WYKŁAD 8

RÓWNANIE NAVIERA-STOKESA

Zaczniemy od wyprowadzenia **równania ruchu dla płynu newtonowskiego**. Wcześniej wyprowadziliśmy z 2-ej Zasady Dynamiki ogólne równanie ruchu, którego postać indeksowa to

$$\rho \frac{D\upsilon_i}{Dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_j \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

W poprzednim wykładzie otrzymaliśmy ponadto związek konstytutywny dla płynu newtonowskiego, a mianowicie

$$\sigma_{ij} = \left[-p + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu) \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} \right] \delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \right]$$

Powyższy związek należy wstawić do prawej strony równania ruchu i przeprowadzić odpowiednie operacje różniczkowe (de facto – trzeba obliczyć dywergencję tensora naprężeń zadanego związkiem konstytutywnym).

Szczegółowy rachunek przebiega następująco …

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right) + \mu\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\zeta + \tfrac{1}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right) + \mu\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Po podstawieniu do ogólnego równania ruchu otrzymujemy równanie ruchu (wektorowe !) płynu newtonowskiego:

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_j\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\zeta + \tfrac{1}{3}\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right) + \mu\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i$$

W przypadku ruchu 3-wymiarowego mamy oczywiście $i = 1, 2, 3$, oraz $i = 1, 2$ w przypadku 2D.

Forma wektorowa (a zatem niezmiennicza względem wyboru układu odniesienia) tego równania to

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{v}+(\zeta+\tfrac{1}{3}\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\rho\boldsymbol{f}}$$

Powyższe równanie różniczkowe nazywamy **Równaniem Naviera-Stokesa**. Jest to centralne równanie hydrodynamiki klasycznej.

Dla **płynu nieściśliwego** $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, zatem RNS upraszcza się do formy

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{f},$$

Często powyższe równanie jest dzielone przez (stałą) gęstość, co daje postać

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}$$

Wielkość $\nu=\mu/\rho$ zwana jest **lepkością kinematyczną** płynu – jej jednostka SI m^2/s.

Postać indeksowa „nieściśliwego” RNS to

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_j\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_j \partial x_j}+f_i$$

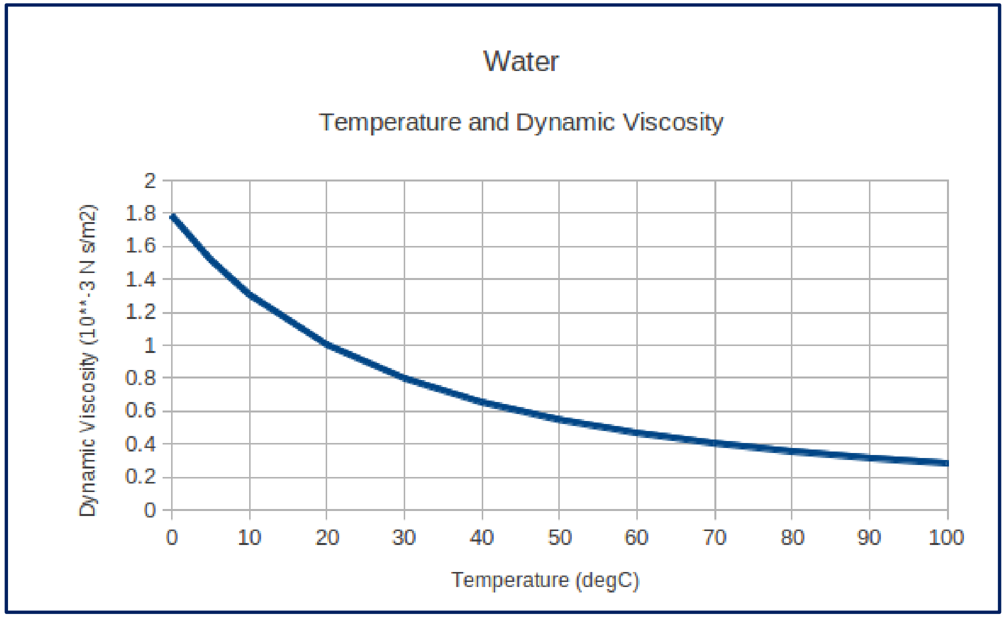
Zwróćmy uwagę na sumowanie implikowane przez podwójny indeks „j” w składniku z lepkością.

