KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wykład 9

Symulacja wielkich wirów (Large Eddy Simulation)

Bartosz Górecki, Sławomir Kubacki
bgorecki@meil.pw.edu.pl, slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl

Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa,
Politechnika Warszawska

wrzesień, 2013

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Pole przepływu – dowolna wielkość Φ

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$$

- Modelujemy turbulencję – załóżmy przepływ makroskopowo ustalony. Fluktuacje wynikają jedynie z turbulencji

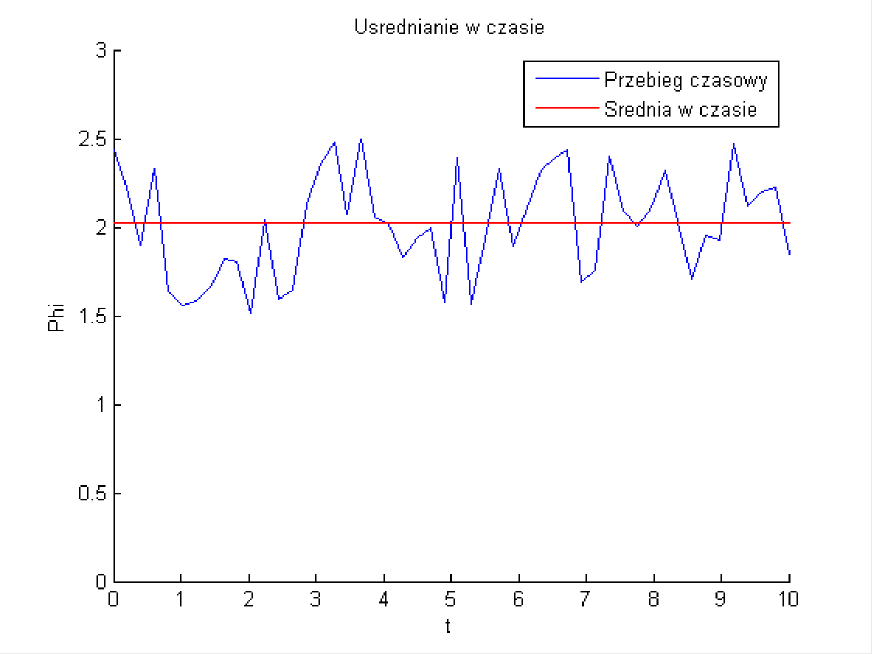
- Wielkość Φ zależy od miejsca i czasu – możemy uśrednić:
  - w czasie,
  - w przestrzeni.

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Uśrednianie w czasie

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \int_0^T \Phi(\boldsymbol{x}, t)\, dt$$

- Nawias $\langle \cdot \rangle$ oznacza operację uśredniania w czasie

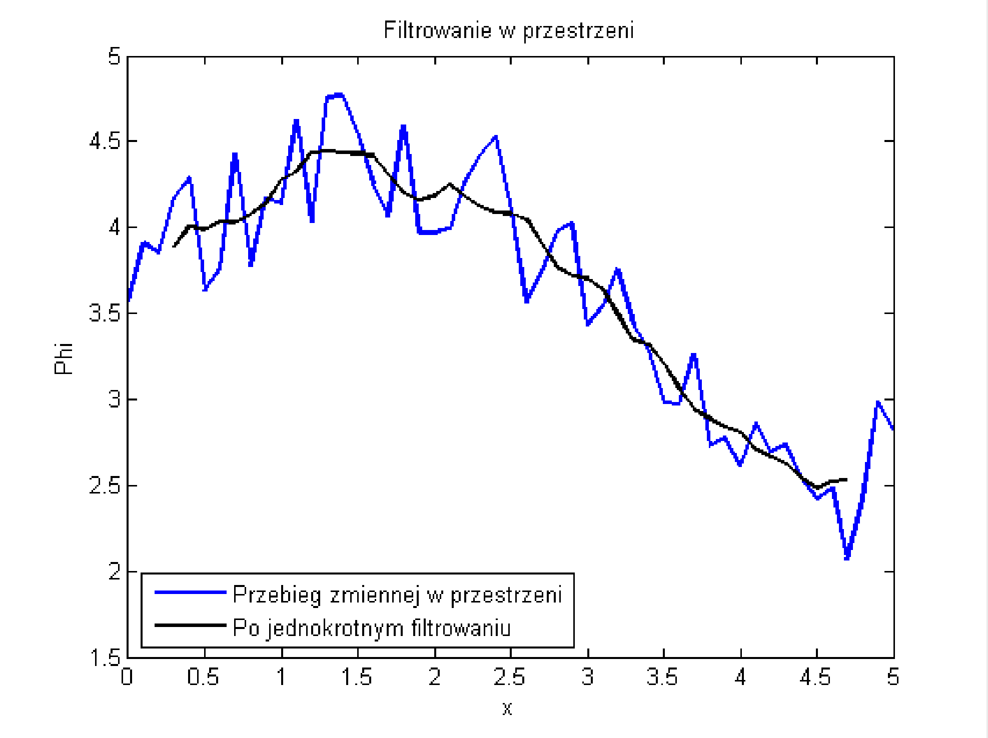


Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Filtrowanie („uśrednianie”) w przestrzeni (w 1D)

$$\overline{\Phi(x,t)} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \Phi(\xi,t) d\xi$$

