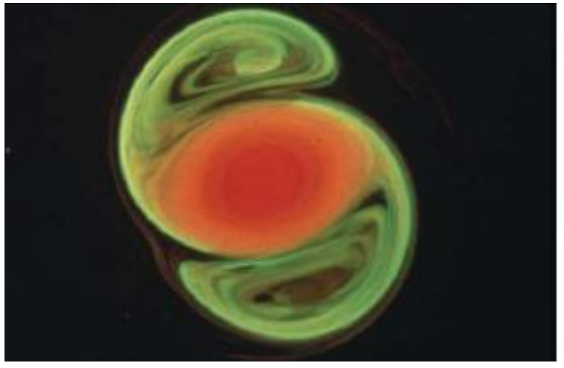
WYKŁAD3

DRUGA ZASADA DYNAMIKI – CIĄG DALSZY. RÓWNANIE ENERGII.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

"Gallery of Fluid Motion"-M. Samimy, K.S. Breuer

RÓWNANIE WYRAŻAJĄCE TREŚĆ DRUGIEJ ZASADY DYNAMIKI

$$\underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{\text{zmiana pędu}} = \underbrace{\int_{\Omega}\left[\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla\cdot\vec{v})\right]d\Omega}_{\text{pochodna pędu (wielkosć ekstensywna !)}} = \underbrace{\int_{\Omega}\rho\vec{F}\,d\Omega}_{\text{siły objętosciowe}} + \underbrace{\oint_{A}\vec{f}\,dA}_{\text{siły powierzchniowe}}$$

Rozpiszmy wyrażenie w nawiasie kwadratowym – czyli pochodną czasową iloczynu $\rho\vec{v}$:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla\cdot\vec{v}) = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\underbrace{\left[\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v})\right]}_{\text{jest zerem na mocy prawa zachowania masy}}$$

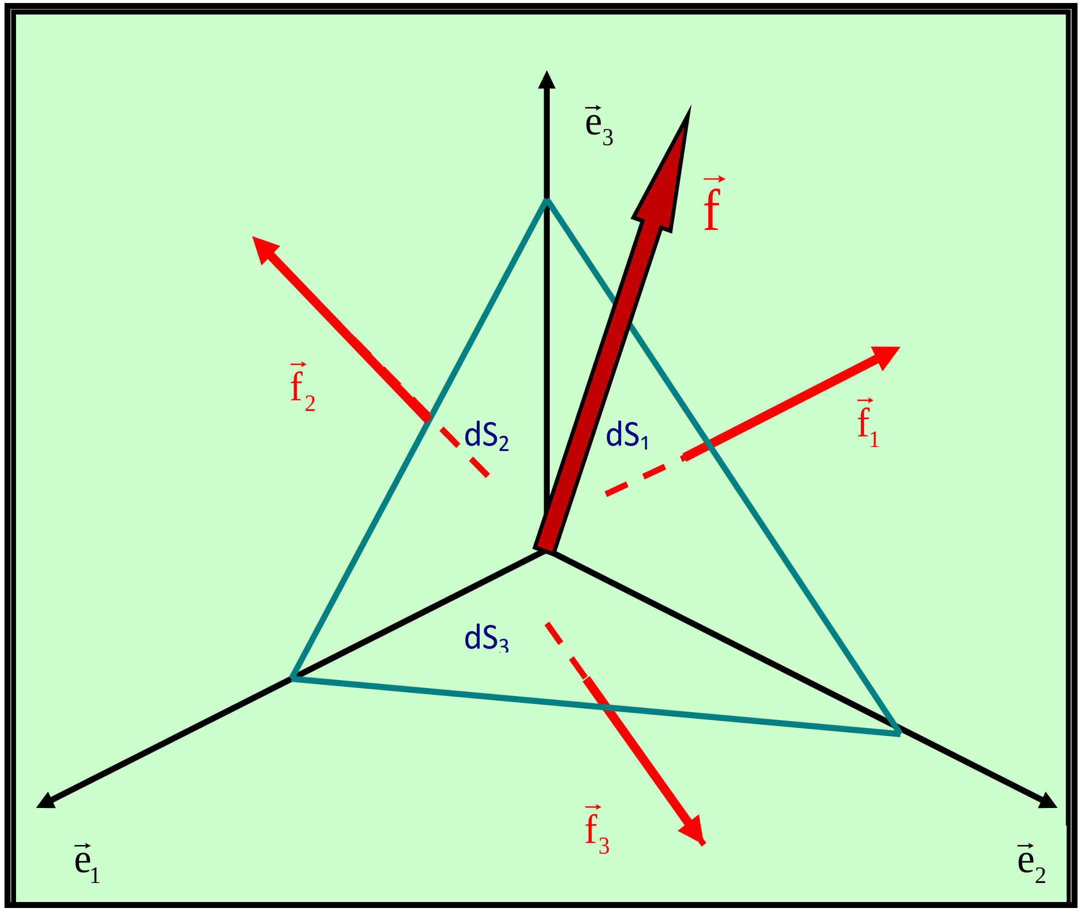
Otrzymamy zapis drugiej zasady dynamiki w formie następującej:

