



Wykład 3

Równanie dla dyssypacji energii kinetycznej turbulencji. Kalibracja modelu k- ϵ .

Sławomir Kubacki

`slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl`

Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Warszawska

sierpień, 2013

Zakres wykładu

- Ogólna postać równania dla prędkości dyssypacji wyprowadzona z równań Naviera-Stokesa uśrednionych w czasie
- Równanie dla ε uzyskane na podstawie analizy wymiarowej
- Równanie dla ε wg. podejścia opracowanego przez Schiestela (1987)
- Kalibracja modelu k- ε . Stałe modelu uzyskane na podstawie analizy prostych przepływów turbulentnych.

Ogólna postać równania transportu dla ε

Podobnie jak w przypadku równania transportu dla energii kinetycznej turbulencji k można również wyprowadzić ogólną postać równania dla prędkości dyssypacji ε . W tym celu korzysta się z równania:

$$2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} N(u_i)} = 0 \quad (1)$$

gdzie $N(u_i)$ symbolizuje operator Naviera-Stokesa:

$$N(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0$$

Symbol $(\overline{\quad})$ oznacza uśrednianie w czasie.

Ogólna postać równania transportu dla ε

Na podstawie Równ. (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left(\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} + \overline{u'_{k,i} u'_{k,j}} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ & - 2\nu \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2\nu \overline{u'_{i,k m} u'_{i,k m}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \nu \overline{u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} + 2 \frac{\nu}{\rho} \overline{p'_{,m} u'_{j,m}} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $u'_{i,k} = \partial u'_i / \partial x_k$ $p'_{,m} = \partial p' / \partial x_m$

- Równanie to składa się z wielu niedomkniętych członów (7/10 członów wymaga modelowania)
- Powyższe równanie opisuje raczej proces dyssypacji lepkiej płynu podczas gdy w przypadku modelu turbulencji dyssypacja ε służy raczej do opisu procesu inercyjnego transportu energii kinetycznej turbulencji ze skal dużych do mniejszych
- Równanie (2) można uprościć zakładając izotropowość procesu dyssypacji lepkiej płynu. Jego domknięcie ma jednak półempiryczny charakter.

Równanie dla ε - analiza wymiarowa

Równanie dla energii kinetycznej turbulencji k (l^2/t^2)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(k)}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - E_k + D_k \quad (3)$$

Zakładamy, że równanie dla dyssypacji ε (l^2/t^3) można zapisać w podobnej postaci

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon - E_\varepsilon + D_\varepsilon \quad (4)$$

Pomijając człony konwekcyjne i dyfuzyjne w Równ. (3) i (4) (modelowany jest tylko wpływ efektów lokalnych) otrzymujemy

$$0 = P_k - E_k \quad (5)$$

$$0 = P_\varepsilon - E_\varepsilon$$

Równanie dla ε - analiza wymiarowa

Związek między k i ε :

Charakterystyczna częstotliwość fluktuacji turbulentnych $1/\tau$ ($1/t^1$)

$$\frac{1}{\tau} = c_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} \quad (6)$$

c_ε - pewna stała.

Mnożąc $(P_k - D_k)$ przez $1/\tau$ (Równ. 5) uzyskuje się :

$$0 = \frac{1}{\tau} (P_k - E_k) = c_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} (P_k - E_k) = P_\varepsilon - E_\varepsilon \quad (7)$$

Wniosek. Transformacja między równaniem dla k i ε (człony źródłowe) wynika w zasadzie z obserwacji, że skala czasowa turbulencji τ może być traktowana jako parametr.

Dyfuzja w równaniu dla ε jest modelowana w podobny sposób jak równaniu dla k . Dodając człon dyfuzyjny w Równ. (7) otrzymujemy

$$P_\varepsilon - E_\varepsilon + D_\varepsilon = c_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} (P_k - E_k) + D_\varepsilon \quad (8)$$

Równanie dla ε - analiza wymiarowa

Na podstawie Równ. (4) otrzymuje się ogólną postać równania różniczkowego dla prędkości dyssypacji ε :

