WYKŁAD 11

ENERGIA Z ZAGADNIENIACH RUCHU PŁYNU

WYPROWADZENIE RÓWNANIA ENERGII

Zgodnie z ogólnym podejściem do praw zachowania przedstawionym w Wykładzie nr 3, matematyczna postać Zasady Zachowania Energii (ZZE) zapisanej dla obszaru kontrolnego Ω przedstawia się następująco:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho e\,dV\Big|}_{\text{produkcja}} = \underbrace{P_S + P_V}_{\text{moc sil zewnętrznych}} + \underbrace{Q_{\partial\Omega}}_{\text{moc strumienia ciepla przez } \partial\Omega} + \underbrace{Q_{\Omega}}_{\text{moc wewnętrznych źródel ciepla}}$$

gdzie $e = u + \frac{1}{2}\upsilon^2$ oznacza jednostkową (tj. odniesioną do jednostki masy) energię całkowitą płynu.

Składniki opisujące moc rozwijaną przez siły zewnętrzne wyrażają się następującymi całkami

$$P_S = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\,dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Xi n}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\,dS \quad , \quad P_V = \int_{\Omega} \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\,dV$$

Składniki opisujące moc cieplną to

$$Q_{\partial\Omega} = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{q}_h\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad , \quad Q_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho\gamma_h\,dV$$

Przypomnijmy, że symbol $\boldsymbol{q}_h$ oznacza wektor strumienia ciepła przewodzonego przez brzeg $\partial\Omega$, a symbol γ_h oznacza gęstość właściwą mocy wewnętrznych źródeł ciepła.

Lewa strona równości całkowej wyrażającej ZZE może być przekształcona następująco:

$$\frac{d}{dt}E\bigg|_{produkcja} \equiv \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}[\rho(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)]dV + \int_{\partial\Omega}[\rho(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)]\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}\,dS =$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}[\rho(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)]dV + \int_\Omega \nabla\cdot[\rho(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)\boldsymbol{\upsilon}]dV =$$

$$= \int_\Omega \left\{(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\upsilon})] + \rho[\frac{\partial}{\partial t}(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2) + \boldsymbol{\upsilon}\cdot\nabla(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)]\right\}dV =$$

$$= \int_\Omega \rho[\frac{\partial}{\partial t}(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2) + \boldsymbol{\upsilon}\cdot\nabla(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)]dV = \int_\Omega \rho\frac{D}{Dt}(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2)dV = \int_\Omega \rho\frac{D}{Dt}e\,dV$$

Zauważmy, że wyrażenie zaznaczone kolorem zielonym znika – jest to lewa strona równania wynikającego z Zasady Zachowania Masy (vide Wykład nr 3). W wyniku pokazanych przekształceń pod całką pojawiła się **pochodna substancjalna energii właściwej** e .

Następny krok polega – jak zwykle – na sprowadzeniu całek powierzchniowych do równoważnych in całek objętościowych.

Zaczniemy od całki wyrażającej moc rozwijaną przez siły powierzchniowe …

$$P_S = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\, dS = \int_{\partial\Omega} \upsilon_i \Xi_{ij} n_j\, dS \underset{GGO}{=} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_i \Xi_{ij})\, dV \underset{\Xi_{ij}=\Xi_{ji}}{=} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}(\upsilon_i \Xi_{ji})\, dV =$$

$$\underset{i \rightleftarrows j}{=} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(\Xi_{ij}\upsilon_j)\, dV = \int_{\Omega} \nabla\cdot(\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\upsilon})\, dV$$

Wyjaśnimy sens otrzymanej całki objętościowej. Po pierwsze, wyrażenie pod całką możemy rozpisać na sumę dwóch składników

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\upsilon}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(\Xi_{ij}\upsilon_j) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Xi_{ij}\right)\upsilon_j + \Xi_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\upsilon_j\right) =$$

$$= Div(\boldsymbol{\Xi})\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\Xi} : \nabla\boldsymbol{\upsilon}$$

W drugim składniku pojawił się iloczyn skalarny (oznaczony dwukropkiem) pary tensorów: tensora naprężeń i gradientu pola prędkości.