Równanie Naviera-Stokesa jest wektorowym równaniem różniczkowym cząstkowym (czyli układem dwóch lub trzech równań skalarnych; przypadek 1D jest trywialny, o czym później).

W **przypadku nieściśliwym**, niewiadomymi w RNS są: wektorowe pole prędkości i skalarne pole ciśnienia. Do uzyskania zamkniętego układu równań wystarczy (i potrzeba) dodać warunek ciągłości, czyli równanie $\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon}=0$ oraz odpowiednie warunki graniczne (warunki brzegowe i warunek początkowy). Otrzymany w ten sposób problem jest rozwiązywalny (co nie znaczy, że łatwy do rozwiązania). Z nielicznymi wyjątkami, użyteczne technicznie rozwiązania równań przepływowych można uzyskać jedynie w formie przybliżonej, przy użyciu wyrafinowanych metod numerycznych.

W przypadku **przepływów ściśliwych**, dodatkową niewiadomą jest (skalarne) pole gęstości płynu. Ewidentnie **brakuje jeszcze jednego równania**! Tym brakującym (skalarnym) równaniem różniczkowym **jest równanie wynikające z Zasady Zachowania Energii** – o tym później.

W każdym z przypadków dodatkowe komplikacje modelu mogą pojawić się w związku z zależnością lepkości płynu od jego parametrów termodynamicznych. W szczególności lepkość cieczy (modelowanych zwykle jako płyn nieściśliwy) radykalnie maleje ze wzrostem temperatury! Np. lepkość wody w temperaturze 60 stopni Celsjusza jest ponad dwukrotnie mniejsza niż w temperaturze 20 stopni (odpowiednio, $0.467 \cdot 10^{-3}$ kg/ms i $1.02 \cdot 10^{-3}$ kg/ms)



Z kolei, lepkość gazów rośnie z temperaturą – typową tendencję opisuje formuła Sutherlanda

$$\mu = C \frac{T\sqrt{T}}{T+S}$$

(dla powietrza $S \approx 110K$, $C \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ ...)

Omówimy krótko (nietrywialne) zagadnienie **warunków brzegowych**. Warunki te definiują pewne informację o zachowaniu pola przepływu na brzegu obszaru, w którym poszukiwane jest rozwiązanie równań przepływowych. Repertuar tych warunków różni się znacznie dla przepływów nieściśliwych i ściśliwych, co wynika zarówno z głębokich różnić w fizyce tych przepływów oraz z powodów matematycznych. Ograniczymy się wyłącznie do krótkiego komentarza nt. warunków dla przepływów nieściśliwych (cieczy).

Mówiąc ogólnie, mamy typowo dwa rodzaje brzegu czyli powierzchni (linii w 2D) ograniczających obszar przepływu**:**

- **Brzeg materialny,** czyli powierzchnie ciał stałych zanurzonych w płynie
- **Wloty i wyloty (faktyczne lub fikcyjne**), czyli części brzegu przez które płyn wpływa lub wypływa z obszaru.

Dodatkowo, w przypadku opływu ciała lub ciał „niegraniczoną” masą płynu definiuje się zwykle **warunki dalekiego pola**, opisujące zachowanie się pola prędkości i – ewentualnie – innych pól daleko od opływanych ciał.

Dla przepływów cieczy z powierzchnią swobodną potrzebne jest zdefiniowanie specjalnych warunków opisujących interakcję z ośrodkiem na zewnątrz płynu (zwykle jest to gaz). Warunki takie są typowe dla modelowania ruchu fal na powierzchni zbiorników wodnych.