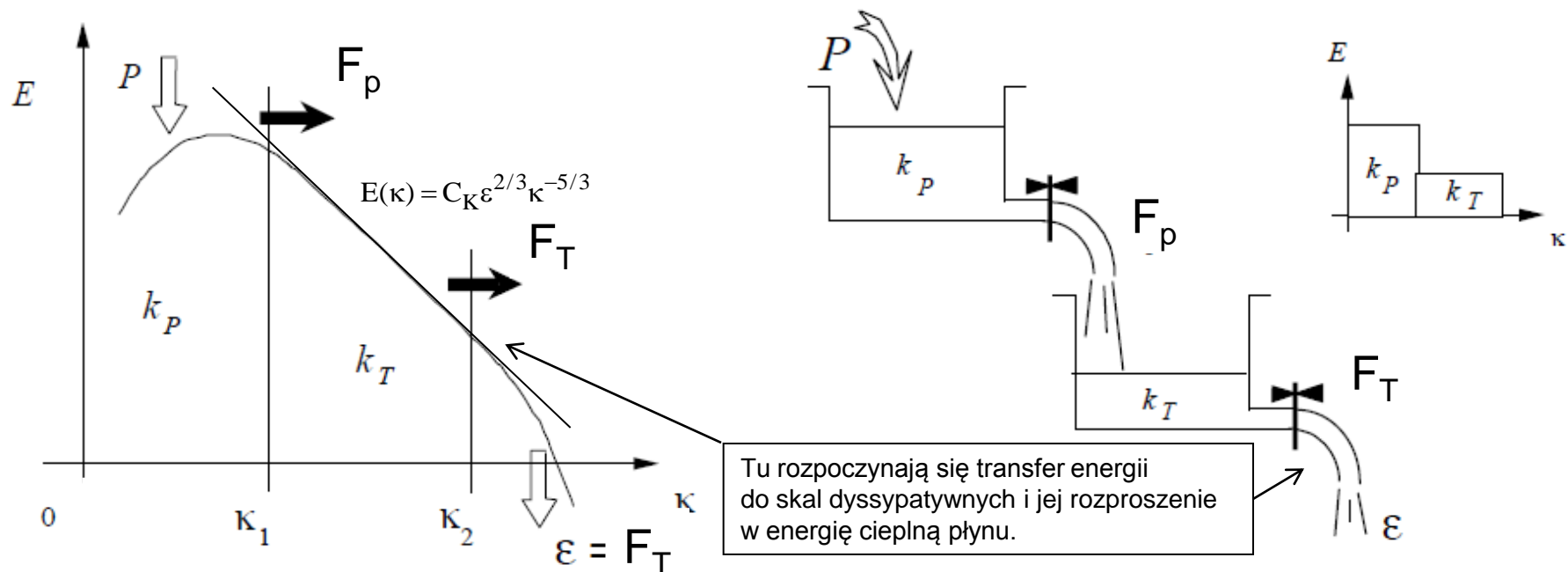
$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P_k - E_k) + D_{\varepsilon} \quad (9)$$

Ostatecznie

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (10)$$

- o Powyższa transformacja (Równ. 9) implikuje warunki równowagi w równaniu dla ε ($P_{\varepsilon} - D_{\varepsilon}$) (takie same jak w równaniu dla k : $P_k - D_k$).
W rzeczywistości warunki równowagi w równaniu dla ε różnią się od warunków równowagi w równaniu dla k (należy więc założyć różne stałe $c_{\varepsilon 1}$ i $c_{\varepsilon 2}$ w Równ. 10).
- o Stałe w Równ. (10) wyznacza się na podstawie analizy prostych przepływów turbulentnych (patrz druga część wykładu)

Inercyjny transport energii kinetycznej turbulencji (analiza zjawisk turbulentnych w przestrzeni Fouriera)



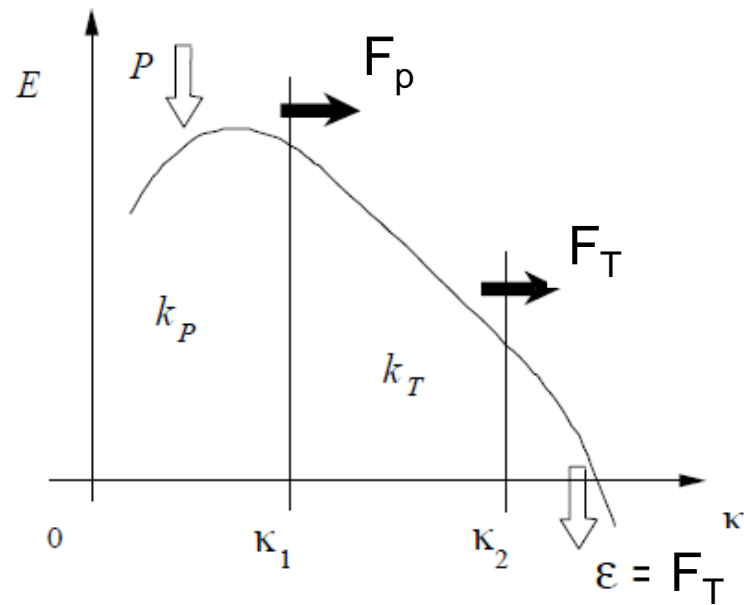
Widmowa gęstość energii turbulencji E

Analogia z przepływem wody przez układ rur i zbiorników (Schiestel)

$C_K = 1.4$ – stała Kolmogorowa, $\kappa_1 = \pi/L_1$, $\kappa_2 = \pi/L_2$ - liczby falowe,

F_P i F_T – widmowy transfer energii kinetycznej turbulencji odpowiednio w podobszarach zdominowanych przez produkcję (P) i bezwładnościowy transfer energii (T).

Produkcja, dyssypacja i inercyjny transport energii kinetycznej turbulencji



Dla dużej liczby Reynoldsa proces produkcji, transportu, dyssypacji i dyfuzji energii kinetycznej turbulencji można zapisać jak niżej:

$$\frac{Dk_p}{Dt} = P - F_p + D(k_p) \quad (11)$$

$$\frac{Dk_T}{Dt} = F_p - F_T + D(k_T) \quad (12)$$

$$\varepsilon = F_T \quad (13)$$

Analiza skal turbulentnych w oparciu o widmo energii

Podobszar 1 (0- κ_1)

- Dominującą rolę odgrywa produkcja $P=v_t S^2$

$$- v_t = C_\mu L_t \sqrt{k_1}, \quad k_1 = \int_{\kappa_1}^{\infty} E(\kappa) d\kappa \quad (14)$$

$$- L_t = \frac{k_1^{3/2}}{F_P} \quad - \text{oznacza skalę długości turbulentnej} \quad (15)$$

