Instrukcja 1
Podstawowe schematy różnicowe

Wstęp

Celem laboratorium jest przypomnienie podstawowych schematów różnicowych takich jak różnice centralne oraz schemat *upwind*. Posłużymy się równaniem konwekcji-dyfuzji, aby przedstawić niektóre cechy tych schematów. Dla przypomnienia, jednowymiarowe równanie konwekcji-dyfuzji ma następującą postać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U\frac{\partial f}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Gdzie:

$f = f(t,x)$ - szukana funkcja (np. stężenie lub temperatura) położenia i czasu

U - prędkość unoszenia

ν - współczynnik dyfuzji

Rozwiązując różne warianty tego równania, będziemy analizować stosowane techniki pod kątem dokładności i stabilności a także zwrócimy uwagę na takie cechy jak dyfuzyjność oraz dyspersyjność danego schematu numerycznego.
Wszystkie ćwiczenia będą wykonywane w MATLABie, krótka ściąga z najbardziej przydatnymi funkcjami MATLABa znajduje się na końcu instrukcji.

1 Czysta dyfuzja

Zaczynamy od niestacjonarnego równania opisujacego czystą dyfuzję:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Będziemy symulować rozwiązania tego równania w miarę upływu czasu. Za rozkład początkowy przyjmiemy dzwon Gaussa:

$$f(0,x) = 4e^{-50(x-0.5)^2}$$

Rozwiążemy je na przedziale $\langle 0, 1\rangle$ z warunkami brzegowymi typu Neumanna (tzn. zadanymi na pochodną funkcji):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=1} 0$$

Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa, Politechnika Warszawska,
Autor: Wojciech Regulski

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Ćwiczenia

- Zdyskretyzuj równanie za pomocą metody różnic skończonych. Zastosuj różnice centralne do pochodnej po przestrzeni.
- W MATLABie utwórz odpowiednie struktury danych tak, aby móc przechowywać wartości f dla wybranych kroków czasowych (będziemy je później wizualizować).
- Rozwiąż równanie przy pomocy schematu jawnego. Pamiętaj, by dobrać odpowiednio mały krok czasowy Δt oraz podziałkę siatki h. Zwróć uwagę na odpowiednią implementację warunków brzegowych.

Przypomnienie: W przypadku schematu jawnego całkowanie równania po czasie polega na prostym wyliczeniu wartości funkcji w następnym kroku czasowym w oparciu o dane z poprzedniego kroku. Nie wymaga to rozwiązywania żadnych równań. Zauważ, że rozwiązanie tego zadania ostatecznie zależy tylko od jednego współczynnika:

$$K = \frac{\nu \Delta t}{h^2}$$

- Poeksperymentuj z różnymi wartościami współczynnika K - napisz kawałek kodu, który rozwiąże nasze zadanie dla różnych jego wartości. Co można zaobserwować?
- Rozwiąż zadanie za pomocą schematu niejawnego. Będzie to wymagało skonstruowania układu równań z macierzą trójdiagonalną. Rozwiąż go za pomocą standardowej procedury dzielenia macierz-wektor w MATLAB-ie (oczywiście w przypadku większych problemów należałoby użyć procedury skonstruowanej specjalnie dla macierzy trójdiagonalnej).
- Tak jak poprzednio, zbadaj, jak zachowuje się rozwiązanie dla różnych wartości K.

2 Stacjonarne równanie konwekcji-dyfuzji

Teraz rozwiążemy równanie stacjonarne. Przyjmijmy, że szukaną funkcją jest rozkład temperatury:

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Tym razem warunki brzegowe zostaną nałożone na konkretne wartości (mówimy wtedy o tzw. warunkach Dirichleta): $T(0) = 0$ oraz $T(L = 1) = T_0$. Znane jest rozwiazanie analityczne tego problemu:

$$T(x) = \frac{T_0}{1 - e^{\frac{UL}{\nu}}} (e^{\frac{Ux}{\nu}} - e^{\frac{UL}{\nu}})$$

Na potrzeby następujących ćwiczeń możesz przyjąć, że $U = 1$, $T_0 = 1$ oraz $\nu = 0.01$. Po dyskretyzacji naszego równania okaże się, że rozwiązania znów są zależne tylko od jednego parametru zwanego liczbą Pecleta:

$$Pe = \frac{Uh}{\nu}$$

Ćwiczenia

- Zdyskretyzuj równanie za pomocą metody różnic centralnych oraz metody *upwind* (prawa strona równania wygląda tak samo w obu przypadkach, jedynie lewa się różni).
- Skonstruuj macierz układu równań dla obu przypadków - zauważ, że jedynym parametrem jest liczba Pecleta
- Rozwiąż zadanie dla różnych liczb Pecleta: proponowany zakres podziałki $h = 0.025, 0.04, 0.05, 0.0625$ przy lepkości $\nu = 0.01$. Porównaj rozwiazania numeryczne z rozwiazaniem dokładnym. Co możesz powiedzieć o stabilności obu metod? Co możesz powiedzieć o dokładności obu metod? Dlaczego schemat *upwind* wyraźnie odbiega od wartości rzeczywistej?