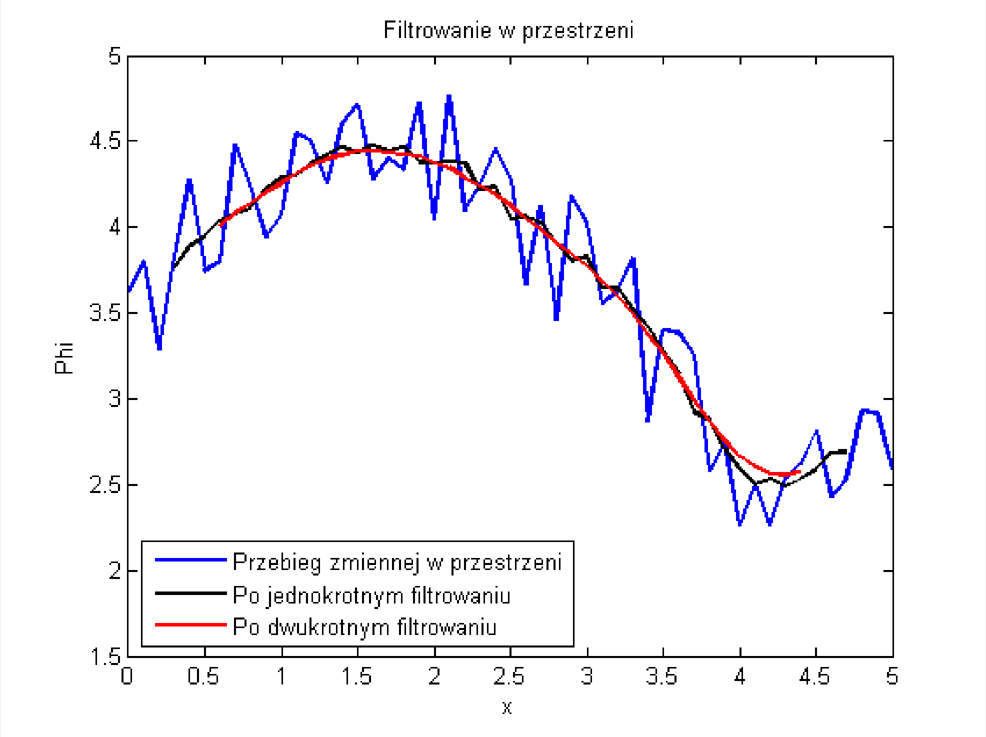
- Powyższa całka to zwykła średnia sygnału z otoczenia o szerokości Δx



Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Filtrujemy jeszcze raz w przestrzeni (1D)

$$\overline{\overline{\Phi(x,t)}} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \overline{\Phi(\xi,t)}\,d\xi$$

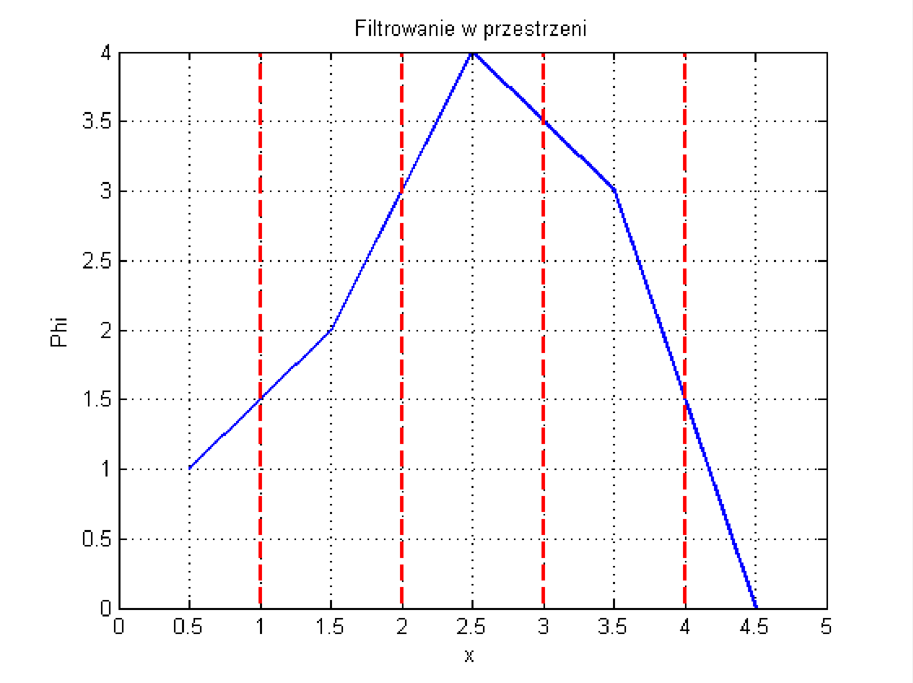


- Przefiltrowanie dwa razy nie daje tego samego, co jednokrotne filtrowanie

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Ćwiczenie: Uśrednij przestrzennie poniższy sygnał reprezentowany na siatce objętości skończonych w 1D (załóż liniową zmienność sygnału między środkami komórek)
- Dla każdego z węzłów (x = 1.5, 2.5, 3.5) oblicz nowe, odfiltrowane filtrem o szerokości $\Delta x = 1$ wartości zmiennej Φ

$$\overline{\Phi(x,t)} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \Phi(\xi,t) d\xi$$



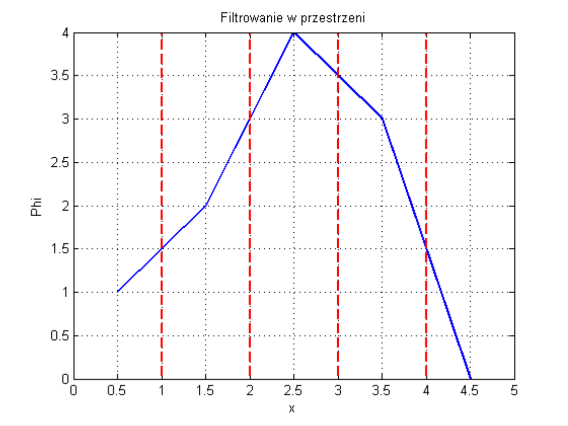
Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Rozwiązanie – Dla x = 1.5 liczymy całkę (pole pod wykresem interpolowanej funkcji) na odległość $\Delta x = 0.5$ w lewo oraz w prawo. Na koniec dzielimy przez szerokość przedziału. Przy funkcjach kawałkami liniowych całki możemy zastąpić liczeniem pola trapezu. Otrzymamy:
- Dla x = 1.5:

$$\overline{\Phi(1.5)} = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\cdot(1.5+2)\cdot 0.5 + \frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot 0.5\right) =$$
$$= 2.125$$

