Sformułowanie słabe (wariacyjne) zagadnienia brzegowego

Rozważmy zagadnienie brzegowe postaci

$$(*)\quad \begin{cases} (p(x)y'(x))' - q(x)y(x) = f(x), & x \in (a,b) \\ \alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = \delta_a \\ \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = \delta_b \end{cases}$$

Stałe $\alpha_a, \beta_a, \delta_a, \alpha_b, \beta_b, \delta_b$ - zadane

Funkcje p, q i f są zadane. Ponadto zakładamy, że

1) $p \in C^1(a,b) \cap C[a,b]$ i $p > 0$

2) $q \in C[a,b]$ i $q \geq 0$

3) $f \in C[a,b]$

Dowodzi się istnienia jednoznacznego rozwiązania

$y \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$. - rozwiązanie klasyczne

W wielu przypadkach wymogi regularności danych (p, q, f) potrzebne dla istnienia rozwiązania klasycznego są za silne! Np. funkcje q i f nie są ciągłe, albo pochodna $p'(x)$ nie istnieje w każdym punkcie $x \in (a,b)$

W zadaniach transportu ciepła/masy w 1D $p(x)$ opisuje własności (niejednorodnego) ośrodka. Własności te mogą zmieniać się względem x w sposób nieróżniczkowalny.

Pokażemy, że zagadnienie $(*)$ można przeformułować w taki sposób, że klasa dopuszczalnych danych zadania oraz jego rozwiązań ulegnie znacznemu rozszerzeniu.

Załóżmy, że $y \doteq y(x)$ jest rozwiązaniem klasycznym tj. równanie różniczkowe jest – dla $y = y(x)$ – tożsamością prawdziwą dla każdego $x \in (a,b)$

Pomnóżmy równanie przez pewną funkcję $\phi(x)$ i scałkujmy w przedziale $[a,b]$

$$\int_a^b [\,(p(x)y'(x))' - q(x)y(x)]\,\phi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

Obliczmy przez części całkę z pochodnymi:

$$\int_a^b (p(x)y'(x))'\phi(x)\,dx = p(x)y'(x)\phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'(x)\phi'(x)\,dx =$$

$$= p(b)y'(b)\phi(b) - p(a)y'(a)\phi(a) - \int_a^b p(x)y'(x)\phi'(x)\,dx$$

Zakładając, że $\beta_a \neq 0$ i $\beta_b \neq 0$ możemy napisać

$$y'(a) = \frac{1}{\beta_a}(\delta_a - \alpha_a y(a))$$

$$y'(b) = \frac{1}{\beta_b}(\delta_b - \alpha_b y(b))$$

Zatem:

$$\int_a^b (p(x)y'(x))'\phi(x)\,dx = \frac{1}{\beta_b}p(b)(\delta_b - \alpha_b y(b))\phi(b) - \frac{1}{\beta_a}p(a)(\delta_a - \alpha_a y(a))\phi(a) -$$

$$- \int_a^b p(x)y'(x)\phi'(x)\,dx$$

Po podstawieniu otrzymujemy równość całkową postaci:

$$\frac{1}{\beta_b}p(b)[\delta_b - \alpha_b y(b)]\phi(b) - \frac{1}{\beta_a}p(a)[\delta_a - \alpha_a y(a)]\phi(a) - \int_a^b p(x)y'(x)\phi'(x)\,dx -$$

$$- \int_a^b q(x)y(x)\phi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

Rozwiązaniem słabym zagadnienia brzegowego (*) nazywamy taką funkcję $y \in V$, że dla każdej funkcji $\phi \in V$ spełniona jest równość całkowa (**).

Rozwiązanie metodą Galerkina.

W zbiorze funkcji V definiujemy funkcje bazowe $\{b_k,\ k = 0,1,..,K\}$, $b_k \in V$, i poszukujemy przybliżonego rozwiązania

$$y(x) \cong \sum_{k=0}^{K} c_k b_k(x)$$

Dalej, żądamy aby po podstawieniu przybliżonego rozwiązania do równości całkowej była ona spełniona dla $\phi = b_0, \phi = b_1, \dots, \phi = b_K$. W ten sposób otrzymujemy...

