Metoda Elementów Skonczonych (MES)
Sformułowania energetyczne

Finite Element Method (FEM)

MES – ujęcie energetyczne
Sformułowania słabe - *wariacyjne*

- Całkowe równania, zwykle sens energetyczny
- Poszukujemy ekstremów funkcji (max, min)
- Możemy robić „wariacje” uelastyczniając pewne wymagania (lub realizując je nie bardzo precyzyjnie)

VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND PLASTICITY

SECOND EDITION

KYUICHIRO WASHIZU

Professor of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo

PERGAMON PRESS

Oxford · New York · Toronto

Paris · Sydney · Braunschweig

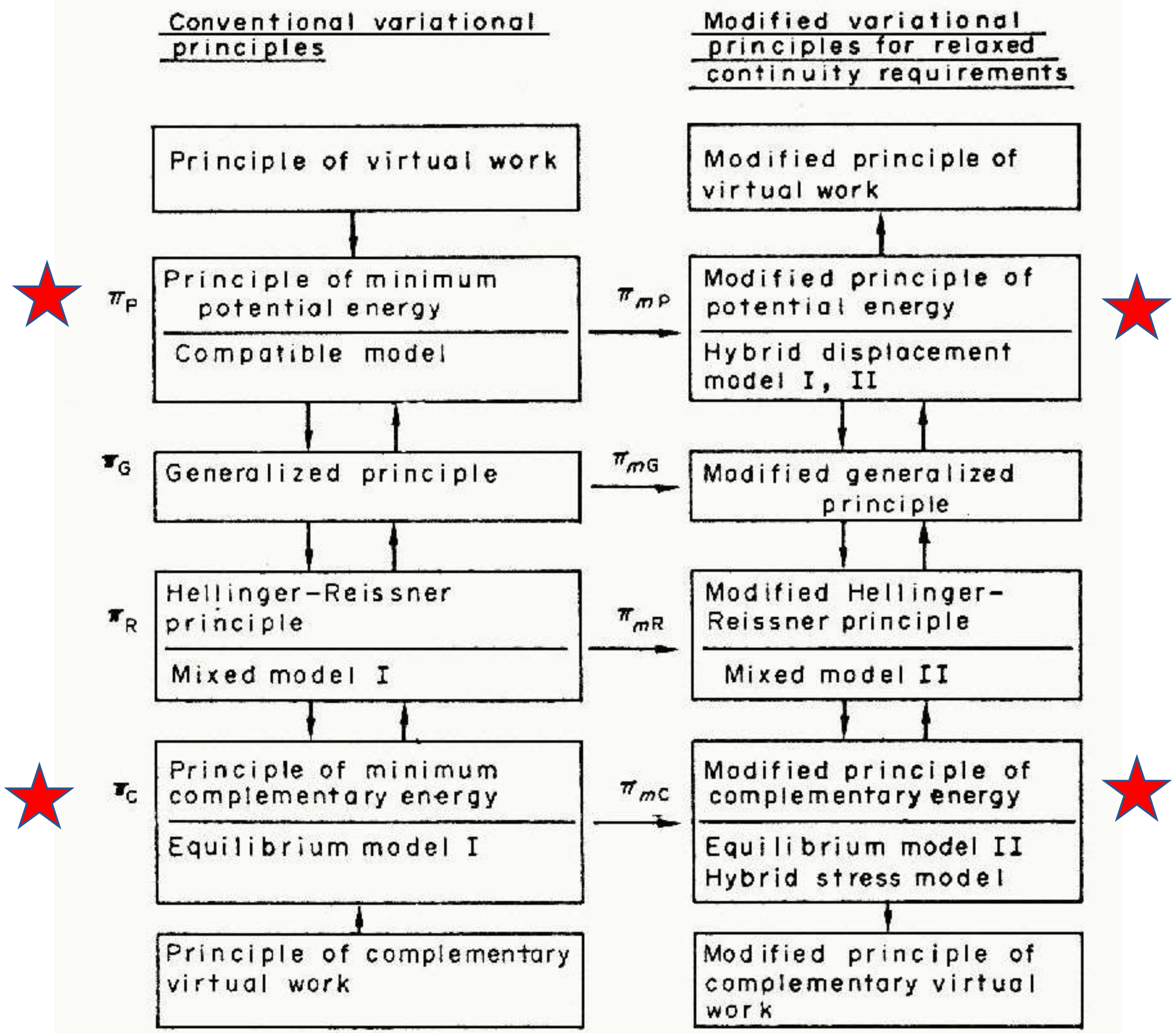


FIG. I-1. A flow diagram for the small displacement theory of elastostatics.

Przyjęta notacja:

- Zapis wskaźnikowy, i,j = 1,2,3
- Konwencja sumacyjna Einsteina
- Przecinek to różniczkowanie

$$u_{i,j} = \frac{du_i}{dx_j}$$

- Nakreślenie to wartość „zadana”

(1) *Equations of equilibrium:*

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0.$$

(2) *Strain–displacement relations:*

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

(3) *Stress–strain relations:*

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

or conversely

