WYKŁAD 15
NIESTATECZNOŚĆ

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

“Gallery of Fluid Motion”-M. Samimy, K.S. Breuer

Powodem turbulencji jest niestateczność.

Weźmy pewne pole prędkości i wprowadźmy do niego małe zaburzenie. Może ono znikać z upływem czasu, rosnąć lub pozostawać niezmienne.

$\vec{v}^{(1)}$ **- pole prędkości we wnętrzu obszaru Ω przy zadanych warunkach brzegowych i przy warunku początkowym** $\vec{v}^{(1)}(0)$**.**

$\vec{v}^{(2)}$ **- pole prędkości w tym samym obszarze, przy takich samych warunkach brzegowych, ale przy warunku początkowym** $\vec{v}^{(2)}(0)$**.**

Miarą odchyłki obu pól prędkości $E(\mathrm{t})$ jest

$$E(\mathrm{t}) = \frac{1}{2\Omega}\int_{\Omega}\left(\vec{\mathrm{v}}^{(1)} - \vec{\mathrm{v}}^{(2)}\right)^2 \mathrm{d}\Omega$$

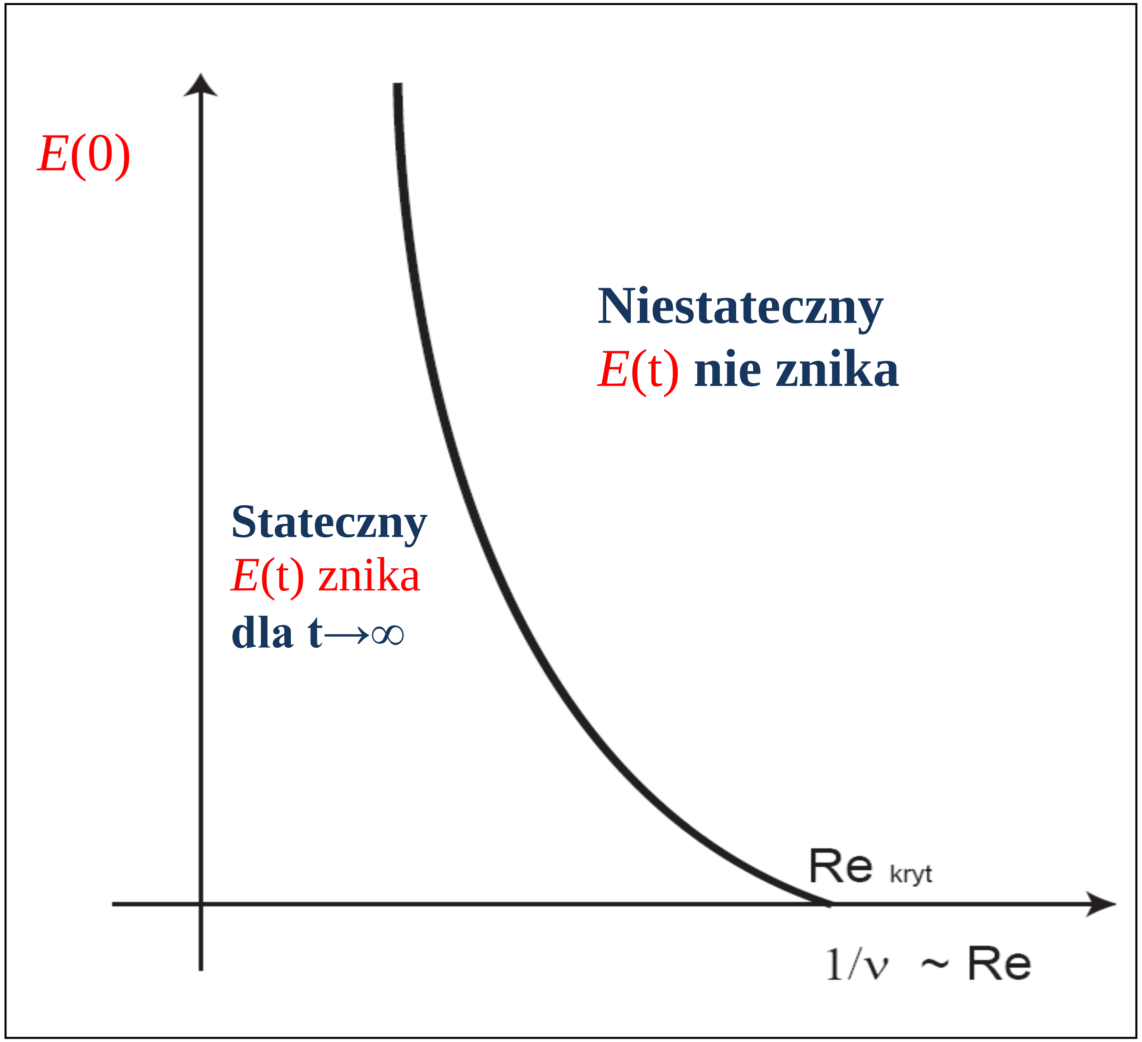
Odchyłkę $E(0)$ znamy, bo określa się ją na podstawie $\vec{\mathrm{v}}^{(1)}(0)$ i $\vec{\mathrm{v}}^{(2)}(0)$.