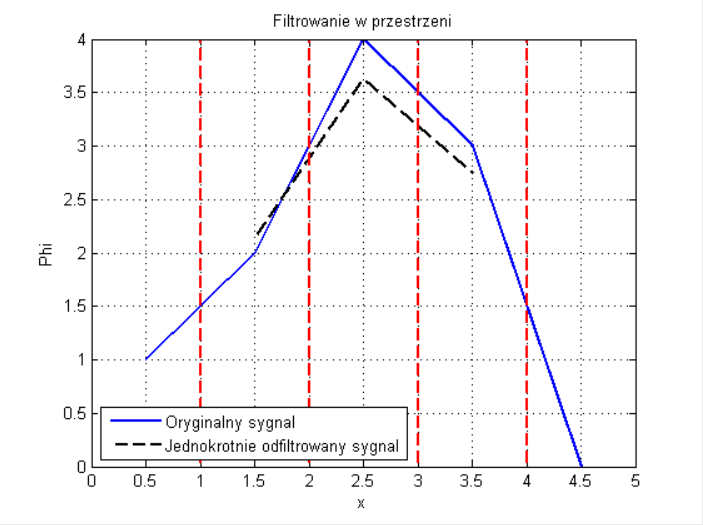
- Dla x = 2.5:

$$\overline{\Phi(2.5)} = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\cdot(3+4)\cdot 0.5 + \frac{1}{2}\cdot(4+3.5)\cdot 0.5\right)$$
$$= 3.625$$



Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

- Oblicz podobnie $\overline{\Phi(3.5)}$ oraz dokonaj następnie ponownego filtrowania tak, aby otrzymać $\overline{\overline{\Phi(2.5)}}$

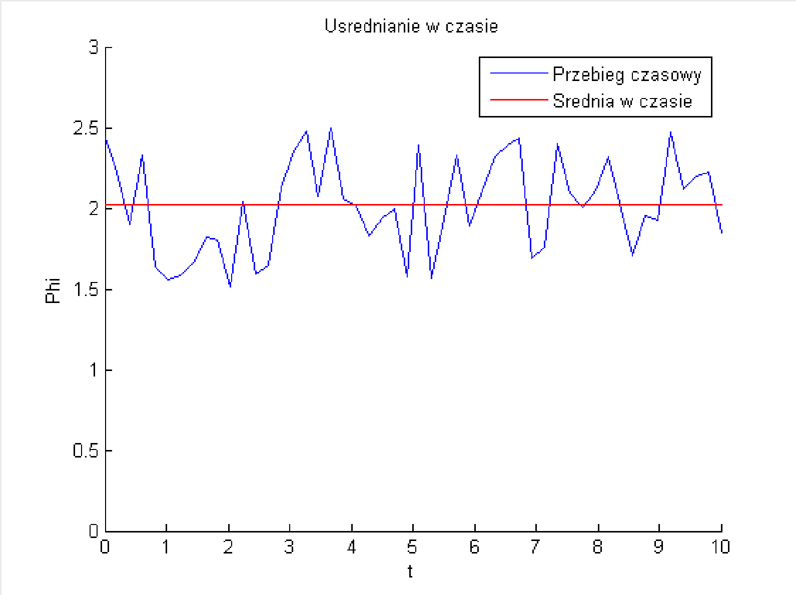


Ważny wniosek z przykładów: Uśrednienie **po przestrzeni** sygnału dwa razy nie daje tego samego, co uśrednienie go raz!

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

Jak więc ze średnią czasową?

- Uśredniony w czasie sygnał z danego punktu przestrzeni to stała wartość (niezależna od czasu) – ponowne uśrednienie w czasie stałej da oczywiście tę samą stałą!



- WNIOSEK:
  (dla uśredniania czasowego)

  Średnia średniej jest równa średniej!

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

BARDZO WAŻNE:

- Dla uśredniania czasowego:

  Średnia ze średniej jest równa średniej.

- Dla uśredniania przestrzennego (poprawnie: filtrowania):

  Średnia ze średniej nie jest równa średniej.

  Inaczej: Odfiltrowanie sygnału dwa razy daje inne wartości niż odfiltrowanie sygnału jeden raz.

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

Sformalizujmy:

Średnia czasowa (dla wielu wymiarów):

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi(\boldsymbol{x}, t) dt$$

Średnia czasowa jest dalej funkcją przestrzeni, ale nie jest funkcją czasu (ponieważ jest średnią po **całym** czasie symulacji, jest wartością stałą w czasie)

Oryginalny sygnał można zapisać jako średnią oraz fluktuacje w czasie:

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle + \Phi'(\boldsymbol{x}, t)$$

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

Krótko piszemy:

$$\Phi = \langle\Phi\rangle + \Phi'$$

Φ – oryginalny sygnał (zależy od czasu i miejsca)
$\langle\Phi\rangle$ - wartość średnia (zależy tylko od miejsca)
Φ' - fluktuacja (zależy od czasu i miejsca)

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

Filtr przestrzenny (średnia przestrzenna):

$$\overline{\Phi(\boldsymbol{x},t)} = \frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\frac{1}{\Delta z}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x-\frac{\Delta x}{2}}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x-\frac{\Delta x}{2}} \Phi(\xi,\eta,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta$$

Średnia przestrzenna (tak naprawdę: odfiltrowane pole) jest dalej funkcją przestrzeni oraz czasu. Operacja filtrowania „uśrednia" lokalnie pole – filtruje je, odfiltrowuje szczegóły.

Uwaga: Choć w społeczności CFD używa się niekiedy wymienne określenia „uśrednianie w przestrzeni" i „filtrowanie", to ta druga nazwa trafniej oddaje sens i nie wprowadza w błąd. W ciągu wykładu będziemy starali się używać drugiego określenia.

