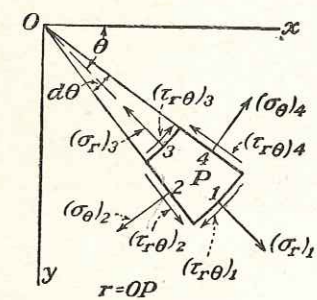


ROZDZIAŁ 4

ZAGADNIENIA DWUWYMIAROWE WE WSPÓLRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH

**25. Równania ogólne we współrzędnych biegunowych.** Przy omawianiu naprężeń w tarczach i pierścieniach kołowych, w prętach zakrzywionych o wąskim przekroju prostokątnym, których oś ma kształt łuku koła itd., wygodnie jest posługiwać się współrzędnymi biegunowymi. Położenie punktu w płaszczyźnie środkowej tarczy określone jest wtedy odległością  $r$  od początku układu  $O$  (rys. 40) i kątem  $\theta$  zawartym między promieniem  $r$  a pewną osią  $Ox$  o ustalonym kierunku, leżącą w rozpatrywanej płaszczyźnie.

Rozważmy obecnie równowagę małego elementu  $1234$  wyciętego z tarczy dwoma przekrojami promieniowymi  $O_1, O_2$ , prostopadłymi do płaszczyzny tarczy i dwiema powierzchniami walcowymi  $3, 4$ , także prostopadłymi do płaszczyzny tarczy. Składową normalną naprężenia w kierunku promieniowym oznaczamy przez  $\sigma_r$ , w kierunku obwodowym przez  $\sigma_\theta$ , składową styczną — przez  $\tau_{r\theta}$ ; każdy z tych symboli przedstawia naprężenie w punkcie  $r, \theta$ , będącym środkiem elementu  $P$ . Z powodu zmienności naprężeń ich wartości w punktach leżących w środku ścianek  $1, 2, 3, 4$  nie są dokładnie równe  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  i oznaczamy je przez  $(\sigma_r)_1$  itd. (rys. 40). Promienie ścianek  $3$  i  $1$  oznaczono przez  $r_3$  i  $r_1$ . Siła promieniowa na ściance  $1$  wynosi  $\sigma_{r1} r_1 d\theta$ , co można wyrazić prościej pisząc  $(\sigma_r)_1 d\theta$  i podobnie siła promieniowa na ściance  $3$  jest



Rys. 40

—  $(\sigma_r)_3 d\theta$ . Siła normalna na ściance  $2$  ma składową skierowaną wzdłuż promienia przechodzącego przez punkt  $P$  o wielkości  $-(\sigma_\theta)_2 (r_1 - r_3) \sin(d\theta/2)$ , co można napisać w postaci  $-(\sigma_\theta)_2 dr(d\theta/2)$ . Odpowiednia składowa siły działającej na ściance  $4$  jest równa  $-(\sigma_\theta)_4 dr(d\theta/2)$ . Siły styczne na ściankach  $2$  i  $4$  dają  $[(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr$ .

Po zsumowaniu sił działających w kierunku promieniowym i uwzględnieniu promieniowej składowej siły masowej  $R$ , odniesionej do jednostki objętości, otrzymujemy równanie równowagi

$$(\sigma_r)_1 d\theta - (\sigma_r)_3 d\theta - (\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2} + [(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4] dr + Rr d\theta dr = 0$$

Po podzieleniu przez  $dr d\theta$  równanie to przyjmuje postać

$$\frac{(\sigma_r)_1 - (\sigma_r)_3}{dr} - \frac{1}{2} [(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_4] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4}{d\theta} + Rr = 0$$

Jeśli teraz wymiary elementu maleją i dążą do zera, to pierwszy wyraz równania ma granicę  $\partial(\sigma_r)/\partial r$ . Drugi przechodzi w  $\sigma_\theta$ , a trzeci przyjmuje wartość  $\partial\tau_{r\theta}/\partial\theta$ . Równanie w kierunku stycznym można wyprowadzić w ten sam sposób. Oba równania przyjmują

ostateczną postać

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$
[37]

Równania powyższe zastępują równania [18], jeśli przy rozwiązywaniu zagadnień dwuwymiarowych posługujemy się współrzędnymi biegunowymi. Gdy nie ma siły masowej  $R$ , równania te spełnić można przyjmując:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)$$
[38]

gdzie  $\Phi$  jest funkcją naprężeń i zależy od  $r$  i  $\theta$ . Można to oczywiście sprawdzić przez proste podstawienie. Sposób wyprowadzenia związków [38] jest następujący.

Aby otrzymać prawidłowy rozkład naprężenia, funkcja ta musi zapewniać spełnienie równania ciągłości odkształceń. We współrzędnych kartezjańskich (patrz par. 16) równanie to ma postać

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0$$
[a]

Musimy to równanie przetransformować do współrzędnych biegunowych. Związki między współrzędnymi biegunowymi i prostokątnymi mają postać

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

i można z nich otrzymać

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Po wykorzystaniu tych związków i po uwzględnieniu, że  $\Phi$  jest funkcją  $r$  i  $\theta$ , znajdujemy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \sin \theta$$

Aby otrzymać drugą pochodną względem  $x$ , trzeba jedynie powtórzyć powyższą operację. Tak więc

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \sin \theta \right) =$$

$$= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$
[b]

W ten sam sposób znajdujemy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} +$$

$$- 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad [c]$$

Po dodaniu [b] i [c] otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad [d]$$

Po uwzględnieniu tożsamości

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

i równania [d], równanie ciągłości odkształceń [a] we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad [39]$$

Spśród wielu rozwiązań tego równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych otrzymujemy rozwiązania zagadnień dwuwymiarowych we współrzędnych biegunowych przy różnych warunkach brzegowych. Kilka przykładów takich zagadnień omówimy w tym rozdziale.

Pierwsze i drugie z wyrażeń [38] wynikają ze związków [b] i [c]. Jeśli wybierzemy dowolny punkt w płaszczyźnie tarczy i poprowadzimy przez niego oś  $x$ , to wtedy  $\theta = 0$ , a  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  w tym szczególnym punkcie są takie same, jak  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$ . Tak więc, z wyrażenia [c], podstawiając  $\theta = 0$ , otrzymamy

$$\sigma_r = \sigma_x = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

Wyrażenie to przedstawia  $\sigma_r$  niezależnie od orientacji osi  $x$ . Podobnie, z wyrażenia [b], podstawiając  $\theta = 0$  dostajemy

$$\sigma_\theta = \sigma_y = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

Trzecie z wyrażeń [38] można otrzymać w podobny sposób, po uprzednim znalezieniu wyrażenia na  $-\partial^2 \Phi / \partial x \partial y$  analogicznie do [b] i [c].

**26. Osowo-symetryczny rozkład naprężenia.** Jeśli rozkład naprężenia jest symetryczny względem osi przechodzącej przez punkt  $O$  i prostopadłej do płaszczyzny  $xy$  (rys. 40), to składowe naprężenia nie zależą od  $\theta$  i są jedynie funkcjami  $r$ . Z symetrii wynika nadto, że musi zniknąć naprężenie styczne  $\tau_{r\theta}$ . Wtedy, z dwóch równań równowagi [37] pozostaje jedynie pierwsze, które w tym przypadku sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad [40]$$

Gdy nie ma siły masowej  $R$  możemy posługiwać się funkcją naprężeń  $\Phi$ . Gdy funkcja ta za-

leży jedynie od  $r$ , to równanie ciągłości odkształceń [39] przybiera postać

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad [41]$$

Równanie to jest równaniem różniczkowym zwyczajnym i można je sprowadzić do liniowego równania różniczkowego ze stałymi współczynnikami drogą wprowadzenia nowej zmiennej  $t$  takiej, że  $r = e^t$ . Postępując w ten sposób, łatwo można otrzymać ogólne rozwiązanie równania [41]. Rozwiązanie to zawiera cztery stałe całkowania, które należy określić z warunków brzegowych. Drogą podstawienia można się przekonać, że

$$\Phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad [42]$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania [41]. Można z niego otrzymać wszystkie rozwiązania zagadnień osiowo-symetrycznych rozkładów naprężenia bez udziału sił masowych. Odpowiednie składowe naprężenia z równań [38] mają postać

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \quad [43]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Gdy w początku układu współrzędnych nie ma otworu, to stałe  $A$  i  $B$  muszą być równe zero, ponieważ składowe naprężenia [43] dążyłyby do nieskończoności przy  $r$  zdążającym do zera. Tak więc dla tarczy bez otworu w początku układu współrzędnych i bez sił masowych, może mieć miejsce tylko jeden przypadek stanu naprężenia symetrycznego względem osi, a mianowicie taki, w którym  $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{const}$ , co odpowiada równomiernemu wszechstronnemu ściskaniu lub rozciąganiu tarczy w jej płaszczyźnie.

