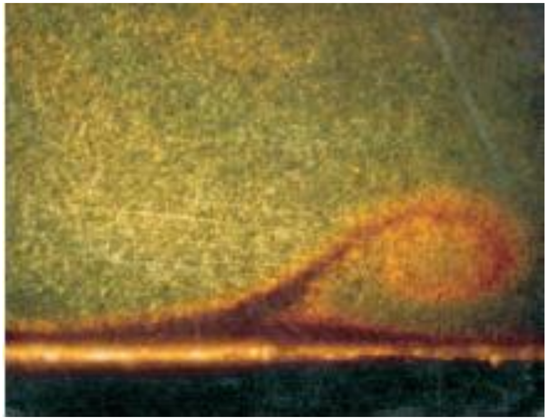
WYKŁAD 8
PRĘDKOŚĆ DEFORMACJI, TENSOR PRĘDKOŚCI DEFORMACJI , ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

"Gallery of Fluid Motion"-M. Samimy, K.S. Breuer

Równanie ruchu Cauchy'ego – Lagrange'a

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla \mathbb{T}$$

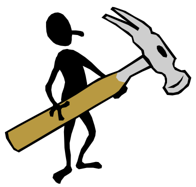
opisuje ruch dowolnego ośrodka ciągłego.

Aby otrzymać równanie ruchu konkretnego ośrodka należy zdefiniować tensor $\mathbb{T}$

Dla płynu Pascala - płynu idealnego, w którym styczne siły powierzchniowe są równe zero – tensor zależy jedynie od ciśnienia

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I}$$

W rzeczywistości określenie $\mathbb{T}$ jest bardziej złożone. Tensory naprężenia dla ośrodków ciągłych zależą od odkształcenia oraz prędkości odkształcenia(deformacji).



Ciało sztywne: przemieszcza się i obraca

Płyn: przemieszcza się, obraca i ulega odkształceniu

Naszym celem będzie określenie składnika prędkości wynikającego z odkształcenia. Otrzymamy go odejmując od całkowitej prędkości ośrodka ciągłego prędkość występującą w ciele sztywnym.

Dla ciała sztywnego możemy zapisać:

$$\vec{v}\left(t,\vec{r}\right) = \vec{v}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

$\vec{v}_0$ - **prędkość ciała określająca przesunięcie**

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ - **iloczyn wektorowy prędkości kątowej** $\vec{\omega}$ **z wektorem przesunięcia** $\vec{r}$. **Jest to człon związany z obrotem.**

Można pokazać, że dla obrotów z dowolną prędkością $\vec{\omega}$ **jest**

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 2\vec{\omega} \xrightarrow{\text{wtedy}} \vec{v}(t,\vec{r}) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{v} \times \vec{r}$$

Rozpatrzmy teraz ruch dwu bliskich punktów materialnych w ciele odkształcalnym. Odległość między nimi jest znikoma, a więc

$$\vec{v}\left(\vec{r} + d\vec{r}\right) = \vec{v}(r) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} dx_i + \cdots$$

Dla dr → 0 możemy zaniedbać wyrazy wyższego rzędu. Wtedy powyższe równanie dla składowych $v_k(\vec{r})$ przyjmuje postać:

$$v_k\left(\vec{r}+d\vec{r}\right)=v_k(r)+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}dx_i$$

Zapiszmy to w nieco inny sposób

$$v_k(\vec{r}+d\vec{r})=v_k+dv_k=v_k+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)dx_i+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)dx_i$$

Składnik związany z odkształceniem $(dv_k)_{def}$

Składnik związany z obrotem (w nawiasie są składowe rotacji prędkości) $(dv_k)_{rot}$

TENSOR PRĘDKOŚCI DEFORMACJI

Składnik związany z odkształceniem nazywa się <u>prędkością deformacji</u>. Zapiszmy go wektorowo z użyciem <u>tensora prędkości deformacji:</u>

$$\boxed{\left(d\vec{v}\right)_{def} = \dot{\mathbb{D}} \cdot d\vec{r}}$$

Macierz tensora prędkości deformacji $\dot{\mathbb{D}}$ określa się następująco:

$$\boxed{\dot{D}_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)}$$

Tensor ten jest symetryczny bo $\dot{D}_{ki} = \dot{D}_{ik}$

TENSOR PRĘDKOŚCI OBROTU

Składnik związany z obrotem zapiszmy wektorowo z użyciem <u>tensora prędkości obrotu</u>

$$\boxed{\left(d\vec{v}\right)_{rot} = \dot{\mathbb{O}} \cdot d\vec{r}}$$

Macierz tensora prędkości obrotu $\dot{\mathbb{O}}$ **określa się następująco:**

$$\boxed{\dot{O}_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)}$$

Związki konstytutywne

Płyn prosty to ośrodek ciągły, w którym tensor naprężenia $\mathbb{T}$ jest funkcją tensora prędkości odkształcenia $\dot{\mathbb{D}}$

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(\dot{\mathbb{D}})$$

Dla ciała sprężystego podlegającemu prawu Hooke'a tensor $\mathbb{T}$ zależy od odkształceń. Tensor odkształcenia ma postać:

$$D_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\right)$$

Gdzie wektor $\vec{w}$ to przemieszczenie.

Ciało proste to takie ciało, dla którego zachodzi związek

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{D})$$

Dla ciał o dowolnych własnościach pośrednich można pisać:

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{T}, \dot{\mathbb{T}}, \mathbb{D}, \dot{\mathbb{D}}\right) = 0$$

Jest to <u>równanie konstytutywne</u> wiążące $\mathbb{T}$ z $\dot{\mathbb{T}}, \mathbb{D}, \dot{\mathbb{D}}$ w sposób odpowiadający własnościom rozważanego ciała

Nauka o własnościach naprężeniowo – odkształceniowych ośrodków ciągłych nazywa się <u>reologią</u>.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY