

# Aerodynamika I

## Podstawy nielepkich przepływów ściśliwych



źródło: wikipedia.org



# Podstawy dynamiki gazów



## Gaz idealny

Zbiór chaotycznie poruszających się cząsteczek w którym cząsteczki oddziałują na siebie tylko poprzez doskonale sprężyste zderzenia. Rozmiar cząsteczek jest pomijalnie mały w stosunku do drogi swobodnej.

Równanie stanu (Clapeyrona):

$$pV = RT \quad (1.1)$$

parametry stanu:

$p$  – ciśnienie,  $T$  – temperatura,  $V$  – objętość

W dynamice gazów korzystamy z zależności (dla masy jednostkowej gazu):

$$V = \frac{1}{\rho}$$

Równanie stanu (1.1) przybiera wtedy postać:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.2)$$



## Gaz doskonały

Wprowadźmy dwie funkcje stanu – energię wewnętrzną  $e$  i entalpię  $h$ :

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (1.3)$$

Dla gazu doskonałego energia wewnętrzna i entalpia są liniowymi funkcjami temperatury.

$$e = e(T) = c_v T \quad \rightarrow \quad c_v = \text{const} \quad (1.4)$$

$$h = h(T) = c_p T \quad \rightarrow \quad c_p = \text{const} \quad (1.5)$$

Korzystając z (1.2) otrzymamy:

$$\frac{p}{\rho} = RT = (c_p - c_v) T \quad \rightarrow \quad R = c_p - c_v \quad (1.6)$$

Wprowadzając współczynnik  $k = c_p/c_v$  otrzymamy:

$$c_p = \frac{k R}{k - 1} \quad c_v = \frac{R}{k - 1} \quad h = \frac{k}{k - 1} \frac{p}{\rho} \quad e = \frac{1}{k - 1} \frac{p}{\rho} \quad (1.7)$$



## Pierwsza zasada termodynamiki

Zmiana energii wewnętrznej układu zamkniętego jest równa sumie dostarczonego do układu ciepła i pracy sił zewnętrznych wykonanej nad układem.

$$de = \delta q + \delta w \quad (1.8)$$

przemiany termodynamiczne:

- **przemiana adiabatyczna** – brak wymiany ciepła z otoczeniem
- **przemiana odwracalna** – istnieje możliwość powrotu do początkowego stanu gazu. Brak efektów związanych z dysypacją (np. lepkość, przewodnictwo cieplne)
- **przemiana izentropowa** – adiabatyczna i odwracalna. Entropia nie podlega zmianie (patrz następny slajd)

Dla przemiany odwracalnej (brak sił tarcia)

$$\delta w = -p dV \quad \rightarrow \quad de = \delta q - p dV \quad (1.9)$$

## Druga zasada termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki opisuje zachowanie energii lecz nie określa kierunku przemian. Np. przekazywanie ciepła z ciała  $A$  do ciała  $B$  gdy  $T_A < T_B$  jest z nią zgodne.

Wprowadźmy nową funkcję stanu – entropię  $s$ :

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} \quad (1.10)$$

$\delta q_{rev}$  – infinitezymalne ciepło dodane do układu w przemianie odwracalnej

Dla dowolnej przemiany zachodzi zależność:

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irrev} \rightarrow ds \geq \frac{\delta q}{T} \quad (1.11)$$

a dla adiabatycznej, gdzie  $\delta q = 0$ :

$$ds \geq 0 \quad (1.12)$$

(1.11) i (1.12) opisują drugą zasadę termodynamiki:

**Entropia układu rośnie lub co najwyżej pozostaje niezmienną.**

## Druga zasada termodynamiki c.d.

W przypadku przemiany odwracalnej korzystając z 1 Z.T. (1.9) i (1.10):

$$T ds = de + p dV \quad (1.13)$$

korzystając z definicji entalpii (1.3) i (1.13) :

$$dh = de + p dV + V dp \quad (1.14)$$

$$T ds = dh - V dp \quad (1.15)$$

Korzystając z równania stanu (1.1) i równań (1.4) i (1.5) :

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p dV}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (1.16)$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{V dp}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (1.17)$$

Zmianę entropii dla gazu doskonałego w przemianie  $1 \rightarrow 2$  można wyznaczyć:

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R \frac{dV}{V} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1.18)$$

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} - \int_{p_1}^{p_2} R \frac{dp}{p} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (1.19)$$