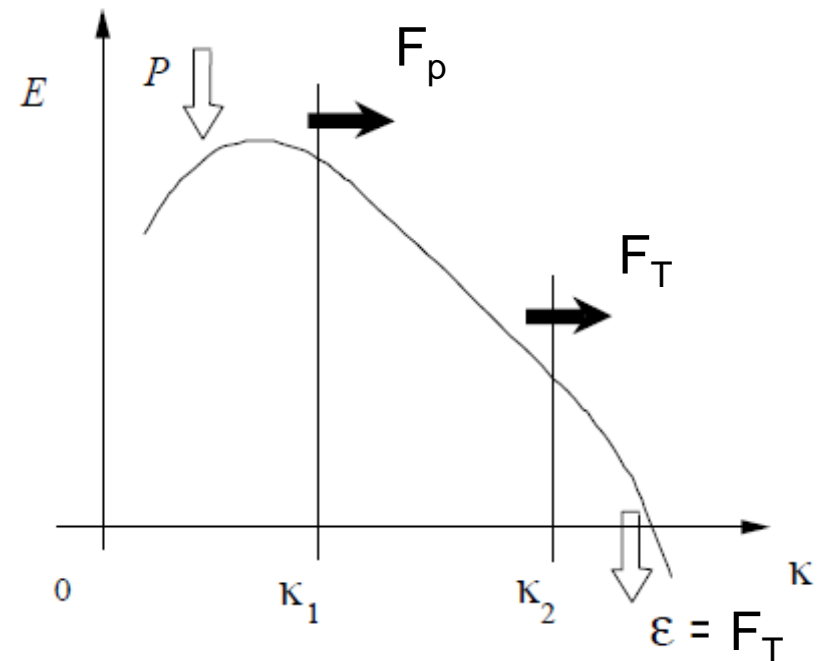
Podobszar 2 (κ_1 - κ_2)

$$- F_T \cong F_P \quad (16)$$

Podobszar 3 (ε)

- Dominującą rolę odgrywa proces dyssypacji lepkościowej ε :

$$- \text{Na podstawie Równ. (13): } L_\varepsilon = \frac{k_2^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{k_2^{3/2}}{F_T} \quad k_2 = \int_{\kappa_2}^{\infty} E(\kappa) d\kappa \quad (17)$$



Analiza skal turbulentnych w oparciu o widmo energii

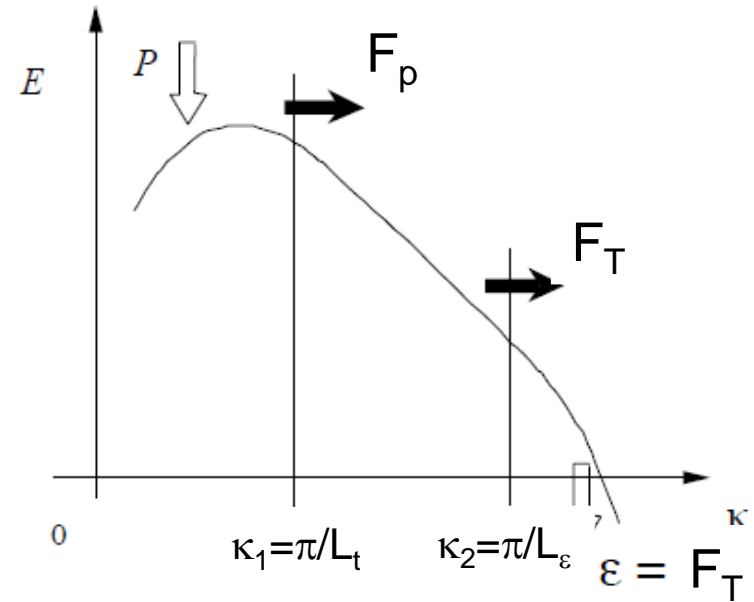
- Na podstawie Równ. (16, 15 i 17)

$$\frac{k_1^{3/2}}{L_t} \approx \frac{k_2^{3/2}}{L_\varepsilon} \approx \varepsilon \quad (18)$$

- Związek (17) pozwala przyjąć następujący model dla ε (równ. (18) jest stosowane w modelach RANS opartych na lepkości turbulentnej)

$$\varepsilon = \zeta_\varepsilon \frac{k^{3/2}}{L_t} \quad (19)$$

gdzie ζ_ε jest pewną stałą.



Równanie transportu dla ε (Schiestel, 1987)

Wyznaczając pochodną substancjalną dla ε danego Równ. (19)

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \zeta_\varepsilon \frac{3}{2} \frac{\sqrt{k}}{L_t} \frac{Dk}{Dt} - \zeta_\varepsilon \frac{k^{3/2}}{L_t^2} \frac{DL_t}{Dt} \quad (20)$$

Wstawiając

$$L_t = \zeta_\varepsilon \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad \text{i} \quad L_t^2 = \zeta_\varepsilon^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2}$$

do Równ. (20) otrzymujemy

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} \right) - \frac{\varepsilon^2}{k} \left(\frac{1}{\zeta_\varepsilon \sqrt{k}} \frac{DL_t}{Dt} \right) \quad (21)$$

Oznaczając przez $T=k/\varepsilon$ charakterystyczną skalę czasową turbulencji otrzymujemy
Na podstawie Równ. (19)

$$\zeta_\varepsilon \sqrt{k} = \frac{L_t}{T} \quad (22)$$

Równanie transportu dla ε (Schiestel, 1987)

Przyjmując Równ. (22) i (3) (pomijając człon dyfuzyjny) otrzymujemy następującą postać Równ. (21)