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} \right) d\Omega = \oint_{A} \vec{f}\, dA$$

Sprowadźmy równanie do takiej postaci, w której wystąpi całka po objętości o wartości zerowej.

$$\int_{\Omega} \rho [\cdots] d\Omega = 0$$

Równanie to obowiązywałoby dla każdego obszaru. Wyznaczymy w tym celu siłę powierzchniową $\vec{f}$ **.**



Całka powierzchniowa dla znikomych podobszarów dS_1, dS_2, dS_3 i dS może być zapisana na mocy twierdzenia o średniej

$$\vec{f}_1\, dS_1 + \vec{f}_2\, dS_2 + \vec{f}_3\, dS_3 + \vec{f}\; dS = 0$$

Rozważmy elementarny czworościan oparty o wersory układu współrzędnych. Boki czworościanu to dS_1, dS_2, dS_3 leżące naprzeciw wersorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ oraz dS – bok zamykający. Każdy z boków dS_1, dS_2, dS_3 znajduje się na płaszczyźnie utworzonej przez dwa wersory – ma więc niezmienną orientację. Normalną zewnętrzną dla dS_1, jest $-\vec{e}_1$, dla dS_2 jest $-\vec{e}_2$, a dla dS_3 jest $-\vec{e}_3$. Bok zamykający ma normalną $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ wynikającą z orientacji dS. Orientacja ta jest dowolna.

Zwrot siły $\vec{f}$ jest przeciwny do zwrotu pozostałych $\vec{f}_k$.

Dla k – tej składowej możemy napisać:

$$f_k = n_1 f_{1k} + n_2 f_{2k} + n_3 f_{3k}$$

Użyjmy skrótu sumacyjnego, wtedy

$$f_k = n_i f_{ik}$$

Zestawiając f_{ik} w tablicę $\mathbb{T}$ otrzymamy zwięzły zapis

$$\boxed{\vec{f} = \vec{n} \cdot \mathbb{T}}$$

$\mathbb{T}$ - nazywamy **TENSOREM NAPRĘŻENIA**.

TENSOR NAPRĘŻENIA określa siły wewnętrzne w ośrodku ciągłym i wynikające z sił wewnętrznych siły występujące na powierzchni ograniczającej rozważane ciało

$\vec{n}$ - **normalna do powierzchni**

Podstawmy określenie siły powierzchniowej do całki powierzchniowej występującej w II zasadzie dynamiki i przekształćmy ją korzystając z twierdzenia Greena - Gaussa - Ostrogradskiego.

$$\oint_A \vec{f}\, dA = \oint_A \vec{n} \cdot \mathbb{T}\, dA \overset{GGO}{=} \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbb{T}\, d\Omega$$

Gdy wrócimy do drugiej zasady dynamiki, wstawimy otrzymane wyżej wyrażenie i stwierdzimy, że całka znika dla każdego Ω, to dostaniemy:

$$\rho \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \rho \vec{\mathrm{F}} + \nabla \cdot \mathbb{T}$$

RÓWNANIE CAUCHY'EGO – równanie ruchu dla dowolnego ośrodka ciągłego

Równanie Cauchy'ego definiuje pole przyspieszenia, w którym znajduje się ruchomy ośrodek ciągły.
Pole to wynika:

- **z sił masowych określonych przez wektor** $\vec{\mathrm{F}}$
- **z sił powierzchniowych wyrażonych przez pochodne tensora naprężenia** $\nabla \cdot \mathbb{T}$

RÓWNANIE ENERGII

Równanie energii jest rezultatem zastosowania I zasady termodynamiki do poruszającego się ośrodka ciągłego. Zasada ta może być wypowiedziana tak:

Pochodna czasowa energii zawartej w układzie jest równa mocy dostarczanej do układu

Energię określamy następująco:

$$E = \int_{\Omega(t)} dE = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dm = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \rho \, d\Omega$$