Wykorzystując dalej rozkład gradientu prędkości na sumę części symetrycznej (tensor prędkości deformacji $\boldsymbol{D}$) i antysymetryczną (tensor obrotu $\boldsymbol{R}$), otrzymujemy …

$$\boldsymbol{\Xi} : \nabla \boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\Xi} : (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{D}$$

Istotnie, iloczyn skalarny tensorów $\boldsymbol{\Xi}$ i $\boldsymbol{R}$ jest równy zero, co jest konsekwencją symetrii pierwszego i antysymetrii drugiego tensora:

$$\boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{R} \equiv \tfrac{1}{2} \Xi_{ij} \left(\tfrac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i - \tfrac{\partial}{\partial x_i} \upsilon_j \right) = \tfrac{1}{2} \Xi_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i - \tfrac{1}{2} \underset{\Xi_{ji}}{\Xi_{ij}} \tfrac{\partial}{\partial x_i} \upsilon_j =$$

$$= \tfrac{1}{2} \Xi_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i - \tfrac{1}{2} \Xi_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i = 0$$

Ostatecznie zatem, moc rozwijana przez siły powierzchniowe można wyrazić wzorem

$$P_S = \int_{\Omega} Div(\boldsymbol{\Sigma}) \cdot \boldsymbol{\upsilon}\, dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{D}\, dV$$

Pokażemy dalej, że każdy z powyższych składników ma interpretację fizyczną.

Zajmijmy się z kolei całką powierzchniową wyrażającą moc strumienia ciepła przez brzeg obszaru

$$Q_{\partial\Omega} = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Tu sprawa jest zupełnie prosta – stosujemy co tej całki Twierdzenie GGO i otrzymujemy

$$Q_{\partial\Omega} = -\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}\, dS = -\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{q}_h\, dV$$

W ramach dość ogólnego modelu przewodnictwa ciepła, powierzchniowa gęstość strumienia ciepła $\boldsymbol{q}_h$ jest liniową funkcją gradientu temperatury, a mianowicie

$$\boldsymbol{q}_h = -\boldsymbol{\Lambda} \nabla T$$

Innymi słowy, wartość gęstości strumienia obliczamy poprzez zastosowanie do gradientu temperatury tensora przewodnictwa $\boldsymbol{\Lambda}$, charakteryzującego zdolność płynu do przewodzenia ciepła, a także ewentualną anizotropowość.

Tensor przewodnictwa musi spełniać pewne warunki zapewniające, że ciepło nie będzie płynąć „od zimnego do ciepłego”; wykluczyć należy również „cyrkulację” ciepła po powierzchniach w kierunku stycznym do powierzchni izotermicznej.

W najprostszym przypadku mamy do czynienia z medium izotropowym (o takim samym własnościach w każdym kierunku). Wówczas strumień ciepła jest zawsze równoległy do gradientu temperatury i tensor przewodnictwa jest tensorem sferycznym postaci

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda \boldsymbol{I}$$

Dodatnią wielkość λ nazywamy współczynnikiem przewodności cieplnej ośrodka (płynu). **Strumień ciepła wyraża się wówczas wzorem (tzw. prawo Fouriera)**

$$\boldsymbol{q}_h = -\lambda \nabla T$$

Składnik w bilansie energii wyrażający moc strumienia ciepła przez brzeg przyjmuje postać

$$Q_{\partial\Omega} = -\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{q}_h \, dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \, dV$$

Równość całkową bilansu energii płynu w obszarze Ω można zapisać teraz z postaci pojedynczej całki objętościowej (równej zeru). Ponieważ obszar został wybrany dowolnie, mamy na mocy standardowego argumentu równanie różniczkowe energii:

$$\boxed{\boxed{\rho \frac{D}{Dt} e = Div(\boldsymbol{\Xi}) \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{D} + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \rho \gamma_h + \nabla \cdot (\lambda \nabla T)}}$$

ENERGIA WEWNĘTRZNA I DYSSYPACJA ENERGII

Jest pouczającym rozważyć osobno bilanse energii wewnętrznej i energii kinetycznej płynu. W tym celu pomnóżmy (w sensie iloczynu skalarnego) równanie ruchu przez wektor prędkości $\boldsymbol{v}$

$$\rho \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + Div(\boldsymbol{\Xi})\cdot\boldsymbol{v}$$