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \underbrace{\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{k} P_k}_{c_{\varepsilon 1}} - \underbrace{\left(\frac{3}{2} + \frac{T}{L_t} \frac{DL_t}{Dt} \right)}_{c_{\varepsilon 2}} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (23)$$

- Znamy od razu wartość stałej $c_{\varepsilon 1} = 1.5$!
- Stała $c_{\varepsilon 2}$ zależy od spektrum energii (liczby Reynoldsa).
Analiza zjawiska rozpadu struktur wirowych dla jednorodnej turbulencji wykazuje, że charakterystyczna skala turbulencji L_t rośnie. Ten wzrost jest bilansowany przez obniżenie poziomu dyssypacji lepkiej ε dla dużych liczb falowych.
(Oznacza to, że stała $c_{\varepsilon 2} > c_{\varepsilon 1}$ bo L_t rośnie z czasem.)
- Do Równ. (23) należy dodać człon dyfuzyjny (podobnie jak zostało zrobione w Równ. 10).

Standardowy model k-ε

Jednym z powszechniej obecnie stosowanych obecnie modeli turbulencji RANS jest model k-ε który został zaproponowany przez Jonesa and Laundera (1972):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (25)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (26)$$

gdzie $T=k/\varepsilon$. Stałe modelu wynoszą

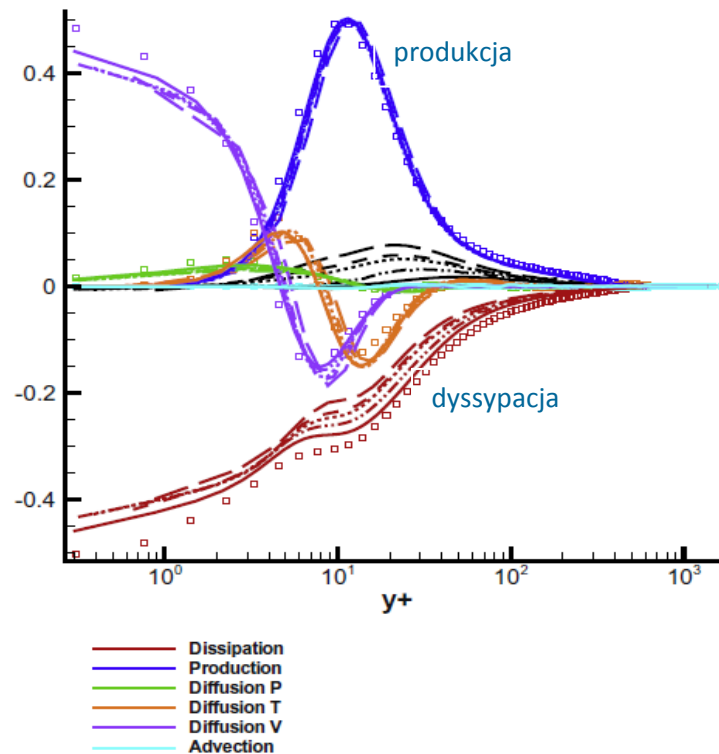
$$c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad (27)$$

Stała $c_{\varepsilon 1}=1.44$ w równaniu dla ε różni się od analogicznej stałej otrzymanej przez Schiestela (1987), ($c_{\varepsilon 1}=1.5$).

Stała c_μ

Wartość stałej c_μ można wyznaczyć na podstawie obserwacji przepływu w cienkich warstwach ścinających. W takim przepływie produkcja energii kinetycznej turbulencji P w pewnej odległości od ściany (obszar silnie turbulentny) jest w przybliżeniu równoważona przez jej dyssypację ε

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$



Stała c_μ

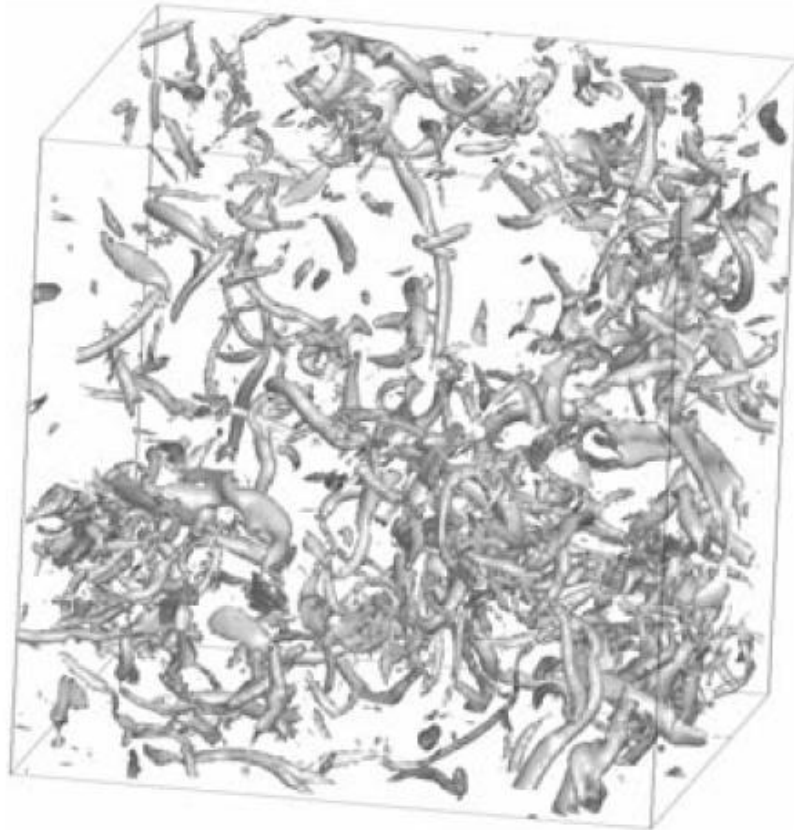
Równ. (26) można zapisać w postaci (przyjmując $P = v_t S^2 = v_t (\partial U / \partial y)^2 = \varepsilon$):

$$c_\mu = v_t \frac{\varepsilon}{k^2} = v_t \frac{v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{k^2} = \left(\frac{\overline{-u'v'}}{k}\right)^2 \quad (28)$$