Jeśli w początku układu istnieje jakiś otwór, to z wyrażeń [43] można otrzymać rozwiązania różne od równomiernego rozciągania lub ściskania. Np. przy  $B$  równym zero<sup>1)</sup> wyrażenia [43] przyjmują postać

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C \quad [44]$$

Rozwiązanie to można przystosować do opisu rozkładu naprężeń w rurze poddanej równomiernemu ciśnieniu na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej<sup>2)</sup> (rys. 41). Niech  $a$  i  $b$  oznaczają promień wewnętrzny i zewnętrzny rury, a  $p_i$  i  $p_o$  — równomierne ciśnienie wewnętrzne i zewnętrzne. Wtedy warunki brzegowe są następujące:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i; \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o \quad [a]$$

Po podstawieniu do pierwszego ze związków [44], otrzymujemy układ równań służący do

<sup>1)</sup> Dowód, że  $B$  musi być zerem, wynika z rozważań nad przemieszczeniami. Patrz par. 29.

<sup>2)</sup> Rozwiązanie tego zagadnienia podał Lamé: „Leçons sur la théorie de l'élasticité”. Paris 1852.

określenia stałych  $A$  i  $C$

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_i$$

$$\frac{A}{b^2} + 2C = -p_o$$

Wynika stąd, że

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2}$$

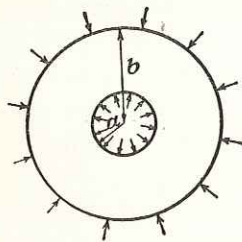
$$2C = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

Po podstawieniu w związki [44] otrzymuje się następujące wyrażenia na składowe naprężenia:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad [45]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2}$$

Interesujące jest stwierdzenie, że suma  $\sigma_r + \sigma_\theta$  jest wielkością stałą w każdym punkcie ścianki rury. Z tego powodu naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  wywołują równomierne rozszerzenie lub skrócenie w kierunku osi rury i przekroje prostopadłe do osi pozostają płaskie. Tak więc odkształcenia wywołane przez naprężenia [45] w elemencie wyciętym z rury przez dwa sąsiednie przekroje prostopadłe do jej osi nie wpływają na odkształcenia sąsiedniego elementu i dlatego poprawne jest założenie, które uczyniliśmy poprzednio, że element znajduje się w płaskim stanie naprężenia.



Rys. 41

W przypadku szczególnym, gdy  $p_o = 0$  i rura poddana jest działaniu jedynie ciśnienia wewnętrznego, związki [45] upraszczają się do postaci

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad [46]$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

Z powyższych równań wynika, że  $\sigma_r$  jest zawsze naprężeniem ściskającym, a  $\sigma_\theta$  — rozciągającym. To ostatnie przyjmuje największą wartość na powierzchni wewnętrznej, gdzie wynosi

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{p_i (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad [47]$$

$(\sigma_\theta)_{\max}$  jest zawsze liczbowo większe od ciśnienia wewnętrznego i dąży do niego, gdy  $b$  wzrasta, ale nigdy nie może zmaleć poniżej  $p_i$ ; bez względu na to, ile materiału doda się na powierzchni

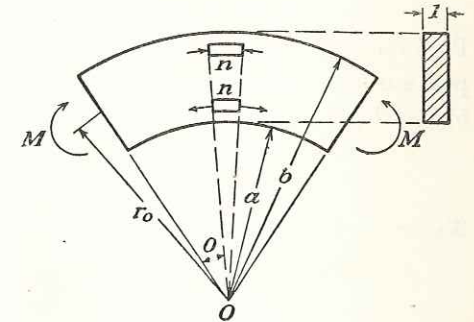
rury. Różne zastosowania równań [46] i [47] przy projektowaniu części maszyn omawiane są zwykle w elementarnych podręcznikach wytrzymałości materiałów<sup>1)</sup>.

Odpowiednie zagadnienie dla przypadku walca z otworem ekscentrycznym rozpatrzone będzie w par. 66. Zostało ono rozwiązane przez *G. B. Jeffery*<sup>2)</sup>. Jeśli promień otworu wynosi  $a$ , promień powierzchni zewnętrznej  $b$ , natomiast odległość między środkami równa się  $e$ , to maksymalna wartość naprężenia, gdy działa tylko ciśnienie wewnętrzne  $p_i$ , które osiąga naprężenie obwodowe na powierzchni wewnętrznej, najcięższej części ścianki dla  $e < \frac{1}{2} a$ , wynosi

$$\sigma = p_i \left[ \frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right]$$

Gdy  $e = 0$ , równanie powyższe pokrywa się z równaniem [47].

**27. Czyste zginanie prętów zakrzywionych.** Rozpatrzmy zakrzywiony pręt o stałym, wąskim przekroju<sup>3)</sup> prostokątnym i osi w kształcie łuku koła, zginany w płaszczyźnie krzywizny



Rys. 42

momentami  $M$  przyłożonymi na jego końcach (rys. 42). Moment zginający w tym przypadku jest stały na całej długości pręta i można oczekiwać, że rozkład naprężeń w każdym przekroju promieniowym jest taki sam, a rozwiązanie tego zagadnienia można otrzymać za pomocą wyrażań [42]. Warunki brzegowe, po oznaczeniu przez  $[a]$  i  $[b]$  wewnętrznego i zewnętrznego promienia oraz po przyjęciu, że szerokość prostokątnego przekroju równa się jednostce, przyjmą postać:

$$(1) \sigma_r = 0 \quad \text{dla} \quad r = a \quad \text{oraz} \quad r = b$$

$$(2) \int_a^b \sigma_\theta dr = 0; \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M \quad [a]$$

$$(3) \tau_{r,\theta} = 0 \quad \text{na} \quad \text{każdym} \quad \text{z} \quad \text{brzegów}$$

Warunek (1) oznacza, że brzeg wypukły i wklęsły nie są obciążone siłami normalnymi. Warunek (2) wskazuje, że naprężenie normalne na końcach dają jedynie moment pary sił  $M$ . Warunek (3) natomiast oznacza, że brzegi wolne są od sił stycznych. Po wykorzystaniu pierwszego ze związków [43] wraz z pierwszym spośród warunków [a] otrzymujemy:

$$\frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \log a) + 2C = 0$$

$$\frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \log b) + 2C = 0 \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Patrz na przykład *S. Timoshenko*: „Strength of Materials”, wyd. 2, str. 236, 1941.

<sup>2)</sup> „Trans. Roy. Soc. (London)”, seria A, t. 221, str. 265, 1921. Patrz także „Brit. Assoc. Advancement Sci. Repts.”, 1921.

<sup>3)</sup> Z ogólnych rozważań nad zagadnieniem dwuwymiarowym w par. 15 wynika, że rozwiązanie otrzymane poniżej słuszne jest także i w drugim przypadku ekstremalnym, gdy wymiar przekroju w kierunku prostopadłym do płaszczyzny krzywizny jest bardzo duży, jak to ma miejsce na przykład w powłoce tunelu, jeśli tylko obciążenie jest stałe na całej jego długości.

Z warunku (2) [a] wynika

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} dr = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_a^b = 0$$

a po podstawieniu zamiast  $\Phi$  jego wartości [42] znajdujemy

$$\left[ \frac{A}{b} + B(b + 2b \log b) + 2Cb \right] - \left[ \frac{A}{a} + B(a + 2a \log a) + 2Ca \right] = 0 \quad [c]$$

Porównując z [b] widzimy, że [c] jest spełnione, a siły na końcach sprowadzają się do pary sił pod warunkiem, że spełniony jest warunek [b]. Aby moment pary sił równał się  $M$ , musi być spełniony warunek

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} r dr = -M \quad [d]$$

Wiedząc, że

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} r dr = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} r \right|_a^b - \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} r \right|_a^b - \left| \Phi \right|_a^b$$

i uwzględniając, że na podstawie [b] jest

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} r \right|_a^b = 0$$

wyznaczamy z [d]

$$\left| \Phi \right|_a^b = M$$

lub po podstawieniu zamiast  $\Phi$  wyrażenia [42]

$$A \log \frac{b}{a} + B(b^2 \log b - a^2 \log a) + C(b^2 - a^2) = M \quad [e]$$

Równanie to łącznie z równaniami [b] wystarcza w zupełności do określenia stałych  $A, B$  i  $C$ . Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log \frac{b}{a}; \quad B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2) \quad [f]$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log b - a^2 \log a)]$$

w których w celu uproszczenia oznaczono

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \log \frac{b}{a} \right)^2 \quad [g]$$

Po podstawieniu wartości stałych [f] w wyrażenia [43] otrzymujemy następujące równania na składowe naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad [48]$$

Powyższe równania określają rozkład naprężeń spełniający wszystkie warunki brzegowe [a] w przypadku czystego zginania i stanowią ściśle rozwiązanie<sup>1)</sup> tego zagadnienia pod warunkiem, że rozkład sił normalnych na końcach określony jest drugim ze związków [48]. Jeśli siły na końcach pręta wywołują moment zginający  $M$ , ale rozłożone są nieco inaczej, to rozkład naprężenia w pobliżu końców będzie się różnił od rozwiązania [48]. Na podstawie zasady *de Saint-Venanta* można stwierdzić, że w dużych odległościach od końców odchylenia od rozwiązania [48] są bardzo małe i mogą być pominięte (np. w odległościach większych, niż wysokość pręta).

Z praktycznego punktu widzenia interesujące jest porównanie rozwiązania [48] z rozwiązaniami elementarnymi, podawanymi zwykle w książkach o wytrzymałości materiałów. Jeśli wysokość pręta  $b - a$  jest mała w porównaniu z promieniem osi środkowej  $(b + a)/2$ , to przyjmuje się zwykle taki sam rozkład naprężenia, jaki ma miejsce w prętach prostych. Jeśli natomiast wysokość ta nie jest mała, to w praktyce przyjmuje się zwykle, że w trakcie zginania przekroje pręta pozostają płaskie, a na podstawie tego założenia można pokazać, że rozkład naprężenia normalnego  $\sigma_\theta$  na powierzchni przekroju zmienia się hiperbolicznie<sup>2)</sup>. We wszystkich przypadkach maksymalne i minimalne wartości naprężenia  $\sigma_\theta$  można przedstawić w postaci

$$\sigma_\theta = m \frac{M}{a^2} \quad [h]$$

Zamieszczona niżej tablica podaje wartości liczbowe współczynnika  $m$ , obliczone za pomocą omówionych dwóch metod elementarnych oraz równania ścisłego [48]<sup>3)</sup>. Z podanej tablicy

WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA  $m$  Z RÓWNIANIA [h]

$\frac{b}{a}$	Liniowy rozkład naprężeń	Hiperboliczny rozkład naprężeń	Rozwiązanie dokładne
1,3	$\pm 66,67$	+72,98    -61,27	+73,05    -61,35
2	$\pm 6,000$	+ 7,725    - 4,863	+ 7,755    - 4,917
3	$\pm 1,500$	+ 2,285    - 1,095	+ 2,292    - 1,130

wynika, że elementarne rozwiązanie oparte na hipotezie płaskiego przekroju daje bardzo dokładne wyniki.

Pokażemy później, że w przypadku czystego zginania przekroje pozostają rzeczywiście płaskie, a rozbieżność między elementarnym i dokładnym rozwiązaniem wynika z faktu, że w rozwiązaniu elementarnym pomija się naprężenie  $\sigma_r$  i przyjmuje się, że włókna podłużne zginanego pręta podlegają prostemu rozciąganiu lub ścisłaniu.

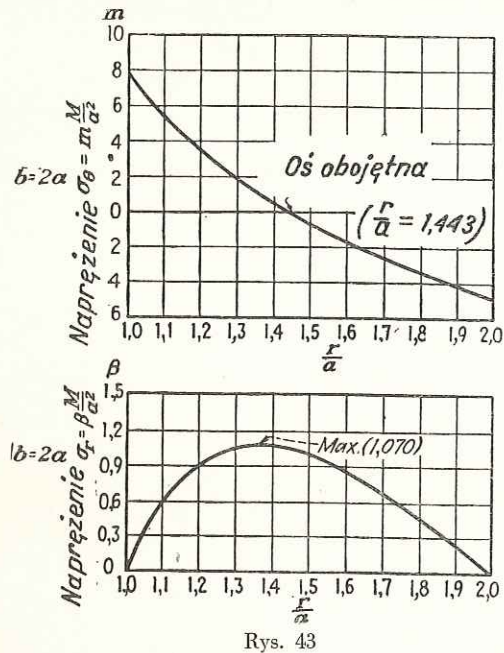
Na podstawie pierwszego ze wzorów [48] można pokazać, że w przypadku takiego kierunku zginania, jaki pokazany jest na rys. 42, naprężenia  $\sigma_r$  są zawsze dodatnie. To samo można

<sup>1)</sup> Rozwiązanie to podał *H. Gołwin*: „Izw. Techn. Inst.“, St. Petersburg, 1881. Praca, opublikowana w języku rosyjskim, była nieznaną w innych językach i to samo zagadnienie rozwiązał później *M. C. Ribière* (Compt. rend., t. 108, 1889 i t. 132, 1901) oraz *L. Prandtl*. Patrz *A. Föppl*: „Vorlesungen über technische Mechanik“, t. 5, str. 72, 1907. Patrz także *A. Timpe*: „Z. Math. Physik“, t. 52, str. 348, 1905.

<sup>2)</sup> Omawianą teorię przybliżoną podał *H. Résal*: „Ann. mines“, str. 617, 1862 oraz *E. Winkler*: „Zivilingenieur“ t. 4, str. 232, 1858; patrz także — jego książka: „Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit“, rozdz. 15, Praga 1867. Dalszego rozwinięcia teorii dokonał *F. Grashof*: „Elastizität und Festigkeit“, str. 251, 1878 i *K. Pearson*: „History of the Theory of Elasticity“, t. 2, str. 422, 1893.

<sup>3)</sup> Wyniki te pochodzą z rozprawy doktorskiej *V. Billewicz*, Univ. Michigan, 1931.

wywnioskować natychmiast z kierunku naprężeń  $\sigma_\theta$  działających na elementy  $n-n$  z rys. 42. Wypadkowe w kierunku radialnym sił obwodowych dążą do rozdzielenia włókien podłużnych i wywołują naprężenie rozciągające w kierunku promienia. Naprężenie to wzrasta w miarę przybliżania się do powierzchni obojętnej i osiąga w jej pobliżu maksimum. To maksimum jest zawsze znacznie mniejsze niż  $\sigma_{\theta \max}$ . Np. dla  $b/a=1,3$ ,  $(\sigma_r)_{\max}=0,060 (\sigma_\theta)_{\max}$ ; dla  $b/a=2$ ,  $(\sigma_r)_{\max}=0,138 (\sigma_\theta)_{\max}$ ; dla  $b/a=3$ ,  $(\sigma_r)_{\max}=0,193 (\sigma_\theta)_{\max}$ . Na rys. 43 podany jest rozkład naprężeń  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_r$  w przypadku  $b/a=2$ . Na rysunku tym spostrzegamy, że punkt odpowiadający maksymalnej wartości  $\sigma_r$  jest nieco przesunięty z osi obojętnej w kierunku środka krzywizny.



28. Składowe odkształcenia we współrzędnych biegunowych. We współrzędnych biegunowych przez  $u$  oznaczamy przemieszczenie w kierunku radialnym, a przez  $v$  w kierunku stycznym. Jeśli  $u$  jest przemieszczeniem radialnym ścianki

$ad$  elementu  $abcd$  (rys. 44), to przemieszczenie promieniowe ścianki  $bc$  wynosi  $u + (\partial u/\partial r) dr$ . Wtedy wydłużenie jednostkowe elementu  $abcd$  w kierunku promienia jest równe

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad [49]$$

Jeśli natomiast chodzi o odkształcenie obwodowe, to należy zauważyć, że zależy ono nie tylko od przemieszczenia  $v$ , lecz także od przemieszczenia promieniowego  $u$ . Przyjmując np., że punkty  $a$  i  $d$  elementu  $abcd$  (rys. 44) doznają jedynie przemieszczenia  $u$ , możemy stwierdzić, że nowa długość łuku  $ad$  jest  $(r+u)d\theta$ , a odkształcenie obwodowe wynosi

$$\frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}$$

Różnica obwodowych przemieszczeń ścianek  $ab$  i  $cd$  elementu  $abcd$  wynosi  $(\partial v/\partial \theta)d\theta$ , a wywołane przemieszczeniem obwodowym  $v$  odkształcenie obwodowe równe jest  $(\partial v/r\partial \theta)$ . Całkowite odkształcenie obwodowe wynosi więc<sup>1)</sup>

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta} \quad [50]$$

<sup>1)</sup> Symbol  $\epsilon_\theta$  użyty w par. 10 miał inne znaczenie.

Przystępujemy obecnie do rozpatrywania odkształcenia postaciowego. Niech  $a'b'c'd'$  oznacza nowe położenie elementu  $abcd$  po odkształceniu (rys. 44). Kąt między kierunkiem  $ad$  i  $a'd'$  wywołany jest przemieszczeniem promieniowym  $u$  i wynosi  $\partial u/r\partial \theta$ . Podobnie, kąt między  $a'b'$  i  $ab$  równa się  $\partial v/\partial r$ . Należy zauważyć, że jedynie część tego kąta (zakreskowana na rysunku) stanowi odkształcenie postaciowe, a druga część, równa  $v/r$ , odpowiada przemieszczeniu kątowemu wywołanemu obrotem elementu  $abcd$  (traktowanego jak ciało sztywne) względem osi przechodzącej przez punkt  $O$ . Z tego powodu całkowita zmiana kąta  $dab$ , stanowiąca odkształcenie postaciowe, wynosi

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad [51]$$

Po podstawieniu wyrażen na składowe odkształcenia [49], [50], [51] do równań Hooke'a<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad [52]$$

otrzymamy układ równań wystarczający do określenia  $u$  i  $v$ .