Suma zawartej w jednostce objętości energii kinetycznej i energii wewnętrznej

energia wewnętrzna właściwa

Sposoby dostarczania mocy do układu

- **Moc dostarczana przez powierzchnię wynikająca z ruchu ośrodka przy istnieniu siły powierzchniowej**

$$N_A = \oint_A \vec{f} \cdot \vec{v} \, dA = \oint_A \vec{n} \cdot \mathbb{T} \cdot \vec{v} \, dA \overset{GGO}{=} \int_\Omega \nabla \left(\mathbb{T} \cdot \vec{v} \right) d\Omega$$

- **Moc dostarczana do wnętrza obszaru wynikająca z ruchu w zewnętrznym polu sił (np. grawitacyjnych)**

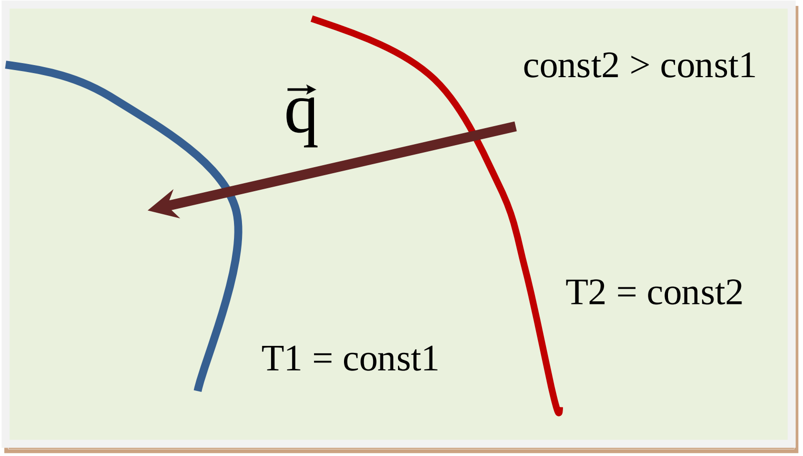
$$N_\Omega = \int_\Omega \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega$$

- **Moc wynikająca z przewodzenie ciepła**

Wektor strumienia ciepła

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \nabla T$$

T- temperatura
λ – przewodność cieplna
grad T – gradient temperatury o kierunku maksymalnego wzrostu temperatury
Przewodzenie ciepła odbywa się w kierunku spadku temperatury



Moc dostarczona do obszaru:

$$N_q = \oint_A -\vec{n} \cdot \vec{q} \, dA = \oint_A \vec{n} \cdot (\lambda \nabla T) \, dA \overset{GGO}{=} \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \, d\Omega$$

- **Moc przekazana przez promieniowanie**

$$N_{prom} = \int_{\Omega} Q\, d\Omega$$

Q – **gęstość mocy wynikająca z pochłaniania promieniowania ciepła wydzielonego przy przepływie prądu elektrycznego lub ciepła dostarczonego w wyniku zachodzących reakcji chemicznych i/lub jądrowych**

Równanie energii określa zmiany energii właściwej $e = \frac{v^2}{2} + u$ **w zależności od mocy sił powierzchniowych, masowych, przewodzenia ciepła i promieniowania**

$$\frac{dE}{dt} = N_A + N_{\Omega} + N_q + N_{prom}$$

Zakładając, że obszar Ω został przyjęty w sposób dowolny i „gubiąc całki” otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+\underbrace{\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\nabla\cdot\vec{v}}_{\substack{=0\ \text{na mocy} \\ \text{równania ciaglosci}}}\right]=\nabla\cdot\left(\mathbb{T}\cdot\vec{v}\right)+\rho\vec{F}\cdot\vec{v}+\nabla\left(\lambda\nabla T\right)+Q$$

RÓWNANIE ENERGII JEST ZAPISEM
I ZASADY TERMODYNAMIKI

PODSUMOWANIE

Wyprowadzone zostały równania:

- **ciągłości – wyrażające zasadę zachowania masy**
- **ruchu – wyrażające drugą zasadę dynamiki**
- **energii – wyrażające pierwszą zasadę termodynamiki**

W sumie mamy 5 równań (1 – ciągłości, 3 – ruchu, 1- energii). Obowiązują one dla dowolnej substancji rozumianej jako ośrodek ciągły.

<u>Poszukiwane są:</u>

- **trzy składowe pola prędkości,**
- **dwa parametry termodynamiczne np. ciśnienie i gęstość.**

(Trzeci wynika z równania stanu.)

Musimy określić tensor naprężeń. Wielkość ta zależy od ruchu i stanu ośrodka.