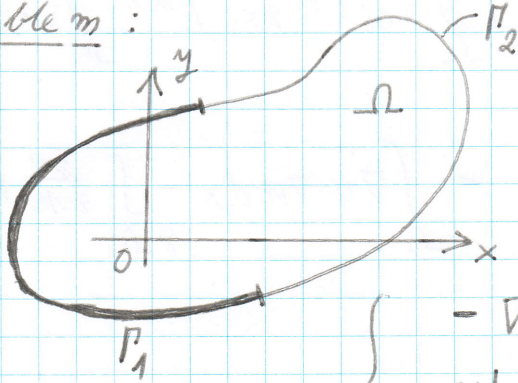


(1)

# Sformułowanie wariacyjne i metoda elementów skończonych - - przykład zagadnienia w 2D

Problem:



$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

Szukamy rozwiązania zagadnienia  
brzegowego:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nabla^2 u = f \quad \text{w } \Omega \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ u|_{\Gamma_1} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au|_{\Gamma_2} = g \end{array} \right. \quad \text{w-li brzegowe na } \partial\Omega$$

Pochodzenie problemu: zagadnienia dyfuzji i przewodnictwa ciepła (stany ustalone) przy mieszanych warunkach brzegowych.

Rozwiązanie klasyczne wymaga mocnych założeń co do regularności danych zadania ( $f, g$ , regularność brzegu  $\partial\Omega$ ). W szczególności  $f \in C(\Omega)$ ,  $g \in C(\Gamma_2)$ . Przy odpowiednio regularnym brzegu  $\partial\Omega$ ,  $u \in C^2(\Omega)$  tj. ciągła wraz z pochodnymi do rzędu drugiego. Tak mocne warunki nie muszą być spełnione w praktycznych zagadnieniach. Z tego powodu warto rozważyć sformułowanie słabe (czyli wariacyjne).

Założmy na chwilę, że dane zagadnienie brzegowe, tj.  $f$  i  $g$  są odpowiednio regularne i  $u$  jest rozwiązaniem klasycznym. Wobec tego, dla każdej odpowiednio regularnej funkcji  $v$  określonej w  $\Omega$  następująca równość całkowa

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (2)$$

spełniona jest tożsamościowo! ( $dx = dx \, dy$ )



(2)

Przekształćmy lewą stronę tej równości stosując twierdzenie GGO.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\nabla^2 u) w \, dx &= - \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}}_{\text{sumowanie po } i!} w \, dx = - \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \, dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx \right] = \\ &\stackrel{\text{GGO}}{=} - \int_{\partial \Omega} w \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i} n_i}_{\frac{\partial u}{\partial n} \text{ - pochodna normalna}} \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS + \int_{\Gamma_2} (g - au) w \, dS \quad \text{!} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = g - au \Big|_{\Gamma_2} \text{!}$$

Ponieważ o wartości  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}$  nic a priori nie wiemy, nałożymy na (do tej pory dowolną) funkcję  $w$  warunek  $w|_{\Gamma_1} = 0$ .  
Wówczas, dla każdej takiej funkcji tożsamość całkowa przyjmie postać

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Gamma_2} (g - au) w \, dS \quad (3)$$

Podkreślimy raz jeszcze: jeśli  $f$  i  $g$  są ciągłe, a  $u$  jest rozwiązaniem klasycznym problemu (1) to równość (3) jest spełniona tożsamościowo dla każdej odpowiednio regularnej funkcji  $w$ , takiej że  $w|_{\Gamma_1} = 0$ .

Intota sformułowania stałego polega na spostrzeżeniu, że do istnienia wszystkich całek w (3) wystarczy znacznie słabsze założenia co do regularności  $u, f$  i  $g$  (a także brzegu  $\partial \Omega$ )!



