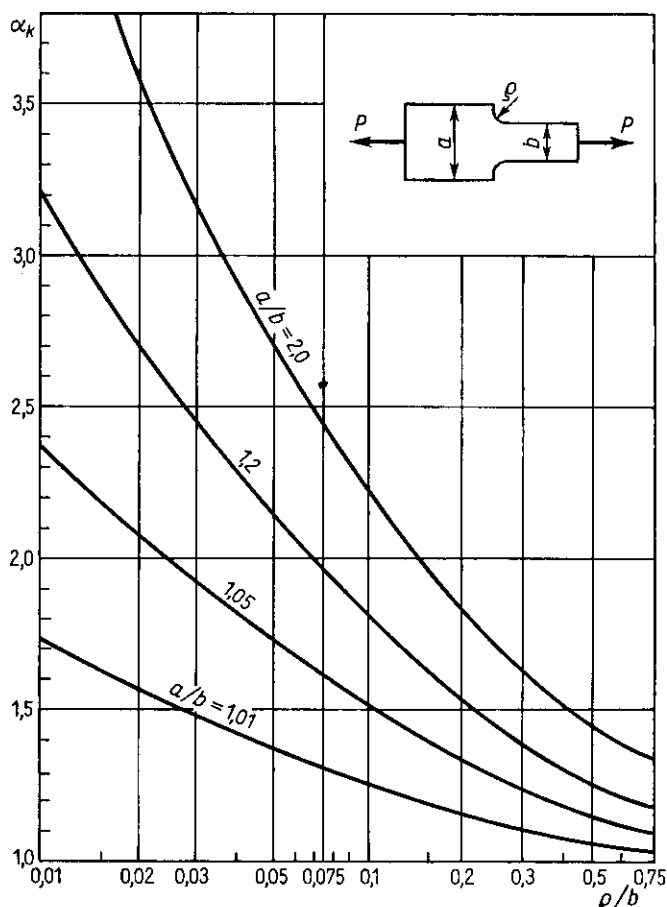
Rys. 18.27. Współczynnik kształtu α_k przy skręcaniu próbki okrągłej wydrążonej z odsadzeniem o stosunku $d/d_0 = 1.25$



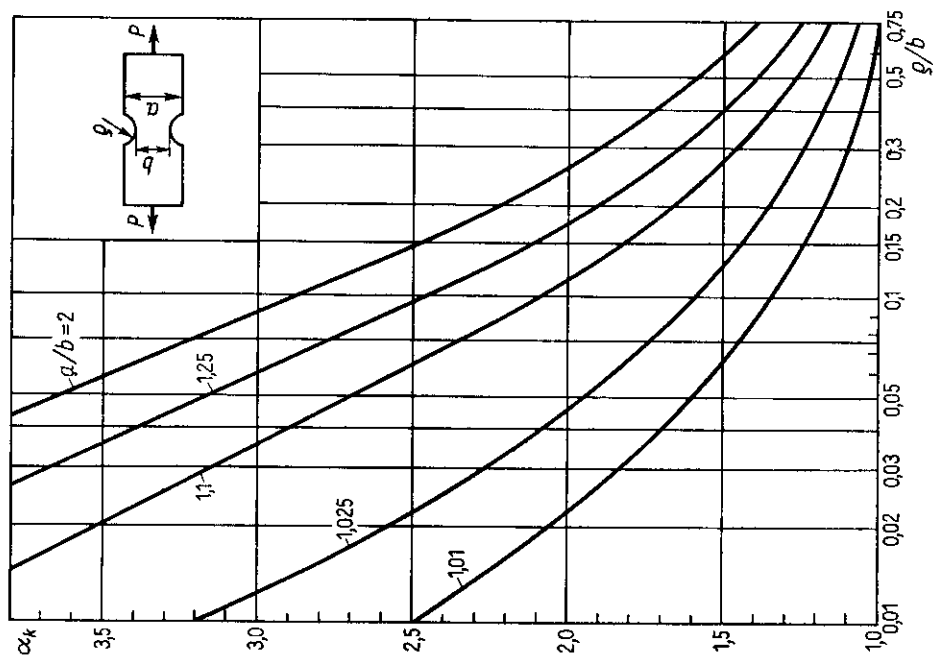
Rys. 18.28. Współczynnik kształtu α_k przy skręcaniu próbki okrągłej wydrążonej z odsadzeniem o stosunku $d/d_0 = 2,0$



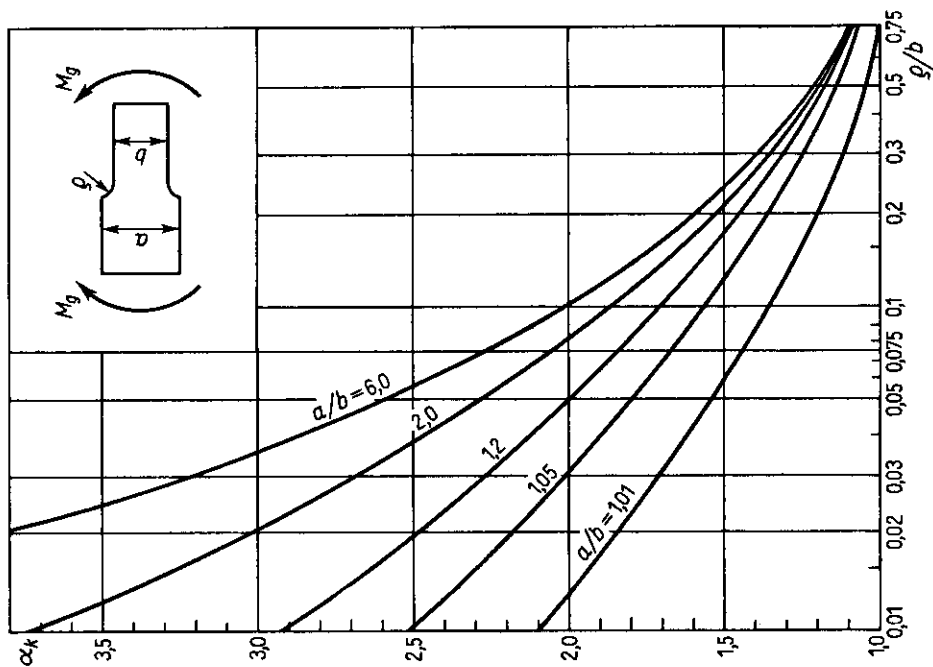
Rys. 18.29. Współczynnik kształtu α_k przy skręcaniu wydrążonego okrągłego wału z rowkiem wpustowym

18.5. Współczynniki kształtu α_k dla płaskowników

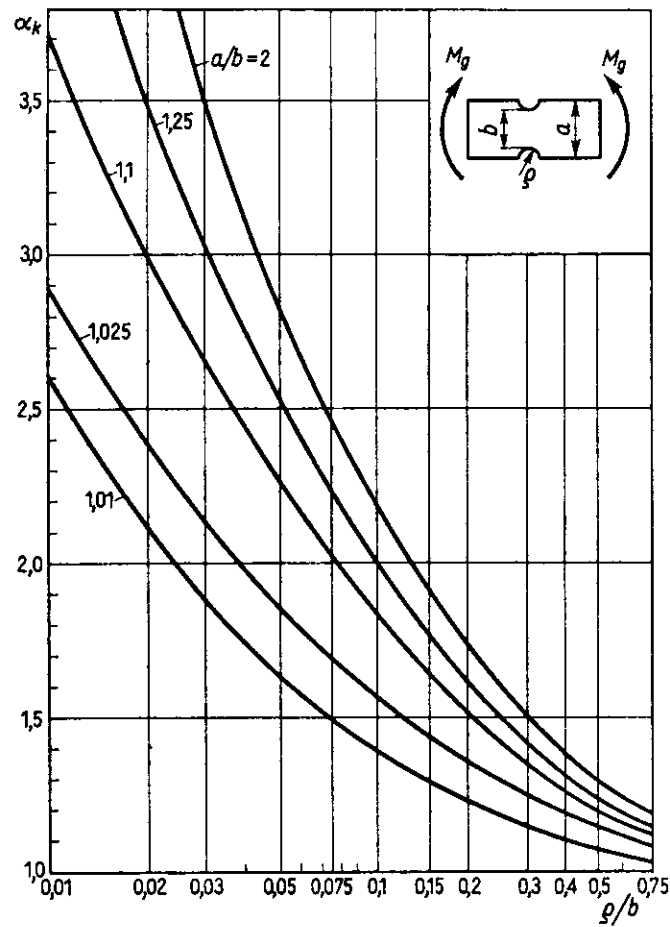
Rys. 18.30. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płaskiej próbki z dwustronnym symetrycznym odsadzeniem



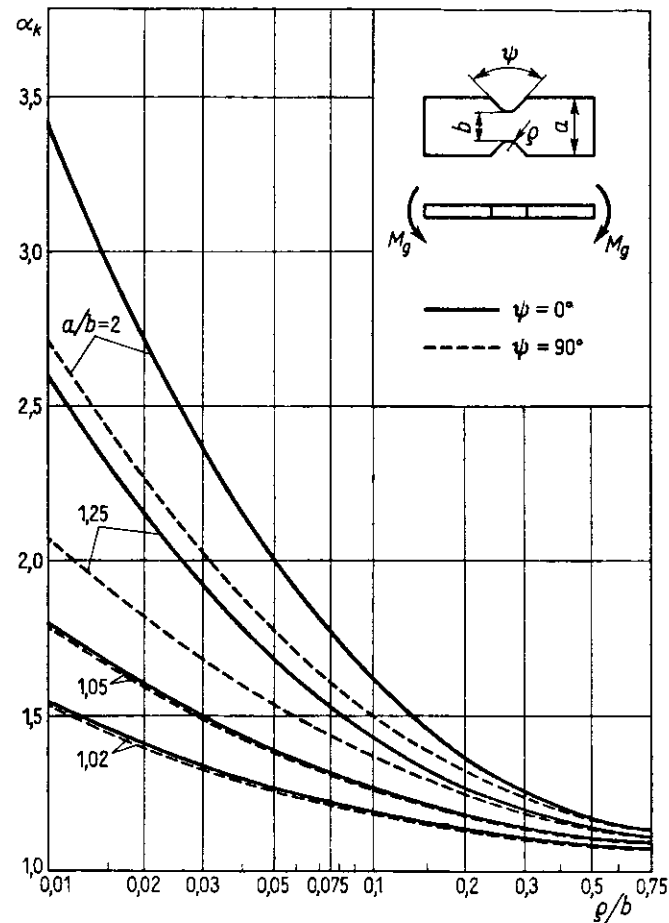
Rys. 18.32. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płaskiej próbki z dwustronnym karbem symetrycznym