29. Przeszczenia w przypadkach osiowo-symetrycznych rozkładów naprężenia. Po podstawieniu składowych naprężenia określonych równaniami [43] w pierwsze z równań [52], znajdujemy

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[ \frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B \log r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C \right]$$

Przez całkowanie otrzymujemy

$$u = \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + f(\theta) \quad [a]$$

gdzie  $f(\theta)$  jest jedynie funkcją  $\theta$ . Z drugiego z równań [52], po uwzględnieniu związku [50], znajdujemy

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

skąd po scałkowaniu

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r) \quad [b]$$

gdzie  $f_1(r)$  jest jedynie funkcją  $r$ . Po podstawieniu [a] i [b] do [51] i uwzględnieniu, że  $\gamma_{r\theta}$  równa się zeru (ponieważ  $\tau_{r\theta}$  jest równe zeru), znajdujemy

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0 \quad [c]$$

<sup>1)</sup> Przyjmuje się tutaj, że mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, tzn., że nie istnieje naprężenie  $\sigma_z$  prostopadłe do płaszczyzny tarczy (patrz par. 7).

skład wynika, że

$$f_1(r) = Fr; \quad f(\theta) = H \sin \theta + K \cos \theta \quad [d]$$

gdzie  $F$ ,  $H$  i  $K$  są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków zamocowania pierścienia lub zakrzywionego pręta. Po podstawieniu [d] do [a] i [b], znajdujemy następujące wyrażenia na przemieszczenia<sup>1)</sup>:

$$u = \frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + H \sin \theta + K \cos \theta$$

$$v = \frac{4Br\theta}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta \quad [53]$$

w których wartości stałych  $A$ ,  $B$  i  $C$  należy obliczać osobno dla każdego poszczególnego przypadku. Rozpatrzmy na przykład czyste zginanie. Przyjmujemy, że element promienia w punkcie środkowym przekroju, od którego zaczynamy mierzyć kąt  $\theta$  (rys. 42), jest utwierdzony zupełnie. Wtedy warunki utwierdzenia mają następującą postać:

$$u=0; \quad v=0; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad \text{przy} \quad \theta = 0 \quad \text{oraz} \quad r = r_0 = \frac{a+b}{2}$$

Po zastosowaniu ich do równań [53] otrzymujemy następujący układ równań:

$$\frac{1}{E} \left[ -\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu)Br_0 \log r_0 - B(1+\nu)r_0 + 2C(1-\nu)r_0 \right] + K = 0$$

$$Fr_0 + H = 0$$

$$F = 0$$

z którego wyznacza się stałe całkowania  $F$ ,  $H$  i  $K$ . Z układu tego wynika, że  $F=H=0$ , oraz otrzymujemy przemieszczenie

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad [54]$$

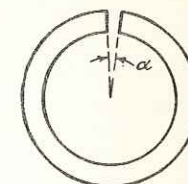
Taka postać równania oznacza, że przemieszczenie dowolnego przekroju składa się z translacji— przesunięcia równoległego—  $K \sin \theta$ , jednakowej dla wszystkich punktów przekroju i z obrotu całego przekroju o kąt  $4B\theta/E$  względem środka krzywizny  $O$  (rys. 42). Widać, że w przypadku czystego zginania, zgodnie z elementarną teorią zginania prętów zakrzywionych, przekroje pozostają płaskie.

Przy omawianiu osiowo-symetrycznego rozkładu naprężeń w pełnym pierścieniu przyjmowaliśmy, że stała  $B$  w rozwiązaniu [43] równa się zeru (par. 26) i w ten sposób dochodziliśmy do rozwiązania zagadnienia *Lamègo*. Obecnie, po otrzymaniu wyrażen na przemieszczenia (równania [53]) widzimy, co pociąga za sobą przyjęcie  $B$  równego zeru. Stałej  $B$  odpowiada przemieszczenie  $v$  o wielkości  $ABr\theta/E$ . Składnik ten jest niejednoznaczny, zmienia bowiem swą wartość gdy  $\theta$  wzrasta o  $2\pi$ , to jest, gdy dochodzimy do danego punktu po obejściu całego pierścienia w koło. Takie *wieloznaczne* wyrażenie w przypadku przemieszczenia

<sup>1)</sup> Równanie [c] spełnione jest jedynie wtedy, gdy całka  $\int f(\theta)d\theta$ , gdzie  $f(\theta)$  wyrażone jest równaniem [d], uwzględniana jest bez stałej całkowania.

jest fizycznie niemożliwe w pierścieniu pełnym i dlatego w tym przypadku, w ogólnym rozwiązaniu [43], trzeba było przyjąć  $B=0$ .

Pełny pierścień jest przykładem ciała wielospójnego, to jest ciała, w którym można dokonać przecięć nie dzielących go na dwie części. Przy określaniu naprężeń w takich ciałach dochodzimy zwykle do wniosku, że warunki brzegowe wyrażone w naprężeniach nie wystarczają do pełnego określenia rozkładu naprężeń i trzeba uwzględnić dodatkowe związki, które zapewniają jednoznaczność przemieszczeń (patrz par. 39).



Rys. 45

Sens fizyczny rozwiązań wieloznacznych wyjaśnia się za pomocą rozważań dotyczących naprężeń wstępnych, które mogą istnieć w ciałach wielospójnych. Jeśli wyciąć z pierścienia element, ograniczony dwoma bliskimi przekrojami (rys. 45), a następnie zespawać lub połączyć w jakikolwiek sposób jego końce, to otrzyma się pierścień, w którym istnieją naprężenia wstępne, to jest naprężenia nie wywołane działaniem sił zewnętrznych. Jeśli  $\alpha$  jest małym kątem określającym wielkość wycięcia, to przemieszczenie obwodowe, konieczne do złączenia końców pierścienia, wynosi

$$v = \alpha r \quad [e]$$

To samo przemieszczenie, otrzymane z równania [54] przez przyjęcie  $\theta=2\pi$ , ma wartość

$$v = 2\pi \frac{4Br}{E} \quad [f]$$

Na podstawie [e] i [f] znajdujemy

$$B = \frac{\alpha E}{8\pi} \quad [g]$$

Stała  $B$ , która wchodzi w skład wieloznacznego składnika równania na przemieszczenie [54], ma obecnie ściśle określoną wartość, zależną od sposobu wywołania naprężeń początkowych. Po podstawieniu [g] do równań [f] par. 27 znajdujemy, że moment zginający, konieczny do połączenia końców rozciętego pierścienia, ma wartość

$$M = -\frac{\alpha E}{8\pi} \frac{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \log \frac{b}{a} \right)^2}{2(b^2 - a^2)} \quad [h]$$

Posługując się tym równaniem, na podstawie rozwiązania [48] dla czystego zginania, można łatwo obliczyć naprężenia początkowe w pierścieniu.

**30. Tarcze wirujące.** Rozkład naprężeń w wirującej tarczy kołowej posiada wielkie znaczenie praktyczne<sup>1)</sup>. Jeśli grubość tarczy jest mała w porównaniu z jej promieniem, to można pominąć zmiany naprężenia promieniowego i obwodowego na grubości<sup>2)</sup> i wtedy zagadnienie rozwiązuje się bardzo łatwo<sup>3)</sup>. W przypadku stałej grubości tarczy można posłużyć się równaniem [40], a siły masowe zastąpić siłami bezwładności<sup>4)</sup>. Wtedy

$$R = \rho \omega^2 r \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Wyczerpujące omówienie tego zagadnienia i jego bibliografię można znaleźć w znanej książce: *A. Stodola: „Dampf- und Gas-Turbinen“*, wyd. 6, str. 312, i 889, 1924.

<sup>2)</sup> Rozwiązanie ściśle dla przypadku tarczy w kształcie spłaszczonej elipsoidy obrotowej podał *C. Chree: „Proc. Roy. Soc.“* (London) t. 58, str. 39, 1895. Pokazał on, że różnica między naprężeniem maksymalnym i minimalnym na osi obrotu stanowi zaledwie 5% wartości maksymalnego naprężenia w tarczy o stałej grubości, wynoszącej 1/8 jej średnicy.

<sup>3)</sup> Bardziej szczegółowe omówienie tego zagadnienia podane będzie dalej (patrz par. 119).

<sup>4)</sup> Ciężar tarczy pomija się.

gdzie  $\rho$  oznacza masę przypadającą na jednostkę objętości materiału tarczy, a  $\omega$  — prędkość kątową tarczy.

Równanie [40] można obecnie napisać w postaci

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad [b]$$

Równanie to jest spełnione, jeśli składowe naprężenia wyrażają się przez funkcję naprężeń w następujący sposób:

$$r\sigma_r = F; \quad \sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2 \quad [c]$$

Składowe odkształcenia, jak wynika ze związków [49] i [50], mają postać

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

Po wyeliminowaniu z nich  $u$ , znajdujemy

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \quad [d]$$

Wyrażając składowe odkształcenia przez składowe naprężenia (związki [52]) i wykorzystując zależności [c], znajdujemy, że funkcja naprężeń  $F$  powinna spełniać następujące równanie

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - F + (3 + \nu) \rho\omega^2 r^3 = 0 \quad [e]$$

Przez podstawienie można sprawdzić, że całka ogólna tego równania ma postać

$$F = Cr + C_1 \frac{1}{r} - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^3 \quad [f]$$

a ze związków [c] wynika, że

$$\sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 r^2 \quad [g]$$

$$\sigma_\theta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2$$

Stałe całkowania  $C$  i  $C_1$  określa się z warunków brzegowych.