(3)

Pomijając dość subtelny kwestię regularności  $\partial\Omega$  (dość powiedzieć, że wszystkie „techniczne” kszułtki  $\Omega$  sę OK) skierokamy - na podstawie wyników teorii całkowania (w nieco ogólniejszym sensie niż Riemanna, a mianowicie w sensie Lebesgue'a) - że „naturalnym” zbiorem funkcji dla  $u$  i  $w$  jest przestrzeń:

$$V := \left\{ w : \underbrace{\int_{\Omega} w^2 dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx}_{w\text{-młi dla przestrzeni } H_1(\Omega)} < \infty, w|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

czyli  $V := \{ w : w \in H_1(\Omega), w|_{\Gamma_1} = 0 \}$

Jednocześnie, wystarczy, aby  $f \in L^2(\Omega) = \{ \phi : \int_{\Omega} \phi^2 dx < \infty \}$   
i  $g \in L^2(\Gamma_2) := \{ \psi : \int_{\Gamma_2} \psi^2 dS < \infty \}$

Zauważmy, że wymagane w-mki regularności sę istotnie „dość słabe”! Np. funkcja  $u(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$  jest z  $H_1(\Omega)$ , gdzie  $\Omega$  to koło o środku w  $(0,0)$  i promieniu  $R$ . Z drugiej strony w  $(0,0)$   $u$  nie jest różniczkowalna. Z kolei  $f(x,y) = 1/\sqrt[4]{x^2+y^2}$  jest w tym samym obszarze z  $L^2(\Omega)$ , chociaż w  $(0,0)$  nie mamy nawet do jej dziedziiny.

Istotne znaczenie ma również fakt, że tożsamość całkowa (3) nie zawiera całki brzegowej z pochodnych  $u$  lub  $w$ . W teorii funkcji z przestrzeni  $H_1$  pokazuje się, że funkcjom o takich minimalnych wymaganiach co do regularności nie można na ogół przypisać jednoznacznej wartości brzegowej ich



(9)

podrodnych 1-go rzędu (ani - tym barabij - wyższych rzędów) -  
 - mówimy, że dla pochodnych nie jest określony operator  
ślądu (na brzegu). Nic oznacza to, że równość (3) „nie ma”  
 o warunku brzegowym na  $\Gamma_2$  zawierającym  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Jak  
 za chwilę przekonamy, obecność całki brzegowej po  $\Gamma_2$  nieświe  
 dotychczas potrzebnej informacji. Z drugiej strony,  
 warunek brzegowy na  $\Gamma_1$  ( $u|_{\Gamma_1} = 0$ ) jest uwzględniony  
 w definicji samej przestrzeni rozwiązań  $V$ . Mówimy, że  
 warunek  $u|_{\Gamma_1} = 0$  (ogólnie - w-ek determinujący  
 brzegową wartość funkcji, czyli w-ek Dirichleta) jest  
 warunkiem zasadniczym (ang. essential), a warunek  
 odwołujący się do pochodnej normalnej (w-ek Robin'a, lub  
 w szczególności gdy  $a \equiv 0$  - warunek Neumanna) jest  
 tzw. warunkiem naturalnym. Realizacja (wymuszenie)  
 WN odbywa się zawsze „pośrednio”, poprzez obecność w  
 brzoźnie całkowej odpowiedniego składnika brzegowego.

Możemy już sformułować zadanie (1) w formie słabiej:

Wyznaczyć funkcję  $u \in V$  taką, że dla każdej funkcji  $v \in V$   
 spełniona jest równość (3):

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} (g - au) v \, ds$$

Z oryginalnych powodów funkcje  $v$  nazywamy próbną (albo  
 testową).

Wstaje pytanie: czy jeśli  $f, g$  i kształt  $\partial \Omega$  dopuszczają  
 istnienie regularnego (klasycznego) rozwiązania zagadnienia (1)  
 to rozwiązanie uogólnione i klasyczne są identyczne?



(5)

Oczywiście, należy zadać również pytanie, czy rozwiązanie uogólnione jest jednoznaczne. Odpowiednia teoria (w szczególności twierdzenie Laxa-Millgrama) daje w naszym przypadku odpowiedź twierdzącą jeśli tylko  $\Gamma_1 \neq \emptyset$  lub - jeśli  $\partial\Omega = \Gamma_2$  - gdy  $a \neq 0$ .