Otrzymane równanie (skalarne!) jest równoważne następującemu (pochodna substancjalna spełnia formułę Leibniza o różniczkowaniu iloczynu)

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) = \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + Div(\boldsymbol{\Xi})\cdot\boldsymbol{v}$$

W następnym kroku scałkujmy otrzymane równanie w obszarze Ω. Otrzymamy wówczas równość całkową

$$\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\tfrac{1}{2}\rho\upsilon^2\,dV\right|_{produkcja} = \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV + \int_{\Omega}Div(\boldsymbol{\Xi})\cdot\boldsymbol{v}\,dV$$

Przy użyciu dokazanej wcześniej tożsamości $\nabla\cdot(\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{v}) = Div(\boldsymbol{\Xi})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Xi}:\nabla\boldsymbol{v}$ równość całkowa dla energii kinetycznej może być zapisana w postaci

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\tfrac{1}{2}\rho\upsilon^2\,dV\right|_{produkcja} = \int_{\Omega}\rho\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n}\,dS - \int_{\Omega}\boldsymbol{\Xi}:\boldsymbol{D}\,dV}$$

Jeśli odejmiemy otrzymaną równość od równości całkowej opisującej bilans energii całkowitej, to otrzymamy równość opisującą zmiany energii wewnętrznej płynu, a mianowicie

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho u\,dV\right|_{produkcja} = \int_{\Omega}\rho\gamma_h\,dV + \int_{\partial\Omega}\lambda\nabla T\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \int_{\Omega}\boldsymbol{\Xi}:\boldsymbol{D}\,dV}$$

Zauważmy, że oba równania bilansowe zawierają ten sam składnik

$$\mathfrak{T} := \int_{\Omega}\boldsymbol{\Xi}:\boldsymbol{D}\,dV$$

ale z przeciwnym znakiem! Składnik ten opisuje zatem transfer energii mechanicznej w energię wewnętrzną (i odwrotnie).

Przyjrzyjmy się bliżej temu składnikowi. Pamiętamy, że dla płynu newtonowskiego mamy związek reologiczny

$$\Xi_{ij} = [-p + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)\tfrac{\partial}{\partial x_k}\upsilon_k]\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Obliczmy zatem iloczyn skalarny tenora naprężeń i tensora prędkości deformacji …

$$\boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{D} = \Xi_{ij} D_{ij} = -p\,\delta_{ij} D_{ij} + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)\tfrac{\partial}{\partial x_k}\upsilon_k\,\delta_{ij} D_{ij} + 2\mu D_{ij} D_{ij} =$$

$$= -p D_{ii} + (\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)\tfrac{\partial}{\partial x_k}\upsilon_k D_{ii} + 2\mu D_{ij} D_{ij} =$$

$$= \underbrace{-p\nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon}}_{\substack{>0 \text{ jeżeli } \nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon}<0 \text{ (kompresja)} \\ <0 \text{ jeżeli } \nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon}>0 \text{ (ekspansja)}}} + \underbrace{(\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)(\nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon})^2 + 2\mu \overbrace{\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}}^{=tr\,\boldsymbol{D}^2}}_{\text{część okreslona dodatnio}}$$

Składnik „transferu energii” może być zatem zapisany wzorem

$$\boxed{\int_\Omega \boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{D}\, dV = \underbrace{-\int_\Omega p\nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon}\, dV}_{\substack{\text{wewn.}\Rightarrow\text{kinet. gdy} <0 \\ \text{kinet.}\Rightarrow\text{wewn. gdy} >0}} + \underbrace{(\zeta - \tfrac{2}{3}\mu)\int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{\upsilon})^2 dV + 2\mu\int_\Omega \boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}\, dV}_{\substack{\text{nieodwracalna zamiana energii mechanicznej na} \\ \text{energię wewnętrzną z powodu istnienia lepkosci}}}}$$

Dla przepływów nieściśliwych $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ i wówczas

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\Xi} : \boldsymbol{D}\, dV = 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}\, dV = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \upsilon_j \right) dV \equiv \mathfrak{R}$$

Wielkość $\mathfrak{R}$ nazywamy dyssypacją energii. Jak widać z powyższego zapisu dyssypacja energii w przepływie jest opisana ilościowo **polem gęstości dyssypacji** $\mathfrak{r}$ równym

$$\mathfrak{r} = 2\nu\, \boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}$$

Ma miejsce równość $\mathfrak{R} = \rho \int_{\Omega} \mathfrak{r}\, dV$. Jednostką pola $\mathfrak{r}$ jest [m^2/s^3].

