ALGEBRAICZNE ZAGADNIENIE WŁASNE

Zagadnieniem własnym nazywany problem wyznaczenia wartości i wektorów własnych zadanej macierzy kwadratowej. Przypomnijmy, że parą własną macierzy (kwadratowej) $\mathbf{A}$ nazywamy parę (λ, v) ($\lambda \in C$, $\mathbf{v} \in C^n$, $n = \dim(A)$) taką, że:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \neq 0 \qquad (1)$$

Równość (1) można przepisać w formie $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ (2)
Ponieważ wektor własny jest z założenia niezerowy, należy nałożyć warunek osobliwości macierzy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. W ten sposób otrzymujemy tzw. równanie charakterystyczne dla macierzy $\mathbf{A}$:

$$p_A(\lambda) \equiv \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \qquad (3)$$

Z definicji wyznacznika wynika, że $p_A(\lambda)$ jest wielomianem stopnia $n = \dim(A)$. Wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy zatem miejsca zerowe (pierwiastki) wielomianu charakterystycznego $p_A(\lambda)$.

Wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym pewnej wartości własnej λ nazywamy każdy wektor $\mathbf{v}$ taki, że spełniona jest równość (1). Liczba liniowo niezależnych wektorów takich, że równość (1) jest spełniona dla ustalonej wartości własnej nazywana jest <u>krotnością geometryczną</u> tej wartości własnej. Ponieważ wartości własne są pierwiastkami wielomianu $p_A(\lambda)$ (niekoniecznie rzeczywistymi), ma również miejsce rozkład na czynniki

$$p_A(\lambda) = a_n (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_p)^{m_p} \qquad (4)$$

W rozkładzie (4) oznaczyliśmy przez $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ różne pierwiastki $p_A(\lambda)$ (czyli różne wartości własne macierzy A). Potęgi całkowite $m_1, m_2, \dots, m_p$ zwane są <u>krotnościami algebraicznymi</u> wartości własnych macierzy A.

<u>Przykład</u>

1) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Wówczas $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ i

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

czyli wartościami własnymi A są $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$.

Wyznaczmy wektory własne. Dla $\lambda = \lambda_1 = 1$ układ liniowy (2) ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -v_2 &= 0 \\ v_2 + 2v_3 &= 0 \\ 2v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymane równania są spełnione gdy $v_2 = v_3 = 0$, przy dowolnym v_1. Połóżmy $v_1 = 1$ (zabieg taki nazywa się normalizacją wektora własnego). W efekcie pierwsza para własna macierzy A to

$$(\lambda_1, v^{(1)}) = \{1; [1,0,0]\}$$

Dla $\lambda_2 = 2$ układ (2) ma postać

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -v_1 - v_2 &= 0 \\ 2v_3 &= 0 \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest każdy wektor v taki, że: $v_1 + v_2 = 0$ i $v_3 = 0$; możemy przyjąć np. $v^{(2)} = [1, -1, 0]$ (albo $[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ jeśli zależy nam na tym, aby długość wektora własnego była równa 1)

Wyznaczenie wektora własnego dla $\lambda_3 = 3$ pozostawiamy jako ćwiczenie. (Odp. Np. $v^{(3)} = [\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}]$)

Komentarz: macierz A z przykładu nr 1 ma trzy różne wartości własne, każda o krotności algebraicznej równej 1 (czyli jednokrotnej). Każdej odpowiada – z dokładnością do stałej multiplikatywnej, czyli do długości – jeden wektor własny. Mówimy, że przestrzenie własne każdej z wartości własnych tej macierzy są jednowymiarowe, czyli krotność geometryczna każdej z tych wartości własnych jest równa 1. W rozważanym przypadku krotności algebraiczna i geometryczna są równe 1 – takie wartości własne nazywamy prostymi.

