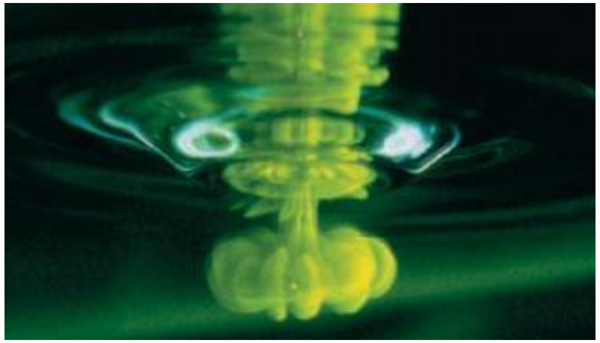
WYKŁAD 5

OPIS RUCHU, RÓWNANIE ENERGII I CAŁKA ENERGII DLA PŁYNU PASCALA.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

"Gallery of Fluid Motion"-M. Samimy, K.S. Breuer

OPIS RUCHU PŁYNU PASCALA

Tensor naprężenia dla płynu Pascala:

$$\mathbb{T} = -\mathbb{I}p = -p\delta_{ik}\vec{e}_i\vec{e}_k \qquad i,k = 1,2,3$$

Równania opisujące ruch – równania Eulera:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

Obowiązuje prawo zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Bilans energii:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\right]=\nabla\cdot\left(\mathbb{T}\cdot\vec{v}\right)+\rho\vec{F}\cdot\vec{v}+\nabla\left(\lambda\nabla T\right)+Q$$

Pole sił zewnętrznych $\vec{F}$ i gęstość mocy Q uważamy za zadane.

Mamy 5 równań i 5 niewiadomych (v_1, v_2, v_3, p, ρ)

Aby rozwiązać opisany układ:

- **Określamy obszar, w którym poszukujemy rozwiązań**
- **Formułujemy warunki początkowe – określamy v_1, v_2, v_3, p, ρ w chwili $t=0$**
- **Formułujemy warunki brzegowe – opisujemy ruch i stan płynu na powierzchni brzegowej**

Czy istnieje rozwiązanie przedstawionego układu równań?

Czy, jeśli istnieje rozwiązanie to jest jedynym?

Czy mała zmiana warunków początkowych lub brzegowych powoduje małą zmianę rozwiązania naszego układu ?

UPROSZCZONE RÓWNANIE ENERGII DLA PŁYNU PASCALA – BEZ PRZEWODZENIA CIEPŁA, ŹRÓDEŁ I PROMIENIOWANIA

Określmy iloczyn $\mathbb{T}\cdot\vec{v}$ występujący w bilansie energii:

$$\mathbb{T}\cdot\vec{v} = -p\delta_{ik}\vec{e}_i\vec{e}_k\cdot v_j\vec{e}_j = -pv_j\delta_{ik}\vec{e}_i\left(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j\right) =$$

$$-pv_j\delta_{ik}\vec{e}_i\delta_{kj} = -pv_j\left(\delta_{ik}\delta_{kj}\right) = -pv_j\vec{e}_j = -p\vec{v}$$

Wstawmy wynik do równania energii pomijając przewodzenie ciepła, źródła i promieniowanie:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\right] = -\nabla\cdot\left(p\,\vec{v}\right)+\rho\vec{F}\cdot\vec{v}$$

Przekształćmy je wykorzystując definicję pochodnej substancjalnej:

$$\nabla\cdot\left(p\vec{v}\right)=p\nabla\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\nabla p=p\nabla\cdot\vec{v}+\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}$$

Natomiast na mocy równania ciągłości wiemy, że

$$p\nabla\cdot\vec{v}=-\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Wobec tego

$$-\nabla\cdot\left(p\vec{v}\right)=-\rho\left[\frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}\right]$$

Co pozwala przepisać nam równanie energii w sposób następujący:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

Wiemy, że entalpia właściwa to $i = u + \dfrac{p}{\rho}$ **zatem przedstawimy powyższe równanie w postaci:**

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + i\right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

CAŁKA ENERGII

Zakładamy:

- **Potencjalność pola sił zewnętrznych:** $\vec{F} = \nabla \phi$

- **Niezależność od czasu pól ciśnienia, masy właściwej i pola sił zewnętrznych**

Niezależność od czasu pola $\vec{F}$ **implikuje** ϕ **niezależne od czasu i** $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ **. Możemy, zatem napisać** $\vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \nabla \phi = \left[\dfrac{d\phi}{dt} - \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \dfrac{d\phi}{dt}$

RÓWNANIE ENERGII PO DODATKOWYM UPROSZCZENIU

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + i - \phi\right) = 0$$

$$\rho \vec{v} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + i - \phi\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

Wzdłuż linii prądu (…) jest stały

CAŁKA ENERGII DLA RUCHU USTALONEGO

$$\frac{v^2}{2} + i - \phi = \text{const}\Big|_{\text{na linii pradu}}$$

energia kinetyczna

entalpia jednostkowej masy

energia potencjalna

entalpia całkowita oznaczana jako i_0

Przydatne definicje:

$$i = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\bigg|_s$$

ogólna definicja entalpii przy stałej entropii

$$i = \frac{p}{\rho}$$

definicja entalpii dla płynu nieściśliwego (ciecze)
ρ = const, s = const

$$i = \int_{T_0}^{T} c_p dT + i_0 = c_p T$$

definicja entalpii dla płynu ściśliwego (gazy) ρ ≠ const i bez założenia o stałości s

C_p- średnie lub stałe ciepło właściwe