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

Oryginalne pole można zapisać jako wartości uśrednione (odfiltrowane) oraz wartości podsiatkowe (te, które zostały utracone w wyniku zastosowania filtru):

$\Phi(\boldsymbol{x},t) = \overline{\Phi(\boldsymbol{x},t)} + \Phi''(\boldsymbol{x},t)$

Krótko piszemy:

$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi''$

Φ – oryginalny sygnał (zależy od miejsca i czasu)

$\overline{\Phi}$- wartość średnia (zależy od miejsca i czasu)

Φ'' – fluktuacje podsiatkowe (zależą od miejsca i czasu)

Uśrednianie w czasie i filtrowanie w przestrzeni

Oznaczenia

W wykładach dotyczących LES będziemy konsekwentnie stosować następującą konwencję oznaczeń:

$\langle\cdot\rangle$ - oznacza średnią w czasie

$\cdot\,'$ - oznacza fluktuacje w czasie

$\bar{\cdot}$ - oznacza filtrowanie po przestrzeni

$\cdot\,''$ - oznacza fluktuacje podsiatkowe

Splot funkcji

Sformalizujmy jeszcze bardziej. Następującą całkę:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x-t)dt$$

nazywamy splotem funkcji i oznaczamy $f * g$. Zauważmy, że splot jest dalej funkcją zmiennej *x*.

Operację filtrowania można zdefiniować jako splot:

$$\overline{\Phi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi(x-r)dr$$

Splot funkcji

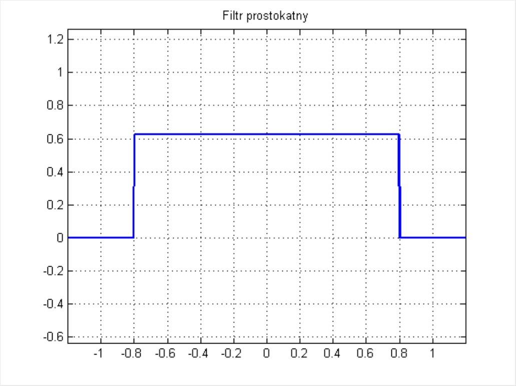
Podobnie

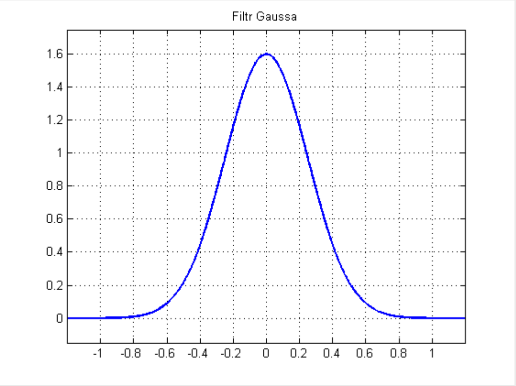
$$\overline{\Phi(x,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi(x-r,t)dr$$

G – jądro uśredniania

Φ – funkcja uśredniana

Stosowane często jądra (filtry):