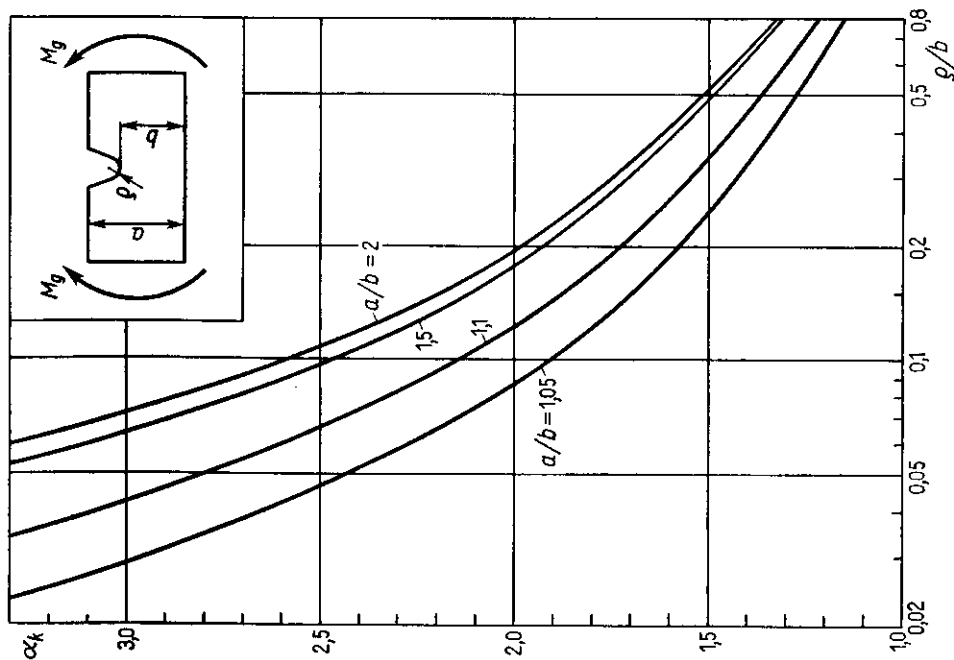
Rys. 18.31. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z dwustronnym symetrycznym odsadzeniem



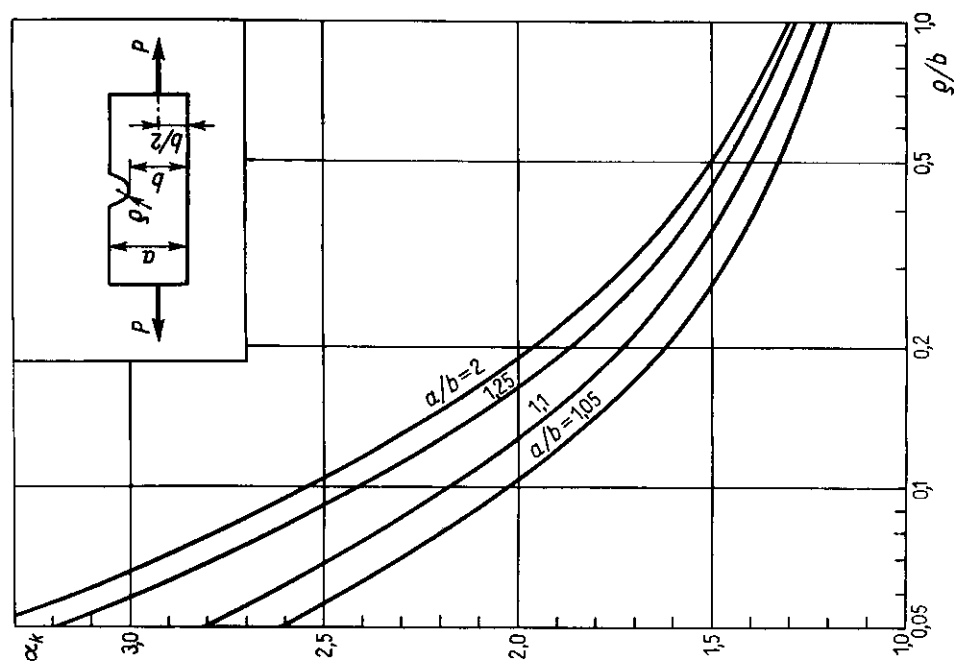
Rys. 18.33. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z dwustronnym karbem symetrycznym, w płaszczyźnie próbki



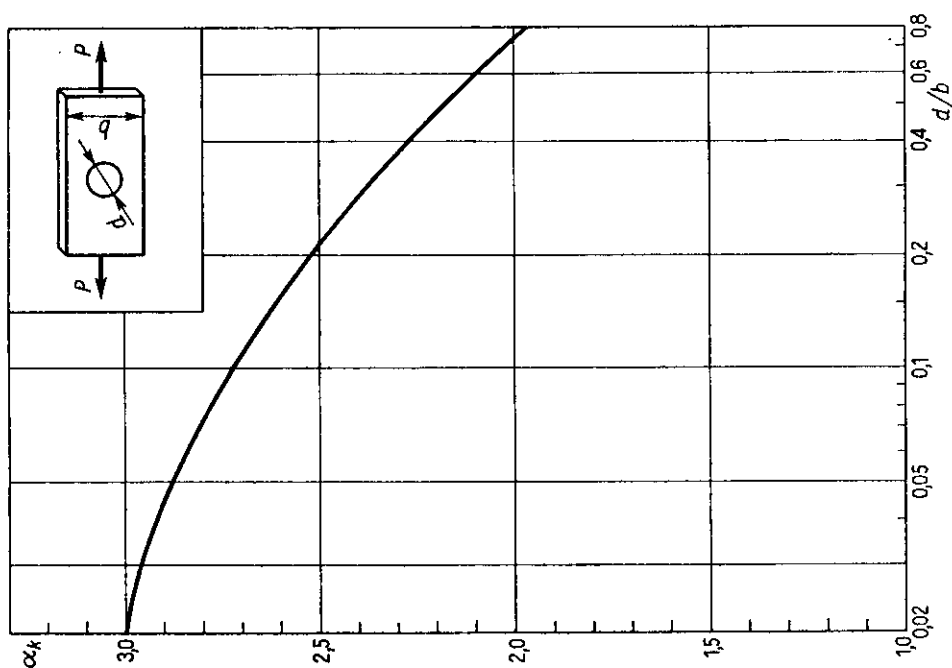
Rys. 18.34. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z dwustronnym karbem symetrycznym, w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny próbki



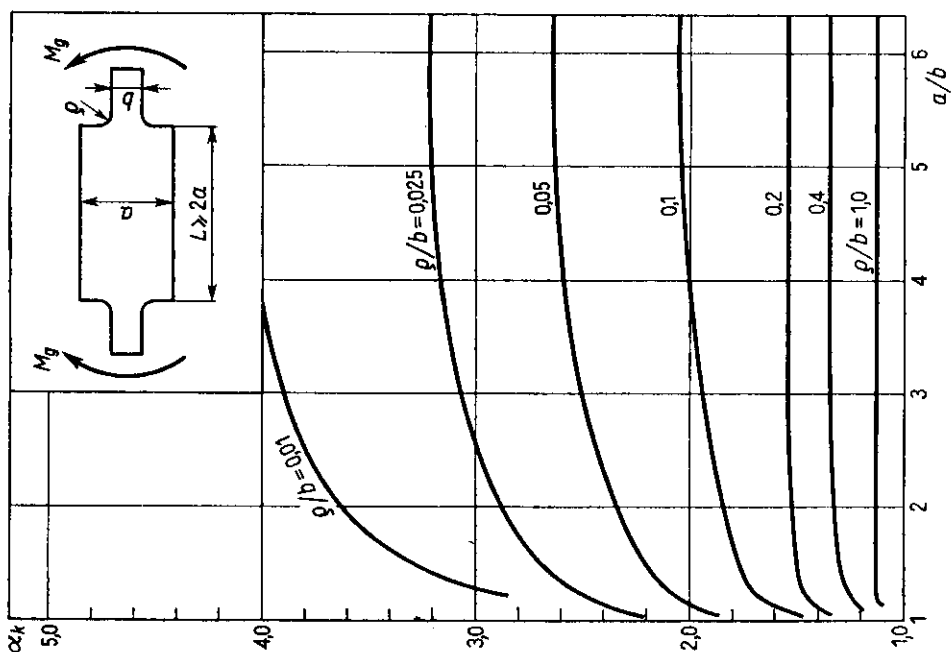
Rys. 18.36. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z jednostronnym karbem



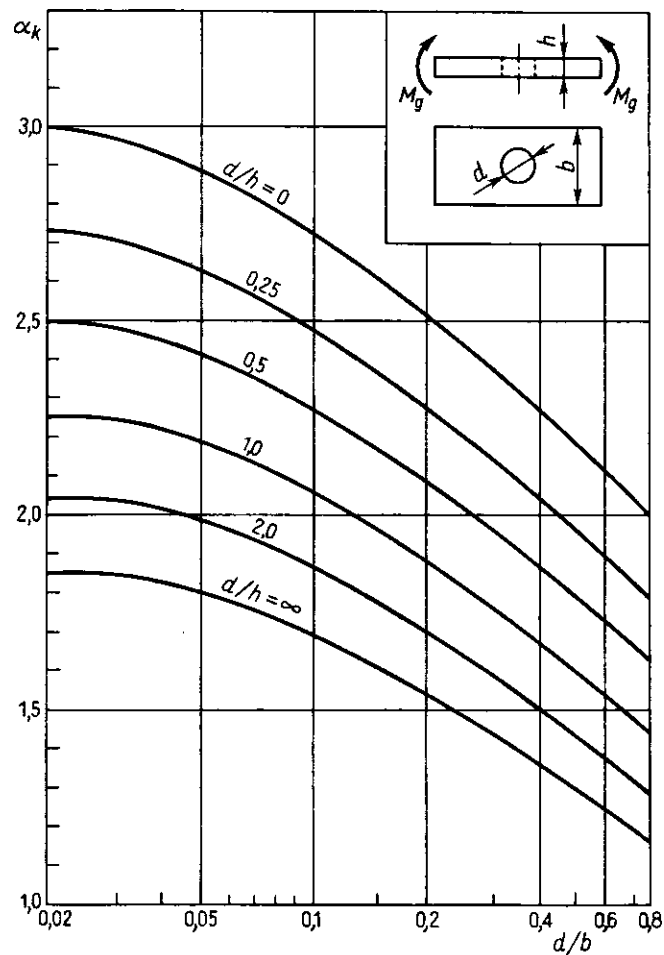
Rys. 18.35. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płaskiej próbki z jednostronnym karbem



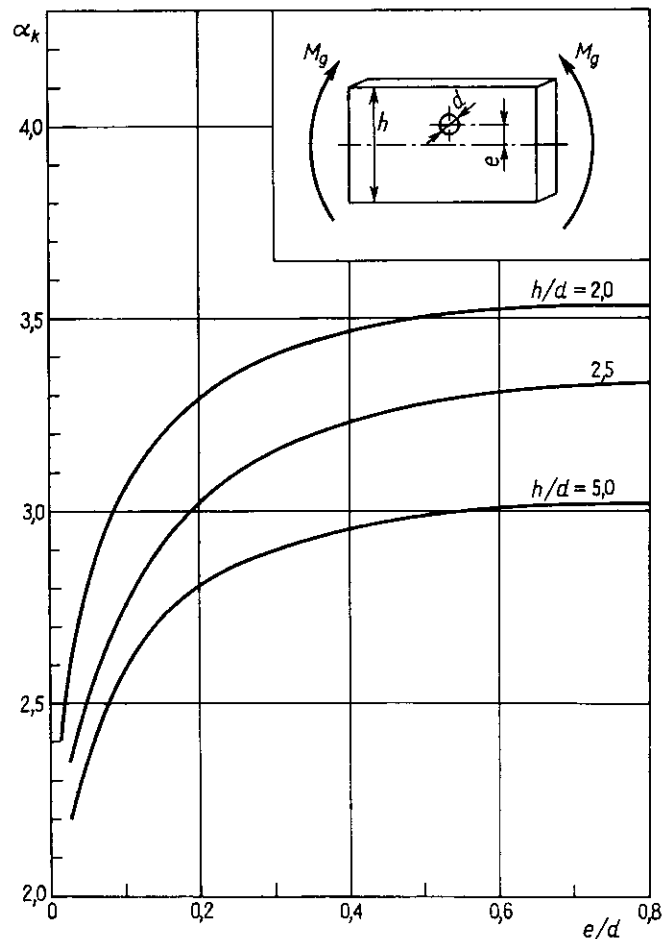
Rys. 18.38. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płaskiej próbki z otworem