Pokażemy, że regularne rozwiązanie uogólnione pokazuje się x. Uniezgodnym. Dla takiego rozwiązania wszystkie przekształcenia które doprowadziły do (3) można odwrócić co prowadzi do wniosku, że dla każdej funkcji  $v \in V$  spełniona jest tożsamość o wartości całkowej.

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \int_{\Omega} (-\nabla^2 u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} (g - au) v \, dS$$

Ponieważ  $w|_{\Gamma_1} = 0$  mamy stąd:

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u - f) w \, dx + \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + au - g \right) w \, dS = 0$$

W przestrzeni  $V$  istnieją funkcje, które znikają nie tylko na  $\Gamma_1$ , ale na całym brzegu  $\partial\Omega$ . Dla każdej takiej funkcji całka po  $\Gamma_2$  znika i mamy zatem

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u - f) \tilde{w} \, dx = 0 \quad \text{dla } \forall w \in V \text{ i } w|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Łatwo pokazać, że wynika stąd równość  $-\nabla^2 u - f = 0$  w każdym wewnętrznym punkcie  $\Omega$  (oczywiście, że  $u$  jest rozwiązaniem klasycznym r-nia Poissona  $-\nabla^2 u = f$ ). Istotnie, założymy że w pewnym punkcie  $(-\nabla^2 u - f)(p) > 0$ . Ponieważ z założenia  $-\nabla^2 u - f$  jest ciągła, istnieje otoczenie  $O(p)$



(6)

punktu  $P$  taki, że  $(-\nabla^2 u - f)(x, y) > 0$  dla każdego  $(x, y) \in O(P)$ . Wśród funkcji testowych istnieje taka  $\tilde{w}$ , która w otoczeniu  $O(P)$  ma stały znak, powiedzmy  $\tilde{w} > 0$  gdy  $(x, y) \in O(P)$ , a poza tym otoczeniem jest równa zero. Dla tak dobranej funkcji testowej  $\tilde{w}$  całka (4) nie może być równa zero co prowadzi do założeniu, że w punkcie  $P$   $-\nabla^2 u - f > 0$ .

Skoro  $-\nabla^2 u = f$  w  $\Omega$  to całka obrotowa w (4) znika dla każdej funkcji testowej  $w \in V$  i równość (4) redukuje się do postaci

$$\int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + au - g \right) w \, dS = 0$$

Analogiczne rozumowanie (ad absurdum) prowadzi teraz do wniosku, że w każdym punkcie  $\Gamma_2$  musi zachodzić równość

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au - g = 0$$

co dowodzi, że funkcja  $u$  spełnia również (klasyczny) warunek brzegowy.

### Dalsze komentarze:

- Cała prezentacja obowiązuje bez zmian dla przypadku 3D (a nawet  $nD$ )
- W niektórych dziedzinach mechaniki (ogólniej fizyki) pojawiają się równania różniczkowe cząstkowe wyższego rzędu (np. teoria belek, teoria płyt - równania 4-ego rzędu, np. z operatorem  $\Delta^2$  zwanym biLaplasiem). Dla takich zagadnień definiuje się przestrzeń  $H_2$ , a w-nu zasadniczo obejmują funkcje i ich pochodne 1-ego rzędu. Eventualne w-nu brzegowe odnoszą się do pochodnych rzędu 2 i 3 są w-nu naturalnymi.



(7)

## Ogólna metoda numeryczna dla zagadnienia uogólnionego

Posługując się omówionym wcześniej przykładem omówimy ogólną metodę dyskretyzacji zagadnienia uogólnionego znaną pod nazwą metody Galerkin.

Wprowadźmy w przestrzeni  $V$  skończone wymiarową podprzestrzeń  $V_h$  rozpiętą przez zadany zbiór tzw. funkcji bazowych  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ ,  $\varphi_i \in V$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Następnie, zdefiniujemy przybliżone rozwiązanie uogólnionego zagadnienia brzegowego (str. 4) wzorem

$$u \approx u_h = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, \quad c_1, \dots, c_N - \text{nieznane współczynniki.}$$

rozkładu  $u_h$  w bazie  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$

Zauważmy, że „z automatu”  $u_h \in V$ .