$$\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}.$$

(4) *Mechanical boundary conditions:*

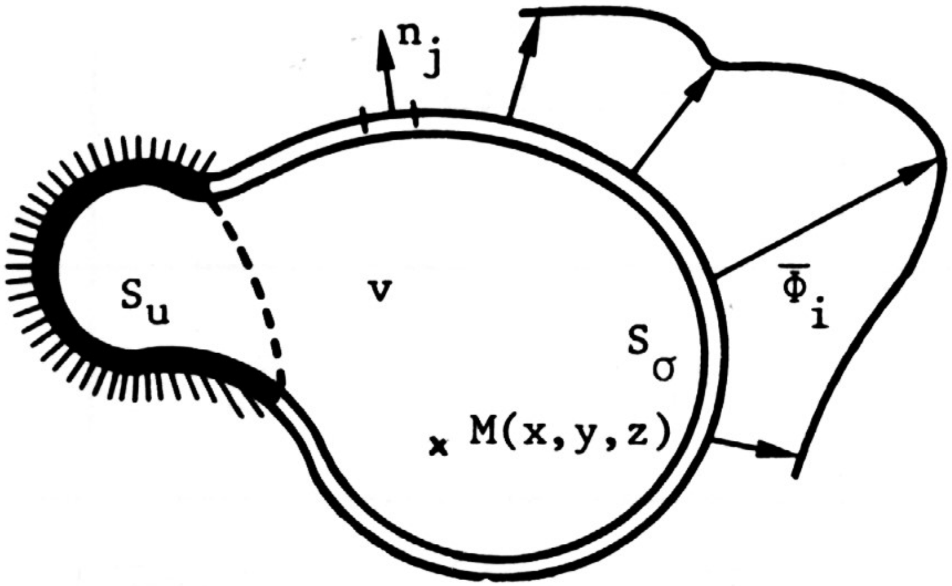
$$T_i = \bar{T}_i \qquad \text{on } S_\sigma,$$

where

$$T_i = \sigma_{ij}n_j.$$

(5) *Geometrical boundary conditions:*

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{on } S_u.$$



(1) *Equations of equilibrium:*

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0.$$

(2) *Strain–displacement relations:*

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

(3) *Stress–strain relations:*

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

or conversely

$$\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}.$$

(4) *Mechanical boundary conditions:*

$$T_i = \bar{T}_i \qquad \text{on } S_\sigma,$$

where

$$T_i = \sigma_{ij}n_j.$$

(5) *Geometrical boundary conditions:*

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{on } S_u.$$

Równania równowagi

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0.$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.$$

Równania geometryczne
(odkształcenia w funkcji przemieszczeń)

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Równania konstytutywne
(„prawo Hooke'a")