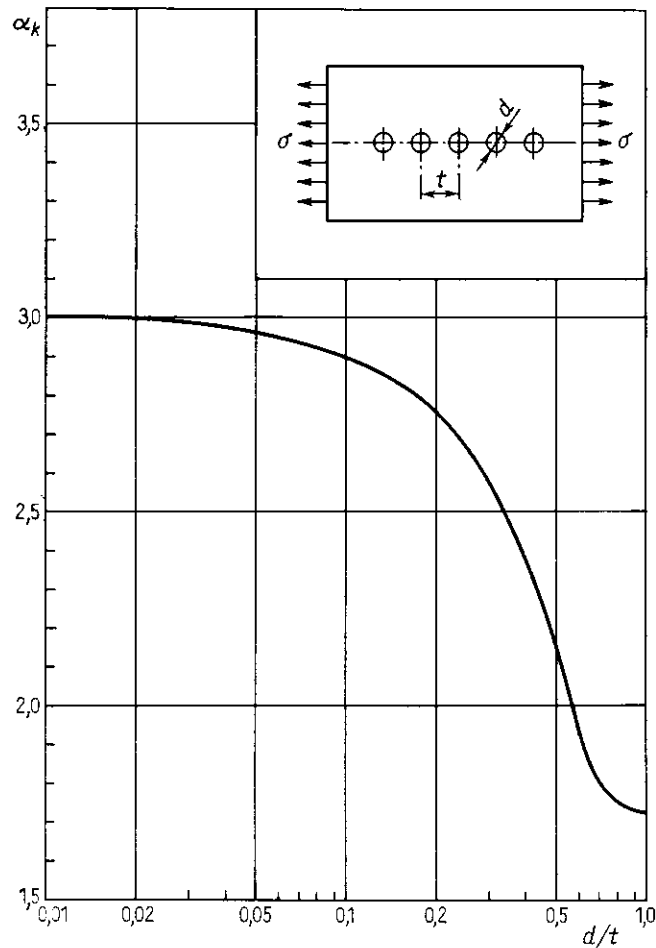
Rys. 18.37. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z podwójnym obustronnym odsadzeniem



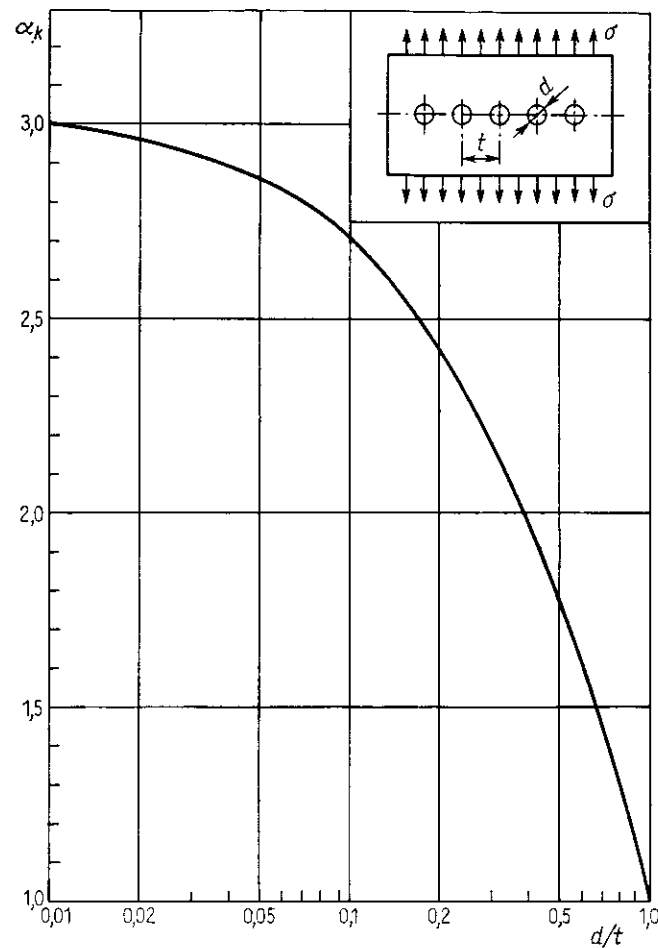
Rys. 18.39. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z otworem (oś otworu w płaszczyźnie zginania)



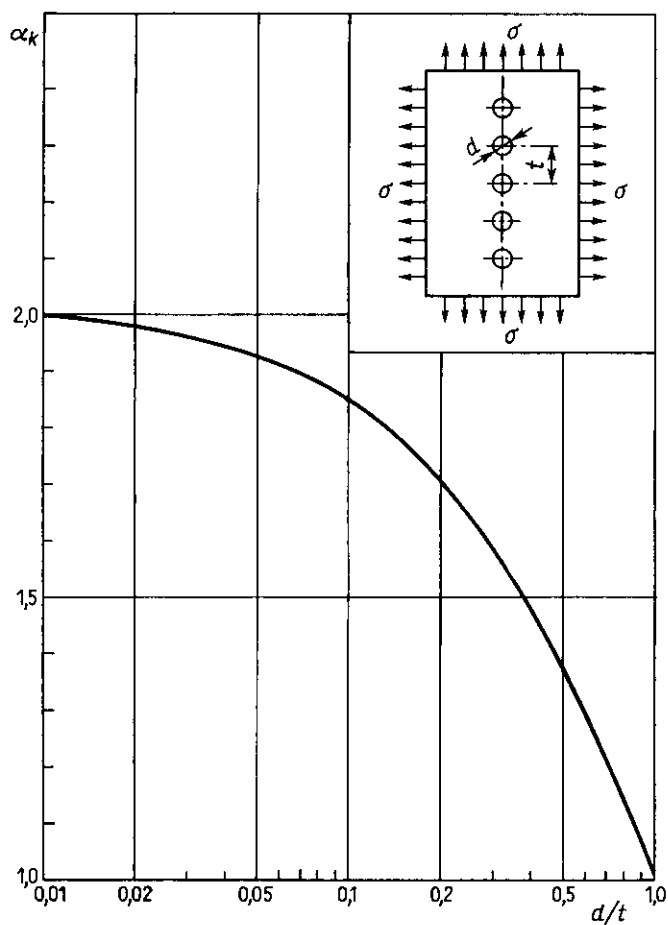
Rys. 18.40. Współczynnik kształtu α_k przy zginaniu płaskiej próbki z mimośrodkowym otworem (oś otworu prostopadła do płaszczyzny zginania)



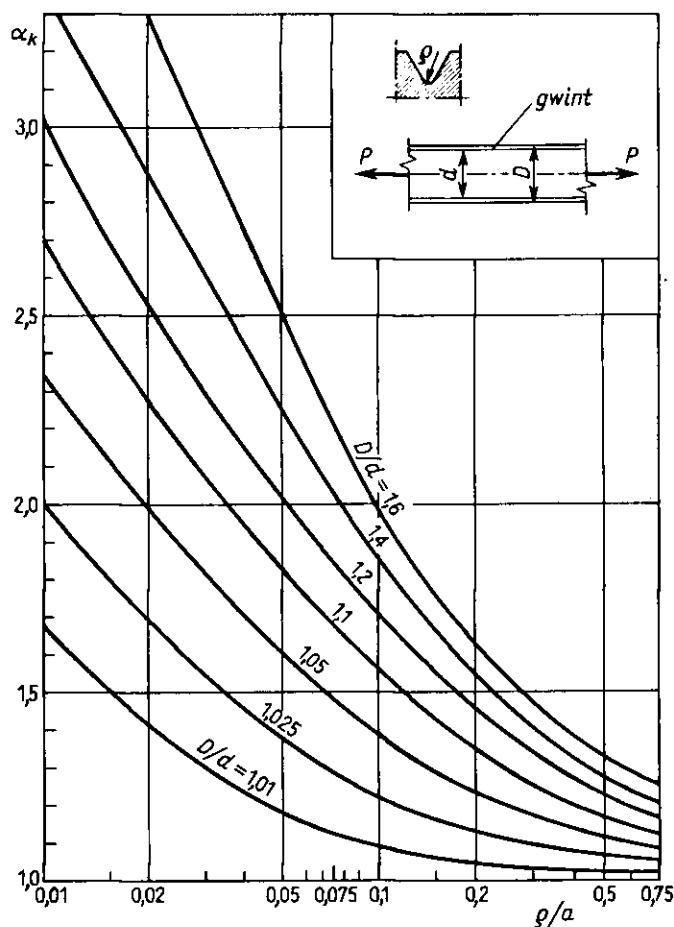
Rys. 18.41. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płyty z wieloma otworami szeregowymi



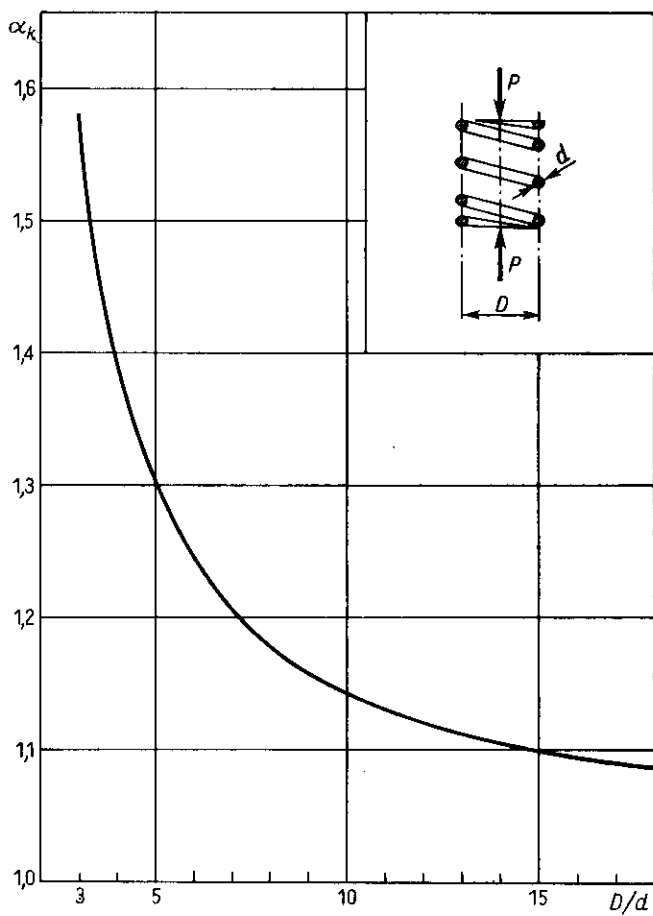
Rys. 18.42. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu płyty z wieloma otworami równoległymi



Rys. 18.43. Współczynnik kształtu α_k przy dwuosiowym rozciąganiu płyty z wieloma otworami

18.6. Współczynniki kształtu α_k dla gwintów i sprężyn

Rys. 18.44. Współczynnik kształtu α_k przy rozciąganiu próbki gwintowanej (gwint metryczny, całowy, rurowy, trapezowy, niesymetryczny, okrągły)



Rys. 18.45. Współczynnik kształtu α_k dla sprężyn śrubowych

Część trzecia

Tablice stosowane do obliczeń wytrzymałościowych

19. Tablice własności fizycznych i wytrzymałościowych materiałów

Uwagi i objaśnienia ogólne do tablic 19.1÷19.14 dotyczących własności wytrzymałościowych stali

W tablicach podano orientacyjne wartości składów chemicznych i własności wytrzymałościowych materiałów. Dane te można wykorzystać w obliczeniach wstępnych korygowanych następnie przez zastosowanie odpowiednich norm lub przepisów, jeżeli takie istnieją i obowiązują w danej dziedzinie zastosowań (np. [24], [38], [39]).