CAŁKA PIERWSZA RÓWNANIA ENERGII

Jeżeli płyn jest płynem idealnym (brak lepkości i przewodnictwa ciepła) to można wyznaczyć **całkę pierwszą równania energii**. Wyprowadzenie tego wyniku przypomina sposób wyprowadzenia całki Bernoulliego (która jest całką pierwszą równania ruchu).

Przyjmijmy następujące założenia:

1. Ruch płynu jest ustalony (stacjonarny),
2. Pole sił objętościowych jest potencjalne, czyli $\boldsymbol{f} = \nabla \Phi$.

UWAGA: **tym razem nie zakładamy barotropowości płynu!**

Zapiszmy różniczkowe równanie energii dla omawianego przypadku. Ma ono postać

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(u + \tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) = -\nabla \cdot (p\boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$$

lub – po rozpisaniu składnika ciśnieniowego

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(u + \tfrac{1}{2}\upsilon^2\right) = -p\nabla \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla p + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$$

Ponieważ pole sił objętościowych jest potencjalne to składnik opisujący moc rozwijaną przez te siły można przedstawić przy pomocy ich potencjału, a mianowicie

$$\rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi = \rho (\underbrace{\partial_t \Phi}_{=0} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Phi) = \rho \frac{D}{Dt} \Phi$$

Dalej, składnik ciśnieniowy można zapisać w formie

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla p = \underbrace{\partial_t p}_{=0} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p = \frac{D}{Dt} p$$

Wreszcie, z ogólnego równania zachowania masy

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

wynika, że

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} \rho$$

Wykorzystując powyższe równości, możemy zapisać równanie energii w następujący sposób

$$\frac{D}{Dt}\left(u+\tfrac{1}{2}\upsilon^2\right)=\underbrace{\frac{p}{\rho^2}\frac{D}{Dt}\rho-\frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}p}_{=-\frac{D}{Dt}(p/\rho)}+\frac{D}{Dt}\Phi$$

czyli

$$\frac{D}{Dt}\Big(\underbrace{u+p/\rho}_{=i}+\tfrac{1}{2}\upsilon^2-\Phi\Big)=0$$

gdzie wielkość $i=u+p/\rho$ jest **entalpią właściwą**, tj. odniesioną do jednostki masy płynu.

Stwierdzamy zatem, że prawdziwa jest równość $$\frac{D}{Dt}\left(i+\tfrac{1}{2}\upsilon^2-\Phi\right)=0$$

mówiąca, że wyrażenie w nawiasie jest stałe wzdłuż trajektorii dowolnego elementu płynu.

Pamiętamy, że **w ruchu stacjonarnym trajektorie są tożsame z liniami prądu**. Wynika stąd, że **wzdłuż dowolnej linii prądy wyrażenie w nawiasie jest stałe**

$$\boxed{i+\tfrac{1}{2}\upsilon^2-\Phi=C_e=const}$$

W szczególności, dla gazy Clapeyrona ma miejsce zależność $i = c_p T$, a zatem stała wzdłuż linii prądu jest wartość wyrażenia (**energii całkowitej**)

$$\boxed{c_p T + \tfrac{1}{2}\upsilon^2 - \Phi = const \; , \; c_p = \tfrac{\kappa}{\kappa - 1} R \; , \; \kappa = \frac{c_p}{c_v}}$$

Podobnie jak w przypadku całki Bernoullliego, **stała energii** C_e może przyjmować różną wartość dla różnych linii prądu. Jeśli jednak dla każdej linii prądu wartość C_e jest ta sama, to mówimy, że przepływ jest **homoenergetyczny**.

Wiemy, że jeśli przepływ jest (dodatkowo) barotropowy to na każdej linii prądu

$$P + \tfrac{1}{2}\upsilon^2 - \Phi = C_B = const$$

Wówczas entalpia płynu i funkcja ciśnienia różnią się o stałą addytywną.

$$i - P = C_e - C_B = const$$

W **przypadku nieściśliwym** powyższy fakt pozwala zdefiniować entalpię jako p / ρ.