## Przemiana izentropowa

Równanie (1.19) można przekształcić:

$$s_2 - s_1 = \frac{k R}{k - 1} \ln \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{R}{k - 1} \left[ k \ln \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} - (k - 1) \ln \frac{p_2}{p_1} \right]$$
$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k - 1} \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] \quad (1.20)$$

Dodatkowe zależności na zmianę temperatury w funkcji zmian ciśnienia lub gęstości można wyprowadzić z (1.19) lub (1.18). Ostatecznie, dla przemiany izentropowej ( $s_2 - s_1 = 0$ ) otrzymamy zależność:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.21)$$





## Równania ruchu nielepkiego płynu ściśliwego

W ruchu płynu ściśliwego  $\rho \neq const$  !

Całkowe równania ruchu dla pewnej objętości  $\Omega$  ograniczonej brzegiem  $\Gamma$  (pominięto pole sił objętościowych):

### Równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (1.22)$$

### Równanie pędu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = - \oint_{\Gamma} p \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (1.23)$$

### Równanie energii całkowitej $E = e + \frac{v^2}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \rho E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = - \underbrace{\oint_{\Gamma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma}_{\text{praca}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \dot{q} \, d\Omega}_{\text{ciepło}} \quad (1.24)$$

$\mathbf{v}$  – wektor pola prędkości

$\dot{q}$  – źródło ciepła (dla typowych warunków  $\dot{q} = 0$ )



## Równania ruchu nielepkiego płynu ściśliwego c.d.

Różniczkowe równania w formie zachowawczej:

### Równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.25)$$

### Równanie pędu

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) + \nabla p = 0 \quad (1.26)$$

### Równanie energii całkowitej

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\rho E + p)) = \rho \dot{q} \quad (1.27)$$



## Porównanie równań płynu ściśliwego i nieściśliwego w ruchu ustalonym

### Równanie ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (1.28)$$

### Równanie pędu

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) + \nabla p = 0 \quad (1.29)$$

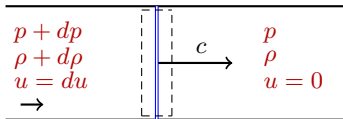
### Równanie energii

$$\text{brak} \quad \leftrightarrow \quad \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) + \nabla p = 0 \quad (1.30)$$

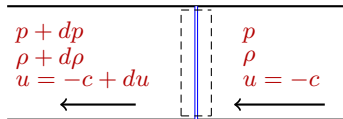
W przypadku nieściśliwym, substytutem równania energii może być równanie Bernoulliego (całka równania pędu!). Równanie to opisuje zamianę pracy sił ciśnienia w energię kinetyczną:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (1.31)$$

## Prędkość dźwięku



układ związany z otoczeniem



układ związany z zaburzeniem

równanie ciągłości:

$$(\rho + d\rho)(c - du)A = \rho c A \quad \rightarrow \quad du = \frac{c d\rho}{\rho + d\rho} \quad (1.32)$$

równanie pędu:

$$\dot{m}(c - du) - (p + dp)A = \dot{m}c - pA \quad \rightarrow \quad \rho c du = dp \quad (1.33)$$

$$c^2 \frac{\rho \delta\rho}{\rho + d\rho} = dp \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} \left(1 - \frac{d\rho}{\rho}\right) \quad (1.34)$$

dla małych zaburzeń  $d\rho \ll \rho$ :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \xrightarrow{\text{dla izentropy}} c^2 = k \frac{p}{\rho} = k R T \quad (1.35)$$



## Liczba Macha

Liczba Macha to bezwymiarowa liczba podobieństwa dla zjawisk falowych w przepływie płyny ściśliwego.

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.36)$$

### Przykład

W warunkach standardowych:  $p = 1000 \text{ hPa}$ ,  $T = 25^\circ\text{C} = 298.15^\circ\text{K}$   
dla powietrza (cząsteczki dwuatomowe)  $k = 1.4$ ,  $R = 287.05 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

gęstość  $\rho = \frac{p}{RT} = 1.168 \text{ kg/m}^3$

prędkość dźwięku  $c = \sqrt{kT} = 292.547 \text{ m/s}$

poruszając się z prędkością  $u = 100 \text{ km/h} = 27.778 \text{ m/s}$  liczba Macha  
 $M = 0.095$

