

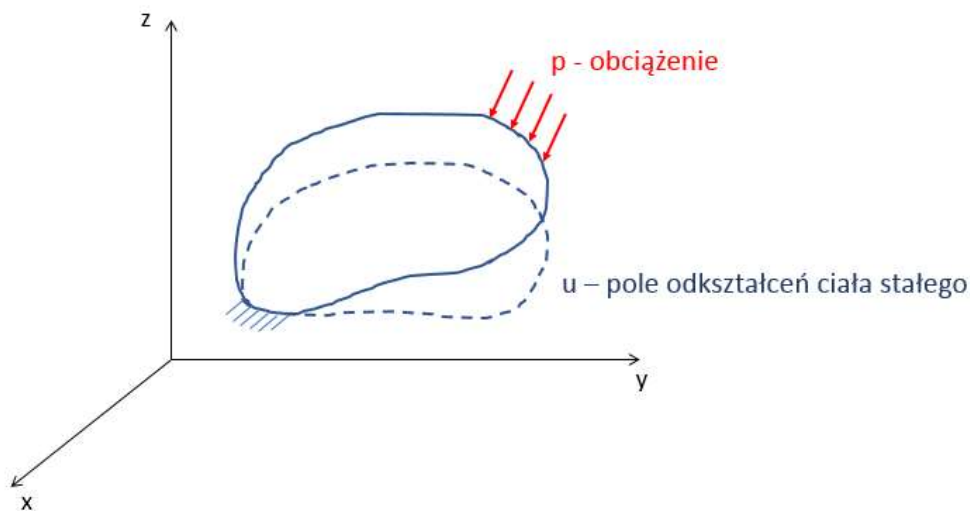
ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE DLA MATERIAŁU IZOTROPOWEGO

Deformacja ciała pod wpływem obciążenia

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

jest określona przez pole przemieszczeń opisane funkcją wektorową

$$u = [u_x(x, y, z), \quad u_y(x, y, z), \quad u_z(x, y, z)]$$



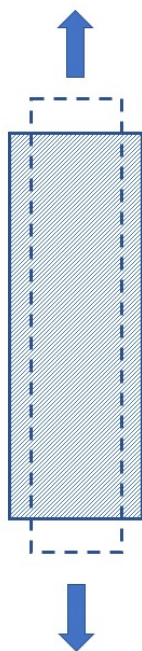
Stan odkształceń w przypadku ciała trójwymiarowego w dowolnym układzie współrzędnych kartezjańskich x, y, z opisany jest przez 6 składowych tworzących tensor stanu odkształcenia: 3 odkształcenia wzdłużne $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ i ε_z oraz 3 odkształcenia kątowe γ_{xy}, γ_{xz} i γ_{yz} . Odkształcenia wzdłużne to względne wydłużenia w rozpatrywanym punkcie w kierunkach x, y i z , a odkształcenia kątowe są miarą deformacji kąta prostego w odpowiednich płaszczyznach xy, xz i yz .

Składowe stanu odkształcenia są określone przez związki:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{aligned}$$

Podobnie stan naprężenia w każdym punkcie ciała określony jest przez 6 składowych: 3 naprężenia normalne σ_x, σ_y i σ_z oraz 3 naprężenia styczne τ_{xy}, τ_{xz} i τ_{yz} .

W przypadku izotropowych zależności między stanem odkształcenia a stanem naprężenia (prawo Hooke'a) jest określona przez 2 niezależne stałe materiałowe: moduł Younga E i współczynnik Poissona ν . Dla przypadku rozciągania jednoosiowego mamy:



Odształcenie wzdłużne:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Odształcenie poprzeczne:

$$\varepsilon_p = -\nu\varepsilon$$

Moduł Younga (moduł sprężystości wzdłużnej) jest doświadczalnie wyznaczanym współczynnikiem proporcjonalności między naprężeniem a odkształceniem, a współczynnik Poissona określa wartość odkształcenia poprzecznego ε_p w zależności od odkształcenia ε w kierunku rozciągania. Moduł Younga i współczynnik Poissona są inne dla każdego materiału izotropowego i definiują jego właściwości mechaniczne. Jest jeszcze trzeci parametr, moduł Kirchoffa G (moduł sprężystości postaciowej), ale jest on zależny od dwóch pozostałych parametrów, zatem nie trzeba go wyznaczać eksperymentalnie, tylko można obliczyć ze wzoru:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