Najprostsze do sformułowania jest warunek brzegowy na powierzchni ciał stałych zanurzonych w płynie lepkim. Warunek ten stwierdza fizyczny fakt **przylepienia płynu do powierzchni czyli równość prędkości płynu i prędkości samej powierzchni ciała**

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ na $\partial\Omega$, $\boldsymbol{u}$ - prędkość punktu należącego do brzegu ciała

Jeśli chodzi o warunki wlotowo/wylotowe to możliwy jest dość szeroki (ale ściśle zdefiniowany) repertuar warunków mających charakter kinematyczny (zadane są składowe normalna i/lub styczna wektora prędkości), naprężeniowy (zadana są składowa styczna i/lub normalna siły jednostkowej) lub mieszany. Możliwe są też inne warianty nie mające bezpośredniej interpretacji fizycznej, ale użyteczne w modelowaniu przepływów przez sieci przewodów (w tym, przepływu w układzie krwionośnym). Należy też podkreślić, że pewne (pozornie sensowne) kombinacje warunków brzegowych są zabronione, np. nie jest poprawnym warunkiem zadać na tym samym wlocie (w przepływie nieściśliwym) jednocześnie składowej normalnej prędkości i rozkładu ciśnienia.

Typowym (w aerodynamice zewnętrznej) warunkiem dalekiego pola jest przyjęcie, że w wielkiej odległości od opływanego ciała prędkość płynu dąży do wartości odpowiadającej strumieniowi niezaburzonemu

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty$$

Ponieważ w większości metod komputerowej analizy przepływów obszar obliczeniowy musi być skończony (zatem ma fikcyjną zewnętrzną granicę), najprostszym (ale nie najlepszym) podejściem jest przenieść powyższy warunek z nieskończoności na zewnętrzny brzeg obszaru. Bardziej wyrafinowane podejście polega na wykorzystaniu w roli warunku brzegowego wartości brzegowej rozwiązania „ w dalekim polu”, wyznaczanego z rozwiązania problemu uproszczonego (niekiedy rozwiązanie takie ma formę analityczną).

WYBRANE PRZYPADKI ANALITYCZNE RUCHU CIECZY LEPKIEJ

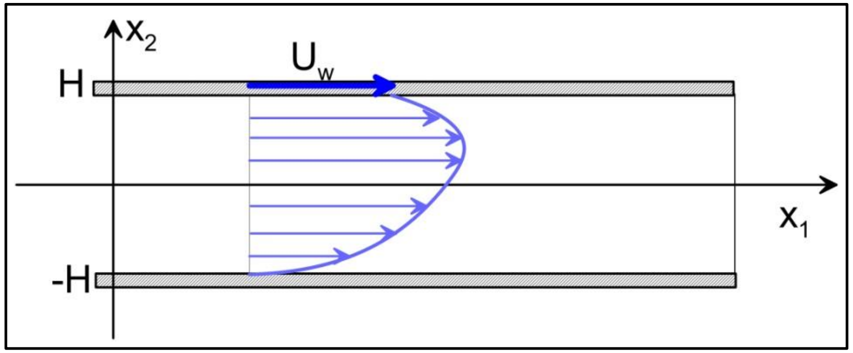
Rozwiązania analityczne równań opisujących interesujące technicznie przypadki ruchu cieczy newtonowskiej są bardzo nieliczne. Omówimy kilka z nich.

Standardowe przykłady obejmują:

- przepływ Poiseuille'a-Couette'a w „kanale" dwuwymiarowym,
- przepływy ustalone w prostoliniowych rurach o stałym przekroju kołowym lub eliptycznym,
- przepływ w przestrzeni pomiędzy dwiema współosiowymi rurami o przekroju kołowym,
- dwuwymiarowy przepływ Taylora-Couette'a w obszarze pomiędzy dwoma koncentrycznymi konturami kołowymi.

Do „klasyki" przedmioty należą również nieliczne przypadki przepływów niestacjonarnych.

Przykład 1: Przepływy Poiseuille'a-Couette'a



Przepływy P-C napędzane są poziomym ruchem ze stałą prędkości U_W jednej ze ścian (tu: górnej) oraz stałym (i ujemnym) gradientem (wzdłuż kierunku przepływu – tu równoległego do osi $0x_1$).