$$\sum_{k=0}^{K}\Big[\int_a^b p(x)\phi_j'(x)\phi_k'(x)dx + \int_a^b q(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx +$$

$$+ \frac{\alpha_b}{\beta_b}p(b)\phi_j(b)\phi_k(b) - \frac{\alpha_a}{\beta_a}p(a)\phi_j(a)\phi_k(a)\Big]c_k =$$

$$= -\int_a^b f(x)\phi_j(x)dx + \frac{\delta_b}{\beta_b}p(b)\phi_j(b) - \frac{\delta_a}{\beta_a}p(a)\phi_j(a)$$

$$j = 0,..,K$$

czyli liniowy układ równań

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{r}$$

gdzie:

$$a_{jk} = \int_a^b p(x)\phi_j'(x)\phi_k'(x)dx + \int_a^b q(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx + \frac{\alpha_b}{\beta_b}p(b)\phi_j(b)\phi_k(b) -$$

$$-\frac{\alpha_a}{\beta_a}p(a)\phi_j(a)\phi_k(a) \qquad , \quad i,j = 0,1,..,K$$

$$\int_a^b p(x)y'(x)\phi'(x)dx + \int_a^b q(x)y(x)\phi(x)dx + \frac{\alpha_b}{\beta_b}p(b)y(b)\phi(b) - \frac{\alpha_a}{\beta_a}p(a)y(a)\phi(a) =$$

$$= -\int_a^b f(x)\phi(x)dx + \frac{\sigma_b}{\beta_b}p(b)\phi(b) - \frac{\sigma_a}{\beta_a}p(a)\phi(a) \qquad (**)$$

Zauważmy, że:

1) występujące w powyższej równości całki istnieją przy słabszych wymaganiach co do danych i rozwiązania niż w przypadku sformułowania klasycznego.

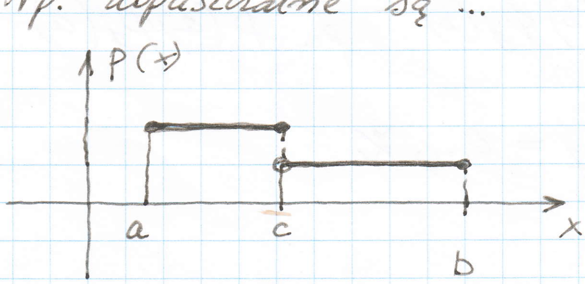
Istotnie: można pokazać, że wystarczy założyć, że istnieją całki

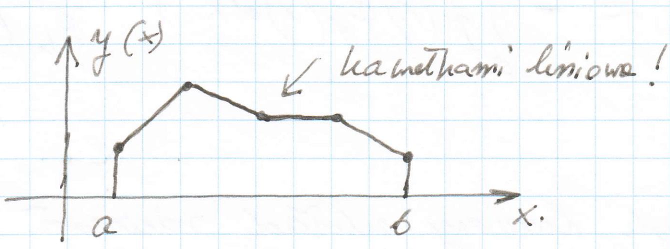
$$\int_a^b p(x)y'^2(x)dx, \quad \int_a^b p(x)\phi'^2(x)dx, \quad \int_a^b q(x)y^2(x)dx,$$

$$\int_a^b q(x)\phi^2(x)dx, \quad \int_a^b \phi^2(x)dx, \quad \int_a^b f^2(x)dx.$$

Do istnienia tych całek nie potrzeba aż takiej regularności jak dla <u>punktowego</u> istnienia pochodnej $y''(x)$, $p'(x)$ itd.

Np. dopuszczalne są ...





Zdefiniujmy zbiory funkcji $L^2[a,b] := \{g : \int_a^b g^2(x)dx < 0\}$

$$V := \{\phi : \phi \in L^2[a,b] \text{ i } \int_a^b [p(x)\phi'^2(x) + q(x)\phi^2(x)]dx < \infty\}$$

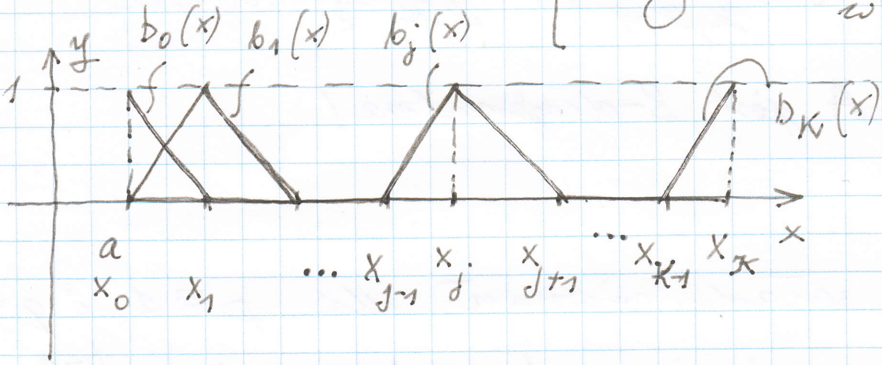
oraz $p, q, f \in L^2[a,b]$ (zakładamy, że $p(a)$ i $p(b)$ są jednoznacznie określone jako odpowiednie granice przy $x \to a^+$ i $x \to b^-$)

$$r_j = -\int_a^b f(x)\phi_j(x)\,dx + \frac{\delta_b}{\beta_b} p(b)\phi_j(b) - \frac{\delta_a}{\beta_a} p(a)\phi_j(a)$$
$$j = 0, 1, .., K$$