Podstawiamy  $u_h$  do naszej równości całkowitej. W roli funkcji testowych przyjmujemy kolejne funkcje bazowe  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ . W efekcie otrzymujemy układ  $N$  równań algebraicznych liniowych z niewiadomymi  $c_1, c_2, \dots, c_N$ :

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \right\} c_j = \int_{\Omega} f \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_i dS - \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_2} a \varphi_i \varphi_j dS \right] c_j \quad (5)$$

Definiujemy obidiety:

$$\begin{cases} \mathbf{K}: k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx + \int_{\Gamma_2} a \varphi_i \varphi_j dS, & i, j=1, \dots, N \\ \mathbf{r}: r_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_i dS, & i=1, \dots, N. \end{cases}$$



(8)

Otrzymaliśmy liniowy układ algebraiczny  $Kc = r \Rightarrow c$ .

Warianty wyboru bazy. Metoda elementów skończonych.

Wam bliżej efektownego działania metody obliczeniowej opizanej w poprzednim punkcie jest aby macierz  $K$  była

- 1) macierze symetrycznej - i wówczas może mieć dwie wypelnienice (cyli druga czesc  $k_{ij} \neq 0$ )
- 2) rzadka (tylko zerowa czesc  $k_{ij} \neq 0$ ) - i wówczas może mieć zerowe rozmiary (a nawet musi).

Z pierwszym wariantem mamy do czynienia w przypadku stosowania trz. bazy globalnej (tj.  $y_i \neq 0$  na całym  $\Omega$ ).

Baza globalna moze byc tak, aby nawet stosunkowo niewielka liczba funkcji bazowych (policzymy  $\sim 10^2$  czy  $10^3$ ) dawała bardzo dobrae przyblizenie. Szeregowe celowe jest stosowanie baz ortogonalnych. Bazy globalne daja sie zastosowac jedynie dla bardzo regularnych geometrii obszaru  $\Omega$  (prostokat, koło itp.)

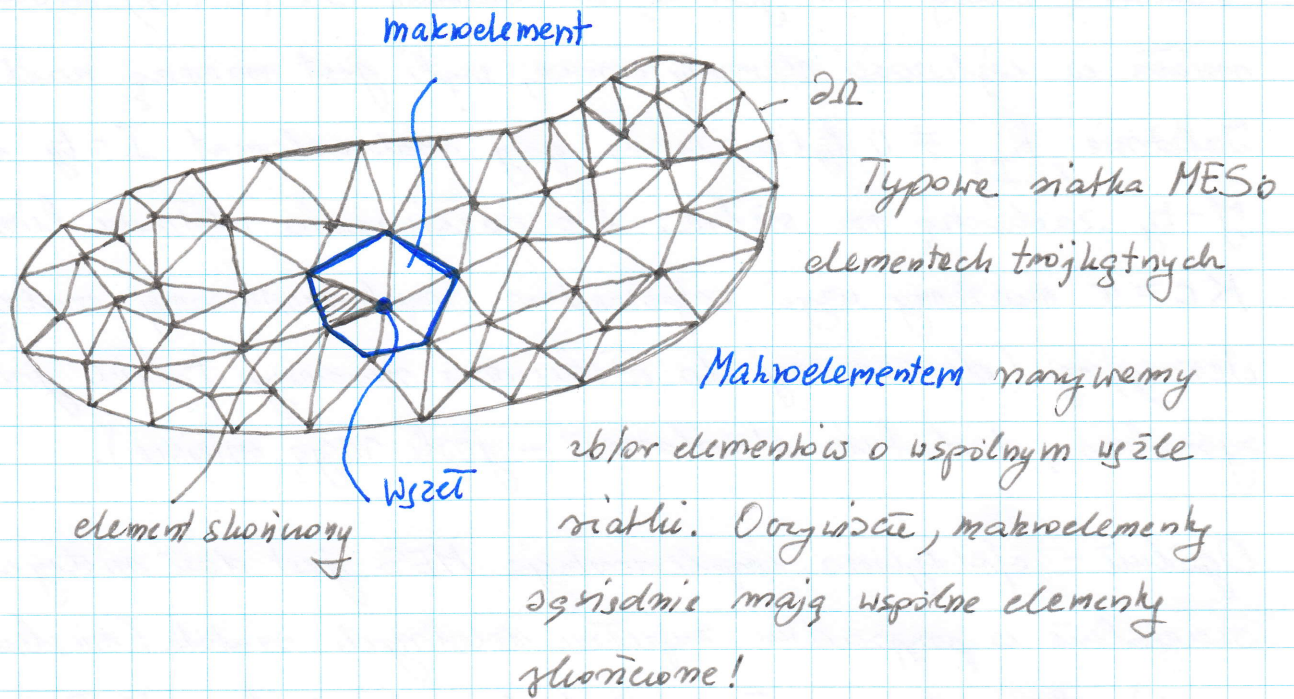
W drugim przypadku konstruujemy bardzo duzo bardzo prostych funkcji bazowych, ktorych naimniki (tj. obszary na ktorych funkcje te sa rozne od zera) sa niewielkie.