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Równania konstytutywne „odwrotnie”
(„prawo Hooke’a”)

$$\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\sigma\}$$

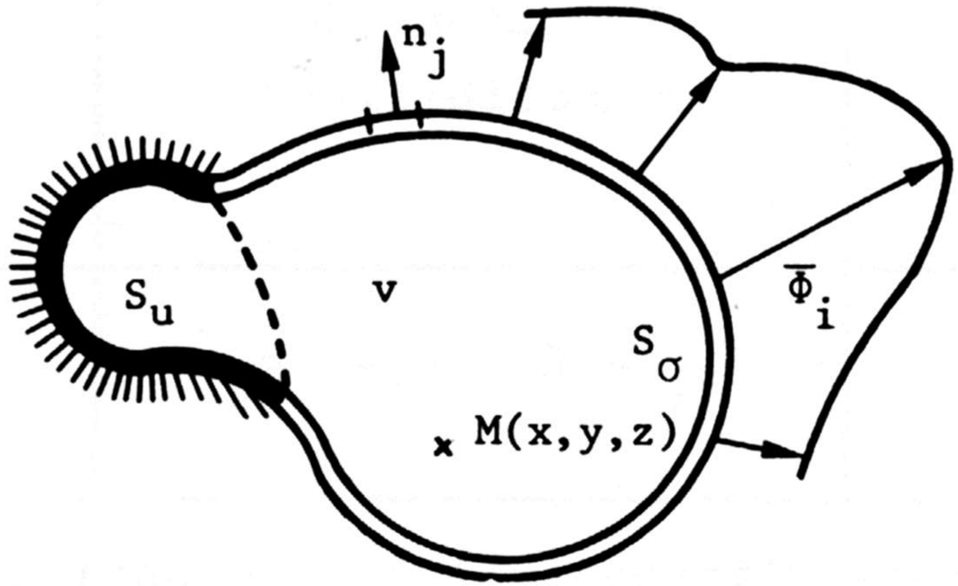
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Mechaniczne (statyczne) warunki brzegowe

$$T_i = \bar{T}_i \qquad \text{on } S_\sigma,$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Wzór Cauchy'ego
„siły na powierzchni"



Kinematyczne (przemieszczeniowe) warunki brzegowe

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{on } S_u$$

Sformułowanie energii odkształcenia (lub energii dopełniającej)

$$A(\varepsilon_{mn}) = \tfrac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl},$$

$$B(\sigma_{mn}) = \tfrac{1}{2} b_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl},$$

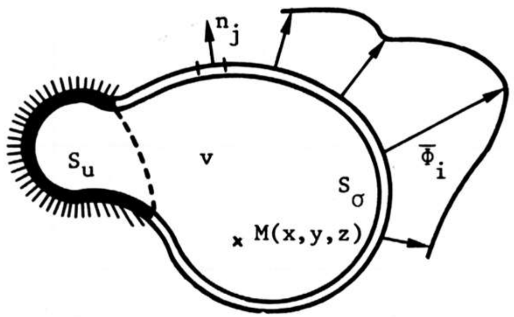
$$A(\varepsilon_{mn}) = \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\},$$

$$B(\sigma_{mn}) = \tfrac{1}{2} \{\sigma\}^T [B] \{\sigma\}.$$

$$A(u_i) = \tfrac{1}{8} a_{klmn} (u_{k,l} + u_{l,k})(u_{m,n} + u_{n,m})$$

Zasada prac przygotowanych

(ciało w równowadze, dane obciążenie i warunki brzegowe)



The principle of virtual work may be written as

$$\iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \iiint_V \bar{f}_i \delta u_i dV - \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0,$$

wirtualna praca sił wewnętrznych *wirtualna praca sił masowych* *wirtualna praca sił zewnętrznych*

where the subsidiary conditions are

$$\delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}),$$

and

$$\delta u_i = 0 \quad \text{on} \quad S_u.$$

δu $\delta\varepsilon$ przemieszczenie przygotowane: niesk. małe, zgodne z warunkami brzegowymi