W przypadku tarczy pełnej należy przyjąć  $C_1 = 0$ , ponieważ w przeciwnym razie naprężenia [g] przyjmowałyby w środku tarczy wartości nieskończone. Stałą  $C$  określa się z warunku na obwodzie tarczy  $r = b$ . Jeśli obwód wolny jest od sił, to mamy

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2 = 0$$

skąd

$$C = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2$$

a składowe naprężenia, na podstawie równań [g], przyjmują wartości:

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 (b^2 - r^2) \quad [55]$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2 - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho\omega^2 r^2$$

Największe naprężenia występują na osi tarczy, gdzie wynoszą

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 b^2 \quad [56]$$

W przypadku tarczy ze *współśrodkowym otworem kołowym* o promieniu  $a$ , stałe całkowania występujące w równaniach [g] otrzymuje się z warunków na brzegu wewnętrznym i zewnętrznym. Jeśli brzegi te wolne są od sił, to

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0; \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \quad [h]$$

skąd wynika, że

$$C = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 (b^2 + a^2); \quad C_1 = -\frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 a^2 b^2$$

Po podstawieniu w związki [g]

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 \left( b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \quad [57]$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 \left( b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right)$$

Naprężenia promieniowe osiągają swe maksimum przy  $r = \sqrt{ab}$ , gdzie

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3 + \nu}{8} \rho\omega^2 (b - a)^2 \quad [58]$$

Maksimum naprężenia stycznego występuje na wewnętrznym brzegu, gdzie

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3 + \nu}{4} \rho\omega^2 \left( b^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} a^2 \right) \quad [59]$$

Można się przekonać, że naprężenie to jest większe niż  $(\sigma_r)_{\max}$ .

Gdy promień otworu  $a$  dąży do zera, to wartość maksymalna naprężenia obwodowego staje się dwukrotnie większa od wartości tego naprężenia w przypadku pełnej tarczy [56]; znaczy to, że przez wykonanie otworu osiowego w wirującej tarczy powiększamy dwukrotnie maksymalną wartość naprężenia. Takie zjawisko *koncentracji naprężeń przy otworze* omówimy później (patrz par. 32).

Przyjmując, że naprężenia nie ulegają zmianie na grubości tarczy, można powyższy sposób obliczenia zastosować do tarczy o zmiennej grubości. Jeśli  $h$  oznacza grubość tarczy zmienia-

jąca się wraz z promieniem  $r$ , to równanie równowagi elementu pokazanego na rys. 40 ma postać

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad [k]$$

Równanie to jest spełnione, jeśli przyjmąć

$$hr\sigma_r = F; \quad h\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} + h\rho\omega^2 r^2$$

gdzie  $F$  ponownie oznacza funkcję naprężeń.

Po podstawieniu tych naprężeń do równania ciągłości odkształceń [d] dochodzimy do następującego równania, które określa funkcję naprężeń  $F$ :

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - F + (3 + \nu) \rho\omega^2 hr^3 - \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} - \nu F \right) = 0$$

W ten sposób zagadnienie znalezienia rozkładu naprężenia w tarczy o zmiennej grubości sprowadza się do rozwiązania równania [l]. W przypadku szczególnym, gdy grubość tarczy zmienia się według zależności

$$h = Cr^n \quad [m]$$

w której  $C$  jest stałą, a  $n$  pewną liczbą, równanie [l] można łatwo scałkować<sup>1)</sup>. Rozwiązanie ogólne ma postać

$$F = mr^{n+3} + Ar^\alpha + Br^\beta$$

gdzie

$$m = - \frac{(3 + \nu) \rho\omega^2 C}{(\nu n + 3n + 8)}$$

podczas gdy  $\alpha$  i  $\beta$  są pierwiastkami równania kwadratowego

$$x^2 - nx + \nu n - 1 = 0$$

a  $A$  i  $B$  — stałymi całkowania, które określa się z warunków brzegowych.

Dobre przybliżenie dla rzeczywistych kształtów tarcz wirujących można otrzymać przez podział tarczy na części i dobranie w sposób przybliżony do każdej z nich krzywej typu [m]<sup>2)</sup>. Przypadek tarczy stożkowej omawiany był przez kilku autorów<sup>3)</sup>. Bardzo często prowadzi się obliczenia drogą podziału tarczy na kilka części, z których każdą traktuje się jako tarczę o stałej grubości<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Przypadek ten badał *Stodola*, loc. cit. Patrz także *H. Holzer*: „Z. ges. Turbinenwesen“, 1915.

<sup>2)</sup> Patrz *M. Grübler*: V. D. I., t. 50, str. 535, 1906.

<sup>3)</sup> Patrz *A. Fischer*: „Z. oesterr. Ing. Arch. Vereins“, t. 74, str. 46, 1922; *H. M. Martin*: „Engineering“, t. 115, str. 1, 1923; *B. Hodkinson*: „Engineering“, t. 116, str. 274, 1923; *K. E. Bisshopp*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), t. 11, str. A-1, 1944.

<sup>4)</sup> Metodę tę podał *M. Donath*; patrz jego książka „Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe“, Berlin, 1912. Opis metody w języku angielskim podał *H. Hearle* w „Engineering“, t. 106, str. 131, 1918. Metodę tę rozwinął dalej *R. Grammel*: „Dinglers Polytech. J.“ t. 338, str. 217, 1923. Przypadek, w którym materiał nie podlega prawu Hooke'a, badał *M. Grübler*, V. D. I. t. 41, str. 860, 1897 oraz t. 44, str. 1157, 1900. Patrz także *H. Schlechtweg*: „Z. angew. Math. Mech.“, t. 11, str. 17, 1931 oraz „Ing.-Archiv“, t. 2, str. 212, 1931.

**31. Zginanie zakrzywionego pręta siłą przyłożoną na końcu<sup>1)</sup>.** Zaczniemy od prostego przypadku pokazanego na rys. 46. Pręt o wąskim, prostokątnym przekroju i osi w kształcie łuku koła obciążony jest siłą  $P$  przyłożoną na górnym końcu w kierunku promienia a utwierdzony na drugim końcu. Moment zginający w każdym przekroju  $mn$  jest proporcjonalny do  $\sin \theta$ , a naprężenie normalne  $\sigma_\theta$ , zgodnie z elementarną teorią zginania zakrzywionych prętów, jest proporcjonalne do momentu zginającego. Przyjmijmy, że założenie to jest słuszne także w przypadku ścisłego rozwiązania, co potwierdzą dalsze wyniki. Tak więc, funkcja naprężeń  $\Phi$ , spełniająca równanie

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad [a]$$

na podstawie drugiego ze związków [38] powinna być proporcjonalna do  $\sin \theta$ . Przyjęcie funkcji

$$\Phi = f(r) \sin \theta \quad [b]$$

i podstawienie jej do równania [a] pozwala stwierdzić, że funkcja  $f(r)$  musi spełniać następujące zwyczajne równanie różniczkowe:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0 \quad [c]$$

Równanie to można przekształcić w liniowe równanie różniczkowe ze stałymi współczynnikami (patrz par. 26), a jego całka ogólna ma postać

$$f(r) = Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + Dr \log r \quad [d]$$

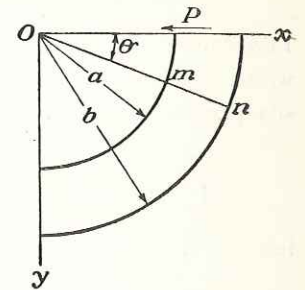
Stałe całkowania  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  określimy z warunków brzegowych. Po podstawieniu rozwiązania [d] do wyrażenia na funkcję naprężeń [b] i wykorzystaniu ogólnych równań [38], znajdziemy następujące wyrażenia na składowe naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \left( 2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \left( 6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = - \left( 2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad [60]$$

Z warunków, że wewnętrzny i zewnętrzny brzeg zakrzywionego pręta (rys. 46) jest wolny od sił zewnętrznych, wynika, że

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{dla } r = a \quad \text{i dla } r = b$$

<sup>1)</sup> *H. Golwin*, loc. cit.