W przypadku trójwymiarowym związki między składowymi stanu odkształcenia a składowymi stanu naprężenia mają postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \end{aligned}$$

Prawo Hooke'a przedstawiane jest też często w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Relację między wektorem składowych stanu naprężenia a wektorem składowych stanu odkształcenia można zapisać w skrócie w postaci:

$$[\varepsilon] = [b][\sigma] \text{ lub } [\sigma] = [c][\varepsilon], \text{ gdzie } [c] = [b]^{-1}$$

Macierz $[b]$ nazywana jest macierzą podatności, a macierz $[c]$ – macierzą sztywności.

MATERIAŁ ORTOTROPOWY. ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE

W przypadku materiałów anizotropowych, czyli takich, w których właściwości materiałowe zależą od kierunku, część powyższych zależności pozostaje niezmienną, a część ulega modyfikacjom. W przypadku anizotropowego ciała liniowo-sprężystego stan odkształcenia określa, podobnie jak dla ciała izotropowego, symetryczny tensor małych odkształceń, a stan naprężenia symetryczny tensor naprężenia. Prawo Hooke'a, łączące ze sobą te tensory można zapisać w dowolnie przyjętym kartezjańskim układzie współrzędnych w formie zależności macierzowej. Najbardziej ogólną postać związku konstytutywnego można przedstawić jako:

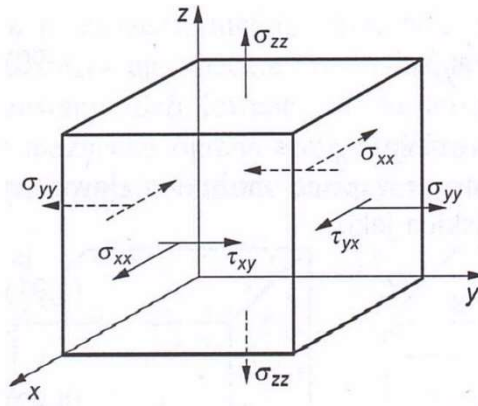
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Macierze $[c_{ij}]$ i $[b_{ij}]$ nazywane macierzami sprężystości i podatności są symetryczne i w najbardziej ogólnym przypadku są określone przez 21 niezależnych parametrów.

Liczba niezależnych stałych potrzebnych do jednoznacznego wyznaczenia macierzy $[c_{ij}]$ i $[b_{ij}]$ zależy od liczby płaszczyzn symetrii, które charakteryzują zachowanie się materiału w danym punkcie. Jeżeli w danym punkcie materiału wyróżnić można jedną płaszczyznę symetrii własności sprężystych, to zgodnie z zasadą jednoznaczności każdy symetryczny względem tej płaszczyzny stan naprężenia prowadzić musi do symetrycznego stanu odkształcenia. Załóżmy, że płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna XY.



Stan naprężenia symetryczny względem płaszczyzny xy

Symetryczny względem XY stan naprężenia przedstawić można w postaci

$$[\sigma] = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, 0, 0, \tau_{xy}] \quad (2 \text{ składowe zerowe}),$$

a symetryczny stan odkształcenia w postaci

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 0, 0, \gamma_{xy}].$$

Mamy wówczas z prawa Hooke'a (6.7)

$$\gamma_{yz} = 0 = b_{41}\sigma_{xx} + b_{42}\sigma_{yy} + b_{43}\sigma_{zz} + b_{46}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{zx} = 0 = b_{51}\sigma_{xx} + b_{52}\sigma_{yy} + b_{53}\sigma_{zz} + b_{56}\tau_{xy}.$$

Związki te muszą być prawdziwe dla każdej kombinacji $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}$, skąd otrzymamy

$$b_{41} = b_{42} = b_{43} = b_{46} = b_{51} = b_{52} = b_{53} = b_{56} = 0.$$

Jeśli uwzględnimy, że $b_{ij} = b_{ji}$ stwierdzić możemy, że w tym przypadku macierz b_{ij} ma postać

