W przypadku macierzy kwadratowej (m=n) układ jest więc oznaczony jedynie w przypadku, gdy det[A]≠ 0. Rozwiązaniem układu jest wtedy

$$\{x\}=[A]^{-1}\{b\}$$

Rozwiązywanie układów *r-n* metodą poszukiwania macierzy odwrotnej jest jednak zazwyczaj nie stosowane. Inne, bardziej efektywne metody poszukiwania rozwiązania wymagają zwykle mniejszej liczby operacji arytmetycznych.

W przypadku jednorodnego układu *n* równań z *n* niewiadomymi

$$[A]\{x\}=\{0\}$$

istnieje zawsze rozwiązanie trywialne $\{x\}=\{0\}$.

Rozwiązania nietrywialne istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy $R([A])<n$, a więc w przypadku, gdy det[A]= 0.

<u>Wartości własne i wektory własne</u>

Liczbę λ i nieznany wektor $\{x\}$ nazywamy odpowiednio wartością własną i wektorem własnym macierzy

$\underset{n\times n}{[A]}$, jeśli spełniają równość

$$[A]\{x\}=\lambda\{x\}.$$

Wektor własny może być wyznaczony jedynie z dokładnością do mnożnika, tzn. jeśli $\{x\}$ jest wektorem własnym to $c\{x\}$ jest nim również.

Po przekształceniu równania własnego do postaci:

$$([A]-\lambda[I])\{x\}=\{0\}$$

stwierdzić można, że wartości własne λ_i są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy [A]

$$p(\lambda)=\det([A]-\lambda[I])$$

Numeryczne rozwiązanie zagadnienia własnego nie polega jednak na rozwiązaniu wielomianu charakterystycznego.

Stosowane są zwykle inne, przeważnie iteracyjne techniki obliczeniowe.

<u>Forma kwadratowa. Dodatnia określoność</u>

Wyrażenie typu

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=\lfloor x\rfloor[A]\{x\}$$

gdzie [A] jest macierzą symetryczną nazywamy formą kwadratową zmiennych x_i, $i=1,2,...,n$.

Jeśli dla dowolnego niezerowego wektora $\{x\}$ $Q>0$ formę kwadratową nazywamy dodatnio określoną.

Jeśli $Q>0$ - formę nazywamy ujemnie określoną. Te same określenia stosowane są w stosunku do macierzy [A] definiującej funkcję kwadratową.

Uogólnioną formą kwadratową nazywamy wyrażenie typu:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j+\sum_{i=1}^{n} b_i x_i=\lfloor x\rfloor[A]\{x\}+\lfloor x\rfloor\{b\}$$

Extremum formy kwadratowej jest określone przez warunki

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,...n$$

Powyższe warunki zapisane w postaci macierzowej przyjmują postać

$$\frac{1}{2}[A]\{x\}+\{b\}=0$$

Otrzymany układ równań liniowych w przypadku, gdy macierz [A] jest dodatnio określona definiuje wektor $\{x\}$ minimalizujący formę kwadratową Q.

Szczególne własności macierzy typowego układu równań w MES (symetria, pasmowość, dodatnia określoność) są wykorzystywane w procedurach obliczeniowych dla zwiększenia efektywności obliczeń.

Liczba operacji do
rozwiązania ukł.