Badania eksperymentalne wskazują, że $\left(\frac{\overline{-u'v'}}{k}\right) \approx 0.3$ dla turbulენტnej warstwy przyściennej. Stała c_μ wynosi więc 0.09.

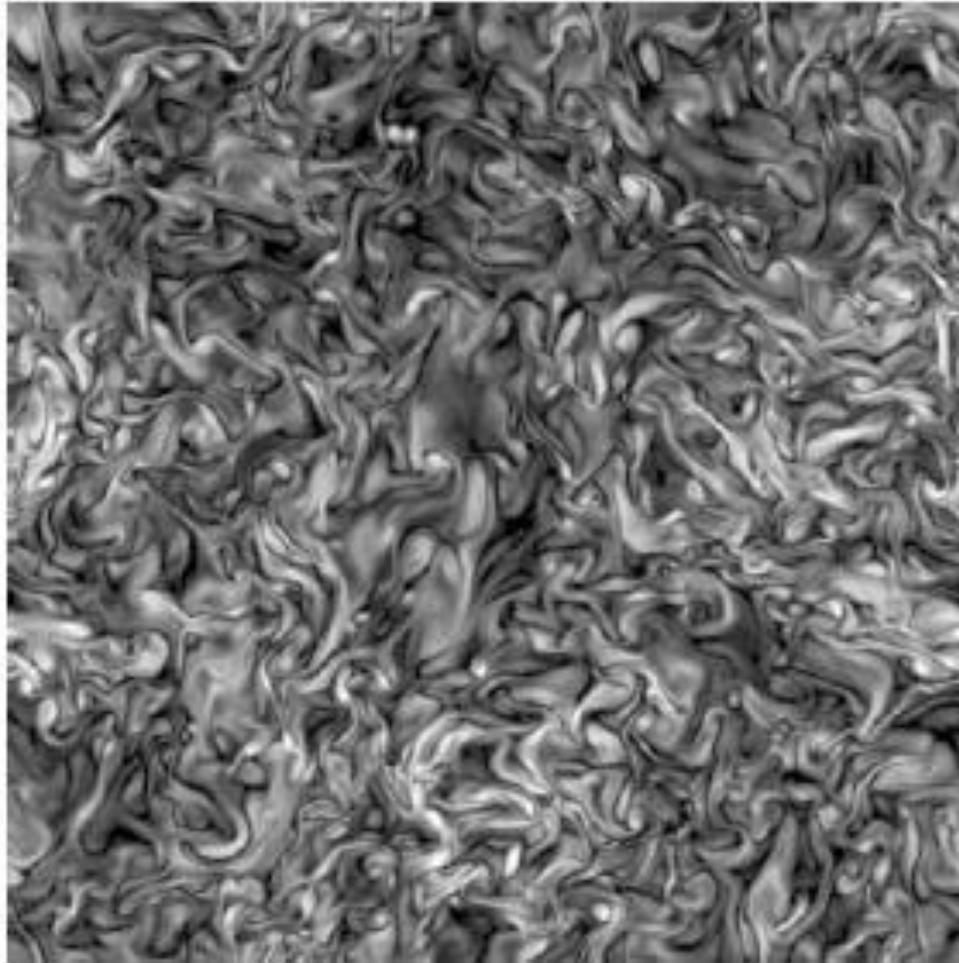
Stała $c_{\varepsilon 2}$

Stała $c_{\varepsilon 2}$ jest wyznaczana analizując rozpad struktur wirowych w przypadku istnienia pewnych wyidealizowanych warunków znanych jako jednorodna (taka sama w każdym punkcie) i izotropowa (nie ma uprzywilejowanego kierunku) turbulencja.



Symulacje DNS izotropowej i homogenicznej turbulencji w kostce sześciiennej z periodycznymi warunkami brzegowymi (Dubief i Delcayre, 2000)

Stała $c_{\epsilon 2}$



Izotropowa turbulencja zobrażowana przez wirowość $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
(Jimenez, 1999)

Stała $c_{\epsilon 2}$

Jednorodna i izotropowa turbulencja.

- Uśrednione w czasie wielkości znajdujące się w nawiasie na prawej stronie poniższego równania są stałe (brak dyfuzji turbulენტnej i lepkiej)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_i} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} \right) \quad (29)$$

- Pochodne prędkości średniej też są równe zero (brak produkcji energii kinetycznej turbulencji) :

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

Równ. (29) (lub równ. 24) upraszcza(ją) się do postaci. (Wiemy że $\epsilon = \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j}$)

$$\frac{Dk}{Dt} = -\epsilon \quad (30)$$

Stała $c_{\varepsilon 2}$

Analogicznie Równ. (25) przyjmuje postać ($T=k/\varepsilon$):

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{T} \quad (31)$$

Powyższe równania są spełnione dla obserwatora poruszającego się wraz z elementami płynu. Zakładamy, że energia kinetyczna turbulencji jest dana następującym równaniem :

$$k = t^{-n}, \quad (32)$$

współczynnik n należy wyznaczyć.