W przypadku gdy dla danej stali wytrzymałość zmęczeniowa przy cyklach jednostronnych Z_j jest większa od granicy plastyczności Q , wartość Z_j może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych (np. wykresów Smitha) lub może być podstawiana do odpowiednich wzorów obliczeniowych (np. do wzorów (17.18)÷(17.20)) przy obliczaniu zmęczeniowego współczynnika bezpieczeństwa.

Wartość $Z_j > Q$ nie może być wykorzystana na przykład do bezpośredniego obliczania naprężeń dopuszczalnych przy cyklach jednostronnych, jeżeli nie dopuszcza się powstania odkształceń plastycznych.

W tablicach podano naprężenia dopuszczalne na rozciąganie. Dla innych przypadków obciążeń można przyjmować dla stali:

- naprężenia dopuszczalne na zginanie: $k_g = k_r$,
- naprężenia dopuszczalne na skręcanie i ściskanie: $k_s = 0,6k_r$.

Górne wartości naprężeń dopuszczalnych należy stosować dla dokładnie ustalonych obciążeń i elementów o grubości do 16 mm, gładkich, bez karbów, starannie wykonanych, niezagrażających – w razie zerwania – zniszczeniem maszyny lub wypadkiem.

Dolne wartości naprężeń dopuszczalnych należy stosować dla elementów o większych wymiarach, normalnej gładkości i o umiarkowanym działaniu karbu.

Tablica 19.1. Własności wytrzymałościowe i fizyczne niektórych stali i żeliw

Materiał	Oznaczenie wg PN	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa		Granica plastyczności R_s (Q_s) MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarowość U daJ/cm ² (orientacyjnie)
			min	max			
Stal konstrukcyjna węglowa	St0	< 0,23 C	320	550	190	22	
	St1	0,11 C	320	400	200	33	
	St2	0,12 C	340	420	210	31	
	St3	0,18 C	380	470	220	25	
	St4	0,24 C	420	520	250	23	
	St5	0,32 C	500	620	290	19	
	St6	0,45 C	600	720	330	14	
	St7	0,56 C	700	850	360	10	
Stal sprężynowa	45S	0,45 C; 1,8 Si	1200		1000	6	
	70S	0,7 C; 1,8 Si	1800		1600	5	
Stal nierdzewna	2H13	13 Cr, 0,6 Ni	720		520	24	
Żeliwa szare	Z1150	3,4 C; 2 Si	150			0	
	Z1200	3,4 C; 2 Si	200			0	
	Z1250	3,4 C; 2 Si	250			0	
	Z1300	3,4 C; 2 Si	300			0	
	Z1400	3,4 C; 2 Si	400			0	
Żeliwo sferoidalne	ZsP45	3,4 C; 2 Si	450			2	
	ZsF05	3,4 C; 2 Si	400	500		5	
Staliwo węglowe	L150	0,15 C	400		200	24	5
	L250	0,25 C	450		240	19	4
	L400	0,40 C	530		300	14	3
	L550	0,55 C	600		350	10	2,5

(1) Wartość średnią modułu Younga żeliw podano dla naprężeń 0÷50 MPa.

Wytrzymałość zmęczeniowa Z_{go} MPa (orientacyjnie)	Twardość Brinella HB (orientacyjnie)	Moduł Younga E $\times 10^5$ MPa	Moduł sprężystości postaciowej G $\times 10^4$ MPa	Liczba Poissona ν	Współczynnik rozszerzalności liniowej α $\times 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$ ($\times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$)	Gęstość ρ $\times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (g/cm^3)
	110	2,1	8,1	0,3	1,2	7,86
140	110					
150	115					
170	120					
200	140					
230	170					
270	190					
320	220					
550		2,15	8,5	0,3	1,2	7,9
370		2,05	8,3	0,3	1,2	7,9
60	159÷212	0,95 ⁽¹⁾	3,8	0,23÷0,27	1,05	6,7÷7,4
80	170÷241	0,95 ⁽¹⁾	3,9			
110	183÷262	1,0 ⁽¹⁾	4,0			
130	192÷269	1,1 ⁽¹⁾	4,1			
160	> 223	1,1 ⁽¹⁾	4,2			
180	200÷280	1,0 ⁽¹⁾	4,1	0,23÷0,27	1,2	7,0÷7,4
160	155÷210	1,0 ⁽¹⁾	4,2			
130	114÷150	2,15	8,3	0,28	1,1	7,8
150	128÷170					
190	149÷195					
200	170÷217					

Tablica 19.2. Własności wytrzymałościowe i fizyczne niektórych materiałów i metali nieżelaznych

Materiał lub oznaczenie wg PN	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa		Granica plastyczności R_e (Q_r) MPa min	Wydłu- żenie A_5 % min
		min	max		
Aluminium	Al	100			4
Miedź	Cu	210	240	70	38
Cynk (walcowany)	Zn	150			18
Cyna	Sn	30			40
Ołów	Pb	15			50
Nikiel	Ni	35	55		2
Braz { B7 wyżarzony BA 1032 kuty	93 Cu, 7 Sn	300			14
	84 Cu, 10 Al	600		350	15
Mosiądz M60	60 Cu, 40 Zn	340			36
Stopy lekkie:					
odlewy { AK20 AG10	80 Al, 20 Si	150			0,3
	90 Al, 10 Mg	280			9
walco- wane { PA2 PA20	97 Al, 1,5 Mg	130		50	25
	94 Al, 5 Mg	270		150	28
Stop cynku: Z40	95 Zn, 4 Al	280			5
Drewno { grab sosna		107			
		104			
Kauczuk naturalny		7÷10			
Polistyren		40			
Szkło		40	100		
Beton		5	35		
Granit		$R_c = 120$	260		
Piaskowiec		$R_c = 40$	150		

Wytrzymałość zmęczeniowa Z_{go} MPa (orientacyjnie)	Twardość Brinella HB (orientacyjnie)	Moduł Younga E $\times 10^5$ MPa	Moduł sprężystości postaciowej G $\times 10^4$ MPa	Liczba Poissona ν	Współczynnik rozszerzalności liniowej α $\times 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$ ($\times 10^{-5} / 1^\circ\text{C}$)	Gęstość ρ $\times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (g/cm^3)
	30	0,7	2,7	0,32÷0,36	2,4	2,70
60	35÷50	1,1	4,6	0,3÷0,34	1,7	8,96
	40	0,8	3,2	0,27	3,1	7,13
	5	0,42			2,3	7,30
	3	0,18	0,7	0,42	2,93	11,34
	55	2,12			1,37	8,85
110		1,13	3,7	0,32÷0,35	1,78	8,86
180	120	1,3	3,7	0,32÷0,35	1,67	7,6
120		0,99	3,5÷3,7	0,32÷0,42	2,16	8,4
	90	0,67÷0,74	2,7	0,32÷0,35	2,0	2,7
	60	0,67÷0,74	4,7	0,32÷0,35	2,45	2,6
55	30	0,67÷0,74	2,7	0,32÷0,35	2,3	2,73
140	70	0,67÷0,74	2,7	0,32÷0,35	2,43	2,64
50	60	1,05			2,74	6,6
	36	0,11	0,055		0,2÷0,5	0,9÷1,2
		0,11	0,055		0,2÷0,5	0,4÷1,1
		0,00008	0,47			0,9÷1,2
	25					1,06
		0,56	2,2	0,25		2,4÷2,8
		0,15÷0,24		0,17	1÷1,4	1,8÷2,2
		0,49		0,25		2,7
		0,18				2,2÷2,5

Tablica 19.3. Własności wytrzymałościowe stali i staliw (por. norma [39])

Znak stali (staliwa)	Grubość (średnica) wyrobu mm	Granica plastyczności $R_e (Q_r)$ MPa min	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa	Wydłużenie A_5 (min) %
St0S	do 16	200	min 320	23
	16÷40	190		20
	40÷100	190		20
St3SX	do 16	240	380÷470	26
St3SY	16÷40	230		25
St3	40÷100	220		23
St4VX	do 16	260	420÷520	24
St4VY	16÷40	250		23
St4V	40÷100	240		21
18G2A	do 16	360	500÷640	22
	16÷30	350		
	30÷50	340		
Staliwa:				
L400	grupa II i III	250	min 400	26
L450		260	min 450	24
L500		320	min 500	20

Litera X po znaku stali (np. St3X) oznacza stal nieuspokojoną, bardziej miękką, plastyczną, o gładkiej powierzchni (w końcu wytopu nie dodaje się odtleniacza, np. ferrokremenu, celem odgazowania stali). Litera Y oznacza stal półuspokojoną, a S – stal na konstrukcje spawane.

Dla stali St3 oraz St4 rozróżnia się dwie odmiany:

1) z ograniczoną zawartością węgla (oznaczenie literą V w miejsce litery S),

Wytrzymałość obliczeniowa, MPa			Orientacyjne wartości naprężeń dopuszczalnych, MPa			
f_d	f_{db} docisk powierzchni płaskich	f_{dbH} docisk skupiony wg Hertza	na rozciąganie, ściskanie i zginanie k	na ścinanie k_t	na docisk (liczony na rzut) k_d	na docisk wg Hertza k_{dH}
170	220	640	120	72	150	450
220	260	760	150	90	190	540
210						
200						
240	280	820				
230						
220						
310	380	1150	220	132	280	900
300						
290						
230	300	870				
240			150	90		
270						

2) z ograniczoną zawartością fosforu i siarki (oznaczenie literą W w miejsce S).

Litera G oznacza stal o podwyższonej zawartości manganu.

Staliwo węglowe, konstrukcyjne jest wykonywane w czterech grupach jakości: I – zwykła, II – wyższa, III – najwyższa, IV – na części maszyn elektrycznych.

Tablica 19.4. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych węglowych zwykłej jakości w stanie surowym

Znak stali orient.	Zawartość węgla orient. %	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa	Granica plastyczności $R_e (Q_r)$ MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarność U $\frac{daJ}{cm^2}$ min	Twardość HB min
St0	max 0,23	320÷350	200	22		
St1	0,06÷0,12	320÷400	200	33		
St2	0,09÷0,15	340÷420	220	31		110
St3	0,14÷0,22	380÷470	240	25	7	120
St4	0,18÷0,22	420÷520	260	23	8	140
St5	0,28÷0,37	500÷620	300	19	6	160
St6	0,38÷0,49	600÷720	340	14	4	180
St7	0,50÷0,62	700÷850	370	10	3	200
Dane orientacyjne						

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne $k_{ro}^{(1)}$	Z_{go}	$Z_{gj}^{(2)}$	Q_g	Z_{ro}	$Z_{rj}^{(2)}$	Q_r	Z_{so}	$Z_{sj}^{(2)}$	Q_s
100÷110											
110÷130	50÷90	30÷60	140	250	220	110	170	200	70	140	110
115÷140	55÷95	35÷70	150	270	240	120	190	220	80	160	120
120÷150	65÷100	40÷70	170	300	260	130	210	240	100	200	150
140÷165	70÷110	45÷80	180	330	310	150	250	260	110	220	160
150÷180	80÷120	45÷80	240	420	370	180	300	300	130	280	180
165÷200	90÷140	50÷90	280	480	430	200	350	350	150	320	220
180÷220	100÷150	55÷100	320	530	500	230	400	400	190	380	260
$(0,55÷0,65)Q_r$	$(0,35÷0,45)Q_r$	$(0,2÷0,35)Q_r$	$0,5 \times R_r$	$1,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,3 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$	$0,65 \times Q_r$
	$(0,3÷0,4)Z_{rj}$	$(0,3÷0,4)Z_{ro}$									

⁽¹⁾ Właściwym oznaczeniem dla tego typu przypadków jest symbol k_{re} . Dla ujednolicenia oznaczeń pozostawiono k_{ro} .