## Klasyfikacja rodzajów przepływu w zależności od liczby Macha

nieściśliwy	$M < 0.3$	przepływ może być traktowany jako nieściśliwy (zmiana gęstości $< \sim 5\%$ )
poddźwiękowy	$M < 0.7$	przepływ w całym zakresie jest poddźwiękowy
transoniczny	$0.7 < M < 1.2$	przepływ okołodźwiękowy; występują efekty falowe; duże obszary nad/poddźwiękowe
naddźwiękowy	$1.2 < M < 5$	przepływ prawie w całym obszarze jest naddźwiękowy
hipersoniczny	$5 < M$	interakcja fal uderzeniowych z warstwą przyścienną; wysokie temperatury; dysocjacja i jonizacja gazu;



## Całka równania energii

Korzystając z r-a ciągłości (1.25) r-e energii (1.27) można przekształcić ( $\dot{q} = 0$ ):

$$\rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} p = 0 \quad (1.37)$$

Korzystając z:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} p \quad (1.38)$$

i r-a (1.37) otrzymamy:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.39)$$

Dla zagadnień stacjonarnych otrzymamy zależność dla pewnej linii prądu:

$$e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = h + \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (1.40)$$



## Całka równania energii c.d.

Wprowadźmy parametry w punkcie spiętrzenia ( $u = 0$ ):  $p_0$ ,  $\rho_0$ , i  $T_0$ . Dodatkowo, wprowadźmy pojęcie stanu krytycznego, w którym  $u = c$  czyli  $M = 1$ . Parametry stanu gazu są oznaczane indeksem \*:  $p_*$ ,  $\rho_*$  i  $T_*$ .

Równanie (1.40) można przedstawić w formie:

$$h + \frac{u^2}{2} = c_p T + \frac{u^2}{2} = \frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = const \quad (1.41)$$

Równanie to w punkcie spiętrzenia ( $u_0 = 0$ ):

$$\frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_0^2}{k-1} = const \quad (1.42)$$

a dla stanu krytycznego ( $u_* = c_*$ ):

$$\frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_*^2}{k-1} + \frac{c_*^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} c_*^2 = const \quad (1.43)$$

Z równań (1.42) i (1.43) wynika, że na linii prądu dla gazu doskonałego w przemianie adiabatycznej  $c_0$  i  $c_*$  są stałe.



## Zależności dla przemiany izentropowej

Wprowadźmy parametry w punkcie spiętrzenia ( $u = 0$ ):  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $h_0$  i  $T_0$

Zmianę parametrów stanu gazu w przemianie izentropowej z punktu 0 do 1 można opisać korzystając z (1.40):

$$h_0 = h_1 + \frac{u_1^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \quad (1.44)$$

Korzystając z r-a izentropy (1.21) powyższe r-e można przekształcić do:

$$\frac{p_0}{p_1} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.45)$$

Podobnie można wyznaczyć zależności na gęstość i temperaturę:

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (1.46)$$

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \quad (1.47)$$

## Zależności dla przemiany izentropowej c.d.

Jeśli zdefiniujemy liczbę Macha odniesioną do prędkości dźwięku w punkcie krytycznym  $M_* = u/c_*$  to równanie (1.43) można przekształcić dzieląc obie strony przez  $u^2$ :

$$\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{c_*^2}{u^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{M^2} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{1}{M_*^2}$$

Na podstawie tego r-a można otrzymać zależność:

$$M_*^2 = \frac{(k+1) M^2}{2 + (k-1) M^2} \quad (1.48)$$

z której wynika, że:

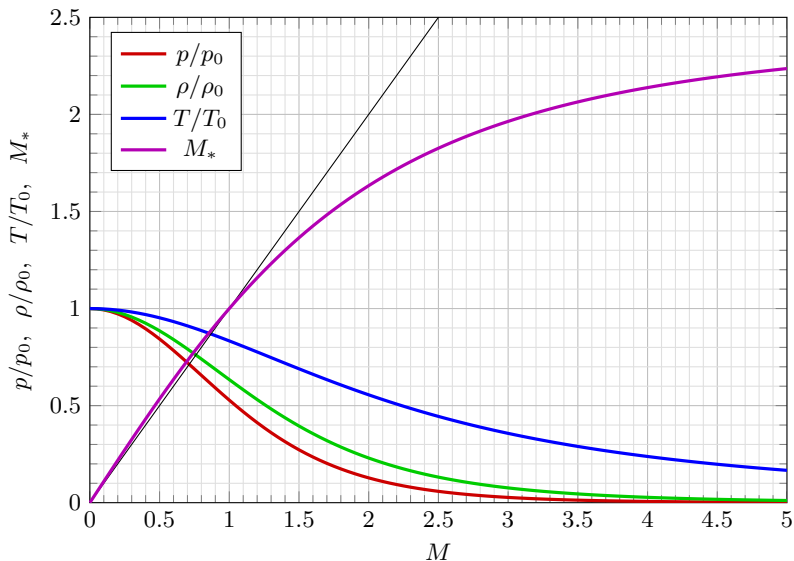
$$M < 1 \quad \Rightarrow \quad M_* < 1$$