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & b_{36} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} & 0 \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Z istnienia zwierciadlanej symetrii względem płaszczyzny XY wynika więc, że macierz podatności b_{ij} jest zdefiniowana przez 13 niezależnych parametrów. Analogicznie, jeśli założymy istnienie symetrii własności materiału względem płaszczyzny YZ , to symetryczne wektory stanu naprężenia i odpowiadającego mu stanu odkształcenia mają postać:

$$[\sigma] = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, 0, 0],$$

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, 0, 0].$$

Otrzymamy stąd

$$b_{51} = b_{52} = b_{53} = b_{54} = b_{61} = b_{62} = b_{63} = b_{64} = 0,$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Przeprowadzając podobne wnioskowanie dla symetrii względem płaszczyzny ZX otrzymamy

$$b_{41} = b_{42} = b_{43} = b_{45} = b_{61} = b_{62} = b_{63} = b_{65} = 0,$$

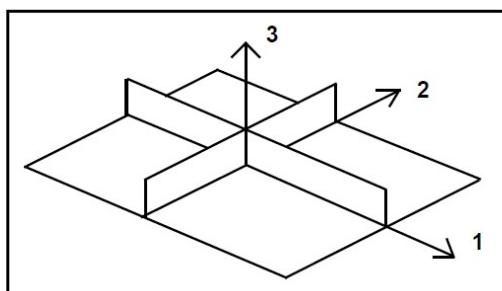
oraz

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & b_{25} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & b_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{64} & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie po uwzględnieniu wszystkich symetrii otrzymujemy równanie w postaci:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

Istnienie dwóch prostopadłych płaszczyzn symetrii własności oznacza występowanie również trzeciej symetrii.



Płaszczyzny symetrii ortotropowej

Występowanie trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn symetrii jest przypadkiem bardzo często występującym w praktyce inżynierskiej. Wówczas liczba niezależnych współczynników macierzy podatności $[b_{ij}]$ i macierzy sztywności $[c_{ij}]$ redukuje się do 9, a materiał nazywany **ortotropowym**.

Przyjmując, że osie 1, 2, 3 kartezjańskiego układu współrzędnych odpowiadają **głównym osiom ortotropii**, czyli osiom prostopadłym do odpowiednich płaszczyzn symetrii, związki między naprężeniami a odkształceniami zapisać można w postaci

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Ze względu na symetrię macierzy w powyższych związkach mamy $S_{ij} = S_{ji}$, $Q_{ij} = Q_{ji}$. Oczywiście $[S] = [Q]^{-1}$, a macierze zdefiniowane są przez 9 niezależnych współczynników.

Stałe materiałowe, za pomocą których określa się macierze $[S]$ i $[Q]$ przyjmuje się zazwyczaj tak, że odpowiadają one fizycznie modułowi Younga E , stałej Poissona ν i modułowi Kirchhoffa G dla przypadku izotropowego. Związek (6.14) przyjmuje wtedy postać

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Stałe E_{11} , E_{22} , E_{33} nazywane są modułami sprężystości wzdłużnej (modułami Younga) odpowiednio w kierunkach 1, 2, 3, G_{23} , G_{31} , G_{12} są modułami sprężystości postaciowej w odpowiednich płaszczyznach, a ν_{ij} – współczynnikami Poissona. Ze względu na symetrię macierzy stałe ją określające muszą spełniać trzy dodatkowe warunki:

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}}. \quad (6.17)$$

W efekcie prawo konstytutywne (6.16) dla trójwymiarowego materiału ortotropowego zawiera 9 niezależnych stałych materiałowych $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_{23}, G_{31}, G_{12}$. Moduły E_{11}, E_{22}, E_{33} wyznaczone są z prób rozciągania wzdłuż głównych osi ortotropii, moduły G_{12}, G_{23}, G_{31} wymagają odpowiednich prób ścinania, natomiast każdą ze stałych ν_{ij} określa stosunek $-\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ii}}$ dla obciążenia próbki wyłącznie naprężeniem rozciągającym σ_{ii} .

Jeżeli w materiale ortotropowym jedna z osi ortotropii jest dodatkowo osią symetrii właściwości materiału, to o materiale mówimy, że jest monotropowy. W monotropii występuje jedynie 5 niezależnych stałych materiałowych. Przyjmując na przykład, że osią symetrii jest oś 3 otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E} & -\frac{\nu_{23}}{E} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (6.18)$$

Materiał taki w płaszczyźnie 1, 2 wykazuje własności izotropowe. Biorąc pod uwagę, że $G_{12} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ i symetrię macierzy oraz uwzględniając, że $\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_3$ prawo Hooke'a dla materiału monotropowego można zapisać jako

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_3}{E_3} & -\frac{\nu_3}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Współczynniki macierzy sztywności i macierzy podatności muszą zawsze spełniać pewne zależności wynikające z faktu, że wywołanie każdego niezerowego stanu odkształcenia wiąże się z dostarczeniem energii. Gęstość energii odkształcenia U' jest więc większa od zera:

$$U' = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{31}\gamma_{31} + \tau_{12}\gamma_{12}) > 0$$

$$U' = \frac{1}{2} [\varepsilon] \{\sigma\} = \frac{1}{2} [\varepsilon] [c] \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} [\sigma] [b] \{\sigma\} > 0$$

Związki te oznaczają, że macierze $[b]$ i $[c]$ muszą być dodatnio określone. Z algebry wiadomo, że dodatnia określoność macierzy oznacza, że wszystkie jej minory główne (podwyznaczniki) powinny być dodatnie. Otrzymujemy stąd:

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{23}, G_{31} > 0$$

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0,$$

$$1 - \nu_{31}\nu_{13} > 0,$$

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0,$$

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{12}\nu_{23} > 0$$

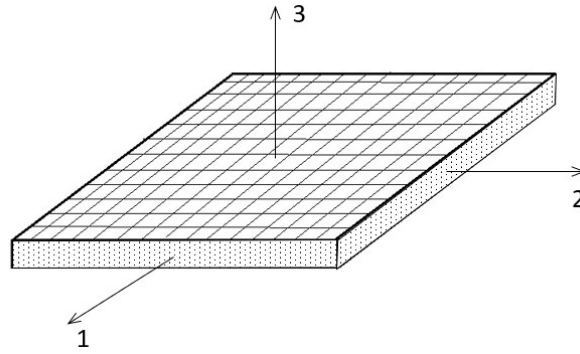
Uwzględniając symetrię macierzy podatności ze związków (6.22) otrzymamy

$$\begin{aligned} |\nu_{21}| &< \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{23}| &< \left(\frac{E_{22}}{E_{33}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\nu_{12}| &< \left(\frac{E_{11}}{E_{22}} \right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{31}| &< \left(\frac{E_{33}}{E_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\nu_{32}| &< \left(\frac{E_{33}}{E_{22}} \right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{13}| &< \left(\frac{E_{11}}{E_{33}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wprowadzając do modeli matematycznych obarczone pewnymi błędami dane eksperymentalne dotyczące właściwości materiałów ortotropowych należy zwrócić uwagę na fizykalną spójność parametrów sprężystych, m.in. przy przyjmowaniu wartości i odpowiedniej interpretacji współczynników ν_{ij} by uniknąć trudnych do wykrycia błędów modelowania.

MECHANIKA WARSTWY ORTOTROPOWEJ

Warstwy ortotropowe są często analizowane w głównych osiach ortotropii 1, 2, 3. Oś 3 jest skierowana zawsze prostopadle do płaszczyzny warstwy lub powierzchni środkowej powłoki. W przypadku warstw ortotropowych zbrojonych włóknem ciągłym główne kierunki ortotropii pokrywają się z ukierunkowaniem włókien.



Główne kierunki ortotropii w warstwie kompozytu zbrojonego tkaniną

Zależność między odkształceniami i naprężeniami w takiej warstwie ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Dzięki temu, że grubość warstw kompozytów włóknistych jest zazwyczaj dużo mniejsza od ich pozostałych wymiarów, możemy przyjąć założenie, że pracują one w płaskim stanie naprężenia, czyli że:

$$\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

Dzięki temu otrzymujemy następujące zależności na odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} \cdot S_{11} + \sigma_{22} \cdot S_{12}$$

$$\varepsilon_{22} = \sigma_{11} \cdot S_{21} + \sigma_{22} \cdot S_{22}$$

$$\varepsilon_{33} = \sigma_{11} \cdot S_{31} + \sigma_{22} \cdot S_{32}$$

$$\gamma_{23} = 0$$

$$\gamma_{31} = 0$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12} \cdot S_{66}$$