Gdy $\lim_{\mathrm{t}\to\infty} E(\mathrm{t}) = 0$

To rozwiązanie jest stabilne.

Fizycznie oznacza to, że obydwa pola prędkości z upływem czasu nie różnią się. Warunek początkowy – odrębny dla obu rozwiązań, nie ma znaczenia, jeśli badamy ruch dostatecznie długo.

Mapa określająca zachowania zaburzeń



Dla liczby Reynoldsa Re > Re_{kr} każde zaburzenie nie znika, lecz zmienia ruch.

Niech $\vec{v} = \vec{v}_0 + u$ **i** $p = p_0 + \pi$.

$\vec{v}_0, p_0$ **- to rozwiązania hydrodynamiki**

u, π **- to zaburzenia**

Wstawmy nasze $\vec{v}$ i p do równania ciągłości i Naviera – Stokesa. Otrzymamy wtedy:

Równanie ciągłości dla zaburzeń

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

Równanie N-S dla zaburzeń

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + v_{0i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi}{\partial x_k} + \nu \Delta u_k$$

Zaburzenie znika na brzegu obszaru

$$u_k\Big|_{\mathrm{brzeg}} = 0 \qquad \pi\Big|_{\mathrm{brzeg}} = 0$$

Równania powyższe są liniowe. Współczynniki przy v_{0i} i $\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i}$ są znane, bo znamy zaburzane rozwiązanie.

Rozwiązanie może być przedstawione w postaci sumy rozwiązań szczególnych:

$$u_k = \sum_p q_k^{(p)} e^{i\lambda_p t}$$

$$\pi = \sum_p \beta_p e^{i\lambda_p t}$$

Jedną z harmonik podstawiamy do równań.

Dostajemy wtedy :

$$\frac{\partial q_k^{(p)}}{\partial x_k} = 0$$

$$q_k^{(p)} i\lambda_p + v_{0i}\frac{\partial q_k^{(p)}}{\partial x_i} + q_k^{(p)}\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \beta_p}{\partial x_k} + \nu \Delta q_k^{(p)}$$

$$\beta\big|_{brzeg} = 0 \qquad q_k^{(p)}\Big|_{brzeg} = 0$$

Rozwiązanie niezerowe zachodzi dla pewnych wartości λ_p **zwanych** **wartościami własnymi**

$$\lambda_p = \alpha_p + i\beta_p$$

Czynnik wykładniczy zapisujemy wtedy w sposób następujący :

$$e^{i\lambda_p t} = \left(e^{i\alpha_p t}\right) e^{-\beta_p t}$$

Jeśli choć jedna wartość własna ma UJEMNĄ część rzeczywistą to zaburzenie będzie narastać!
Jeśli wszystkie wartości własne są dodatnie to zaburzenie znika.