3 Pełne równanie konwekcji-dyfuzji: schemat *upwind*

Za pomocą schematu *upwind* rozwiążemy pełne równanie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U\frac{\partial T}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Warunki brzegowe oraz rozmiar obszaru są takie same jak w poprzednim punkcie instrukcji. Dodatkowo, potrzebujemy warunku początkowego. Przyjmijmy, że temperatura zmienia się liniowo:

$$T(0,x) = T_0\frac{L-x}{L}$$

Zbadamy, jak wyglada kwestia stabilności i dokładności naszego rozwiązania numerycznego.

Ćwiczenia

- Zdyskretyzuj równanie za pomocą schematu *upwind* oraz rozwiąż je. Używaj jawnego schematu kroczenia w czasie.
- Wykreśl, jak wyglada rozwiązanie zadania dla czasów $t = 0$, $t = \frac{1}{4}T_{max}$, $t = \frac{1}{2}T_{max}$,$t = T_{max}$
- Porównaj rozwiazanie dla odpowiednio dużego T_{max} z rozwiązaniem analitycznym z poprzedniego punktu. Co można powiedzieć o rozwiązaniu numerycznym?
- Określ, przy jakim kroku czasowym symulacja ulega destabilizacji.

4 Równanie konwekcji-dyfuzji: metoda Crancka-Nicolsona

Rozwiążemy problem taki, jak poprzednim razem, jednak posłużymy się schematem Crancka-Nicolsona. Dla przypomnienia, jest to schemat kroczenia w czasie oparty o metodę trapezów. Jeśli nasze równanie sprowadzimy do następującej formy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...)$$

To schemat przyjmie następującą postać (przyjmijmy zalżność prawej strony od co najwyżej drugiej pochodnej):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^t}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Big(F_i^n(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + F_i^{n+1}(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\Big)$$

Prawą stronę równania należy zdyskretyzować za pomocą metody różnic centralnych. Zauważmy, że w istocie nasz schemat jest schematem niejawnym. Na szczęście generuje on macierz trójdiagonalną, więc jego rozwiazywanie jest szybkie. Do jego zalet należy dokładność drugiego rzędu oraz dobra stabilność rozwiązań. Jakość rozwiązania w tym przypadku będzie kontrolowana przez dwie liczby - oprócz liczby Pecleta pojawia się tzw. liczba Couranta:

$$Pe = \frac{Uh}{\nu} \qquad\qquad C = \frac{U\Delta t}{h}$$

Przypomnienie: Liczba Couranta mówi o stosunku adwekcji do "prędkości sieciowej- w przypadku schematów jawnych musi być on mniejszy od 1, by rozwiązania były zbieżne. Innymi słowy, krok czasowy w schemacie musi być tak mały, aby niesione informacje mogły trafić do bezpośrednich sąsiadów. Na szczęście w przypadku schematów niejawnych ten warunek nie jest tak rygorystyczny, co jest jednak okupione ich większym kosztem numerycznym. W następującym ćwiczeniu zwrócimy szczególną uwagę na zjawisko tzw. dyspersji numerycznej - nierównomiernego rozchodzenia się informacji na siatce. Zainicjalizujemy nasze zadanie dzwonem Gaussa, ustawimy jednorodne warunki brzegowe, będziemy obserwować przemieszczanie się fali w prawo:

$$f(0, x) = 0.1e^{-0.5\left(\frac{x-0.3}{0.02}\right)^2}$$

$$f(0, 0) = f(0, L = 1) = 0 \qquad U = 0.5 \qquad \nu = 0.0001$$

Ćwiczenia

- Zdyskretyzuj równanie konwekcji-dyfuzji za pomocą metody Crancka-Nicolsona.
- Skonstruuj układ równań dla naszego problemu: zauważ, że prawa jego strona bedzie zawierać informację z poprzedniego kroku czasowego.
- Rozwiąż zadanie dla odpowiednio małych krokór czasowych oraz odpowiednio drobnej podziałki.
- Rozwiąż zadanie dla $t_{max} = 1.2$, $\Delta t = 0.01$, $h = 0.01$. Co się dzieje z rozwiązaniem? Jak możemy zaradzić temu problemowi?

Załącznik - przydatne funkcje środowiska MATLAB

`zeros(n)`	- tworzy kwadratową macierz wypełnioną zerami
`ones(n)`	- tworzy kwadratową macierz wypełnioną jedynkami
`1:10`	- wektor liczb naturalnych od 1 do 10
`0:0.01:5`	- wektor liczb od 0 do 5 z podziałką 0.01

`for i=1:n`
kod pętli
`end`
	- składnia pętli

`plot(x,y)`	- wykres y(x)
`plot(x1,y1,x2,y2, 'LineWidth',3)`	- okno z krzywymi $y_1(x_1)$ oraz $y_2(x_2)$ z ustawioną szerokością linii (dostępne są również dodatkowe opcje, jak i można podać dowolną ilość zestawów danych po przecinkach)
`V'`	- transpozycja macierzy (w szczególności wektora)
`x=M\r`	- rozwiązanie układu równań postaci $Mx = r$ (rozwiazuje dowolne układy równań, choć niekoniecznie najszybciej)
`M(i,:)`	- odwołanie do całego wiersza macierzy M (podobnie można wyekstrahować całą kolumnę)
`M(2:8,3:5)`	- odwołanie do podobszaru macierzy M