Niezerowe są jedynie odkształcenia ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} i γ_{12} . Jednak odkształcenie ε_{33} zachodzi w kierunku prostopadłym do płaszczyzny działania naprężeń i jest ich pośrednim skutkiem powstałym za pośrednictwem współczynników Poissona. W związku z tym w analizie warstwy ortotropowej będą brane pod uwagę tylko odkształcenia ε_{11} , ε_{22} i γ_{12} . Zależność między odkształceniami i naprężeniami przybiera zatem postać:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

A po rozwinięciu elementów macierzy podatności:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Związek odwrotny ma postać:

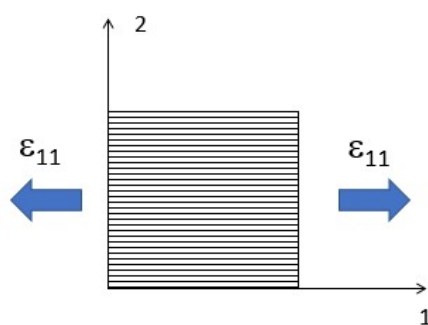
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Macierze w dwóch powyższych wzorach są symetryczne, zatem są one określone przez cztery stałe materiałowe E_{11} , E_{22} , ν_{12} i G_{12} . Te cztery stałe materiałowe są niezbędne do jednoznacznego opisu właściwości sztywnościowych warstwy ortotropowej.

W literaturze technicznej przyjmuje się zazwyczaj, że $E_{11} > E_{22}$ i wówczas współczynnik ν_{12} nazywany jest większym współczynnikiem Poissona (major), a ν_{21} mniejszym współczynnikiem Poissona (minor).

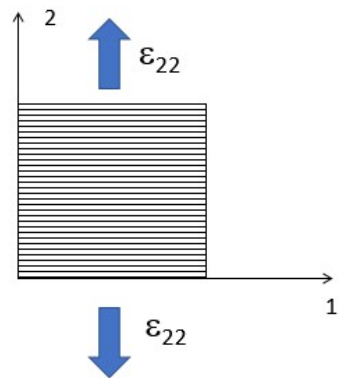
$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}$$

Dla warstwy o zbrojeniu jednokierunkowym ($E_{11} \gg E_{22}$):



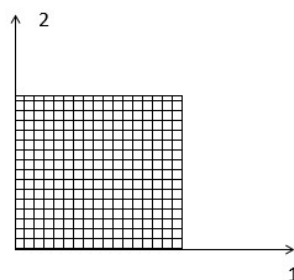
$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0,1\% \\ \varepsilon_{22} &= -0,05\% \end{aligned}$$

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = 0,5$$



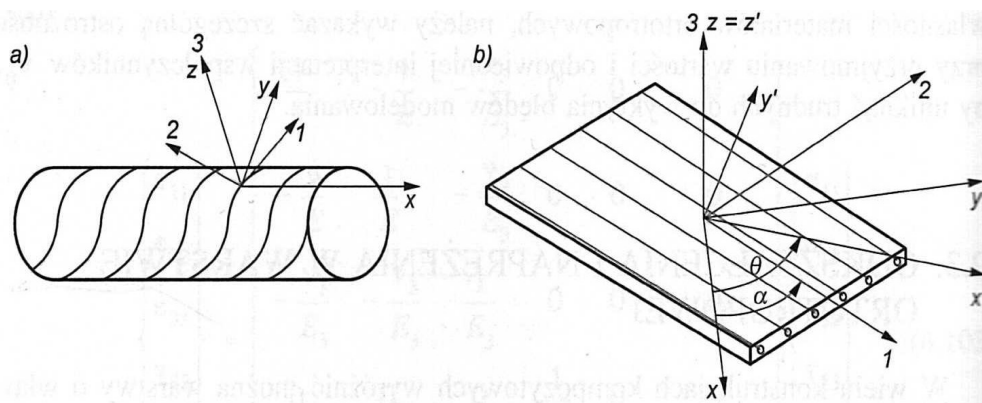
$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= 0,1\% \\ \varepsilon_{11} &= -0,01\% \\ \nu_{21} &= -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = 0,1\end{aligned}$$

Dla warstwy zbrojonej tkaniną dwukierunkową najczęściej $E_{11} \approx E_{22}$, wtedy:



$$\nu_{12} \approx \nu_{21}$$

Powyższe związki odpowiadają przypadkowi, w którym kierunki 1 i 2 są głównymi kierunkami ortotropii warstwy. Jednakże w wielu przypadkach kierunki główne nie pokrywają się z osiami przyjętego układu współrzędnych x, y, z , który zwykle uzależniony jest od kształtu rozpatrywanego elementu lub od kierunków obciążeń. Oś z , podobnie jak oś 3, jest zawsze skierowana prostopadle do warstwy.