Na podstawie Równ. (30) otrzymujemy

$$\frac{Dk}{Dt} = -nt^{-n-1} = -\varepsilon \quad \varepsilon = nt^{-(n+1)} \quad (33)$$

Stała $c_{\varepsilon 2}$

Na podstawie Równ. (32) i (33) skala czasowa turbulencji, $T=k/\varepsilon$, wynosi

$$T = \frac{k}{\varepsilon} = \frac{t^{-n}}{nt^{-(n+1)}} = \frac{t}{n} \quad (34)$$

Wyznaczamy pochodną substancjalną dla ε danego Równ. (33)

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -n(n+1)t^{-(n+2)} \quad (35)$$

Na podstawie Równ. (31) otrzymujemy

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -n(n+1)t^{-(n+2)} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{T} = -c_{\varepsilon 2} \frac{nt^{-(n+1)} \cdot n}{t} = -c_{\varepsilon 2} n^2 t^{-(n+2)}$$

Tak więc

$$n(n+1)t^{-(n+2)} = c_{\varepsilon 2} n^2 t^{-(n+2)}$$

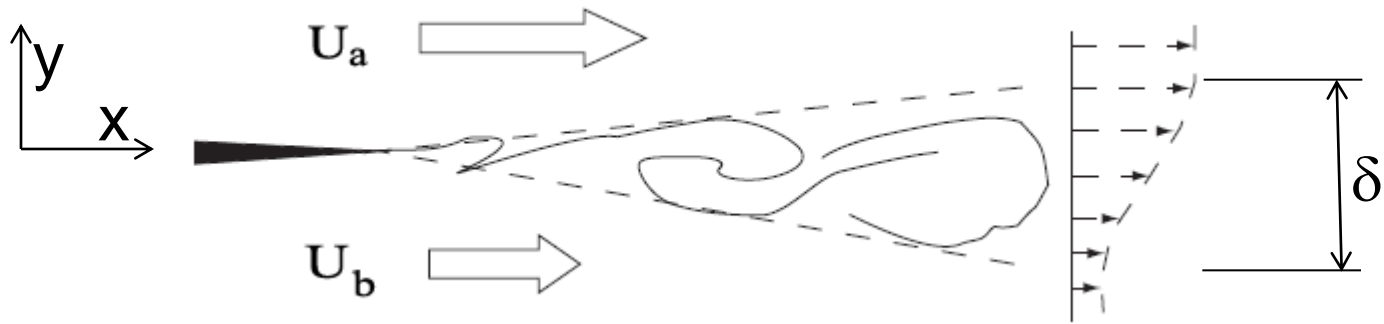
$$(n+1) = c_{\varepsilon 2} n$$

$$c_{\varepsilon 2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Stała $c_{\varepsilon 2}$

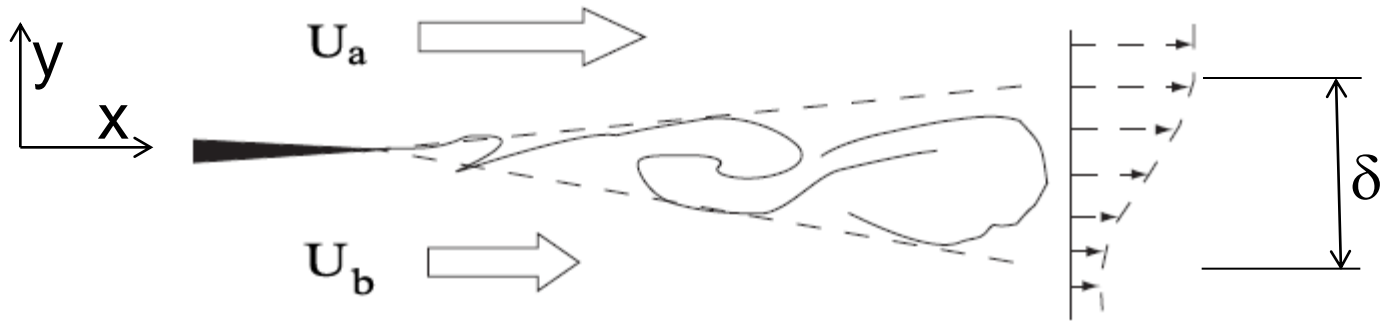
Badania eksperymentalne Comte-Bellot i Corrsin (1966) wskazują, że wartości współczynnika $n = 1.2 - 1.3$. Wartość stałej $c_{\varepsilon 2} = 1 + 1/n = 1.83 - 1.77$. W modelu Jonesa and Laundera (Równ. 24-27) wartość stałej $c_{\varepsilon 2} = 1.92$. Różnice wynikają z optymalizacji numerycznej stałych dla szerszej klasy przepływów.

Przepływ ze ścinaniem, stała $c_{\varepsilon 1}$



- Scheistel pokazał (Równ. 23), że stała $c_{\varepsilon 1}$ może być wyznaczona na podstawie odpowiednio przyjętego modelu dla skal dyssypatywnych (Równ. 19)
- Stała $c_{\varepsilon 1}$ może być również wyznaczona na podstawie analizy przepływu ze ścinaniem (rys powyżej) gdzie $\partial U / \partial y = \text{const}$. Cechą takiego przepływu jest to, że zmiany k i ε prowadzą do ustalenia się w przepływie pewnej charakterystycznej skali czasowej turbulencji $T = k / \varepsilon$.