Prosta wartość własna jest szczególnym przypadkiem tzw. regularnej wartości własnej tj. takiej dla której krotności algebraiczna i geometryczna są równe. Przykładem macierzy z wartością własną która jest regularna (ale nie prosta) jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jej wielomian charakterystyczny to $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$, zatem $\lambda = 2$ jest wartością własną o krotności algebraicznej równej 2. Wyznaczamy wektor(y) własne macierzy A odpowiadające $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniami tego układu są dwa liniowo niezależne wektory np. $[1, 1, 0]$ i $[1, 1, 1]$. Dowodzi to, że krotność geometryczna wartości własnej $\lambda = 2$ jest również równa 2.

Nie zawsze krotności algebraiczna i geometryczna są równe. Okazuje się, że pewne wartości własne mogą być <u>zdegenerowane</u> tj: nie posiadać tylu liniowo niezależnych wektorów własnych ile wynosi ich krotność algebraiczna (wówczas krotność geometryczna jest mniejsza niż algebraiczna). A oto „standardowy" przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jasnym jest że wartością własną macierzy A (jedyną!) jest $\lambda = 3$ i jej krotność algebraiczna jest równa 3. Układ (2) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

Widać, że jedynym wektorem własnym macierzy A jest – z dokładnością do stałej multiplikatywnej – wektor $V = [1, 0, 0]$. Tak więc wartość własna $\lambda = 3$ jest zdegenerowana: jej krotność geometryczna jest równa 1.

Dlaczego problem regularności / degeneracji wartości własnych jest ważny? Otóż dlatego, że jeśli wszystkie wartości własne macierzy są regularne to zbiór wszystkich odpowiadających im wektorów własnych zawiera n ($n = \dim(A)$) wektorów liniowo niezależnych, czyli „rozpinających" całą przestrzeń n-wymiarową. Jeśli zbudujemy macierz V taką, że kolejne wektory własne macierzy A to kolumny V, otrzymamy...

$$A \cdot \underbrace{\left[v_1 \middle| v_2 \middle| \ldots \middle| v_n \right]}_{V} = \left[\lambda_1 v_1 \middle| \lambda_2 v_2 \middle| \ldots \middle| \lambda_n v_n \right] =$$

$$= \underbrace{\left[v_1 \middle| v_2 \middle| \ldots \middle| v_n \right]}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda \text{ - diagonalna!}}$$

W powyższej równości wielokrotne wartości własne pojawiają się na liście $\{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$ tyle razy ile wynosi ich krotność (algebraiczna i geometryczna, bo te z założenia są równe).

W zwięzłym zapisie...

$$AV = V\Lambda$$

a ponieważ macierz V jest nieosobliwa to ostatnia równość implikuje, że

$$A = V\Lambda V^{-1}, \quad \Lambda = V^{-1}AV$$

Widzimy, że macierz A może być przekształcona przez podobieństwo do macierzy diagonalnej Λ, której elementy (diagonalne) to wartości własne macierzy A. Przypomnijmy, że dwie macierze kwadratowe M i N nazywamy podobnymi $\Longleftrightarrow$ istnieje nieosobliwa macierz P taka, że $M = P^{-1}NP$ (lub, co równoważne, $N = PMP^{-1}$).

Przypomnijmy związek regularności/degeneracji wartości własnych macierzy kwadratowej z własnościami rozwiązań liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

Rozważmy r-nie różniczkowe 2-ego rzędu:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

Pamiętamy z teorii takich równań, że procedura rozwiązania polega na podstawieniu $y(t) = e^{\lambda t}$. W naszym przypadku otrzymamy

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego są $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$; rozwiązaniem ogólnym naszego równania jest funkcja

$$Y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

gdzie stałe C_1 i C_2 są dowolne.

Rozważmy teraz inne równanie, a mianowicie

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Tym razem równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

i istnieje tylko jeden pierwiastek (podwójny) $\lambda = -1$. Brakuje zatem liniowo niezależnego rozwiązania szczególnego do budowy rozwiązania ogólnego - wiemy z teorii równań różniczkowych, że wprowadza się go w postaci

$$Y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} = (C_1 + C_2 t) e^{-t}$$

Jest to efekt degeneracji wartości własnej związanej z tym równaniem macierzy.