Rys. 46



lub na podstawie [60]

$$2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} = 0 \quad [e]$$

$$2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} = 0$$

Pozostały warunek oznacza, że suma sił stycznych rozłożonych na górnym końcu pręta powinna być równa sile  $P$ . Przymiując, że szerokość przekroju jest jednostkowa lub że  $P$  jest siłą przypadającą na jednostkę grubości zakrzywionej tarczy, otrzymujemy dla  $\theta=0$

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) dr = \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_b^a = \left| Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D \log r \right|_b^a = P$$

lub

$$-A(b^2 - a^2) + B \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 b^2} - D \log \frac{b}{a} = P \quad [f]$$

Z [e] i [f] znajdujemy

$$A = \frac{P}{2N}; \quad B = -\frac{Pa^2 b^2}{2N}; \quad D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2) \quad [g]$$

gdzie

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a}$$

Po podstawieniu wartości stałych całkowania [g] do równań [60] otrzymujemy wyrażenia na składowe naprężenia. Dla górnego końca pręta ( $\theta=0$ ) znajdujemy

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left[ r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2 + b^2) \right] \quad [h]$$

Dla dolnego końca ( $\theta=\pi/2$ )

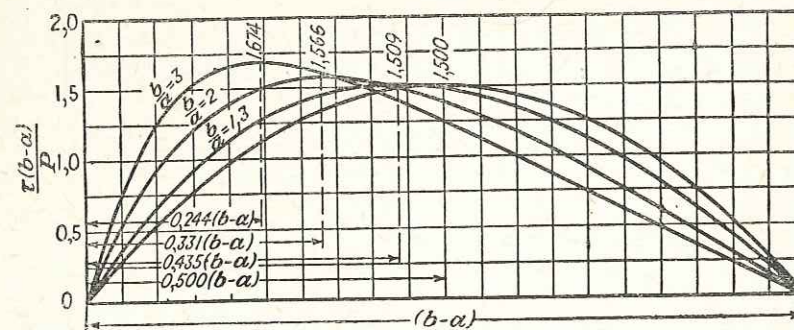
$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N} \left[ 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right] \quad [k]$$

Równania [60] przedstawiają ściśle rozwiązanie zagadnienia jedynie wtedy, gdy siły zewnętrzne na końcach zakrzywionego pręta rozłożone są w sposób określony zależnościami [h] i [k]. Dla każdego innego rozkładu sił rozkład naprężenia w pobliżu końców będzie różny od [60], ale w dużych odległościach od końców rozwiązanie to będzie słuszne na podstawie zasady *de Saint-Venanta*. Obliczenia pokazują, że prosta teoria oparta na założeniu, że w trakcie zginania przekroje pozostają płaskie, daje ponownie zupełnie zadowalające wyniki.

Na rys. 47 pokazano rozkłady naprężenia stycznego  $\tau_{r\theta}$  w przekroju końcowym  $\theta=0$  (w przypadkach:  $b=3a$ ,  $2a$  oraz  $1,3a$ ). Odcięte są odległościami od brzegu wewnętrznego  $r=a$ . Rzędne odpowiadają numerycznym wartościom mnożników, przez które należy mnożyć średnią wartość naprężenia stycznego  $P/(b-a)$ , aby otrzymać naprężenia styczne w rozwa-

żanym punkcie. Wartość tego mnożnika równa 1,5 odpowiada maksymalnej wartości naprężenia stycznego w prostej belce prostokątnej, zmieniającego się według zależności parabolicznej. Z wykresów wynika, że gdy wysokość przekroju jest mała, rozkład naprężeń stycznych zbliża się do rozkładu parabolicznego. Dla takich proporcji, jakie mają zwykle miejsce w łukach



Rys. 47

i sklepieniach, można przyjąć z dostateczną dokładnością paraboliczny rozkład naprężenia stycznego, podobnie jak w prostych belkach prostokątnych.

Rozważmy obecnie przemieszczenia wywołane siłą  $P$  (rys. 46). Wykorzystanie związków [49] ÷ [52] i przyjęcie składowych naprężeń w postaci [60] pozwala nam znaleźć

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{E} \left[ 2Ar(1-3\nu) - \frac{2B}{r^3}(1+\nu) + \frac{D}{r}(1-\nu) \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\epsilon_\theta - u \quad [l]$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

Z pierwszego z tych równań otrzymuje się przez całkowanie

$$u = \frac{\sin \theta}{E} \left[ Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu) \log r \right] + f(\theta) \quad [m]$$

gdzie  $f(\theta)$  jest jedynie funkcją  $\theta$ . Po podstawieniu [m] wraz z wyrażeniem dla  $\epsilon_\theta$  do drugiego z równań [l] i po scałkowaniu, znajdujemy

$$v = -\frac{\cos \theta}{E} \left[ Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D \log r(1-\nu) + D(1-\nu) \right] - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad [n]$$

gdzie  $F(r)$  jest jedynie funkcją  $r$ . Obecnie, podstawiając [m] i [n] do trzeciego z równań [l], dochodzimy do równania

$$\int f(\theta) d\theta + f'(\theta) + rF'(r) - F(r) = -\frac{4D \cos \theta}{E}$$

Równanie to spełnimy przez przyjęcie

$$F(r) = Hr; \quad f(\theta) = -\frac{2D}{E} \theta \cos \theta + K \sin \theta + L \cos \theta \quad [p]$$

gdzie  $H$ ,  $K$  i  $L$  są dowolnymi stałymi, które należy wyznaczyć z warunków zamocowania. Składowe przemieszczenia, na podstawie [m] i [n], są wobec tego równe:

$$u = -\frac{2D}{E}\theta \cos \theta + \frac{\sin \theta}{E} \left[ D(1-\nu) \log r + A(1-3\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right] + K \sin \theta + L \cos \theta$$

$$v = \frac{2D}{E}\theta \sin \theta - \frac{\cos \theta}{E} \left[ A(5+\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} - D(1-\nu) \log r \right] +$$

$$+ \frac{D(1+\nu)}{E} \cos \theta + K \cos \theta - L \sin \theta + Hr \quad [q]$$

Ugięcie promieniowe górnego końca pręta otrzymuje się przez podstawienie  $\theta=0$  w wyrażeniu na  $u$ . W wyniku tego

$$(u)_{\theta=0} = L \quad [r]$$

Stałą  $L$  wyznacza się z warunku utwierdzenia zupełnego końca pręta (rys. 46). Dla  $\theta=\pi/2$  mamy  $v=0$  i  $\partial v/\partial r=0$ , a stąd, na podstawie drugiego z równań [q],

$$H = 0; \quad L = \frac{D\pi}{E} \quad [s]$$

Po wykorzystaniu [g], ugięcie górnego końca jest tym samym równe

$$(u)_{\theta=0} = \frac{D\pi}{E} = -\frac{P\pi(a^2+b^2)}{E \left[ (a^2-b^2) + (a^2+b^2) \log \frac{b}{a} \right]} \quad [61]$$

Zastosowanie tego równania podamy później. Gdy  $b$  jest bliskie  $a$  i wysokość pręta  $h=b-a$  jest mała w porównaniu z  $a$ , możemy posłużyć się rozwinięciem

$$\log \frac{b}{a} = \log \left( 1 + \frac{h}{a} \right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} - \dots$$

Po podstawieniu w [61] i pominięciu składników małych wyższego rzędu, otrzymujemy

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{3\pi a^3 P}{Eh^3}$$

Równanie to nie różni się od równania otrzymanego na podstawie teorii elementarnej<sup>1)</sup>.

Przyjmując funkcję naprężeń w postaci

$$\Phi = f(r) \cos \theta$$

i postępując jak poprzednio, dojdziemy do rozwiązania przypadku, w którym na górny koniec pręta działa siła pionowa i moment pary sił (rys. 46). Odejmując od tego rozwiązania stan naprężeń wywołany momentem pary sił (patrz par. 27), otrzymamy naprężenia wywołane siłą pionową, przyłożoną na górnym końcu pręta. Mając rozwiązanie dla obciążenia poziomego i pionowego, możemy przez superpozycję otrzymać rozwiązanie dla dowolnie nachylonej siły.

<sup>1)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Strength of Materials“, t. 2, par. 13, 1941.

W powyższych rozważaniach zawsze przyjmowaliśmy, że spełnione są równania [e], a brzegi kołowe wolne są od sił. Przez przyjęcie prawych stron w wyrażeniach [e] różnych od zera otrzymamy przypadek, w którym na powierzchniach kołowych pręta występują siły normalne i styczne proporcjonalne do  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ . Kombinacja takich rozwiązań z rozwiązaniami otrzymanymi poprzednio (proste zginanie i zginanie siłą przyłożoną na końcu) pozwala przybliżyć się do warunków, jakie wystąpią przy obciążeniach sklepień przykrytych piaskiem lub ziemią<sup>1)</sup>.

### 32. Wpływ otworów kołowych na rozkład naprężeń w tarczach.

Rys. 48 przedstawia tarczę poddaną równomiernemu rozciąganiu o wielkości  $S$  w kierunku  $x$ . Jeśli w środku tarczy wykonać mały otwór kołowy, to rozkład naprężeń w jego okolicy zmieni się, ale na podstawie zasady *de Saint-Venanta* możemy stwierdzić, że zmiany te można pominąć w odległościach dużych w porównaniu z promieniem otworu  $a$ .