$$M = 1 \quad \Rightarrow \quad M_* = 1$$

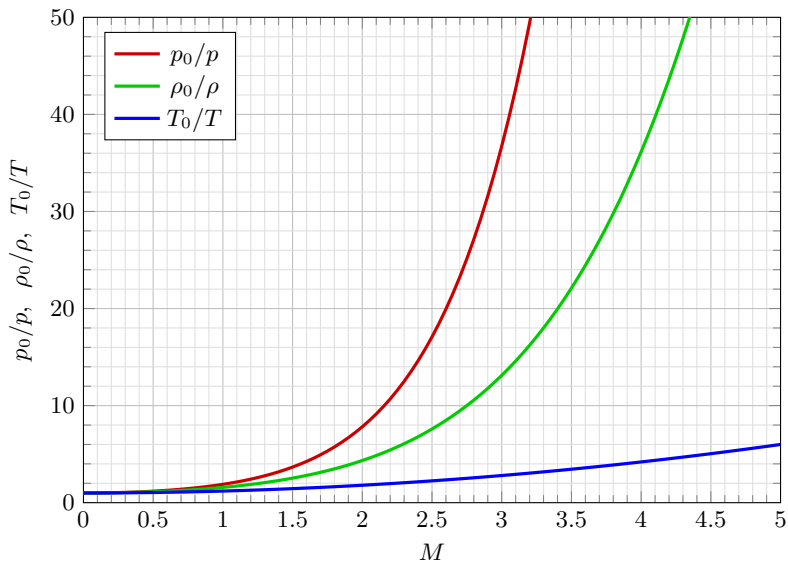
$$M > 1 \quad \Rightarrow \quad M_* > 1$$

$$M \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad M_* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \sqrt{6} \quad (1.49)$$

## Zależności dla przemiany izentropowej c.d.



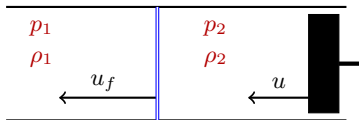
## Zależności dla przemiany izentropowej c.d.



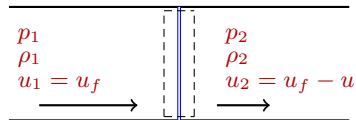


# Prosta fala uderzeniowa

## Prosta fala uderzeniowa



układ związany z otoczeniem



układ związany z falą

równanie ciągłości:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.1)$$

równanie pędu:

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (2.2)$$

równanie energii:

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.3)$$

równanie stanu:

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \quad (2.4)$$



## Prosta fala uderzeniowa c.d.

Równanie energii (2.3) można zapisać:

$$\begin{aligned}
 c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} &= c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{c_1^2}{k-1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{k-1} + \frac{u_2^2}{2} \\
 \rightarrow \quad \frac{c_1^2}{k-1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{c_2^2}{k-1} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} c_*^2
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dzieląc stronami r-e pędu (2.2) przez r-e ciągłości (2.1):

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2 \quad \rightarrow \quad u_2 - u_1 = \frac{c_1^2}{k u_1} - \frac{c_2^2}{k u_2} \quad (2.6)$$

Wyznaczając  $c_1^2$  i  $c_2^2$  z (2.5) i wstawiając do (2.6):

$$\frac{k+1}{2k} \frac{c_*^2}{u_1 u_2} + \frac{k-1}{2k} = 1 \quad \rightarrow \quad c_*^2 = u_1 u_2 \quad (2.7)$$



## Prosta fala uderzeniowa c.d.

Równanie (2.7) można przekształcić:

$$\frac{u_1 u_2}{c_*^2} = M_{*1} M_{*2} = 1 \quad \rightarrow \quad M_{*2} = \frac{1}{M_{*1}} \quad (2.8)$$

Korzystając z r-a energii (2.3):

$$\frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} c_*^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k-1} \frac{c^2}{u^2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{c_*^2}{u^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{k-1} \frac{1}{M^2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{1}{M_*^2} \quad \rightarrow \quad M_*^2 = \frac{(k+1) M^2}{2 + (k-1) M^2} \quad (2.9)$$