Ale jakiej macierzy ?! Jak pamiętamy z podstawowego kursu metod numerycznych, równanie rzędu 2-ego może być przedstawione w formie równoważnego układu równań rzędu 1-ego.

Wróćmy do poprzedniego przykładu. Kładąc:

$$x_1(t) = y(t) \quad i \quad x_2(t) = y'(t)$$

równanie $y'' + 3y' + 2y = 0$ może być zapisane jako układ

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

W formie macierzowej...

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Połóżmy $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, gdzie λ - pewna liczba (być może zespolona)

$\mathbf{v}$ - nieznany wektor.

Po podstawieniu otrzymujemy $\left(\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{x}(t)\right)$

$$\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v} \quad /: e^{\lambda t}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Jak widać poszukiwana para $(\lambda, \mathbf{v})$ to para własna macierzy $\mathbf{A}$. Jeśli macierz $\mathbf{A}$ ma wszystkie wartości własne regularne to istnieje (łącznie) pełny zbiór liniowo niezależnych wektorów własnych. Rozwiązanie ogólne układu różniczkowego można zapisać w formie kombinacji liniowej

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

(oczywiście nie wszystkie λ_j muszą być różne!).

Łatwo pokazać (ćwiczenie dla Czytelnika), że wielomian charakterystyczny macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ to $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, czyli identyczny jak w r-niu charakterystycznym oryginalnego równania różniczkowego. Każdej z wartości własnych odpowiada jeden (z dokładnością do długości) wektor własny, a mianowicie:

- dla $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a stąd $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- dla $\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a stąd $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

czyli: $x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \quad (\equiv y(t))$

$x_2(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \quad (\equiv y'(t))$

W drugim przykładzie $(y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0)$ macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

a jej wielomian charakterystyczny to $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$ (sprawdź!). Macierz to posiada tylko jeden wektor własny, co świadczy o tym, że $\lambda = -1$ jest zdegenerowaną wartością własną! Istotnie:

$$[A - \lambda I] v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zatem $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

W podstawowym kursie równań różniczkowych przekonaliśmy się, że rozwiązanie ogólne

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych.

Przyjrzyjmy się bliżej problemowi z punktu widzenia algebry macierzy. Nasza macierz A ma tylko jeden wektor własny, nie można jej zatem – w przeciwieństwie do macierzy z 1-szego przypadku – sprowadzić do postaci diagonalnej. Istotnie, w pierwszym przypadku można skonstruować nieosobliwą macierz

$$V = \left[v_1 \middle| v_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Zauważmy teraz, że

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}} \underset{V}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \underset{V}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{\Lambda}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

gdzie $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Ponieważ $\det V = -1 \neq 0$ zatem istnieje V^{-1} i możemy napisać równości

$$A = V \Lambda V^{-1} \quad i \quad V^{-1} A V = \Lambda$$

Układ równań

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$$

może być przepisany w postaci

$$\mathbf{x}'(t) = V \Lambda V^{-1} \mathbf{x}(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{z}'(t) = \Lambda\,\mathbf{z}(t)$$

$$\mathbf{z}(t) := V^{-1} \mathbf{x}(t)$$

gdzie wektor $\mathbf{z}(t)$ jest nowym wektorem niewiadomych.

Zauważmy, że równania dla $z_1(t)$, $z_2(t)$, .., $z_n(t)$ (u nas oczywiście $n=2$, ale - jak widać - metoda jest ogólna!) są całkowicie niezależne i mają postać

$$z_j'(t) = \lambda_j z_j(t) \quad (\text{u nas } j=1,2)$$

a ich rozwiązania ogólne to $z_j(t) = Z_j e^{\lambda_j t}$

Stąd (u nas)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t) = \mathbf{V}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{V} e^{\Lambda t} \mathbf{V}^{-1} X \qquad (e^{\Lambda t} \equiv \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\})$$

gdzie $X = [X_1, X_2]^T$. Jasnym jest, że dla $t=0$ otrzymamy $\mathbf{x}(0) = X$ czyli wektor X zawiera zadane w-nki początkowe.