Zasada minimum energii potencjalnej Π_p

The functional for the principle of minimum potential energy may be written as

$$\Pi_P = \iiint\limits_V [A(u_i) - \bar{f}_i u_i] dV - \iint\limits_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS \qquad \text{(I-2.19)}\dagger$$

where the subsidiary conditions are

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad S_u. \qquad \text{(I-2.20)}$$

*Ze wszystkich dopuszczalnych pól przemieszczeń – **rzeczywiste przemieszczenia** dają MINIMUM całkowitej energii potencjalnej* Π_p

ELEMENTY PRZEMIESZCZENIOWE – COMPATIBLE ELEMENTS

Uogólniona Zasada stacjonarnosci energii Π_G

Było:

$$\Pi_P = \iiint_V [A(u_i) - \bar{f}_i u_i] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad S_u.$$

$$\Pi_{G1} = \iiint_V \{A(\varepsilon_{ij}) - \bar{f}_i u_i - \sigma_{ij}[\varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})]\} dV$$
$$- \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS - \iint_{S_u} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS,$$

σ_{ij} p_i - mnożniki Lagrange'a – spełnienie warunku w sposób całkowy

*Ze wszystkich dopuszczalnych pól przemieszczeń – **rzeczywiste przemieszczenia** dają stacjonarność energii uogólnionej Π_G*

Zasada minimum energii dopełniającej Π_c

Było:

$$\Pi_P = \iiint\limits_V [A(u_i) - \bar{f}_i u_i] dV - \iint\limits_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad S_u.$$

$$\Pi_C = \iiint\limits_V B(\sigma_{ij}) dV - \iint\limits_{S_u} T_i \bar{u}_i dS$$

z warunkami koniecznymi:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{in} \quad V,$$

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{on} \quad S_\sigma.$$

*Ze wszystkich dopuszczalnych pól naprężeń – **rzeczywiste naprężenia** dają minimum energii dopełniającej* Π_G

ELEMENTY SIŁOWE – EQUILIBRIUM ELEMENTS

Zmodyfikowana zasada minimum energii potencjalnej Π_p

$$\Pi_P = \iiint_V [A(u_i) - \bar{f}_i u_i] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS \qquad u_i^{(a)} = u_i^{(b)} \quad \text{on} \quad S_{ab}$$

$$\Pi_{mP1} = \Pi_P - \sum \iint_{S_{ab}} \lambda_i (u_i^{(a)} - u_i^{(b)}) dS.$$

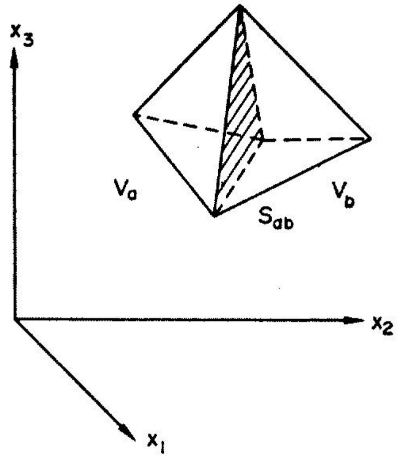


FIG. I-2. V_a, V_b and S_{ab}.

Zasada minimum energii potencjalnej Π_p ze **złagodzonymi warunkami ciągłości**

Energia teraz stacjonarna, a nie minimum

Złagodzony (do postaci całkowej) został warunek ciągłości przemieszczeń międzyelementowych.

Dochodzą dodatkowe zmienne (mnożniki Lagrange'a o charakterze sił na granicach międzyelementowych)