Pole prędkości przepływu P-C ma postać

$$\boldsymbol{\upsilon} = [\upsilon_1, \upsilon_2] = [\upsilon_1, 0] \quad , \quad \upsilon_1 = \upsilon_1(x_2) \ , \quad \upsilon_2 \equiv 0 \quad , \quad \tfrac{\partial}{\partial x_1}\upsilon_1 = 0$$

Pole to ma dywergencję równą zeru, więc warunek ciągłości spełniony jest automatycznie. Ruch odbywa się tylko w kierunku $0x_1$, a równania ruchu redukuj się do formy

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial}{\partial x_1} p + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \upsilon_1 \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial x_2} p \end{cases}$$

Z drugiego z równań wynika, że ciśnienie jest funkcją wyłącznie zmiennej x_1. Pierwsze z równań może być zapisane następująco

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \upsilon_1$$

Zauważmy, że lewa strona tego r-nia zależy wyłącznie od x_1, podczas gdy druga – wyłącznie od x_2. Równanie to może być spełnione dla dowolnej wartości argumentów tylko wtedy gdy obie strony są równe tej samej wartości stałej – oznaczmy ją symbolem K.

Mamy zatem $$\frac{\partial}{\partial x_1} p = -K = const \quad (niech\ K > 0)$$

Rozkład (profil) prędkości wyznaczamy całkując dwukrotnie …

$$\frac{d^2}{d x_2^2} \upsilon_1 = -\frac{K}{\mu} \Rightarrow \upsilon_1(x_2) = -\frac{1}{2}\frac{K}{\mu} x_2^2 + A x_2 + B$$

Stałe całkowania A i B wynikają z nałożonych warunków brzegowych:

$$x_2 = -H \quad \Rightarrow \upsilon_1(x_2) = 0$$

$$x_2 = H \quad \Rightarrow \upsilon_1(x_2) = U_w$$

Ostatecznie zatem $$\upsilon_1(x_2) = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}[1 - (\frac{x_2}{H})^2] + \frac{U_w}{2H}(x_2 + H)$$

Mamy dwa przypadki szczególne:

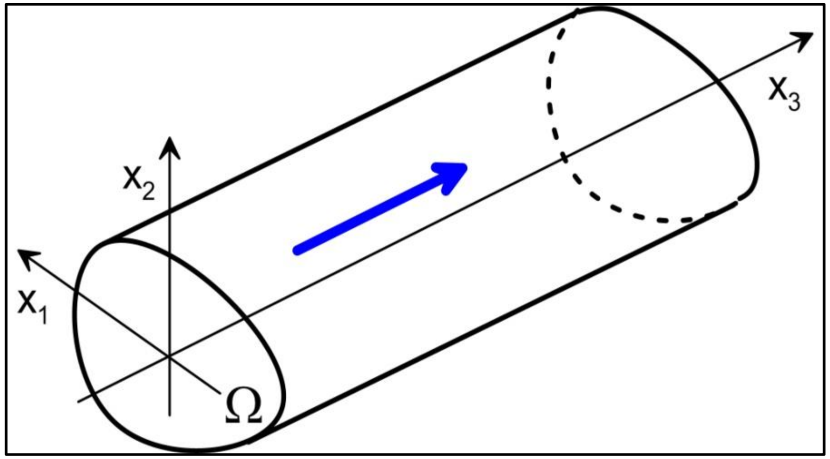
- przepływ Poiseuille'a $\qquad U_w = 0 \quad \Rightarrow \upsilon_1(x_2) = \frac{1}{2}\frac{K}{\mu}[1-(\frac{x_2}{H})^2]$
- przepływ Couette'a $\qquad K = 0 \quad \Rightarrow \upsilon_1(x_2) = \frac{U_w}{2H}(x_2 + H)$

Ćwiczenie:

1. Oblicz wydatek (w sensie 2D) przepływu P-C jako funkcję prędkości U_W i gradientu ciśnienia K. Kiedy wydatek jest równy zeru?

2. Oblicz rozkład poprzeczny (profil) wirowości i naprężeń stycznych. Jak wyjaśnisz fakt, że naprężenia styczne wzdłuż dowolnej linii $x_1 = const$ nie są równe zeru, chociaż nie występuje ruch w kierunku $0x_2$?