⁽²⁾ Jeżeli Z_j jest większe od Q , to może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych lub może być podstawione do odpowiednich wzorów obliczeniowych.

Tablica 19.5. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych węglowych wyższej jakości w stanie normalizowanym

Znak stali	Zawartość węgla %	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa min	Granica plastyczności $R_e (Q_r)$ MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarność U daJ/cm ² min	Twardość w stanie surowym HB min
08X	0,05÷0,11	300÷450	180	35		131
10X	0,07÷0,14	320÷450	190	33		137
10	0,07÷0,14	340÷450	210	31		137
15Y	0,15÷0,19	380÷500	230	27	6	143
20	0,17÷0,24	420÷520	250	25	5	156
25	0,22÷0,30	460÷560	280	23	4	170
30	0,27÷0,35	500÷600	300	21		179
35	0,32÷0,40	540÷660	320	20	3	187
40	0,37÷0,45	580÷700	340	19		217
45	0,42÷0,50	610÷730	360	16	2,5	241
50	0,47÷0,55	640÷760	380	14		241
55	0,52÷0,60	660÷810	390	12	2,5	255
60	0,57÷0,65	690÷850	410	12		255
65	0,62÷0,70	710÷880	420	10		255
Dane orientacyjne						

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
100÷120	60÷85	40÷60									
105÷125	60÷85	40÷60	210	340	320	130	240	250	100	200	150
115÷140	70÷95	45÷70	220	350	330	140	250	260	110	220	160
130÷150	70÷100	45÷70	250	440	440	200	320	350	150	300	220
140÷160	75÷110	50÷80	200	360	360	150	260	310	120	240	200
155÷185	80÷120	60÷90	200	370	370	160	270	320	130	250	210
165÷200	86÷130	60÷95	240	390	400	170	280	340	140	280	220
175÷210	95÷140	65÷100	250	420	430	180	300	360	150	300	230
190÷220	100÷150	70÷110	260	440	460	200	330	390	160	320	240
200÷240	100÷160	70÷120	280	480	500	210	360	420	170	340	260
210÷250	110÷170	70÷120	280	480	500	220	360	420	170	340	260
210÷250	110÷170	70÷120	300	500	520	240	420	440	200	400	280
220÷260	115÷180	70÷120	300	500	520	240	420	440	200	400	280
230÷280	120÷190	70÷130	300	500	520	240	420	440	200	400	280
$(0,55÷0,65)Q_r$	$(0,35÷0,45)Q_r$	$(0,2÷0,35)Q_r$	$0,5 \times R_r$	$1,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,3 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$	$0,65 \times Q_r$
	$(0,3÷0,4)Z_{rj}$	$(0,3÷0,4)Z_{ro}$									

Tablica 19.6. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych wyższej jakości o podwyższonej zawartości manganu

Znak stali	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa min	Granica plastyczności $R_e (Q_r)$ MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Twardość HB min
15G	0,15 C; 0,8 Mn	N.	420+450	250	26	163
18G2 18G2A	0,18C 1,4 Mn	N.	520+640	360 grubość 4+16 mm 340 grubość 16+25 mm 320 grubość 25+40 mm	19	
20G	0,20 C; 0,8 Mn	N.	460+570	280	24	197
40G	0,42 C; 0,74 Mn	H. 800°C O. 570°C	800	670	20	
45G	0,45 C; 0,8 Mn	N.	630+770	380	15	241
30G2	0,3 C; 1,6 Mn	H. 850°C O. 530°C	800	550	14	240
50G	0,50 C; 0,8 Mn	N. 830°C	660+800	400	13	255
50G	0,50 C; 0,8 Mn	walcowany	650	320	24	
60G	0,60 C; 0,8 Mn	N.	710+850	420	11	269
60G	0,60 C 0,8 Mn	H. 950°C olej O. 550°C	110	90	8	
Dane orientacyjne				normalizowane	$R_r < 600$	
				hartowane	$R_r > 600$	

Obróbka cieplna: N. – normalizowanie, H. – hartowanie, O. – odpuszczanie

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_H	Q_s	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_H	Q_s
120÷160	75÷110	50÷80	210	340	270	160	280	280	110	220	180
170÷220	100÷140	70÷100	230	360	400	180	320	340	130	250	220
150÷180	80÷120	60÷90	230	360	300	180	300	280	120	230	190
240÷300	120÷160	80÷130	370	560	680	260	410	670	220	440	400
200÷250	120÷150	70÷110	310	500	400	220	360	380	200	400	260
220÷300	120÷150	70÷110	300	480	560	210	360	550	170	340	340
200÷250	130÷170	70÷120	400	560	760	320	420	640	200	400	400
160÷220	100÷130	60÷100	260	400	360	180	300	320	150	300	240
180÷220	130÷190	70÷130	460	620	600	380	500	500	240	420	300
260÷340	140÷200	100÷140	560	900	900	400	700	900	360	700	540
$(0,5÷0,6)Q_r$	$(0,4÷0,5)Z_{rj}$	$(0,4÷0,5)Z_{ro}$	$0,45 \times R_r$	$1,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Z_{go}$	$0,6 \times Q_r$
$(0,35÷0,5)Q_r$	$(0,3÷0,4)Z_{rj}$	$(0,3÷0,4)Z_{ro}$	$0,4 \times R_r$	$1,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Z_{go}$	$0,6 \times Q_r$

Stale 18G2 oraz 18G2A (znak A oznacza, że stal ta jest odtleniona dodatkowo za pomocą aluminium), są to stale niskostopowe o wysokiej wytrzymałości. Stal 18G2 można stosować na konstrukcje spawane tylko przy grubości do 20 mm. Stal 18G2A – tylko na odpowiedzialne konstrukcje; spawanie stali 18G2A o grubości powyżej 36 mm tylko przy zastosowaniu specjalnej technologii.

Tablica 19.7. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych stopowych do nawęglania, po obróbce cieplnej

Rodzaj stali	Znak stali	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa min	Granica plastyczności R_e (Q_r) MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarowość U_{da} J/cm ²	Twardość w stanie zmęczonym HB max
Cr	15H	0,8 Cr	H. 880°C olej O. 180°C powietrze	700	500	12	7	179
Cr	20H	0,8 Cr	jak wyżej	800	650	11	6	179
Cr-Mn	16HG	1 Cr 1 Mn	H. 860°C olej O. 180°C powietrze	850	600	12	8	187
Cr-Mn	20HG	1,1 Cr 1,1 Mn	H. 880°C olej O. 180°C powietrze	1100	750	7		217
Cr-Mn-Mo	15HGM	1 Cr 1 Mn 0,1 Mo	H. 840°C olej O. 180°C powietrze	950	800	11	8	207
Cr-Mn-Mo	18HGM	1 Cr 1 Mn 0,25 Cr	H. 860°C olej O. 190°C powietrze	1100	900	10	9	217
Cr-Mn-Ni	15HGN	1 Cr 1 Mn 1,4 Ni	H. 800°C olej O. 175°C powietrze	900	600	10	6	229
Cr-Mn-Ni	17HGN	1 Cr 1,1 Mn 0,8 Ni	H. 860°C olej O. 160°C powietrze	1000	850	11	7	229
Cr-Ni	15HN	1,6 Cr 1,7 Ni	H. 860°C olej O. 190°C powietrze	1000	850	12	8	217
Cr-Ni	18H2N2	2 Cr 2 Ni		1250	850	7	8	235
Dane orientacyjne								

Obróbka cieplna: H. – hartowanie, O. – odpuszczanie

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie, MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	k_{rj}	k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
250÷280	160÷200	80÷100	300	500	550	200	400	500	180	⁽¹⁾ 350	300
310÷350	180÷220	100÷130	340	560	700	260	450	650	210	⁽¹⁾ 400	380
240÷300	190÷230	100÷130	360	580	660	260	460	600	210	⁽¹⁾ 400	380
280÷350	200÷240	100÷130	400	620	820	270	480	750	240	450	450
300÷380	210÷250	110÷140	420	640	880	280	500	800	250	460	480
300÷400	220÷270	120÷150	440	700	980	300	540	900	270	500	520
250÷300	180÷220	100÷120	380	600	660	240	440	600	220	⁽¹⁾ 420	360
300÷370	220÷260	110÷140	420	640	900	280	520	850	260	480	500
300÷370	200÷240	100÷130	400	620	900	260	480	850	240	460	500
370÷450	210÷260	110÷140	430	680	1100	290	520	1000	260	500	600
$(0,35+0,5)Q_r$	$(0,4+0,5)Z_{rj}$	$(0,4+0,5)Z_{ro}$	$0,4 \times R_r$	$1,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Z_{go}$	$0,6 \times Q_r$

⁽¹⁾ Jeżeli Z jest większe od Q , to może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych lub może być podstawione do odpowiednich wzorów obliczeniowych.

Tablica 19.8. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych stopowych, do ulepszania cieplnego

Rodzaj stali	Znak stali	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa min	Granica plastyczności $R_e (Q_r)$ MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarowość $U \frac{J}{cm^2}$	Twardość HB
Mn	18G2 18G2A	0,18 C 1,3 Mn	N.	520	320	19		
	30G2	0,30 C 1,6 Mn	N. 870°C	660	400	17		207
			H. 850°C woda O. 530°C powietrze	800	550	14	8	240
Si-Mn	35SG	0,35 C 1,3 Si 1,3 Mn	H. 900°C woda O. 590°C woda	900	700	15	6	229
Ni-Cr	45HN	0,45 C 0,6 Cr 1,2 Ni	H. 820°C woda O. 530°C woda	1050	850	10	7	207
	38HGN	0,38 C 0,9 Mn 0,7 Cr 1 Ni	H. 850°C olej O. 570°C woda	950	800	10	7	229

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie, MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
170÷220	100÷140	60÷100	230	360	400	170	290	340	130	260	220
140÷190	90÷120	60÷90	250	380	400	180	300	340	140	270	240
220÷300	120÷150	70÷110	300	480	560	210	360	550	170	340	340
240÷300	150÷180	80÷110	380	600	750	280	480	700	220	440	440
300÷400	160÷200	90÷130	450	660	900	320	520	840	240	500	500
270÷380	150÷190	90÷120	400	620	850	300	480	800	220	450	480

Tablica 19.8 (cd.)

Rodzaj stali	Znak stali	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa min	Granica plastyczności $R_s (Q_r)$ MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarowość U_{da} J/cm ²	Twardość HB
Cr	35H	0,35 C 1 Cr	H. 860°C olej O. 500°C woda, olej	950	750	11	7	197
	40H	0,40 C 1 Cr	H. 850°C olej O. 500°C woda, olej	1000	800	10	6	217
	50H	0,50 C 1 Cr	H. 850°C woda O. 500°C woda	1100	950	8	4	229
Cr-Mo	35HM	0,35 C 1,1 Cr 0,2 Mo	H. 850°C woda O. 540°C woda	1000	800	12	8	241
Cr-Mn-Si	30HGS	0,30 C 1 Mn 1 Cr 1 Si	H. 880°C olej O. 540°C woda, olej	1100	850	10	5	229
	35HGS	0,35 C 1 Mn 1,3 Cr 1,35 Si	H. 880°C olej izoterm. O. 700°C woda	1650	1400	10	5	241
Dane orientacyjne								

Obróbka cieplna: H. – hartowanie, O. – odpuszczanie.