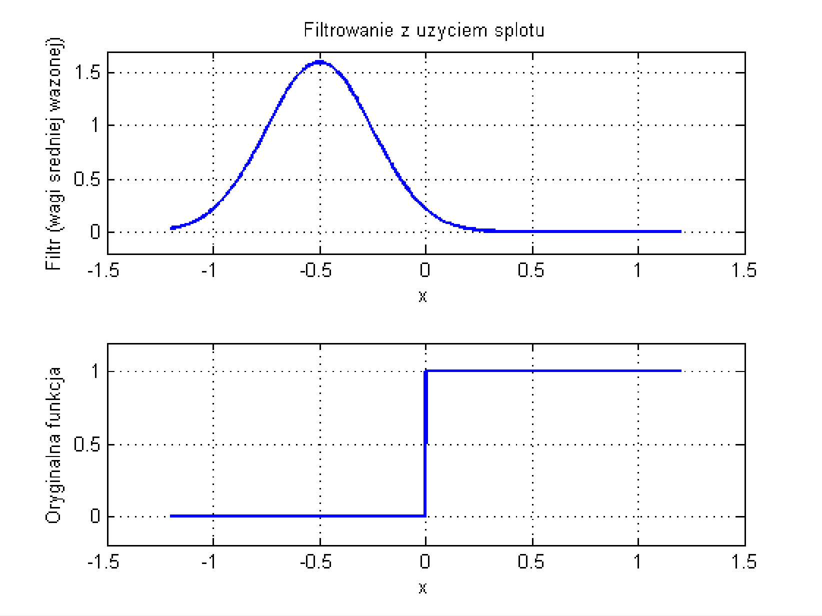


Splot funkcji

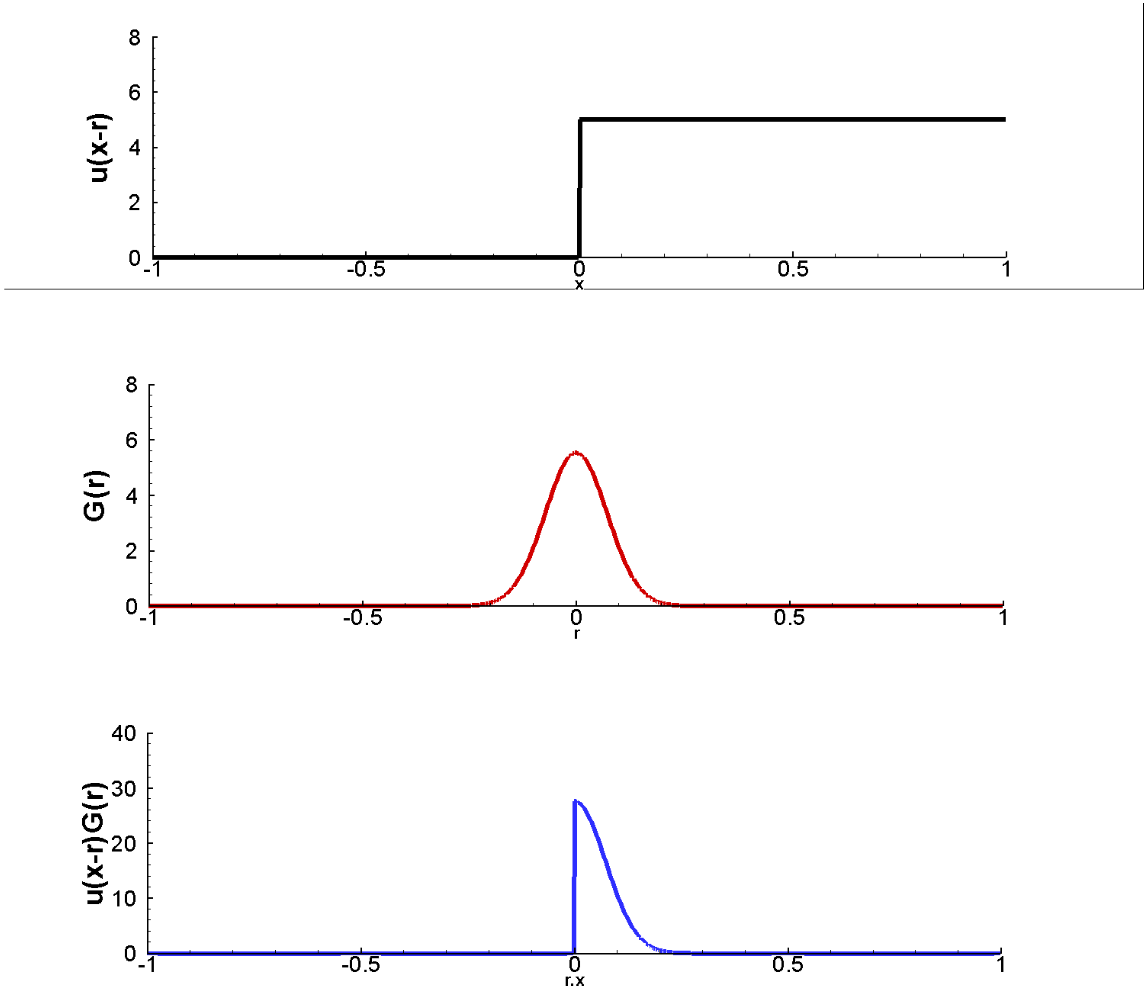
Jak działa filtrowanie (uśrednianie) z użyciem splotu?

$$\overline{\Phi(x,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi(x-r,t)dr$$

1. Chcemy policzyć wartość splotu dla x = -0.5
2. Ustawiamy w tym miejscu nasz filtr, po czym całkujemy iloczyn „górnej” i „dolnej” funkcji – można to widzieć, jak liczenie średniej, gdzie górna funkcja to wagi, a dolna to sygnał.



Splot funkcji



$$\Delta = 0.25$$

$$G(r) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)\exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$$

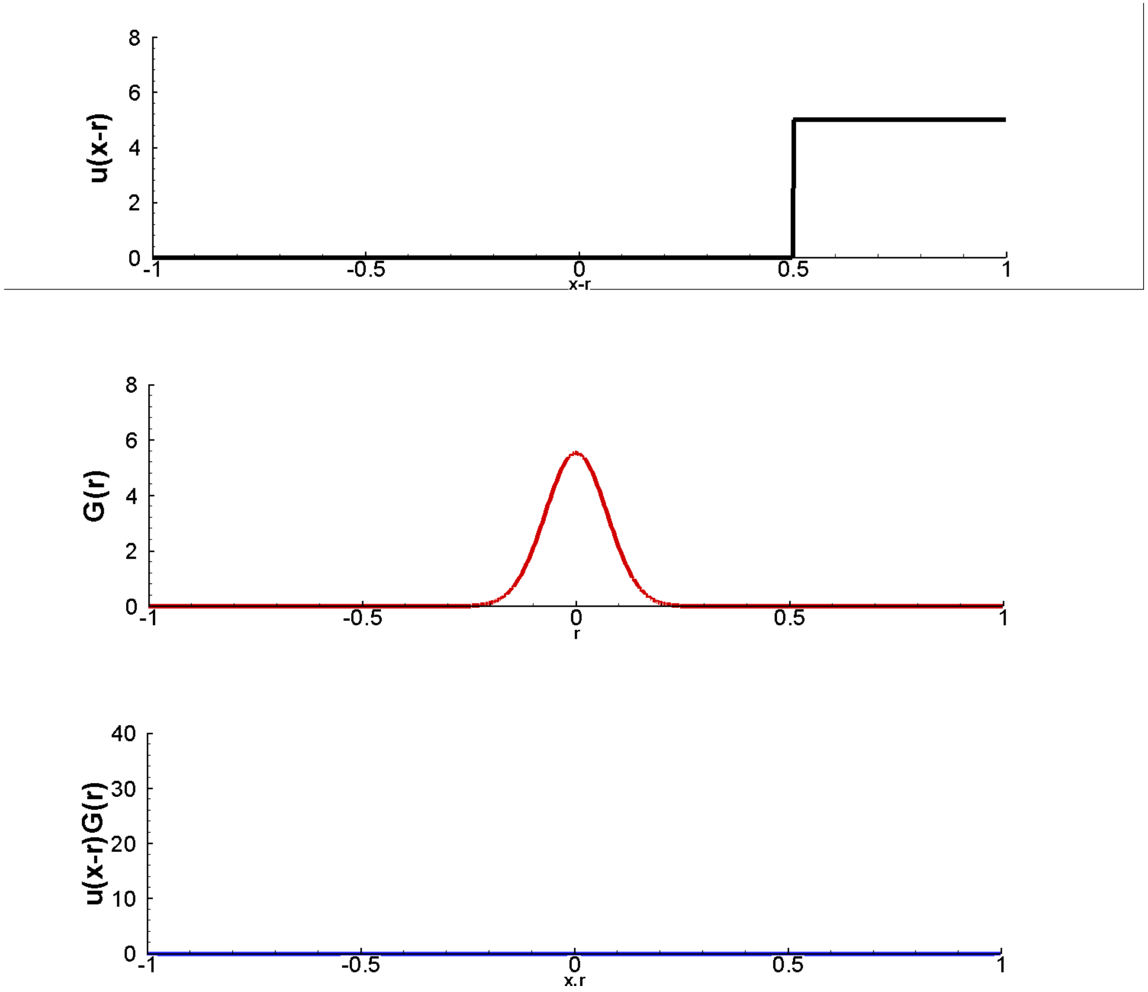
$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\Delta^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r)\,dr = 1$$