Przykład 2: jednokierunkowy przepływ w rurze o stałym przekroju



Przepływ jest napędzany stałym gradientem ciśnienia. Pole prędkości ma tylko jedną niezerową składową:

$$\boldsymbol{\upsilon} = [\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3] = [0, 0, \upsilon_3] \quad , \quad \upsilon_3 = \upsilon_3(x_1, x_2)$$

Analogiczny argument jak w przypadku przepływu P-C prowadzi do wniosku, że ciśnienie jest stałe w przekroju rury i jego gradient w kierunku $0x_3$ jest stały:

$$\tfrac{\partial}{\partial x_3} p = -K = const \quad (K > 0 \ jest\ zadana)$$

Zagadnienie brzegowe dla rozkładu prędkości w przekroju rury ma teraz postać:

$$\begin{cases} \tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\upsilon_3 + \tfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\upsilon_3 = -\tfrac{K}{\mu} \quad in \ \Omega \\ \upsilon_3\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

gdzie **Ω** oznacza obszar 2D przekroju poprzecznego rury (w płaszczyźnie $0x_1x_2$).

W szczególnych przypadkach rozwiązanie powyższego zagadnienia można otrzymać w formie analitycznej. Na ogół – należy użyć metod numerycznych.

Przypadek szczególny: przepływ w rurze kołowej (**przepływ Hagena-Poiseuille'a**)

Naturalnym jest wykorzystać cylindryczny układ współrzędnych. Przy założeniu osiowej symetrii pola prędkości, równanie ruchu w kierunku osiowym redukuje się do postaci (oznaczyliśmy $w = \upsilon_3$ jedyną niezerową składową pola prędkości)

$$\frac{d^2}{dr^2} w + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} w \equiv \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} w \right) \right] = -\frac{K}{\mu}$$

Warunki brzegowe dla powyższego równania mają postać:

$$\frac{d}{dr} w(r=0) = 0 \quad , \quad w(r=R) = 0$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia brzegowego jest funkcja

$$w(r) = \underbrace{\frac{KR^2}{4\mu}}_{w_0} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = w_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Obliczmy **wydatek objętościowy** przepływu Hagena-Poiseuille'a (szczegóły – ćwiczenie)

$$Q = \int_\Omega w \, dS = 2\pi \int_0^R w(r) r \, dr = \frac{K}{8\mu} R^4 = \frac{KD^4}{128\mu}$$

Otrzymana formuła nosi nazwę wzoru **Hagena-Poiseuille'a**. Zauważmy, że wydatek jest proporcjonalny do wartości gradientu ciśnienia i czwartej potęgi średnicy rury, a także odwrotnie proporcjonalny do lepkości cieczy.

Pokażemy, że można wprowadzić bezwymiarową miarę określającą spadek ciśnienia niezbędny do uzyskania zadanego wydatku. Spadek ten charakteryzuje tzw. straty hydrauliczne (ubytek ciśnienia) lub – innymi słowy – opór hydrauliczny.

Zacznijmy od wprowadzenia **prędkości średniej**

$$w_{sr} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2} = \frac{KD^2}{32\mu} = \frac{1}{2} w_0$$

Gradient ciśnienia można wyrazić przez prędkość średnią i parametry fizyczne cieczy

$$K = \frac{32 w_{sr} \rho \nu}{D^2}$$

Wprowadźmy bezwymiarową miarę spadku ciśnienia (strat hydraulicznych) wzorem

$$\lambda \equiv \frac{KD}{\frac{1}{2}\rho w_{sr}^2} = \frac{64}{\frac{w_{sr} D}{\nu}} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \quad , \quad \mathrm{Re} = \frac{w_{sr} D}{\nu}$$

Otrzymaliśmy formułę zawierającą ważną bezwymiarową wielkość – **liczbę Reynoldsa** Re. Charakteryzuje ona (względną) wielkość efektów lepkości w przepływie. Liczba Reynoldsa jest jedną z najważniejszych **liczb podobieństwa dynamicznego**. **Problem podobieństwa dynamicznego przepływów** i związanych z nim bezwymiarowych liczb omówimy szerzej w **Wykładzie nr 10**.

Analityczne formuły wiążące gradient ciśnienia i wydatek mogą być otrzymane w kilku przypadkach przekrojów innych niż kołowy (np. elipsa, trójkąt równoboczny, prostokąt). Nie zawsze są to formuły zamknięte - otrzymuje się również wyrażenia w postaci szeregu.

W hydraulice posługujemy się często pojęciem promienia hydraulicznego R_h**, zdefiniowanego następująco**

$$R_h = 2A/P$$

gdzie A i P oznaczają, odpowiednio, pole powierzchni i obwód przekroju poprzecznego rury (dla rury kołowej mamy $R_h \equiv R$).