W związku z tym potrzebna jest zależność łącząca stany naprężenia w dwóch kartezjańskich układach współrzędnych obróconych względem siebie w płaszczyźnie warstwy o kąt α :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji $[T]$ ma postać:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Podobna zależność wiąże składowe stanu odkształcenia w dwóch obróconych względem siebie układach współrzędnych:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Kąt α mierzony jest w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara od osi 1 do osi x. Mamy jednocześnie:

$$[T]^{-1} = [T(-\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Prawo Hooke'a dla naprężeń i odkształceń przedstawionych w układzie 1,2,3 zapisujemy w postaci:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Dokonując kolejnych podstawień w celu znalezienia zależności między odkształceniami i naprężeniami w układzie xy otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1}[R]^{-1}[S] \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a więc:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1}[R]^{-1}[S][T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix},$$

Związek ten można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^T [S] [T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$[T]^T [S] [T] = [S^*] = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{61}^* & S_{62}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix}$$

Przyjmując $\sin \alpha = s$ i $\cos \alpha = c$ otrzymujemy następujące zależności na elementy macierzy $[S^*]$:

$$S_{11}^* = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$S_{12}^* = S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4$$

$$S_{22}^* = S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{11}s^4$$

$$S_{66}^* = S_{66}c^4 + 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}s^4$$

$$S_{16}^* = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

$$S_{26}^* = (2S_{12} + S_{66} - 2S_{22})sc^3 - (2S_{12} + S_{66} - 2S_{11})s^3c$$

Współczynniki S_{ij} mają wartości:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Poszukiwany ogólny związek odkształcenia-naprężenia w przypadku warstwy ortotropowej w dowolnym układzie współrzędnych określonym przez kąt α ma zatem postać:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Podobnie chcemy znaleźć zależność między naprężeniami i odkształceniami:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Związek ten można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] ([T]^{-1})^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenie:

$$[Q^*] = [T]^{-1} [Q] ([T]^{-1})^T$$

Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Przyjmując $\sin \alpha = s$ i $\cos \alpha = c$ otrzymujemy następujące zależności na elementy macierzy $[Q^*]$:

$$Q_{11}^* = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$Q_{12}^* = Q_{12}c^4 + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}s^4$$

$$Q_{22}^* = Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{11}s^4$$

$$Q_{66}^* = Q_{66}c^4 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}s^4$$

$$Q_{16}^* = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})s^3c$$

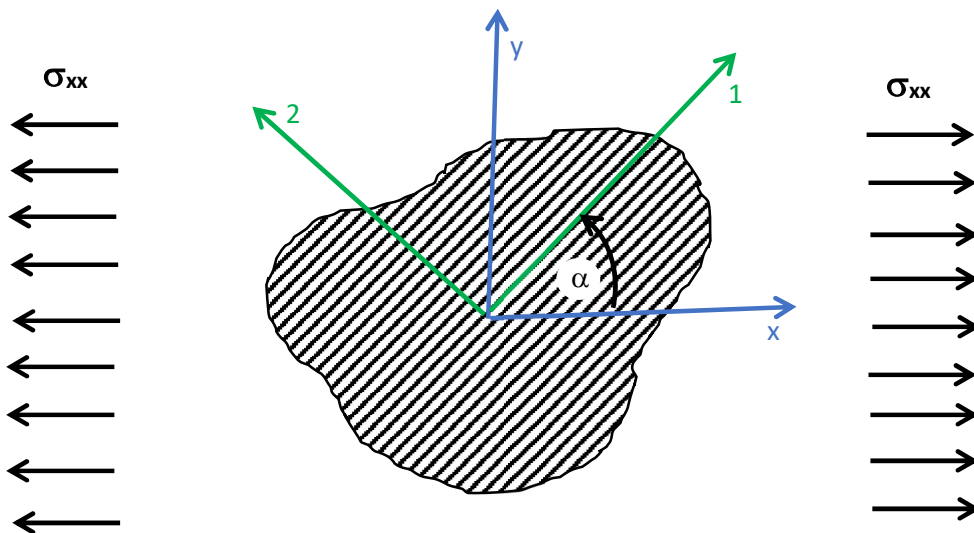
$$Q_{26}^* = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c$$