Ostatecznie mamy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} e^{\Lambda t} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 \xrightarrow{} \text{wektor } \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Czytelnik będzie uprzejmy przekonać się, że otrzymane w ten sposób rozwiązanie jest równoważne formie podanej na str. 8.

Przy okazji, należy zwrócić uwagę na związek stałych C_1 i C_2 z w-kami początkowymi x_{10} i x_{20}.

Opisany powyżej „numer" nie może być zastosowany wprost do układu w przypadku 2-gim, ponieważ brakuje 2-giego wektora własnego do konstrukcji macierzy $\mathbf{V}$. Wartość własna $\lambda = -1$ jest zdegenerowana, co wymaga nieco innego podejścia.

Trick polega na wykorzystaniu tzw. wektora dołączonego czyli wektora $\mathbf{w}$ takiego, że wektor $(A - \lambda I)\mathbf{w}$ (u nas $\lambda = -1$) jest wektorem własnym macierzy A

odpowiadającemu wartości własnej λ. Oznacza to, że W może być dowolnie wybranym wektorem takim, że

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)W = 0$$

U nas, macierz

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

zatem W może być dowolnym wektorem, byle różnym od wektora własnego V. Przyjmijmy np. $W = [1, 0]^T$.

Skonstruujmy macierz

$$\mathbb{V} = \left[V \,\vdots\, W \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{sprawdź!})$$

i obliczmy iloczyny...

$$A\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{V}^{-1}A\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv \mathcal{J}$$

Otrzymaliśmy macierz (Jordana) $\mathcal{J}$, de facto równą

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{u nas } \lambda = -1)$$

(Istotnie : $$A\mathbb{V} = A\left[V \,\vdots\, W \right] = \left[AV \,\vdots\, AW \right] = \left[\lambda V, V + \lambda W \right] = \left[V \,\vdots\, W \right]\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$)

$(A-\lambda I)W = V$ (po odpowiednim przeskalowaniu W)

Postępując podobnie jak w Przypadku 1 - szym, oryginalny układ równań różniczkowych $X'(t) = AX(t)$ może być sprowadzony do postaci

$$z'(t) = J z(t)$$

Załóżmy, że tym razem macierz J nie jest diagonalna ($J \neq \Lambda$).
Układ ma de facto postać:

$$\begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda z_1(t) + z_2(t) \\ z_2'(t) = \lambda z_2(t) \end{cases}$$

Można powiedzieć, że $z_2(t)$ jest „wymuszeniem" dla $z_1(t)$.
Rozwiążmy ten układ...

$$z_2(t) = C_2 e^{\lambda t} \quad \text{... oczywiste } (C_2 \text{- stała dowolna})$$

Dalej...

$$z_1'(t) = \lambda z_1(t) + C_2 e^{\lambda t}$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego $s_1'(t) = \lambda s_1(t)$ jest oczywiście funkcja $s_1(t) = D_1 e^{\lambda t}$. Wyznaczymy rozwiązanie równania pełnego metodą uzmiennienia stałej...

$$z_1(t) = D_1(t) e^{\lambda t}$$

$$\Downarrow$$

$$z_1'(t) = D_1'(t) e^{\lambda t} + \lambda D_1(t) e^{\lambda t}$$

Po podstawieniu...

$$D_1'(t) e^{\lambda t} + \lambda D_1(t) e^{\lambda t} = \lambda D_1(t) e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t}$$

$$\Downarrow$$

$$D_1'(t) = C_2$$

$$\Downarrow$$

$$D_1(t) = C_2 t + C_1$$

Mamy zatem rozwiązanie ogólne układu w postaci

$$z_1(t) = (C_2 t + C_1) e^{\lambda t}, \quad z_2(t) = C_2 e^{\lambda t}, \quad \lambda = -1$$

Czas powrócić do oryginalnych niewiadomych...

$$x(t) = V z(t).$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) + z_2(t) \\ -z_1(t) \end{bmatrix}$$

czyli...

$$\begin{cases} x_1(t) = (C_1 + C_2) e^{-t} + C_2 t e^{-t} \\ x_2(t) = -(C_2 t + C_1) e^{-t} \end{cases}$$

Zauważmy, że (zgodnie z oczekiwaniem) $x_1'(t) = x_2(t)$.