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie, MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_g	Q_s	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
250÷350	200÷260	110÷150	540	740	750	400	750	700	240	600	420
270÷370	200÷250	120÷160	600	800	850	420	700	800	320	650	480
330÷430	200÷250	120÷160	620	800	950	430	700	900	330	680	540
270÷380	180÷240	110÷150	500	700	850	360	600	800	260	550	500
280÷380	180÷240	110÷150	500	700	850	360	600	800	230	550	500
400÷500	150÷200	110÷150	440	600	840	350	500	760	220	300	460
$(0,35 \div 0,45) Q_r$	$(0,3 \div 0,4) Z_{rj}$	$(0,3 \div 0,4) Z_{ro}$	$0,4 \times R_r$	$1,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Z_{go}$	$0,6 \times Q_r$

Podane w tablicy wartości naprężeń dopuszczalnych dotyczą wyrobów o grubości do 16 mm; dla grubszych wyrobów należy naprężenia dopuszczalne zmniejszyć, mnożąc podane w tablicy wielkości przez współczynniki:

0,8÷0,9	dla grubości	16÷40 mm,
0,65÷0,75	dla grubości	40÷100 mm,
0,55÷0,65	dla grubości	100÷160 mm,
0,45÷0,55	dla grubości	160÷200 mm.

Tablica 19.9. Własności wytrzymałościowe i zmęczenia stali sprężynowych (resorowych)

Rodzaj stali	Znak stali	Skład chemiczny (orientacyjne) %	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa min	Granica plastyczności R_e (Q_r) MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Twardość w stanie surowym HB
C	75	0,76 C 0,7 Mn 0,2 Si	H. 820°C olej O. 480°C	1100	900	9	285
Mn	65G	0,65 C 1 Mn 0,27 Si	H. 830°C olej O. 480°C	1000	800	8	260
Si	50S2	0,5 C 0,75 Mn 1,6 Si	H. 870°C olej O. 460°C	1300	1200	6	285
Si-Mn-Cr	60SGH	0,6 C 1 Mn 1 Si 0,5 Cr	H. 850°C olej O. 480°C	1400	1250	7	302
Cr-Mn	50HG	0,5 C 0,9 Mn 0,3 Si 1 Cr	H. 840°C olej O. 440°C	1300	1200	7	302
Cr-Si	50HS	0,5 C 0,4 Mn 1 Si 1,1 Cr	H. 850°C olej O. 520°C	1350	1200	6	302
Drut patentowany (fortepianowy)		0,45±0,9 C	H. 500°C ⁽²⁾	1600	1400		
Dane orientacyjne							

Napężenia dopuszczalne na skręcanie dla sprężyn:

$$k_s = 0,6k_g, \quad k_{sj} = 0,6k_{gj}, \quad k_{so} = 0,6k_{go}.$$

Górne wartości naprężeń dopuszczalnych stosować dla dokładnie ustalonych obciążeń, dla sprężyn starannie wykonanych, po prawidłowej obróbce cieplnej, gdy pęknięcie resoru (sprężyny) nie powoduje poważniejszych zakłóceń.

Drut patentowany (tzw. fortepianowy) – do wyrobu drobnych sprężyn śrubowych.

Obróbka cieplna: H. – hartowanie, O. – odpuszczanie.

Napężenia dopuszczalne na zginanie (po obróbce cieplnej), MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_g	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{gj}	obustronne symetryczne k_{go}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
500÷600	300÷400	200÷300	360	⁽¹⁾ 600	560	260	460	500	220	⁽¹⁾ 440	300
450÷550	300÷400	230÷300	450	650	850	350	500	800	220	300	460
650÷800	450÷550	300÷400	650	1000	1200	440	760	1200	380	700	700
750÷900	550÷650	300÷400	650	1000	1300	420	760	1200	380	700	720
750÷900	550÷650	300÷400	650	1000	1300	420	760	1200	380	700	720
700÷850	500÷600	300÷400	600	960	1300	420	750	1200	350	700	720
850÷950	600÷700	350÷450	700	1100	1500	460	840	1400	420	770	840
$(0,6 \div 0,7)Q_r$	$(0,5 \div 0,6)Z_{gj}$	$(0,5 \div 0,6)Z_{go}$	$0,45 \times R_r$	$1,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,7 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$		$0,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Z_{go}$	$0,6 \times Q_r$

⁽¹⁾ Jeżeli Z_j jest większe od Q , to może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych lub może być podstawione do odpowiednich wzorów obliczeniowych.

⁽²⁾ Drut patentowany (fortepianowy) jest poddawany hartowaniu izotermicznemu przy 500°C w kąpeli ołowianej, przeciągany na zimno, a następnie odpuszczany w temperaturze od 200 do 240°C.

Tablica 19.10. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali węglowych

Stan: normalizowanie i odpuszczanie

Znak staliwa	Zawartość węgla %	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa min	Granica plastyczności R_e (Q_r) MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Udarność U daJ/cm ² min	Twardość HB min
L 150	0,15 C	400	200	24	5	114÷156
L 200	0,20 C	420	220	22	5	118÷156
L 250	0,25 C	450	240	19	4	128÷170
L 300	0,30 C	480	200	17	3,5	137÷183
L 350	0,35 C	500	280	15	3,5	140÷192
L 400	0,40 C	530	300	14	3	149÷195
L 450	0,45 C	550	320	12	3	156÷207
L 500	0,50 C	580	340	11	2,5	163÷212
L 550	0,55 C	600	350	10	2,5	170÷217
25H15 żaro- odporne	0,25 C 15 Cr	650	400	15		
Dane orientacyjne						

Tablica dotyczy własności odlewów.

Współczynniki bezpieczeństwa dla stali powinny być o 40% większe niż dla stali (zasada ta obowiązuje np. dla zbiorników ciśnieniowych).

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie, MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_H	Q_s	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	$Z_y^{(1)}$	Q_s
70÷90	35÷56	20÷30	130	200	220	110	170	200	90	140	120
80÷100	40÷60	25÷35	140	230	240	120	190	220	95	150	130
85÷105	40÷65	25÷40	150	260	260	130	210	240	100	160	140
90÷115	45÷70	30÷40	160	290	300	140	220	260	110	180	160
95÷125	50÷70	30÷45	180	320	330	150	240	280	120	200	180
105÷135	50÷75	30÷50	190	340	360	160	250	300	125	215	190
110÷140	50÷75	35÷50	200	360	380	170	250	320	130	230	200
115÷150	55÷80	35÷55	210	380	410	180	280	340	140	240	210
120÷155	60÷90	40÷60	230	400	450	200	320	360	150	260	220
120÷160	60÷90	40÷60	200	340	400	140	240	400	100	180	280
$(0,35÷0,45)Q_r$	$(0,2÷0,3)Z_{rj}$	$(0,2÷0,3)Z_{ro}$	$0,34 \times R_r$	$1,7 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,8 \times Z_{go}$	$1,2 \times Z_{go}$		$0,5 \times Z_{go}$	$0,9 \times Z_{go}$	$0,7 \times Q_r$
	$(0,15÷0,25)Q_r$										

⁽¹⁾ Jeżeli Z_j jest większe od Q_s , to może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych lub może być podstawione do odpowiednich wzorów obliczeniowych.

Tablica 19.11. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe żeliw

Nazwa żeliwa	Znak (gatunek)	Skład chemiczny (orientacyjnie) %	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa min	Wytrzymałość na zginanie R_g MPa min	Wytrzymałość na ściskanie R_c MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Twardość HB
Szare	ZI 150		150	250	500		159÷212
	ZI 200		200	300	600		170÷241
	ZI 250		250	400	800		183÷262
	ZI 300		300	450	900		192÷269
	ZI 350		350	500	1000		201÷277
	ZI 400		400	600	1200		pow. 223
Modyfikowane	ZiM26		260	460	900		170÷240
	ZiM30		300	500	1000		170÷240
	ZiM34		340	540	1100		190÷250
	ZiM38		380	580	1200		190÷260
Sferoidalne perlityczne	ZsP45		450	720	1600	2	200÷280
Sferoidalne ferrytyczne	ZsF05		400	700	2000	5	155÷210
Ciagliwe	ZcC3510		350	($Q_r = 230$)		6	150
Żaroodporne	żeliwo austenityczne	14 Ni 2 Cr 7 Cu	250	400	800		
Żaroodporne	żeliwo perlityczne	0,2 Ni 0,3 Cr	350	500	1000		
Dane orientacyjne							

Dolne wartości naprężeń – dla odlewów grubościennych.

Gdy naskórek odlewniczy usunięty – naprężenia dopuszczalne zwiększyć o 10÷15%.

Naprężenia dopuszczalne na ściskanie: $k_c = 2,5k_r$, $k_{cJ} = 2,5k_{rJ}$.

Naprężenia dopuszczalne na zginanie:

przekrój prostokątny $k_g = 1,5k_r$, $k_{gJ} = 1,3k_{rJ}$, $k_{go} = 1,2k_{ro}$,
 przekrój kołowy $k_g = 1,7k_r$, $k_{gJ} = 1,45k_{rJ}$, $k_{go} = 1,25k_{ro}$,
 przekrój dwuteowy $k_g = 1,4k_r$, $k_{gJ} = 1,25k_{rJ}$, $k_{go} = 1,15k_{ro}$.

Napężenia dopuszczalne MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_z	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
20÷30	15÷25	10÷15	60	100	160	40	60		50	70	90
30÷40	20÷30	15÷20	80	140	220	50	70		70	90	170
35÷50	25÷35	20÷25	110	180	270	60	90		80	110	140
40÷60	30÷45	20÷30	130	200	330	70	110		90	120	160
50÷70	35÷50	25÷35	140	220	380	80	115		110	150	180
55÷80	40÷60	30÷40	160	240	440	95	140		120	170	200
35÷50	30÷45	20÷30	120	170	280	70	120		130	190	180
40÷60	35÷50	25÷30	140	190	320	80	140		150	210	190
50÷70	40÷55	25÷35	160	220	360	90	160		180	230	210
55÷75	50÷70	30÷40	180	250	400	100	180		200	250	230
60÷80	45÷60	30÷40	180	240	480	100	160		140	200	240
55÷75	40÷60	25÷35	160	200	440	90	140		120	180	220
50÷70	35÷50	25÷30	140	180	380	80	120		100	130	200
35÷50	25÷35	20÷25	100	160	270	60	90		80	110	150
50÷70	40÷50	30÷40	150	240	380	90	130		120	160	200
$(0,14 \div 0,2)R_r$	$(0,3 \div 0,4)Z_{rj}$	$(0,3 \div 0,4)Z_{ro}$	$0,4 \times R_r$	$1,6 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,6 \times Z_{go}$	$0,9 \times Z_{go}$		$0,8 \times Z_{go}$	$1,1 \times Z_{go}$	$0,6 \times R_r$

Napężenia dopuszczalne na skręcanie:

przekrój kołowy $k_s = 1,2k_r$, $k_{sj} = 1,1k_{rj}$, $k_{so} = k_{ro}$,
 przekrój prostokątny $k_s = 1,4k_r$, $k_{sj} = 1,2k_{rj}$, $k_{so} = 1,1k_{ro}$,
 przekrój pierścieniowy $k_s = 0,95k_r$, $k_{sj} = 0,9k_{rj}$, $k_{so} = 0,8k_{ro}$.