Rozważmy część tarczy zawartą wewnątrz współśrodkowego koła o promieniu  $b$ , dużym w porównaniu z  $a$ . Naprężenia na obwodzie koła o promieniu  $b$  są praktycznie takie same, jak w tarczy bez otworu i tym samym określają je równania

$$(\sigma_r)_{r=b} = S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta) \quad [a]$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta$$

Siły te, działając wokół brzegu zewnętrznego pierścienia o promieniu wewnętrznym  $r=a$  i zewnętrznym  $r=b$ , wywołują w tym pierścieniu rozkład naprężeń, który można uważać za złożony z dwóch części. Pierwsza część odpowiada stałej składowej  $\frac{1}{2}S$  siły zewnętrznej i wywołane jej działaniem naprężenia można obliczyć za pomocą związków [45] par. 26. Pozostała część obciążenia, złożona z sił normalnych  $\frac{1}{2}S \cos 2\theta$  i stycznych  $-\frac{1}{2}S \sin 2\theta$ , wywołuje naprężenie, które można wyznaczyć za pomocą funkcji naprężeń przyjętej w postaci

$$\Phi = f(r) \cos 2\theta \quad [b]$$

Podstawiając ją do równania ciągłości odkształceń

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

dochodzimy do równania różniczkowego zwyczajnego

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

które określa funkcję  $f(r)$ . Całką ogólną tego równania jest

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D$$

<sup>1)</sup> Kilka przykładów tego rodzaju omawiał Golwin, loc. cit. oraz Ribière, loc. cit. i Compt. rend. ,t. 132, str. 315, 1901.

a funkcja naprężeń ma wobec tego postać

$$\Phi = \left( Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad [c]$$

Odpowiednie składowe naprężenia otrzymujemy na podstawie równań [38]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = - \left( 2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \left( 2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \left( 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad [d]$$

Stałe całkowania wyznacza się obecnie z warunków [a] na brzegu zewnętrznym i z warunku, że brzeg otworu jest wolny od sił zewnętrznych. Warunki te dają

$$\begin{aligned} 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} &= -\frac{1}{2}S \\ 2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} &= 0 \\ 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} &= -\frac{1}{2}S \\ 2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} &= 0 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tych równań i założeniu, że  $a/b=0$ , co znaczy, że tarcza rozciąga się w nieskończoność, otrzymujemy

$$A = -\frac{S}{4}; \quad B = 0; \quad C = -\frac{a^4}{4}S; \quad D = \frac{a^2}{2}S$$

Po wstawieniu powyższych stałych do związków [d] i dodaniu naprężeń wywołanych równomiernym rozciąganiem  $\frac{1}{2}S$ , działającym na brzeg zewnętrzny, obliczonym ze związków [45], znajdujemy<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad [62]$$

<sup>1)</sup> Powyższe rozwiązanie otrzymał prof. G. Kirsch; patrz V. D. I., t. 42, 1898. Prawidłowość tego rozwiązania została potwierdzona wielokrotnie przez pomiary odkształceń oraz za pomocą metod elastoptycznych (por. rozdz. 5 i książki cytowane w par. 42).

Jeśli  $r$  jest bardzo duże, to  $\sigma_r$  i  $\tau_{r\theta}$  zблиżają się do wartości określonych równaniami [a]. Na brzegu otworu  $r=a$  mamy

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \quad \sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta$$

Można zauważyć, że  $\sigma_\theta$  jest największe, gdy  $\theta=\pi/2$  lub  $\theta=3\pi/2$ , to jest w punktach  $m$  i  $n$  (rys. 48), położonych na średnicy prostopadłej do kierunku rozciągania. W punktach tych  $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$ . Jest to maksymalne naprężenie rozciągające i ma trzykrotnie większą wartość od równomiernego naprężenia rozciągającego  $S$ , przyłożonego na końcach tarczy.

W punktach  $p$  i  $q$ , dla których odpowiednia wartość  $\theta$  równa się  $\pi$  i  $0$

$$\sigma_\theta = -S$$

co oznacza, że w punktach tych w kierunku stycznym działa naprężenie ściskające.

W przekroju tarczy przechodzącym przez środek otworu i prostopadłym do osi  $x$ , na podstawie równań [62] przy  $\theta=\pi/2$ , mamy

$$\tau_{r\theta} = 0; \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right)$$

Widzimy, że wpływ otworu ma ściśle *lokalny charakter* i, w miarę wzrostu  $r$ , naprężenia  $\sigma_\theta$  zdążają bardzo szybko do wartości  $S$ . Rozkład tych naprężeń przedstawia na rysunku obszar zakreskowany. Lokalny charakter naprężeń wokół otworu usprawiedliwia stosowanie rozwiązania [e], otrzymanego dla nieskończonej tarczy, do tarczy o skończonej szerokości. Jeśli szerokość tarczy nie jest mniejsza niż czterokrotna szerokość otworu, to błąd rozwiązania [62] przy obliczaniu  $(\sigma_\theta)_{\max}$ , nie przekracza 6%<sup>1)</sup>.

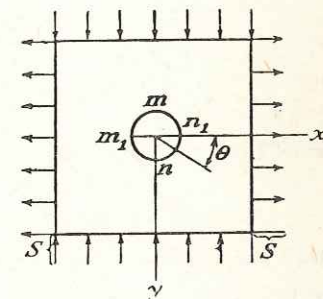
Jeśli mamy rozwiązanie [d] odpowiadające jednokierunkowemu rozciąganiu lub ściskaniu, to łatwo można otrzymać przez superpozycję rozwiązanie, odpowiadające rozciąganiu lub ściskaniu w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Na przykład dla naprężeń rozciągających  $S$  działających w dwóch prostopadłych kierunkach, otrzymujemy na brzegu otworu naprężenie rozciągające  $\sigma_\theta=2S$  (patrz par. 30). Przez przyjęcie w kierunku  $x$  naprężenia rozciągającego  $S$  (rys. 49), a w kierunku  $y$  naprężenia ściskającego  $-S$ , otrzymujemy przypadek czystego ściskania. Naprężenie obwodowe na brzegu otworu, na podstawie równań [62], jest równe

$$\sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta - [S - 2S \cos (2\theta - \pi)]$$

Dla  $\theta=\pi/2$  lub  $\theta=3\pi/2$ , to znaczy w punktach  $n$  i  $m$ , znajdujemy  $\sigma_\theta=4S$ . Dla  $\theta=0$  lub  $\theta=\pi$ , to znaczy w punktach  $n_1$  i  $m_1$ , jest  $\sigma_\theta=-4S$ . Tak więc, w przypadku dużej tarczy poddanej czystemu ścinaniu maksymalna wartość naprężenia obwodowego na brzegu otworu jest czterokrotnie większa niż przyłożona wartość naprężeń stycznych.

Tak duża *koncentracja naprężeń*, która powstaje na brzegu otworu, ma wielkie znaczenie praktyczne. Jako przykład można podać otwory w pokładzie okrętu. Przy zginaniu kadłuba

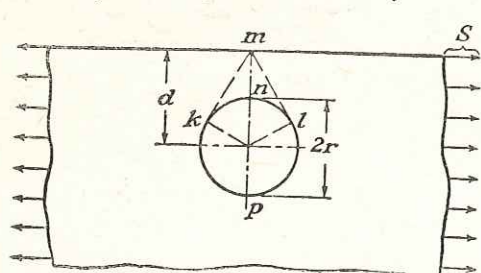
<sup>1)</sup> Por. S. Timoshenko: „Bull. Polytech. Inst.“ Kiew, 1907.  $S$  należy przyjąć równe obciążeniu podzielonemu przez powierzchnię krawędzi płyty (bez potrącenia otworu).



Rys. 49

okrętu pokłady podlegają ścisaniu lub rozciąganiu, a na brzegach otworów powstają duże koncentracje naprężeń. Pod wpływem okresowych zmian naprężenia powodowanych przez fale, zmęczenie metalu w obszarach przeciążonych doprowadzić może w końcu do pęknięć<sup>1)</sup> zmęczeniowych.

Często staje się konieczne zmniejszenie koncentracji naprężenia w okolicach otworów takich, jak otwory włazowe w skrzydłach i kadłubach samolotów. Można tego dokonać przez



Rys. 50

zagięcie brzegu otworu<sup>2)</sup> lub wzmocnienie go pierścieniem<sup>3)</sup>. Trudności analityczne zostały rozwiązane w ten sposób, że do obliczenia posłużono się taką metodą, jaką stosuje się przy zwykłym otworze, a wyniki sprawdzono za pomocą pomiarów tensometrycznych<sup>3)</sup>.

Przypadek otworu kołowego, znajdującego się w pobliżu prostego brzegu półnieskończonej tarczy, poddanej równomiernemu rozciąganiu w kierunku równoległym do tego brzegu, badał G. B. Jeffery<sup>4)</sup>. Poprawne wyniki i porównanie z wynikami badań elastooptycznych (por. rozdz. 5) podał kilkanaście lat później R. D. Mindlin<sup>5)</sup>. Naprężenia na brzegu otworu, w punkcie n najbliższym brzegu tarczy, stają się wielokrotnie większe od stałego naprężenia rozciągającego, gdy tylko  $mn$  jest małe w porównaniu ze średnicą  $np$ .

G. B. Jeffery badał także przypadek, gdy brzeg otworu poddany jest równomiernemu ciśnieniu wewnętrznemu  $p_i$ . Zagadnienie to posiada znaczenie praktyczne, gdyż dotyczy naprężeń w okolicy otworu nitowego, w który pod ciśnieniem wprowadza się gorący, uplastyczniony nit. Jeśli otwór znajduje się w znacznej odległości od prostego brzegu tarczy, naprężenia na jego brzegu, na podstawie związku [46] par. 26, wynoszą

$$\sigma_\theta = p_i; \quad \sigma_r = -p_i$$

Jeśli natomiast otwór znajduje się blisko brzegu, to naprężenia obwodowe nie są już stałe na brzegu otworu. W punktach k i l naprężenia obwodowe przybierają wartość maksymalną

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p_i \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2} \quad [63]$$

Naprężenie to porównamy z naprężeniem rozciągającym na brzegu płyty w punkcie m

$$\sigma_\theta = \frac{4p_i r^2}{d^2 - r^2} \quad [64]$$

Dla  $d = r\sqrt{3}$ , oba wyrażenia mają tę samą wartość. Jeśli  $d$  jest większe, to maksymalne naprężenie występuje na brzegu otworu, a jeśli  $d$  jest mniejsze, to maksymalne naprężenie występuje w punkcie m.