Współczynniki Q_{ij} mają wartości:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

ZADANIE

Warstwa ortotropowa ma właściwości: $E_{11} = 2 \times 10^5$ MPa, $E_{22} = 0,5 \times 10^5$ MPa, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 2 \times 10^4$ MPa. Znaleźć składowe stanu odkształcenia w układzie xy w wyniku rozciągania naprężeniem $\sigma_{xx} = 10$ MPa dla kątów α równych a) 45° i b) 90° .



Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\varepsilon_{xx} = S_{11}^* \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12}^* \sigma_{xx}$$

$$\gamma_{xy} = S_{16}^* \sigma_{xx}$$

gdzie:

$$S_{11}^* = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

$$S_{12}^* = S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4$$

$$S_{16}^* = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

Współczynniki S_{ij} mają wartości:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_{11}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Dane: $E_{11} = 2 \times 10^5$ MPa, $E_{22} = 0,5 \times 10^5$ MPa, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 2 \times 10^4$ MPa; $\sigma_{xx} = 10$ MPa

a) Dla $\alpha = 45^\circ$:

$$S_{11}^* = \frac{1,812}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$S_{12}^* = -\frac{0,688}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$S_{16}^* = -\frac{1,75}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$\varepsilon_{xx} = S_{11}^* \sigma_{xx} = \underline{1,812 \times 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12}^* \sigma_{xx} = \underline{-0,688 \times 10^{-4}}$$

$$\gamma_{xy} = S_{16}^* \sigma_{xx} = \underline{-0,75 \times 10^{-4}}$$

a) Dla $\alpha = 90^\circ$:

$$S_{11}^* = \frac{2}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$S_{12}^* = -\frac{0,125}{10^5} \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

$$S_{16}^* = 0 \left[\frac{1}{MPa} \right]$$

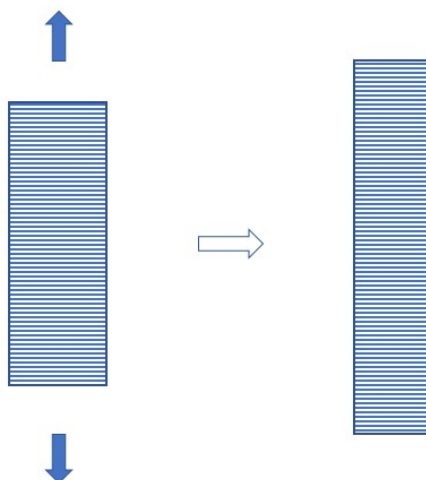
$$\varepsilon_{xx} = S_{11}^* \sigma_{xx} = \underline{2 \times 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{12}^* \sigma_{xx} = \underline{-0,125 \times 10^{-4}}$$

$$\gamma_{xy} = S_{16}^* \sigma_{xx} = \underline{0}$$

Warto zwrócić uwagę, że jeśli α jest wielokrotnością wartości $\Pi/2$, to współczynniki macierzy Q_{16}^* , Q_{26}^* , S_{16}^* i S_{26}^* są zerowe i nie istnieje sprzężenie między rozciąganiem i ściskaniem a ścinaniem.

Próbka rozciągana tylko wzdłuż kierunków ortotropii będzie zachowywała się podobnie, jak próbka wykonana z materiału izotropowego. Rozciąganie prowadzi wtedy jedynie do wydłużenia w kierunku rozciągania i skrócenia w kierunku poprzecznym, bez odkształceń kątowych.



Natomiast jeśli α nie jest wielokrotnością wartości $\pi/2$, to wszystkie współczynniki macierzy $[Q^*]$ i $[S^*]$ są niezerowe i istnieje pełne sprzężenie między składowymi stanu naprężenia i stanu odkształcenia, czyli rozciąganie bądź ściskanie powoduje też odkształcenia postaciowe i na odwrót. Wynika stąd, że w ogólnym przypadku, kiedy osie x i y nie pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii, kierunki główne naprężeń nie pokrywają się z głównymi kierunkami odkształceń.