Tablica 19.12. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stopów aluminium

Nazwa, przeznaczenie	Określenie	Znak (orientacyjnie)	Cecha	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m (R_r)$ MPa min	Granica plastyczności $R_p (Q_r)$ MPa min	Wydłużenie A_5 % min	Twardość HB
Aluminium	99% Al	Al99		W.	90	35	45	23
Aluminium	99% Al	Al99		T.	160		15	44
Po obróbce plastycznej	Aluman	AlMn1	PA1	W.	130		20	30
	Aluman	AlMn1		T.	220	80		55
	Hydronal	AlMg2	PA2	T.	200		23	45
	Hydronal	AlMg2	PA2	W.	130	50	20	30
	Anticorodal	AlMgSiMn	PA4	P.sam.S.	180		12	
	Dural	AlCu4Mg	PA6	W.	210		18	45
	Dural	AlCu4Mg	PA6	P.sam.S.	420		15	100
	Dural	AlCu4Mg2	PA7	P.sam.S.	470		17	105
	Dural	AlZnMg-2Cu1MnCr	PA9	P.sam.S.	550	500	12	
	Dural	AlMg5	PA20	W.	270		23	65
	Dural	AlMg5	PA20	półtwardy	370	250	12	95
	Dural	AlCuMg-1Ni1Fe1Ti	PA30	P. szt. S.	460	380	10	
Odlewy kokilowe		AlSi9	AK9	S.	200		1,5	70
Odlewy kokilowe		AlSiCu	AK51	P.S.	180			60
Odlewy w piasku		AlCu4Ti	AM4	P.S.	270	150	4	80
Dane orientacyjne				po obróbce plastycznej				
				odlewy				

Stopy aluminium w zasadzie nie mają nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej; ze wzrostem liczby cykli wytrzymałość zmęczeniowa maleje, jak to podano w rozdz. 17. Stop PA30 – odporny na wysokie temperatury (bliższe dane w rozdz. 16).

Oznaczenia stanu: W. – wyżarzony, T. – twardy, P. – przesyciony, S. – starzony, sam. S. – samorzutnie starzony, szt. S. – sztucznie starzony.

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie, MPa			Licz- ba cykli n_z	Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne			zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}		Z_{go}	$Z_{gj}^{(1)}$	Q_g	Z_{ro}	$Z_{rj}^{(1)}$	Q_r	Z_{so}	$Z_{sj}^{(1)}$	Q_s
30÷40	20÷25	10÷15	$5 \cdot 10^8$	35	60	50	25	50	40	20	35	30
50÷65	30÷40	15÷25	$5 \cdot 10^8$	60	100	90	45	80	80	35	60	60
40÷60	25÷30	15÷20	$5 \cdot 10^8$	55	60	70	40	60	60	30	50	50
65÷85	35÷45	20÷30	$5 \cdot 10^8$	70	110	100	55	90	80	40	70	70
60÷80	40÷55	30÷40	$5 \cdot 10^8$	100	160	120	80	120	100	60	100	80
40÷50	40÷50	25÷30	$5 \cdot 10^8$	80	120	120	60	100	120	50	80	80
50÷70	30÷40	20÷25	$5 \cdot 10^8$	60	100	90	50	80	80	35	60	60
60÷80	30÷40	20÷25	$5 \cdot 10^8$	60	100	100	50	80	110	35	60	80
100÷130	60÷80	35÷45	$5 \cdot 10^8$	100	180	260	90	160	240	80	140	140
110÷150	70÷90	40÷50	10^8	110	200	280	100	180	330	90	150	150
130÷180	80÷100	45÷60	10^8	150	240	220	120	200	200	90	150	120
80÷110	70÷90	45÷55	$5 \cdot 10^8$	140	230	200	110	190	140	90	140	100
100÷130	70÷90	40÷50	$5 \cdot 10^8$	130	220	200	100	180	200	85	130	140
120÷150	70÷90	45÷55	10^8	140	230	220	110	190	200	90	140	140
45÷60	35÷45	20÷30	$2 \cdot 10^7$	80	110	110	60	110	100	50	80	80
35÷55	30÷35	20÷30	10^7	60	100	150	50	80	150	35	60	100
55÷80	25÷30	15÷20	10^7	50	80	90	40	70	80	30	50	50
$(0,3 \div 0,4)R_r$	$(0,4 \div 0,5)Z_{rj}$	$(0,4 \div 0,5)Z_{ro}$		$0,35 \times R_r$	$1,7 \times Z_{go}$	$1,1 \times Q_r$	$0,8 \times Z_{go}$	$1,4 \times Z_{go}$	$0,6 \times R_r$	$0,6 \times Z_{go}$	$1 \times Z_{go}$	$0,4 \times R_r$
$(0,2 \div 0,3)R_r$	$(0,35 \div 0,45)Z_{rj}$	$(0,35 \div 0,45)Z_{ro}$										

⁽¹⁾ Jeżeli Z_j jest większe od Q , to może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych lub może być podstawione do odpowiednich wzorów obliczeniowych.

Tablica 19.13. Własności wytrzymałościowe i zmechnieniowe stopów miedzi

Przeznaczenie	Określenie	Znak	Cecha (orientacyjnie)	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie R_m (R_r) MPa min	Granica plastyczności R_e (Q_r) MPa min	Wydłużenie A_5 , % min
Na odlewy	miedź	Cu 99	M4	wyżarzony	210	70	
Po obróbce plastycznej	brąz cynowy	CuSn7P	B7	wyżarzony	300	200	38
Po obróbce plastycznej	brąz cynowy	CuSn7P	B7	twardy	600		1
Po obróbce plastycznej	brąz aluminiowy	CuAl 10	BA1032	kuty	600	360	12
Na odlewy	brąz aluminiowy	CuAl 10	BA1032	lany	500	350	10
Na odlewy	brąz cynowy	CuSn 10	B10	lany	200		5
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn40	M60	tłoczony	350		15
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn40	M60	ciagniony	480		5
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn40	M60	twardy	500		5
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn 37	M63	wyżarzony 650°C	290		45
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn 37	M63	wyżarzony 235°C	500		22
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn37	M63	twardy	400		18
Po obróbce plastycznej	mosiądz	CuZn37	M63	zimno walcowany	500		18
Na odlewy	mosiądz	CuZn38	MA58	lany	350		15
Dane orientacyjne				po obróbce plastycznej			
				odlewy			

Napężenia dopuszczalne na rozciąganie, MPa			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_s	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
50÷70	30÷40	20÷30	60	100	80	50	70	70	30	50	50
70÷90	60÷75	35÷50	110	160	180	90	150	200	40	80	90
90÷110	80÷100	50÷70	160	240		120	220		70	150	150
120÷150	80÷110	60÷80	180	240	360	160	250	360	100	200	220
100÷150	50÷70	30÷45	120	180	300	90	160	350	60	120	120
50÷70	30÷40	15÷20	50	90		40	70		25	50	50
70÷90	50÷70	30÷40	90	150		70	120		40	90	90
100÷140			160	240		120	220		70	150	150
110÷150	80÷110	45÷60	140	220		100	200		70	140	140
60÷120	55÷70	35÷50	120	200		90	160		70	120	120
			120	200		90	160		100	200	200
70÷90	50÷70	40÷55	120	180		80	150		80	180	180
			160	240		120	220		80	160 ⁽¹⁾	100
70÷90	40÷50	25÷35	90	150		70	120		40	90	90
$(0,25÷0,35)R_r$	$(0,4÷0,5)Z_{rj}$	$(0,4÷0,5)Z_{ro}$	$0,35 \times R_r$	$1,7 \times Z_{go}$	$0,6 \times R_r$	$0,8 \times Z_{go}$	$1,4 \times Z_{go}$	$0,6 \times R_r$	$0,5 \times Z_{go}$	$1 \times Z_{go}$	$0,4 \times R_r$
$(0,2÷0,3)R_r$	$(0,35÷0,45) \times Z_{rj}$	$(0,35÷0,45) \times Z_{ro}$									

⁽¹⁾ Jeżeli Z_j jest większe od Q , to może służyć tylko do konstrukcji wykresów zmęczeniowych lub może być podstawione do odpowiednich wzorów obliczeniowych.

Tablica 19.14. Dane orientacyjne do wyznaczania naprężeń dopuszczalnych i wytrzymałości zmęczeniowej

Materiał	Stan	Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie		
		obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne	
			jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}
Stale węglowe $R_r \leq 600 \text{ MPa}$	surowy normalizowane lub wyżarzane	$(0,55 \div 0,65) Q_r$	$(0,35 \div 0,45) Q_r$ lub $(0,3 \div 0,4) Z_{rj}$	$(0,2 \div 0,35) Q_r$ lub $(0,3 \div 0,4) Z_{ro}$
Stale węglowe $R_r > 600 \text{ MPa}$	normalizowane	$(0,5 \div 0,6) Q_r$	$(0,4 \div 0,5) Z_{rj}$	$(0,4 \div 0,5) Z_{ro}$
	hartowane	$(0,35 \div 0,45) Q_r$	$(0,3 \div 0,4) Z_{rj}$	$(0,3 \div 0,4) Z_{ro}$
Stale konstrukcyjne stopowe	nawęglane	$(0,35 \div 0,5) Q_r$	$(0,4 \div 0,5) Z_{rj}$	$(0,4 \div 0,5) Z_{ro}$
	ulepszane cieplnie	$(0,35 \div 0,45) Q_r$	$(0,3 \div 0,4) Z_{rj}$	$(0,3 \div 0,4) Z_{ro}$
Stale sprężynowe (resorowe)	hartowane i odpuszczane	$k_g = (0,6 \div 0,7) Q_r$	$k_{gj} = (0,5 \div 0,6) Z_{rj}$	$k_{go} = (0,5 \div 0,6) Z_{ro}$
Staliwa węglowe	normalizowane i odpuszczane	$(0,35 \div 0,45) Q_r$	$(0,15 \div 0,25) Q_r$ lub $(0,2 \div 0,3) Z_{rj}$	$(0,2 \div 0,3) Z_{ro}$
Żeliwa	odlewy	$(0,14 \div 0,2) R_r$	$(0,3 \div 0,4) Z_{rj}$	$(0,3 \div 0,4) Z_{ro}$
Stopy miedzi	przerobione plastycznie	$(0,25 \div 0,35) R_r$	$(0,4 \div 0,5) Z_{rj}$	$(0,4 \div 0,5) Z_{ro}$
	odlewy	$(0,2 \div 0,3) R_r$	$(0,35 \div 0,45) Z_{rj}$	$(0,35 \div 0,45) Z_{ro}$
Stopy aluminium	odlewy po starzeniu	$(0,2 \div 0,3) R_r$	$(0,35 \div 0,45) Z_{rj}$	$(0,35 \div 0,45) Z_{ro}$

Górne wartości naprężeń dopuszczalnych stosować dla dokładnie znanych obciążeń i elementów o grubości do 16 mm, gładkich, bez karbów zagrażających w razie zerwania zniszczeniem maszyny lub wypadkiem.

Dolne wartości naprężeń dopuszczalnych stosować dla elementów o większych wymiarach, normalnej gładkości, o umiarkowanym działaniu karbu.

Naprężenia dopuszczalne dla innych stanów obciążeń (oprócz żeliw):

$$k_g = (1,0 \div 1,1) k_r, \quad k_s \approx 0,6 k_r$$

Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej, MPa								
zginanie			rozciąganie			skręcanie		
Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	$Z_{sj}^{(1)}$	Q_s
$0,5R_r$	$1,7Z_{go}$	$1,2Q_r$	$0,7Z_{go}$	$1,3Z_{go}$	Q_r	$0,6Z_{go}$	$1,2Z_{go}$	$0,65Q_r$
$0,45R_r$	$1,7Z_{go}$	$1,2Q_r$	$0,7Z_{go}$	$1,2Z_{go}$	Q_r	$0,6Z_{go}$	$1,1Z_{go}$	$0,6Q_r$
$0,4R_r$								
$0,4R_r$	$1,6Z_{go}$	$1,1Q_r$	$0,7Z_{go}$	$1,2Z_{go}$	Q_r	$0,6Z_{go}$	$1,1Z_{go}$	$0,6Q_r$
$0,4R_r$								
$0,45R_r$								
$0,35R_r$	$1,7Z_{go}$	$1,1Q_r$	$0,8Z_{go}$	$1,2Z_{go}$	Q_r	$0,5Z_{go}$	$0,9Z_{go}$	$0,6Q_r$
$0,45R_r$	$1,6Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,6Z_{go}$	$0,9Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,8Z_{go}$	$1,1Z_{go}$	$0,7R_r$
$0,35R_r$	$1,7Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,8Z_{go}$	$1,4Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,5Z_{go}$	$1,0Z_{go}$	$0,4R_r$
$0,35R_r$	$1,7Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,8Z_{go}$	$1,4Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,5Z_{go}$	$1,0Z_{go}$	$0,4R_r$
$0,35R_r$	$1,7Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,8Z_{go}$	$1,4Z_{go}$	$0,6R_r$	$0,5Z_{go}$	$1,0Z_{go}$	$0,4R_r$

Napężenia dopuszczalne na zginanie i skręcanie dla żeliw podano w objaśnieniach do tabl. 19.11.