HYBRYDOWE ELEMENTY PRZEMIESZCZENIOWE – HYBRID DISPLACEMENT ELEMENTS

Zmodyfikowana zasada minimum energii dopełniającej Π_c

$$\Pi_C = \Sigma \iiint_{V_a} B(\sigma_{ij})dV - \iint_{S_u} T_i \bar{u}_i dS \qquad T_i^{(a)} + T_i^{(b)} = 0 \quad \text{on} \quad S_{ab}$$

$$\Pi_{mC} = \Pi_C - \Sigma \iint_{S_{ab}} \mu_i (T_i^{(a)} + T_i^{(b)}) dS$$

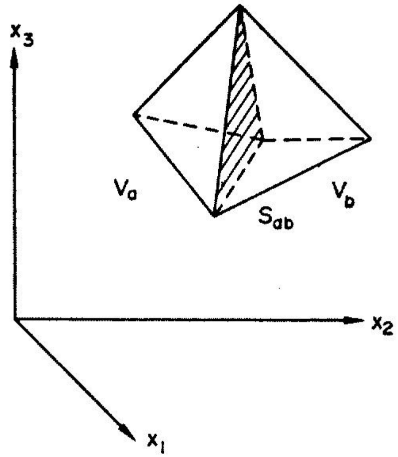


FIG. I-2. V_a, V_b and S_{ab}.

Zmodyfikowana zasada minimum energii potencjalnej Π_p ze **złagodzonymi warunkami ciągłości**
Złagodzony (do postaci całkowej) został warunek ciągłości oddziaływań międzyelementowych.
Dochodzą dodatkowe zmienne (mnożniki Lagrange'a o charakterze przemieszczeń na granicach międzyelementowych)

HYBRYDOWE ELEMENTY NAPRĘŻENIOWE – HYBRID STRESS ELEMENTS

Metoda przemieszczeń

- Oparta na funkcjonale całkowitej energii potencjalnej
- Macierz sztywności dodatnio określona (po nałożeniu WB), dobrze uwarunkowana, symetryczna, pasmowa
- Sprawdzone, proste, efektywne algorytmy obliczeniowe
- Przesztywnia konstrukcję

- Naprężenia są wtórne, rząd niższa aproksymacja, brak ciągłości międzyelementowej

Metody hybrydowe

- Najczęściej - oparte na zmodyfikowanym funkcjonale energii dopełniającej - elementy z założonym polem naprężeń (równowaga) i przemieszczeniami na brzegach
  - Sztywnieją wraz z rozbudową pola naprężeń
  - Miękną wraz z rozbudową kształtu przemieszczeń brzegowych
  - Charakter zwykle pomiędzy sformułowaniem przemieszczeniowym i siłowym
- Dobre elementy płytowe, zwłaszcza płyty grube (z uwzględnieniem ścinania)
- Powszechnie stosowane w modelowaniu materiałów gumopodobnych (elastomerów), tzw. materiały hiperelastyczne.
- Macierze sprowadzane do modeli przemieszczeniowych (stopnie siłowe są kondensowane na poziomie elementu) – zatem implementowane w systemach przemieszczeniowych. Dochodzą wtedy dodatkowe, wewnętrzne zmienne o charakterze ciśnień w elemencie (stałe lub liniowe)
- Nieco „ukryte" przed użytkownikiem (elementy „Hermanowskie" – MARC, „mixed u-p" - ANSYS

Metoda sił

- Oparta na funkcjonale energii dopełniającej
- Bezpośrednia aproksymacja naprężeń, siły wewnętrze są podstawowymi stopniami swobody
- Równowaga naprężeń, ciągłe naprężenia międzyelemenowe
- Brak ciągłości przemieszczeń, pole przemieszczeń uzyskane przez całkowanie pola odkształceń
- Problemy z postawieniem przemieszczeniowych warunków brzegowych = podparcia
- Konstrukcja zbyt miękka
- DUŻE trudności w automatyzacji obliczeń- układ nadokreslony, równania liniowo zależne
  - Próby automatu - badanie rzędu pełnego układu równań, rząd macierzy rozszerzonej – wnioskowanie o nadmiarowych zmiennych (ale wtedy wybór przypadkowy, a nie stany korekcyjne)
  - Prace/Nazwiska – Argyris, Robinson, Jaworski, ILot

Koniec

Metoda Elementów Skończonych (MES)
Sformułowania energetyczne

Finite Element Method (FEM)