Stała $c_{\varepsilon 1}$



- Współczynnik lepkości turbulentnej jest w przybliżeniu stały $\nu_t \cong \text{const}$. Wpływ efektów lepkich daleko od ścian jest pomijalnie mały: Można pominąć człon dyfuzyjny w Równ 24 i 25.
 - a) współczynnik lepkości turbulentnej można zapisać w postaci zaproponowanej przez Prandtla $\nu_t = l_{\text{mix, shearlayer}}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \cong \text{const}$
 - b) zmiany długości l_{mix} zależą od tempa przyrostu grubości warstwy ścinającej δ . W związku z tym że $\partial U / \partial y = \text{const}$ to można przyjąć że zmiany współczynnika lepkości turbulentnej są niewielkie -> dyfuzja jest więc pomijalnie mała.
- Obserwacja: Im większa różnica stałych $c_{\varepsilon 2}$ i $c_{\varepsilon 1}$ w równ. (25) tym większa grubość warstwy ścinającej δ .

Uprozczone równania dla k i ε - stała $c_{\varepsilon 1}$

Dla jednorodnego przepływu ze ścinaniem Równ. (24) i (25) upraszczają się więc do postaci.

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{c_{\varepsilon 1} P_k - c_{\varepsilon 2} \varepsilon}{k/\varepsilon}$$

Przyjmując, $DT/Dt = D(k/\varepsilon)/Dt = 0$ (dla tego przepływu skala czasowa turbulencji T dąży do pewnej stałej wartości) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{D(k/\varepsilon)}{Dt} &= \frac{Dk}{Dt} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{\varepsilon^2} \frac{D\varepsilon}{Dt} \\ &= \frac{P_k}{\varepsilon} - 1 - \frac{k}{\varepsilon^2} \left(\frac{c_{\varepsilon 1} P_k \varepsilon}{k} - \frac{c_{\varepsilon 2} \varepsilon^2}{k} \right) \\ &= c_{\varepsilon 2} - 1 - (c_{\varepsilon 1} - 1) \frac{P_k}{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Stała $c_{\varepsilon 1}$

Na podstawie Równ. (33) otrzymuje się

$$c_{\varepsilon 1} = \frac{c_{\varepsilon 2} - 1}{P_k / \varepsilon} + 1 \quad (37)$$

Dla wcześniej wyznaczonej wartości stałej $=1.83$, oraz przyjmując za Tavoularisem i Corrsinem (1981), że $P_k / \varepsilon \approx 1.8$ otrzymuje się wartość stałej $c_{\varepsilon 1} = 1.46$.

Jones and Launder przyjmują nieco mniejszą wartość stałej na podstawie optymalizacji numerycznej modelu $c_{\varepsilon 1} = 1.44$.

Przepływ w warstwie przyściennej, stałe σ_k i σ_ε

Stała $\sigma_k=1.0$ w modelu Jonesa and Laundera ponieważ stała ta opisuje proces dyfuzji turbulentnej energii kinetycznej turbulencji samej w sobie.

Stałą σ_ε otrzymuje się przyjmując stacjonarny przepływ w turbulentnej warstwie przyściennej z zerowym gradientem ciśnienia w kierunku głównym przepływu. (Patrz wykład dotyczący funkcji ściany.). Pomija się wpływ konwekcji – przepływ blisko ściany.

Dla przepływu w turbulentnej warstwie przyściennej równanie pędu dla składowej x-prędkości (analiza ta zostanie pokazana na jednym z kolejnych wykładów) i równ. (24) i (25) upraszczają się do postaci (blisko ściany konwekcja jest mała bo prędkość $\rightarrow 0$):

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow v_t \frac{\partial u}{\partial y} = \text{const} = \rho \tau_w = u_\tau^2 \quad (38)$$

$$0 = v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (39)$$

$$0 = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \quad (40)$$

Stała σ_k

W wewnętrznym obszarze turbulentnej warstwy przyściennej energia kinetyczna turbulencji jest praktycznie stała. Można więc przyjąć warunek

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad (41)$$

gdzie y oznacza współrzędną prostopadłą do ściany. Pozwala to pominąć człon dyfuzyjny w Równ. (39).

Dla przepływu w warstwie przyściennej (kolejny wykład) otrzymuje się następującą zależność pozwalającą wyznaczyć gradient prędkości średniej jako funkcję prędkości tarcia u_τ (Wilcox, 2006)

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (42)$$

Na podstawie Równ. (38) i (42) otrzymujemy

$$v_t = \kappa u_\tau y \quad (43)_{28}$$

Stała σ_ε

W warstwie przyściennej produkcja=dyssypacji: $P_k=\varepsilon$. Równ (39) (pomijając dyfuzję, patrz Równ. 41 i uwzględniając zależność 43) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} P_k = \varepsilon &= -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \Rightarrow \varepsilon &= \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \kappa u_\tau y \left(\frac{u_\tau}{\kappa y} \right)^2 \\ \Rightarrow \varepsilon &= \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \end{aligned} \quad (44)$$