Ponadto - po odpowiednim predefiniowaniu stałych dowolnych - - otrzymane $x_1(t)$ jest identyczne z rozwiązaniem $y(t)$ na stronie 9-ej.

Na koniec rozważmy następujący problem: czy również w przypadku „zdegenerowanym" możliwe jest zapisanie rozwiązania naszego problemu w postaci analogicznej do formuły ze strony 10-ej, tzn. wzorem

$$x(t) = V e^{Jt} V^{-1} x_0 \qquad ?$$

Okazuje się, że odpowiedź jest twierdząca! Pozostaje wyjaśnić czym jest macierz e^{Jt}.

Ogólnie, pod zapisem e^{At} rozumiemy sumę szeregu

$$e^{At} = I + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \frac{1}{6} t^3 A^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

Zauważmy teraz, że dla $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ zachodzi formuła

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

A oto prosty dowód indukcyjny:

1) dla $n=1$ twierdzenie jest oczywiście prawdziwe

2) niech dla pewnego naturalnego k ma miejsce równość

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Obliczmy

$$J^{k+1} = J^k J = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & \lambda^k + k\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

Zatem dla $k+1$ formuła jest również prawdziwa, co dowodzi jej prawdziwości dla dowolnej liczby naturalnej n.

Mamy zatem $e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n =$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\lambda^n}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n n\lambda^{n-1}}{n!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\lambda^n}{n!} \end{bmatrix}$$

Ale ... $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t)^n = e^{\lambda t}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n n\lambda^{n-1}}{n!} = t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = t\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = te^{\lambda t}$$

Ostatecznie
$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

U nas ($\lambda = -1$) :
$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiązanie

$$x(t) = Ve^{Jt}V^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} + e^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_{20} \\ x_{10} + x_{20} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x_{10}+x_{20})(te^{-t}+e^{-t}) - x_{20}e^{-t} \\ x_{20}e^{-t} - te^{-t}(x_{10}+x_{20}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x_{10}+x_{20})te^{-t} + x_{10}e^{-t} \\ x_{20}e^{-t} - te^{-t}(x_{10}+x_{20}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Oczywiście $x_1'(t) = x_2(t)$ oraz $x_1(0) = x_{10}$ i $x_2(0) = x_{20}$. Porównanie otrzymanej postaci rozwiązania z formułami na stronie 13-ej pozwala ustalić też związki pomiędzy stałymi C_1 i C_2 a liczbami x_{10} i x_{20}, a mianowicie

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_{10} \\ C_2 = x_{10} + x_{20} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$C_1 = x_{10} - C_2 = x_{10} - x_{10} - x_{20} = -x_{20}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{V^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}}_{x_0}$$

Widzimy, że:

$$x(t) = Ve^{Jt}\mathbf{c}$$

Po tych (dość obszernych, ale oczywiście nadal dalekich od kompletności) wyjaśnieniach nt. związku wartości/wektorów własnych macierzy z r-niami różniczkowymi przejdziemy do omówienia kilku podstawowych własności zagadnienia na wartości/wektory własne.

SPOSTRZEZENIE 1: wartości własne macierzy o elementach rzeczywistych nie muszą być liczbami rzeczywistymi!
Przykład: wartościami własnymi macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{są} \quad \lambda_1 = i \quad i \quad \lambda_2 = -i \quad (i = \sqrt{-1})$$

W konsekwencji, wektory własne też są zespolone.

SPOSTRZEZENIE 2: ... ale jeśli macierz jest symetryczna ($A = A^T$ lub - ogólniej - $A = A^* \equiv (\bar{A}^T)$) to wszystkie jej wartości własne są rzeczywiste!

