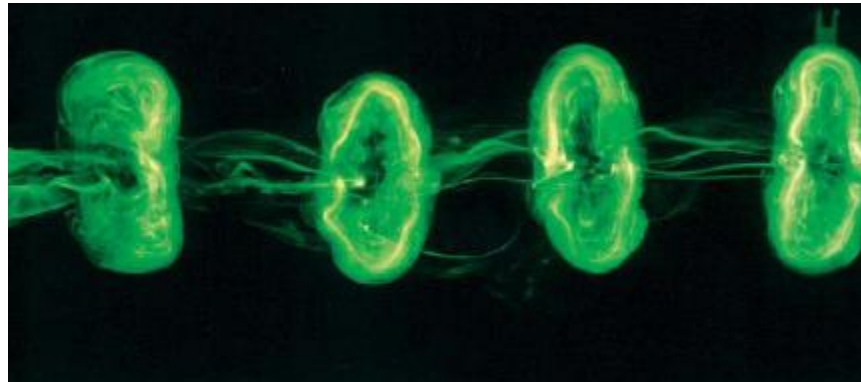


# WYKŁAD 6

## CAŁKI RÓWNANIA EULERA – RÓWNANIE BERNOULLIEGO, RÓWNANIE CAUCHY – LAGRANGE’A



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# CAŁKI RÓWNANIA EULERA

## Założenia podstawowe:

- Potencjalność pola sił zewnętrznych  $\vec{F} = \nabla \phi$
- Barotropowość płynu – zależność masy właściwej  $\rho$  wyłącznie od ciśnienia  $\rho = \rho(p) \leftrightarrow$  znamy przemianę termodynamiczną

Wprowadzamy funkcję ciśnienia  $P(p)$  taką, że


$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad \text{wtedy} \quad \nabla P(p) = \frac{1}{\rho(p)} \nabla p$$

# CAŁKI RÓWNANIA EULERA (I)

Równanie Eulera:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Przekształcamy  
do postaci



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla (\phi - P)$$

Na podstawie tego równania, zakładając, że ruch ośrodka jest ustalony otrzymujemy:

$$\frac{v^2}{2} + P - \phi = \text{const} \Big|_{\text{linii prądu}}$$

Jest to CAŁKA  
RÓWNANIA EULERA  
zwana  
RÓWNANIEM  
BERNOULLIEGO



Zauważmy, że gdy entropia jest stała -  $s = \text{const}$ , czyli przemianą termodynamiczną jest izentropa to prawdziwa jest równość:

$$i \equiv P(p) + \text{const}$$

W tym przypadku równanie Bernoulliego jest z dokładnością do stałej identyczne z całką energii !

$$\frac{v^2}{2} + P - \phi = \text{const1} \Big|_{\text{linii prądu}} \equiv \frac{v^2}{2} + i - \phi = \text{const2} \Big|_{\text{linii}}$$

## CAŁKI RÓWNANIA EULERA (II)

Zakładając potencjalność pola prędkości -  $\text{rot } \vec{v} = 0$  z równania Eulera otrzymujemy (ruch może być nieustalony)

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

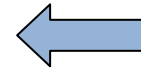
potencjał  
prędkości



$$v_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad k = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P(p) - \phi = f(t)$$

Jest to CAŁKA  
RÓWNANIA EULERA  
zwana  
CAŁKĄ  
CAUCHY'EGO –  
LAGRANGE'A



Gdy ruch potencjalny nie zależy bezpośrednio od czasu to:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{i} \quad f = \text{const}$$

wtedy

$$\frac{v^2}{2} + P - \phi = \text{const}$$

Stać **const** jest taka sama w całym obszarze ruchu.

**Wniosek:** dla ruchu potencjalnego, niezależnego od czasu, równanie Bernoulliego i całka Cauchy'ego – Lagrange'a są tożsame, a stała w równaniu Bernoulliego ma taką samą wartość na wszystkich liniach prądu.

## PRZYKŁAD

W pewnym ruchu gazu temperatura nie ulega zmianie. Zachodzą okoliczności prowadzące do równania Bernoulliego. Podaj to równanie.

Musimy wyznaczyć  $P(p)$ !

$T = \text{const}$  – zatem mamy przemianę izotermiczną .

Możemy skorzystać z równania Clapeyrona -

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = RT \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = RT \ln \frac{p}{p_0}$$

Stąd równanie Bernoulliego ma postać

$$\frac{v^2}{2} + RT \ln \frac{p}{p_0} - \phi = \text{const} \Big|_{l.p.}$$