Z zależności (2.8) i (2.9):

$$M_2^2 = \frac{2 + (k-1) M_1^2}{2 k M_1^2 - (k-1)} \quad (2.10)$$

Przekształcając r-e ciągłości (2.1) i korzystając z zależności na  $M_*$ :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_2 u_1} = \frac{u_1^2}{c_*^2} = M_{*1}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(k+1) M_1^2}{2 + (k-1) M_1^2} \quad (2.11)$$





## Prosta fala uderzeniowa c.d.

Korzystając z r-a pędu (2.2) r-a ciągłości (2.1) :

$$p_2 - p_1 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{k u_1^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = k M_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) \quad (2.12)$$

Używając (2.11) i upraszczając otrzymamy:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) \quad (2.13)$$

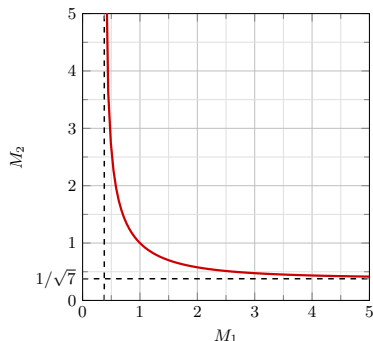
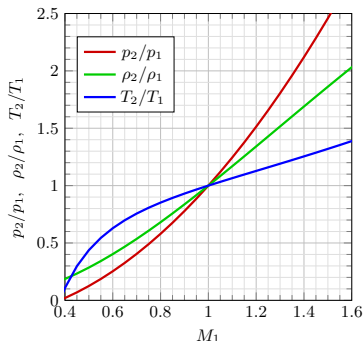
Z r-a stanu (2.4) i znanych już zależności (2.11) i (2.13):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \left[1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1)\right] \frac{2 + (k-1) M_1^2}{(k+1) M_1^2} \quad (2.14)$$



## Prosta fala uderzeniowa c.d.

Wyprowadzone zależności (2.10), (2.11), (2.13) i (2.14) opisują uderzeniową falę zgęszczeniową ( $M_1 > 1$ ) jak również uderzeniową falę rozrzedzeniową ( $M_1 < 1$ ).





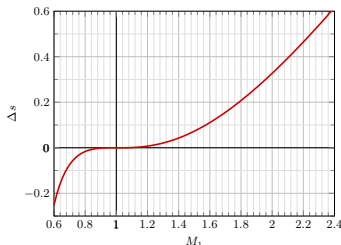
## Prosta fala uderzeniowa c.d.

Czy obydwie fale występują w rzeczywistości ?

Wyznaczając przyrost entropii z r-a (1.20) i zależności (2.13) i (2.11):

$$\begin{aligned} \Delta s &= s_2 - s_1 \\ &= \frac{R}{k-1} \ln \left[ \left[ 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[ \frac{(k+1) M_1^2}{2 + (k-1) M_1^2} \right]^{-k} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

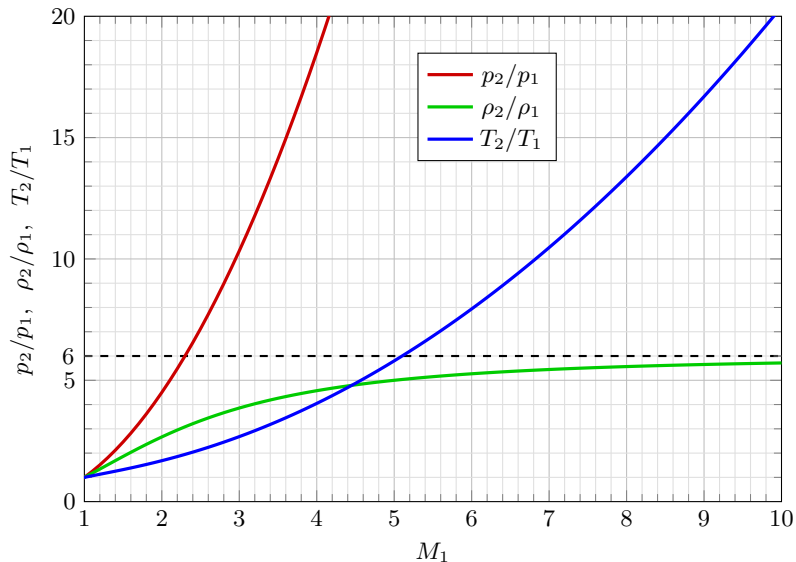
Zmiana entropii dla fali uderzeniowej jest funkcją liczby Macha  $M_1$ :



Jak widać na wykresie, dla  $M_1 < 1$  (nieciągła fala rozrzedzeniowa)  $\Delta s < 0$ . Zgodnie z 2 Z.T. jest to niefizyczne.