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\,u(x-r)\,dr$$

$$\bar{u}(0) = 2.5$$

Splot funkcji



$$\Delta = 0.25$$

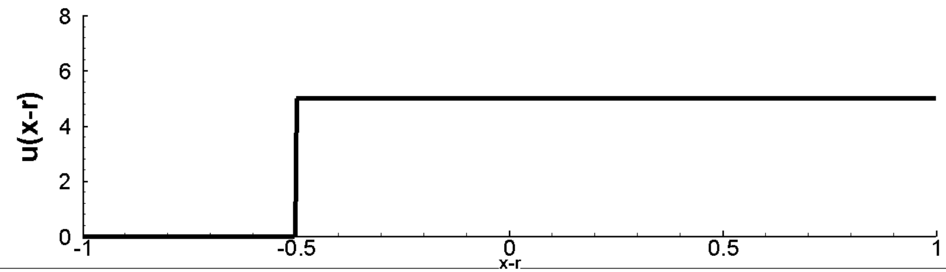
$$G(r) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)\exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r)dr = 1$$

$$\overline{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)u(x-r)dr$$

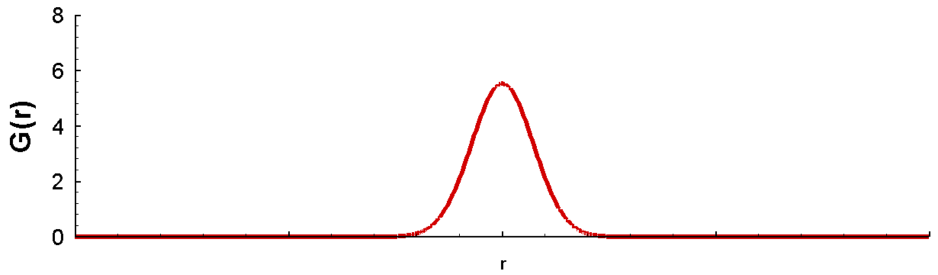
$$\overline{u}(0) = 0$$

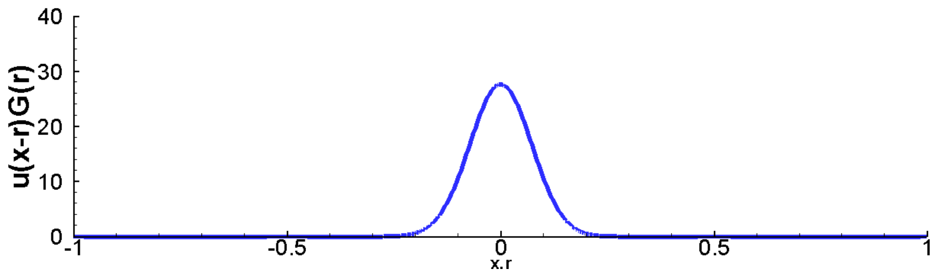
Splot funkcji



$$\Delta = 0.25$$

$$G(r) = \left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)\exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r)dr = 1$$

$$\overline{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)u(x-r)dr$$

$$\overline{u}(0) = 5$$

Filtry

Czy są inne filtry?

Weźmy funkcję f i jej szereg Fouriera:

$$f = f(x)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\, sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right)$$

Możemy teraz wybrać tylko pierwszych kilka modów – do $n \leq N$

Mamy:

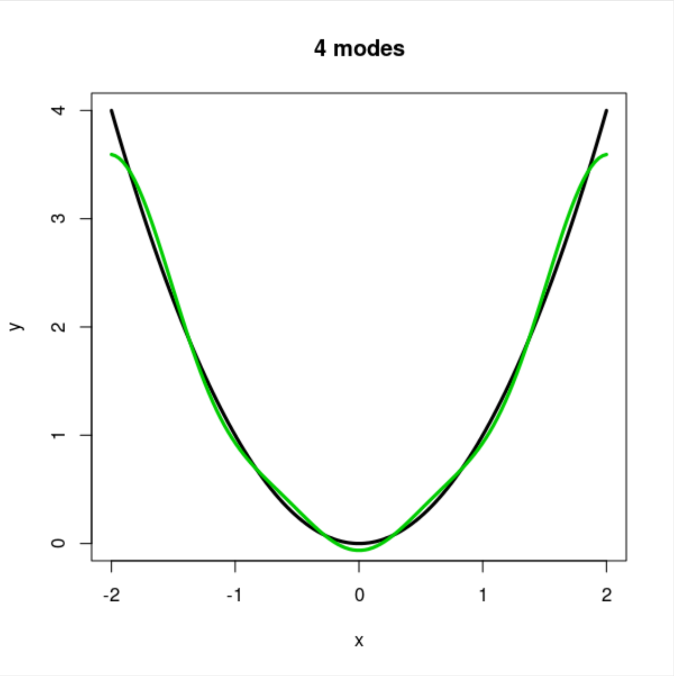
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\, sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right)$$

To filtr spektralny (odfiltrowuje wysokoczęstotliwościowe mody i przepuszcza tylko te o dużej długości fali)

Filtr spektralny

Przykład:

Parabola i jej rozwinięcie w szereg Fouriera obcięty po 4 modach



Filtrowanie (filtr prostokątny, spektralny)

Operację filtrowania zapisujemy jako splot

$$\overline{\Phi(\boldsymbol{x},t)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\Delta})\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\, d^3\xi$$

$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – zazwyczaj rozmiar oczka siatki obliczeniowej

Filtr prostokątny: $G(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}, gdy\ |\tau_x| \leq \Delta x\ \wedge |\tau_y| \leq \Delta y\ \wedge |\tau_z| \leq \Delta z \\ 0\ w\ przeciwnym\ wypadku \end{cases}$

Filtr spektralny: $G(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, gdy\ \kappa < \kappa_c \\ 0\ w\ przeciwnym\ wypadku \end{cases}$

$\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}$ - liczba falowa odcięcia

Filtrowanie (filtr prostokątny, spektralny)

Pytanie:

Czy podwójne filtrowanie sygnału filtrem spektralnym da ten sam wynik co jednokrotne filtrowanie?