Przyjmując definicję lepkości turbulentnej danej Równ. (26) i wstawiając ją do Równ. (38) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tau_w = \rho u_\tau^2 &= -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{u_\tau}{\kappa y} \\ \Rightarrow u_\tau^2 &= c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{u_\tau}{\kappa y} = c_\mu \frac{k^2}{u_\tau^3} \kappa y \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{c_\mu k^2}{u_\tau^2} \\ \Rightarrow k &= \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \end{aligned} \quad (45)$$

Wstawiając Równ. (42), (44), (45) i (26) do Równ. (40) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} 0 &= c_{\varepsilon 1} \frac{u_\tau^3 \sqrt{c_\mu}}{\kappa y u_\tau^2} \kappa u_\tau y \frac{u_\tau^2}{(\kappa y)^2} - c_{\varepsilon 2} \frac{u_\tau^6 \sqrt{c_\mu}}{(\kappa y)^2 u_\tau^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa u_\tau y}{\sigma_\varepsilon} \left(-\frac{u_\tau^3}{\kappa y^2} \right) \right) \\ &= c_{\varepsilon 1} \frac{u_\tau^4 \sqrt{c_\mu}}{(\kappa y)^2} - c_{\varepsilon 2} \frac{u_\tau^4 \sqrt{c_\mu}}{(\kappa y)^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{u_\tau^4}{\sigma_\varepsilon y} \right) \\ &= \left((c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2}) \frac{\sqrt{c_\mu}}{(\kappa y)^2} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{y^2} \right) u_\tau^4 \end{aligned} \tag{46}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1}) \sqrt{c_\mu}} \tag{47}$$

Stała σ_ε

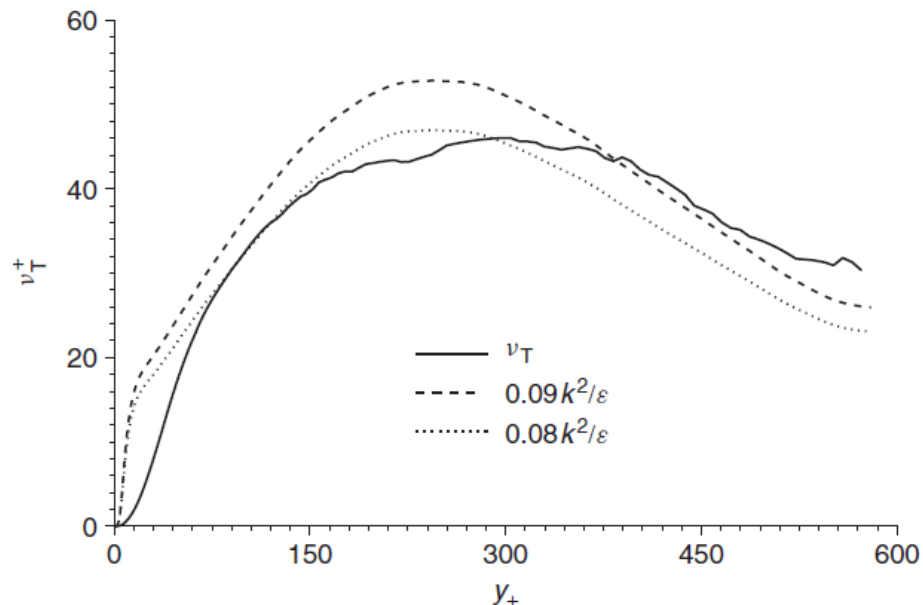
Spełnienie zależności (47) jest bardzo ważne ze względu na konieczność uzyskania poprawnego profilu prędkości średniej w warstwie przyściennej. W przypadku standardowego modelu k- ε wartość tej stałej wynosi $\sigma_\varepsilon=1.3$.

Przyjmując wartości pozostałych stałych w Równ. (47) tak jak w (27) otrzymuje się wartość stałej von Karmana $\kappa = 0.43$. Wartość tej stałej jest nieco wyższa niż standardowa wartość $\kappa = 0.40-0.41$. Jak wcześniej wspomniano różnica wynika z optymalizacji numerycznej przeprowadzonej przez Jonesa i Laundera.

Ograniczenie modelu $k-\varepsilon$

Jednym z istotnych ograniczeń jakie napotyka się w przypadku stosowania standardowego modelu $k-\varepsilon$ są trudności w prawidłowym opisie przepływów przyściennych.

Model $k-\varepsilon$ przeszacowuje ν_t w krytycznym dla prawidłowego modelowania procesu wymiany pędu i ciepła obszarze warstwy przyściennej ($y^+=0-80$).



Rozkład współczynnika lepkości turbulentnej w warstwie przyściennej dla modelu $k-\varepsilon$ i porównanie z wynikami DNS dla przepływu w kanale $Re_\tau=590$. Durbin i Pettersson Reif, (2003).

Ograniczenie modelu $k-\varepsilon$

- W praktyce modele klasy $k-\varepsilon$ posiadają więc różnego rodzaju funkcje tłumiące które stosuje się w Równ. (26) celem obniżenia współczynnika lepkości turbulentnej do poziomu obserwowanego w DNS i/lub w badaniach eksperymentalnych.
- Innym podejściem może być stosowanie modelu hybrydowego. W przypadku tego podejścia w pobliżu ścian stosuje się inny zastępczy model turbulencji (model jednorównaniowy) i standardowy model $k-\varepsilon$ w pewnej odległości od ściany (We Fluencie podejście to przyjmuje nazwę Enhanced-Wall-Treatment ε -Equation, Two-Layer Model).
- Prowadzi to jednak do pewnych komplikacji i zaburza ogólność sformułowania samego modelu $k-\varepsilon$.