Literatura

1. *Buch A.*: Zagadnienia wytrzymałości zmęczeniowej. Warszawa, PWN 1964.
2. *Dietrych J., Kocańda S., Korewa W.*: Podstawy konstrukcji maszyn. Wyd. 3. Warszawa, WNT 1969.
3. *Dorn J. E.*: Mechanical behaviour of materials at elevated temperatures. New York, McGraw-Hill 1961.
4. *Dyląg Z., Orłoś Z.*: Wytrzymałość zmęczeniowa materiałów. Warszawa, WNT 1962.
5. *Finnie L., Heller W. R.*: Pełzanie materiałów konstrukcyjnych. Warszawa, WNT 1962 (tłum. z ang.).
6. *Forrest P. G.*: Fatigue of metals. London, Pergamon Press 1962.
7. *Gochberg M. M.*: Metalličeskie konstrukcii kranov. Moskva, Mašgiz 1959.
8. *Gochberg M. M.*: Metalličeskie konstrukcii pod"ëmno-transportnyh mašin. Moskva, Mašinostroenie 1964.
9. *Jakubowicz A., Orłoś Z.*: Wytrzymałość materiałów. Wyd. 6. Warszawa, WNT 1984.
10. *Kłębowski Z.*: Wytrzymałość przemysłowych naczyń ciśnieniowych. Warszawa, PWT 1960.
11. *Kocańda S., Szala J.*: Podstawy obliczeń zmęczeniowych. Wyd. 2. Warszawa, PWN 1991.
12. *Kocańda S.*: Zmęczeniowe pękanie metali. Wyd. 3. Warszawa, WNT 1985.
13. *Mašinostroenie*, t.1, cz. II. Moskva, Gostekhnizdat 1948.
14. *Moszyński W.*: Wytrzymałość zmęczeniowa części maszynowych. Warszawa, PWT 1954.
15. *Neuber H.*: Kerbspannungslehre. Berlin, Springer 1958.
16. *Niemann G.*: Maschinenelemente. Berlin, Springer 1975.
17. *Niezgodziński M. E., Niezgodziński T.*: Obliczenia zmęczeniowe elementów maszyn. Warszawa, PWN 1973.
18. *Niezgodziński M. E., Niezgodziński T.*: Wytrzymałość materiałów Wyd. XIV zm. Warszawa, PWN 1998.
19. *Oding I. A.*: Dopuskaemye naprjaženija w mašinostroenii. Moskva, Mašgiz 1962.
20. *Panomariw S. D.*: Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. Warszawa, PWN 1958 (tłum. z ros.).
21. *Piątkiewicz A., Sobolski R.*: Dźwignice. Warszawa, WNT 1978.
22. *Pisarenko G. S.* i in.: Pročnosť materialov pri vysokich temperaturach. Kiev, Naukova Dumka 1968.
23. Poradnik inżyniera mechanika, t. I. Warszawa, WNT 1968.
24. Przepisy Urzędu Dozoru Technicznego: Urządzenia ciśnieniowe. Obliczenia wytrzymałościowe DT-UC-90/WO-O.
25. Rasčety na pročnosť w mašinostroenii. Moskva, Mašgiz 1963.
26. *Serensen S. W.* i in.: Nesuščaja sposobnosť i rasčety detalej mašin na pročnosť. Moskva, Mašgiz 1963.
27. *Sines G., Waisman J. L.*: Metal fatigue. New York, Mc Graw-Hill 1959.
28. *Sors L.*: Fatigue Design of Machine Components. Budapest, Akademiai Kiado 1971.

29. Spravočnik mašinostroitelja, t. 3 i t. 6. Moskva, Mašgiz 1955.
30. Spravočnik po mašinostroitel'nyim materialam. Moskva, Mašgiz 1959.
31. Spravočnik: Pročnosť, ustojčiwost', kolebanija. Moskva, Mašinostroenie 1968.
32. Tablice inżynierskie. Poznań-Szczecin, PWN 1955.
33. *Tauscher H.*: Zulässige Spannungen für standardisierte metallische Werkstoffe. Leipzig, Fachbuchverlag 1962.
34. *Thum A.* i in.: Verformung, Spannung und Kerbwirkung. Düsseldorf, VDI 1961.
35. *Timoshenko S., Gere J. M.*: Teoria stateczności sprężystej. Warszawa, Arkady 1963 (tłum. z ang.).
36. *Timoshenko G., Goodier J. N.*: Teoria sprężystości. Warszawa, Arkady 1962 (tłum. z ang.).
37. *Timoshenko G., Woinowsky-Krieger S.*: Teoria płyt i powłok. Warszawa, Arkady 1963 (tłum. z ang.).
38. Norma PN-90/B-03200 „Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie”.
39. Norma PN-79/M-06515 „Dźwignice. Ogólne zasady projektowania stalowych ustrojów nośnych” oraz PN-88/M-06516 „Dźwignice. Złącza spawane w stalowych ustrojach nośnych dźwignic”.
40. Norma PN-76/H-04330 „Próba pelzania metali” oraz PN-85/H-74252 „Rury stalowe bez szwu, kotłowe”.

Skorowidz

Aluman 292
aluminium 237, 268, 290
— stopy 44, 290
— — — własności fizyczne 268
— — — w obniżonych temperaturach 206-209
— — — w podwyższonych temperaturach 209-212
— — — zmęczeniowe 236-238, 290
amplituda naprężeń 216
anticorodal 44, 290
azbest 195

Belki na sprężystym podłożu 128-133
— statycznie niewyznaczalne 82-97
— — — wyznaczalne 71-81
— wieloprzęsłowe 89-97
— wspornikowe 71-73
beton 36, 268
bezpieczeństwa współczynnik 13-17, 192, 222
brązy na odlewy 292
—, — — — własności fizyczne 268
—, — — — wytrzymałościowe 292
—, — — — zmęczeniowe 292
Bredta wzory 57-62
Brinella twardość 266-290
Burzyńskiego hipoteza 39

Ceowniki, skręcanie 63-65
—, — — — zginanie 127
ciśnieniowe naczynia 170-197
Coulomba hipoteza 38
cykle obciążeń 219-223
cyna 270
cynk 268

Dna zbiorników 190
drewno, własności 44, 268

druk patentowany, sprężynowy 284
— uszczelniający 196
dural, duraluminium 208, 236, 290
dwuteowniki, skręcanie 63-67
— spawane 201

Energia sprężysta 27
Eulera wzory 40-45

Granica plastyczności 13, 43, 266-295
granit 268
gwinty 264

Haki, obliczanie 125
Hertza wzory 32-36
hipoteza Burzyńskiego 39
— Coulomba 37-39
— Hubera 37-39
— Saint-Venanta 36
hipotezy wytrzymałościowe 36-39
Hooke'a prawo 23
— — — przy ścinaniu 25
Hubera hipoteza 37-39

Kauczuk 195, 268
kąt odkształcenia postaciowego 26
— skręcenia 28
— ugięcia 70
kolnierze 193-197
kryteria wytrzymałościowe 11
krzywizna względna 125
kwadratowe pręty skręcane 62

Materiały sprężysto-krucho 36
— sprężysto-plastyczne 37
metoda nośności granicznej 11, 21
— stanów granicznych 9, 22
— superpozycji 97

stan graniczny 22
stateczność płyt 164-167
— powłok 177
— prętów 39-51
— rur 174-178
stopy aluminium 212, 231, 268, 290
— lekkie 268, 290
— miedzi 268, 292-295
szkło 268
sztywność na skręcanie 28, 53, 63
— — zginanie 70

Ścinanie 25-27
— czyste 25
— technologiczne 26
ściskanie 40
— i zginanie 134
śrubowo-kołnierzone połączenie 193-197
śruby 193, 264

Teowniki, skręcanie 63-67
Tetmajera wzór 41
twardość Brinella 268-290

Udarność 266-286
uszczelki 195

Walczaki 168-193
wały 28
—, obliczenia zmęczeniowe 216-237
warstwa obojętna 70, 125
Wöhlera wykres 216, 237
wskaźnik wytrzymałości, tablica 19
— — na skręcanie 19, 28
— — — zginanie 19, 30
współczynnik bezpieczeństwa 13-17, 232
— — — na wyboczenie 42
— — — statyczny 13-17
— — — zmęczeniowy 222
— działania karbu 217, 244
— kształtu 217, 244-264
— spiętrzenia naprężeń 202-205, 218
— stanu powierzchni 218, 242
— wielkości przedmiotu 219, 239-241
— wrażliwości materiału 217, 242

współczynnik wyboczeniowy 43
wyboczenie 40-55
— prętów 40-51
— — o przekroju zmiennym 48-51
— rur 177
— skrętno-giętne 53-55
— sprężyn śrubowych 52
wydłużenie względne 23
— równomierne 266, 290
wykres Smitha 221, 235
— Wöhlera 216, 237
wykresy zmęczeniowe 239-265
wytrzymałość na pełzanie 20
— — rozciąganie 13, 266-293
— złożona 37, 229
— zmęczeniowa 216-265
wzory Bredta 57
— Eulera 40
— Hertza 32-36

Zbiorniki ciśnieniowe 168-197
— — otwarte 180
zginanie belek 69-98
— — — statycznie niewyznaczalnych 82-97
— — — wyznaczalnych 69-81, 98
— łuków 11, 124
— płaskie 30, 69
— płyt 142-167
— — prostokątnych 157-163
— powłok 168-186
— ram 99-110
— rur 168-176
— ukośne 31
— walcowe płyt 155
zmęczeniowe naprężenia 216-238
— obliczenia 216-265
zwichrzenie 20, 53
— belek 53

Żeliwo 44, 192, 266, 288, 294
— modyfikowane 288
— sferoidalne 288
— szare 266, 288
— żaroodporne 288

O książce:

W książce omówiono metody obliczeniowe i podano wzory stosowane obecnie w dziedzinie wytrzymałości materiałów i konstrukcji. Stanowi ona wademekum przydatne dla studentów przy wykonywaniu projektów oraz prac przejściowych i dyplomowych, a także dla inżynierów w biurach projektowych.

Na szczególną uwagę zasługuje zbiór tablic zawierających własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe materiałów stosowanych w budowie i eksploatacji maszyn oraz konstrukcji, z uwzględnieniem różnych warunków pracy i zakresów temperatury.

O Autorach:

Profesorowie Michał Edward i Tadeusz Niezgodzińscy są autorami wielokrotnie wznawianego podręcznika *Wytrzymałość materiałów*, z którego korzystało kilka pokoleń studentów i inżynierów. Również praca *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe* doczekała się dziewiątego wydania.

Autorzy są pracownikami Politechniki Łódzkiej.

Cena 29,- zł

ISBN 81

8320143026412

29.00zł



8320143026412