Siatka obliczeniowa

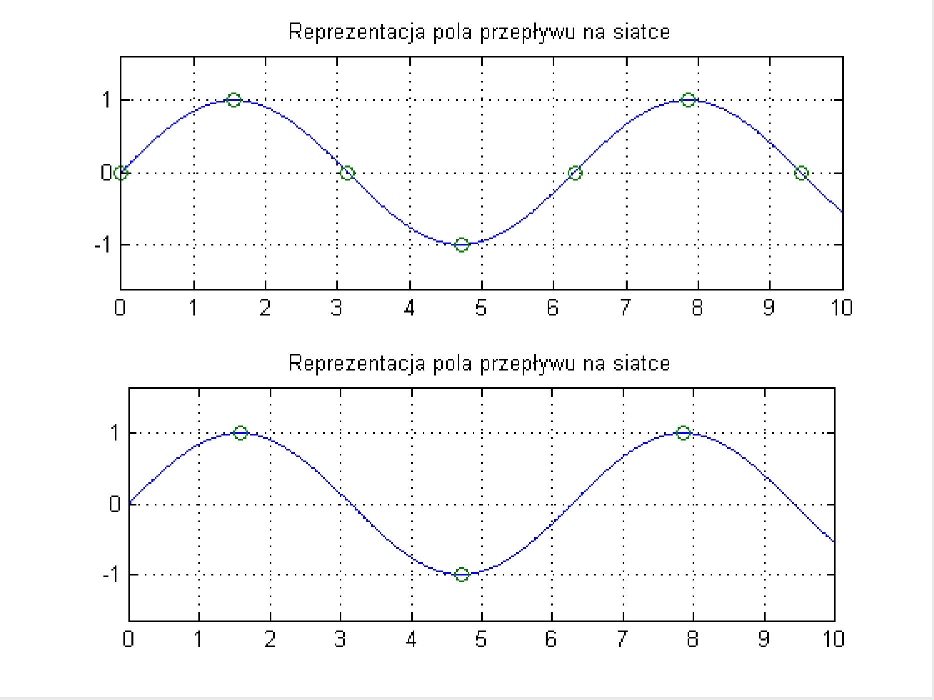
Reprezentacja modów, szczegółów przepływu (np. małych wirów) na siatce objętości skończonych (lub różnic skończonych)

W szeregu Fouriera mamy człon:

$$\sin(\kappa x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

κ – to liczba falowa

Pytanie: Mody o jakiej największej liczbie falowej κ_c możemy reprezentować na siatce?



Siatka obliczeniowa

Reprezentacja modów, szczegółów przepływu (np. małych wirów) na siatce objętości skończonych (lub różnic skończonych)

$$\sin(\kappa x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

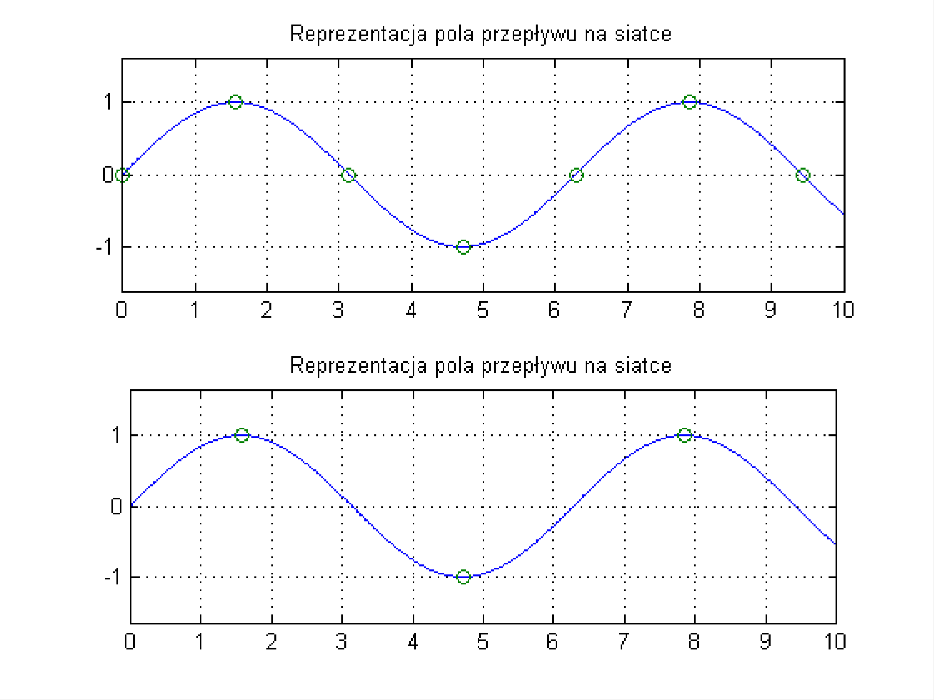
$$L = 4\Delta x$$

$$\kappa_c = \frac{2\pi}{4\Delta x} = \frac{\pi}{2\Delta x}$$

Lub:

$$L = 2\Delta x$$

$$\kappa_c = \frac{2\pi}{2\Delta x} = \frac{\pi}{\Delta x}$$



Wniosek: Siatka działa jak filtr spektralny! Filtruje wysokie częstotliwości!