**W rzeczywistości mogą występować tylko zgręszczeniowe fale uderzeniowe**

## Prosta fala uderzeniowa c.d.

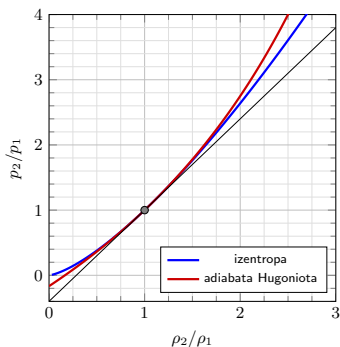
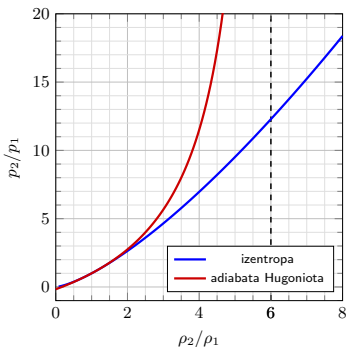


## Prosta fala uderzeniowa – Adiabata uderzeniowa

Zależności dla fali uderzeniowej można przedstawić (tak jak przemianę izentropową) jako  $\frac{p_2}{p_1} = f\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (k-1)}{(k-1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (k+1)} \quad (2.16)$$

Zależność ta jest nazywana adiabata uderzeniowa (r-e Rankine'a - Hugoniota).



## Prosta fala uderzeniowa – Strata ciśnienia spiętrzenia

Równanie energii (2.3) dla parametrów w punkcie spiętrzenia można zapisać:

$$c_p T_{01} = c_p T_{02} \quad \rightarrow \quad T_{01} = T_{02} \quad (2.17)$$

R-e (1.19) dla parametrów w punkcie spiętrzenia:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad \rightarrow \quad s_2 - s_1 = R \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad (2.18)$$

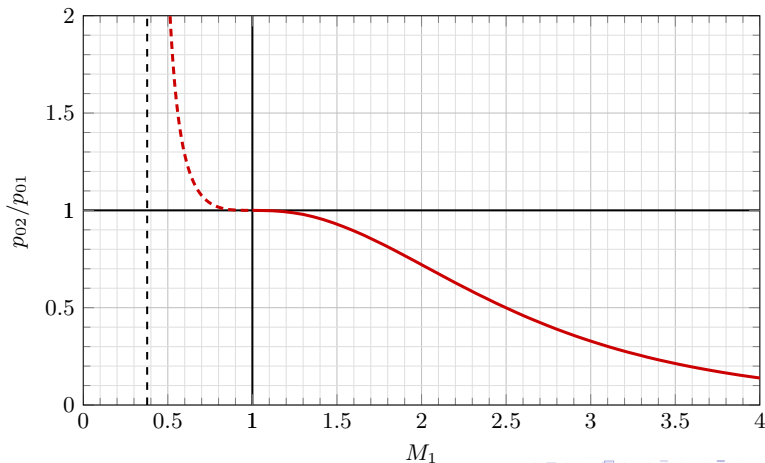
Zmianę ciśnienia spiętrzenia można wyznaczyć korzystając z (2.15):

$$R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = -\frac{R}{k-1} \ln \left[ \left[ 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[ \frac{(k+1) M_1^2}{2 + (k-1) M_1^2} \right]^{-k} \right]$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[ 1 + \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{k-1}} \left[ \frac{(k+1) M_1^2}{2 + (k-1) M_1^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.19)$$

## Prosta fala uderzeniowa – Strata ciśnienia spiętrzenia c.d.

Z r-a (2.18) wynika, że przyrost entropii jest ściśle związany ze zmianą ciśnienia spiętrzenia (ciśnienia całkowitego). Wykres zależności straty ciśnienia spiętrzenia można sporządzić na podstawie (2.19):





## Literatura

J.D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*

J.J. Bertin, R.M. Cummings, *Aerodynamics for Engineers*

H.W. Liepmann, A. Roshko, *Elements of Gasdynamics*

A.H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*

R. Whitford, *Design for Air Combat*