W zależności od wyboru funkcji bazowych, macierz układu jest pełna albo rzadka. Ten drugi przypadek jest szczególnie interesujący. Prowadzi do niego tzw. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH. Omówimy jej podstawową wersję.

Definiujemy w $[a,b]$ zbiór węzłów $\{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_K = b\}$ i funkcje

$$b_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{gdy } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{gdy } x \in [x_j; x_{j+1}] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$



Oznaczmy $h_{j-1} = x_j - x_{j-1}$, $h_j = x_{j+1} - x_j$ ... Wówczas

$$b_j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_{j-1}}(x - x_{j-1}) & , x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \dfrac{1}{h_j}(x_{j+1} - x) & , x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & , \text{inne } x \end{cases}$$

$$b_j'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_{j-1}} & , x \in (x_{j-1}, x_j) \\ -\dfrac{1}{h_j} & , x \in (x_j, x_{j+1}) \\ 0 & , x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

↑ nieokreślone w $\{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ (nie szkodzi!)

Zauważmy teraz, że:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b p(x)\,b_j'(x)\,b_k'(x)\,dx \equiv 0 \\ &\int_a^b q(x)\,b_j(x)\,b_k(x)\,dx \equiv 0 \end{aligned}\right\}\ \text{gdy} \quad |j-k|>1$$

$$b_j(b)\,b_k(b) = b_j(a)\,b_k(a) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j\neq k. \end{cases}$$

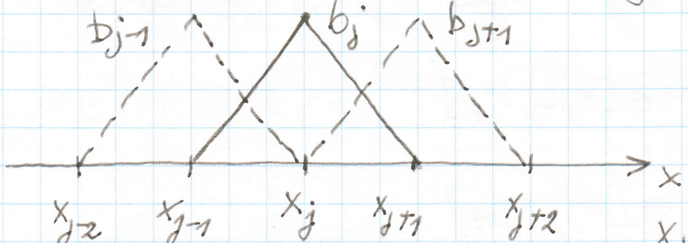
Wniosek:

- dla $j=0$ tylko a_{00} i a_{01} są niezerowe
- dla $j=1,2,..,K-1$ tylko $a_{j,j-1}$, a_{jj} i $a_{j,j+1}$ są niezerowe
- dla $j=K$ tylko $a_{K,K-1}$ i a_{KK} są niezerowe

Zatem – macierz **A** jest 3-diagonalna!

<u>Przykład</u>:

Obliczmy elementy układu równań dla $p\equiv 1$ i $q\equiv 1$. oraz podziału równomiernego $h_{j-1}\equiv h_j = .. = h = \frac{b-a}{K}$



$j = 1,2,..,K-1$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_j^2(x)\,dx = 2\int_{x_j}^{x_{j+1}} b_j^2(x)\,dx = \frac{2}{h^2}\int_{x_j}^{x_j+h}(x_j+h-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}h$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} b_{j-1}(x)\,b_j(x)\,dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} b_j(x)\,b_{j+1}(x)\,dx = \frac{1}{h^2}\int_{x_j}^{x_j+h}(x_j+h-x)(x-x_j)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}h.$$

7

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} [b_j'(x)]^2 dx = \frac{1}{h^2} \cdot 2h = \frac{2}{h}$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} b_{j-1}'(x) b_j'(x) dx = -\frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{-1}{h} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} b_j'(x) b_{j+1}'(x) dx$$

Zatem:

$$\left.\begin{aligned} a_{jj} &= \frac{2}{h} + \frac{2}{3}h \\ a_{j,j-1} = a_{j,j+1} &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{6}h \end{aligned}\right\} j = 1, 2, ., K-1$$

$$a_{00} = \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h$$

$$a_{0,1} = -\frac{1}{h} + \frac{1}{6}h$$

$$a_{K,K-1} = -\frac{1}{h} + \frac{1}{6}h$$

$$a_{K,K} = \frac{1}{h} + \frac{1}{3}h$$

Układ trójdiagonalny ma symetryczną, nieosobliwą macierz.
Rozwiązujemy go metodą przeganiania (algorytm Thomasa)