Własności uśredniania i filtrowania (formalnie)

Uśrednianie w czasie (średnia średniej):

pomnożyć przez wagę 1/T

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \int_0^T \Phi(\boldsymbol{x}, t) dt$$

$$\langle\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle\rangle = \int_0^T \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle dt = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle \int_0^T dt = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle$$

Wolno wyciągnąć przed całkę, bo funkcja podcałkowa nie zależy od zmiennej całkowania

Własności uśredniania i filtrowania (formalnie)

Uśrednianie w czasie (średnia średniej):

pomnożyć przez wagę 1/T

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \int_0^T \Phi(\boldsymbol{x}, t) dt$$

$$\langle\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle\rangle = \int_0^T \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle dt = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle \int_0^T dt = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle$$

Ponadto:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'$$

Więc:

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle + \Phi'(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \langle\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle\rangle + \langle \Phi'(\boldsymbol{x}, t) \rangle$$

Uśrednianie w czasie to operacja całkowania – jest liniowa

Własności uśredniania i filtrowania (formalnie)

Uśrednianie w czasie (średnia średniej):

pomnożyć przez wagę 1/T

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \int_0^T \Phi(\boldsymbol{x}, t) dt$$

$$\langle\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle\rangle = \int_0^T \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle dt = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle \int_0^T dt = \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle$$

Ponadto:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'$$

Więc:

$$\boxed{\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle} = \langle \langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle + \Phi'(\boldsymbol{x}, t) \rangle = \boxed{\langle\langle \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle\rangle} + \langle \Phi'(\boldsymbol{x}, t) \rangle$$

Ponieważ zaznaczone człony są równe, stąd wynika, że $\langle \Phi'(\boldsymbol{x}, t) \rangle = 0$

Średnia czasowa fluktuacji jest zerowa!

Własności uśredniania i filtrowania (formalnie)

Uśrednianie w przestrzeni (filtrowanie):

$$\overline{\Phi(x,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi(x-r,t)dr$$

$$\overline{\overline{\Phi(x,t)}} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\overline{\Phi(x-r,t)}dr = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\left(\overline{\Phi(x,t)} - \Phi''(x,t)\right)dr$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\overline{\Phi(x,t)}\,dr - \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi''(x,t)\,dr$$

Własności uśredniania i filtrowania (formalnie)

Uśrednianie w przestrzeni (filtrowanie):

$$\overline{\Phi(x,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi(x-r,t)dr$$

$$\boxed{\overline{\overline{\Phi(x,t)}}} = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\overline{\Phi(x-r,t)}dr = \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\left(\overline{\Phi(x,t)} - \Phi''(x,t)\right)dr$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} G(r)\overline{\Phi(x,t)}\,dr} + \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi''(x,t)\,dr$$

Ponieważ zaznaczone człony (jednokrotne i dwukrotne uśrednianie w ogólności nie są sobie równe), tym samym średnia przestrzenna (filtr) fluktuacji podsiatkowych nie jest równa zero!

$$\overline{\Phi''} \neq 0$$

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Weźmy równania Naviera-Stokesa dla płynu nieściśliwego:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Ze względu na znikanie dywergencji prędkości, można powyższe zapisać w następujący sposób:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Przykładamy operację filtrowania do całego równania. Filtrowanie jest zdefiniowane całką – jest więc addytywne:

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j}} = \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)}$$

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}} = 0$$

Operacja filtrowania nie zależy też od czasu oraz $\rho = const$, mamy więc:

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \quad \text{oraz} \quad \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$$

Zachodzi też

$$\overline{\frac{\partial \cdot}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{\cdot}}{\partial x}$$

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Zachodzi właściwość $\frac{\overline{\partial \cdot}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\cdot}}{\partial x}$, ponieważ:

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\Phi(x-r,t)dr = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\big(G(r)\Phi(x-r,t)\big)dr =$$

(wolno wejść z różniczką pod całkę, bo różniczkowanie odbywa się po zmiennej x, a całkowanie po r)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial G(r)}{\partial x}\Phi(x-r,t) + G(r)\frac{\partial \Phi(x-r,t)}{\partial x}\right)dr =$$

Oczywiście $\frac{\partial G(r)}{\partial x} = 0$, więc otrzymujemy:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(r)\frac{\partial \Phi(x-r,t)}{\partial x}dr = \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}$$

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Wykorzystujemy powyższe zależności oraz fakt, że $\nu = const$:

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j}} = \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)}$$

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{v_i v_j}\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$$

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Przekształcimy teraz człon $\frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial x_j}$ następująco:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{v_i v_j} + \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j = \bar{v}_i \bar{v}_j + \tau_{ij} =$$

$$= \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{(\bar{v}_i + v_i'')(\bar{v}_j + v_j'')} - \bar{v}_i \bar{v}_j =$$

$$= \bar{v}_i \bar{v}_j + \underbrace{\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} + \overline{\bar{v}_i v_j{}''} + \overline{\bar{v}_j v_i{}''} + \overline{v_i'' v_j{}''} - \bar{v}_i \bar{v}_j}_{\tau_{ij}} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \underbrace{\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{\bar{v}_i v_j{}''} + \overline{\bar{v}_j v_i{}''}}_{C_{ij}} + \underbrace{\overline{v_i'' v_j{}''}}_{R_{ij}}$$

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Interpretacja tensorów:

$L_{ij} = \overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$ - tensor Leonarda (uwzględnia wpływ dużych, rozwiązywanych struktur turbulentnych na przepływ)

$C_{ij} = \overline{\bar{v}_i v_j''} + \overline{\bar{v}_j v_i''}$ - tensor naprężeń krzyżowych (cross term) (uwzględnia interakcję między strukturami rozwiązywanymi a modelowanymi)

$R_{ij} = \overline{v_i'' v_j''}$ - tensor naprężeń Reynoldsa (uwzględnia wpływ struktur modelowanych na przepływ)

Równania Naviera-Stokesa dla wielkości filtrowanych

Ostatecznie:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar{v}_i \bar{v}_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(\bar{v}_i \bar{v}_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\tau_{ij} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$$

Wartości τ_{ij} trzeba modelować. Służą do tego modele podsiatkowe. O nich w kolejnym wykładzie.