Dowód: Niech (λ, x) będzie parą własną macierzy A tj:

$$Ax = \lambda x$$

Oznaczmy $x^* = (\bar{x})^T$ tj. wektor wiersz zawierający liczby sprzężone względem elementów wektora x. Iloczyn skalarny

$$(x, Ax) = x^*Ax = x^*(\lambda x) = \lambda x^* x = \lambda \underbrace{\|x\|_2^2}_{\text{norma } x}$$

Mnożenie skalarne w odwrotnej kolejności daje

$$(Ax, x) = (Ax)^* x = x^* \underset{\underset{A}{\parallel\!\mid}}{A^*} x = x^* A x = (x, Ax)$$

czyli to samo. Z drugiej strony wiadomo, że iloczyn skalarny ma własność

$$(Ax, x) = \overline{(x, Ax)} = \bar{\lambda} \|x\|_2^2$$

Stąd $\lambda = \bar{\lambda}$ co dowodzi, że $\lambda \in \mathbb{R}$.

SPOSTRZEŻENIE 3: macierze rzeczywiste A i A^T mają te same wartości własne. Niemniej, wektory własne odpowiadające tej samej wartości własnej są na ogół różne!

Ćwiczenie - skonstruować przykład ilustrujący ten fakt.

SPOSTRZEŻENIE 4: ... ale jeśli $AA^T = A^TA$ to każdej pary własnej (λ, x) macierzy A zachodzi równość $A^T x = \lambda x$.

UWAGA: macierz A taka, że $AA^T = A^TA$ nazywana jest macierzą normalną (ogólniej $AA^* = A^*A$); spostrzeżenie 4 można uogólnić na przypadek zespolony: jeśli A jest normalna i (λ, x) jest jej parą własną to $A^* x = \bar{\lambda} x$)

SPOSTRZEŻENIE 5: Wektory własne macierzy normalnej odpowiadające dwóm różnym wartościom własnym są ortogonalne. Czyli...

$$\left\{\begin{array}{c} A x_1 = \lambda_1 x_1 \\ A x_1 = \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_1, x_2) \equiv x_1^* x_2 = 0$$

Wniosek: Powyższe stwierdzenie jest w szczególności prawdziwe dla macierzy symetrycznych, bowiem każda macierz symetryczna jest automatycznie macierzą normalną (wyjaśnij!)

SPOSTRZEŻENIE 6: Wszystkie wartości własne symetrycznej macierzy dodatnio (ujemnie) określonej są dodatnimi (ujemnymi) liczbami rzeczywistymi

Istotnie dla dowolnej pary własnej (λ, x) macierzy symetrycznej i dodatnio określonej mamy

$$0 < (x, Ax) = x^* A x = \lambda x^* x = \lambda \|x\|_2^2$$

a stąd $\lambda > 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ na mocy symetrii A)

TWIERDZENIA O FAKTORYZACJACH UJAWNIAJĄCYCH WARTOŚCI WŁASNE

TWIERDZENIE Schura

Każda macierz kwadratowa A może być przedstawiona w postaci iloczynu

$$A = Q U Q^* \qquad (Q^* \equiv \overline{(Q^T)})$$

gdzie: •) Q jest macierzą unitarną tj. $Q^{-1} = Q^*$ $(QQ^* = Q^*Q = I)$

•) U jest macierzą górną trójkątną tj. $u_{ij} = 0$ gdy $i > j$.

Dowód:

Zastosujemy metodę indukcji względem rozmiaru macierzy A.

Dla $n \equiv \dim A = 1$ twierdzenie jest trywialnie prawdziwe ($q_{11} = 1$, $u_{11} = a_{11}$). Niech zatem $n \geq 2$.

Załóżmy, że wymiar macierzy A jest równy n, a twierdzenie jest prawdziwe dla każdej macierzy kwadratowej rozmiaru $n-1$.

Niech (λ, x) będzie pewną parą własną macierzy A (tj. $Ax = \lambda x$)

Możemy założyć, że $\|x\|_2^2 \equiv x^* x = 1$ (normalizacja x)