Ta koncepcja prowadzi do Metody Elementów Skończonych. (MES, ang. FEM: Finite Element Method)

Zacznijmy od zdefiniowania podstawowych pojeci. Postujmy nam w tym celu rysunek...



9



Z każdymi węzłami (a zatem z każdym makroelementem) związana jest dokładnie jedna funkcja bazowa  $\varphi_I$  ( $I$  - indeks globalnej numeracji węzłów). Jej wartość w węźle  $I$ -tym to 1, w każdym innym - zero.

W każdym elemencie skończonym należącym do makroelementu o numerze  $I$  funkcja  $\varphi_I$  jest liniową funkcją  $x$  i  $y$ . W języku geometrii: wykresem  $\varphi_I$  jest powierzchnia boczna ostrosłupa, którego podstawę jest makroelement  $I$ -ty i którego wysokości jest równa 1.

W globalnym układzie współrzędnych

$$\varphi_I|_{e_{Ij}} = \alpha_{Ij}x + \beta_{Ij}y + \gamma_{Ij}$$

gdzie  $e_{Ij}$  to element skończony należący do makroelementu  $I$  ( $j = 1, \dots, N_I \leftarrow$  liczba elementów w makroelementu  $I$ )

Zauważmy, że  $\nabla \varphi_I|_{e_{Ij}} = \alpha_{Ij} \vec{e}_x + \beta_{Ij} \vec{e}_y$  czyli gradient funkcji bazowej jest w każdym elemencie funkcją stałą!



Klucową zaletą MES jest to, że macierz  $K$  (str. 7) będzie miała w większości elementy zerowe, czyli jest macierzą nadtę. Zatem,  $K_{IJ} \neq 0$  tylko wtedy gdy małoelement  $I$ -ty i  $J$ -ty zachodzą na siebie. Do rozwiązywania układu liniowego  $Kc = r$  możemy użyć odpowiednio implementowanej metody iteracyjnej (dostosowanej do właściwości macierzy takich jak symetria, dodatnia określoność - jeśli mają miejsce).

Ogólnie - efektywna implementacja MES jest dość nietrywialna, szczególnie w przypadku zupełnie dowolnych siatek (niestrukturalnych). Przy stosowaniu metod iteracyjnych typu Kryłowe (CG, GMRES, BiCG itp) główna konstrukcja macierzy  $K$  może być zbędna (wystarczy zaprogramować procedurę mnożenia „dominującej” macierzy  $K$  przez dowolny wektor) - tzw. matrix-free implementation. Szczęśliwe decyzje co do sposobu organizacji danych i wyboru metod rozwiązywania układu zależą od typu siatki, wymiaru przestrzeni (2D vs. 3D), normy problemu i zasobów obliczeniowych dostępnych komputerów.

Na koniec dodajemy, że operacje na funkcjach barowych implementowane są często w taki sposób, że przeprowadzamy je na poziomie poszczególnych elementów, po czym odpowiednio ułożymy (zargomono mówiąc - assembly) w struktury globalne. Procedura „assembly” wymaga zwykle przekształcania lokalnej numeracji węzłów w poszczególnych elementach zliczonych na numerację globalną.