<sup>1)</sup> Patrz T. L. Wilson: „The S. S. Leviathan, Damage, Repairs and Strength Analysis“; praca była przedstawiona na posiedzeniu the American Society of Naval Architects and Marine Engineers, listopad 1930.

<sup>2)</sup> Patrz S. Timoshenko: „J. Franklin Inst.“, t. 197, str. 505, 1924; także S. Timoshenko: „Strength of Materials“, wyd. 2, t. 2 str. 317.

<sup>3)</sup> S. Levy, A. E. Mc Pherson and F. C. Smith: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), t. 15, str. 160, 1948. W podanej pracy można znaleźć odnośniki do pracy wcześniejszej.

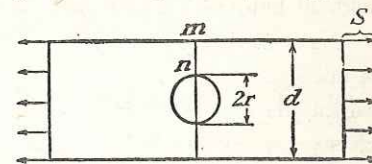
<sup>4)</sup> Trans. Roy. Soc. (London), seria A, t. 221, str. 265, 1921.

<sup>5)</sup> Proc. Soc. Expl. Stress Analysis, t. 5, str. 56, 1948.

Przypadek tarczy o skończonej szerokości z otworem na osi symetrii (rys. 51) omawiał R. C. J. Howland<sup>1)</sup>. Znalazł on np., że dla  $2r = \frac{1}{2}d$ ,  $\sigma_\theta = 4,3S$  w punkcie n, a w punkcie m

$$\sigma_\theta = 0,75S$$

Metodą wykorzystaną w tym paragrafie do badania naprężeń w okolicy małego otworu kołowego można się posłużyć w przypadku tarczy poddanej czystemu zginaniu<sup>2)</sup>. Przypadki takie jak: szereg otworów kołowych w tarczy nieskończonej<sup>3)</sup>, <sup>4)</sup>, <sup>5)</sup>, szereg otworów w pasmie tarczowym<sup>5)</sup>, <sup>6)</sup> i w tarczy<sup>5)</sup> półnieskończonej oraz pierścieni otworów w tarczy<sup>7)</sup> (poddanej wszechstronnemu ścisaniu), były już rozważane przez szereg badaczy. Hengst obmyślił metodę, która znalazła zastosowanie w przypadku kwadratowej tarczy<sup>8)</sup> poddanej wszechstronnemu, równomiernemu rozciąganiu oraz tarczy poddanej ścinaniu<sup>9)</sup>, z otworem zwykłym lub wzmocnionym.



Rys. 51

Otrzymano rozwiązania: dla nieskończonej tarczy z otworem kołowym obciążonym siłami na brzegu<sup>10)</sup>, podobnego zagadnienia dla pasma<sup>11)</sup>, oraz dla szeregu otworów położonych równolegle i w pobliżu prostej krawędzi półnieskończonej tarczy<sup>12)</sup> (szew nitowy).

Jeśli w nieskończonej tarczy poddanej rozciąganiu  $S$  jest otwór eliptyczny, którego jedna z osi jest równoległa do kierunku rozciągania, to naprężenia na końcach osi prostopadłej do kierunku rozciągania przedstawione są równaniem

$$\sigma = S \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad [65]$$

gdzie  $2a$  jest osią elipsy prostopadłą do kierunku rozciągania, a  $2b$  — drugą osią. To i inne zagadnienia dotyczące elips, hiperbol i dwóch kół omówione są w rozdz. 7, gdzie podana jest także literatura.

Bardzo wydłużony otwór (duża wartość stosunku  $a/b$ ), prostopadły do kierunku rozciągania, wywołuje dużą koncentrację naprężeń<sup>13)</sup>. To wyjaśnia, dlaczego pęknięcia poprzeczne do kierunku działania sił mają tendencję do wydłużania się. Temu powiększaniu się można

<sup>1)</sup> R. C. J. Howland: Trans. Roy. Soc. (London), seria A, t. 229, str. 49, 1930.

<sup>2)</sup> Z. Tuzi: „Phil. Mag.“, luty 1930, str. 210; także: „Sci. Papers Inst. Phys. Chem. Research.“ (Tokyo), t. 9, str. 65, 1928. Podobne zagadnienie dla otworu eliptycznego rozwiązał wcześniej K. Wolf: „Z. tech. Physik“, 1922; str. 160. Otwór kołowy w pasmie tarczowym omawiał R. C. J. Howland i A. C. Stevenson: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, t. 232, str. 155, 1933. Dowód zbieżności rozwiązań w postaci szeregow podał R. C. Knight: „Quart. J. Math.“, Oxford series, t. 5, str. 255, 1934.

<sup>3)</sup> M. Sadowsky: „Z. angew. Math. Mech.“, t. 3, str. 107, 1928.

<sup>4)</sup> R. C. J. Howland: „Proc. Roy. Soc.“ (London), seria A, t. 148, str. 471, 1935.

<sup>5)</sup> K. J. Schulz: „Proc. Nederl. Akad. van Wetenschappen“, t. 45, strony 233, 341, 457 oraz 524, 1942, t. 48, str. 282 i 292, 1945.

<sup>6)</sup> C. B. Ling, P. S. Wang i K. S. Jing: Tech. Rept. No. 9, „Bur. Aeronaut. Research.“, Chengtu, Chiny, styczeń 1944.

<sup>7)</sup> C. B. Ling i P. S. Wang: Tech. Rept. No. 6, ibid., czerwiec 1943.

<sup>8)</sup> H. Hengst: „Z. angew. Math. Mech.“, t. 13, str. 44, 1933.

<sup>9)</sup> C. K. Wang: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), t. 13, str. A-77, 1946.

<sup>10)</sup> W. G. Bickley: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, t. 227, str. 383, 1928.

<sup>11)</sup> R. C. Knight: „Phil. Mag.“, seria 7, t. 19, str. 517, 1935.

<sup>12)</sup> C. B. Ling i M. C. Hsu: Tech. Rept. No. 16, „Bur. Aeronaut. Research.“, Chengtu, Chiny, luty, 1945.

<sup>13)</sup> Zagadnienie dotyczące wąskiej szczeliny omawiał: M. Sadowsky: „Z. angew. Math. Mech.“, t. 10, str. 77, 1930.

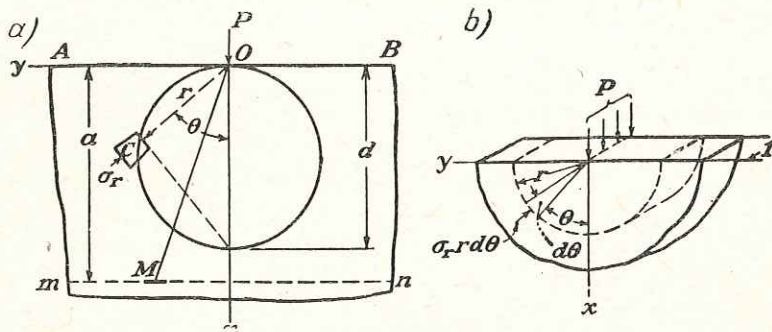
zapobiec przez wywiercenie otworów na końcach pęknięć, co dzięki zmniejszeniu krzywizny zmniejsza także koncentrację naprężeń.

Gdy otwór jest wypełniony materiałem nieodkształcalnym albo takim, którego stałe sprężyste są inne, niż stałe materiału tarczy (płaski stan naprężenia) lub bryły (płaski stan odkształcenia), to mówimy o zagadnieniu sztywnej lub sprężystej *inkluzji*. Zagadnienie to zostało rozwiązane w przypadku inkluzji kołowej<sup>1)</sup> i eliptycznej<sup>2)</sup>. Wyniki dla doskonale sztywnej inkluzji kołowej uzyskały potwierdzenie na drodze elastooptycznej<sup>3)</sup> (patrz rozdz. 5).

Naprężenia dane równaniami [62], odpowiadające zagadnieniu przedstawionemu na rys. 48, są takie same w przypadku płaskiego stanu odkształcenia, jak i naprężenia. Jednakże w przypadku płaskiego stanu odkształcenia na płaszczyznach końcowych, równoległych do płaszczyzny  $xy$ , muszą istnieć naprężenia osiowe

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

po to, aby utrzymać odkształcenia  $\varepsilon_z$  równe zero. Usunięcie tych naprężeń z płaszczyzn końcowych da w wyniku swobodne końce, ale wywołany tym nowy stan naprężenia nie ma już



Rys. 52

charakteru dwuwymiarowego (płaskiego stanu odkształcenia lub naprężenia). Jeśli średnica otworu jest mała w porównaniu z odległością między końcami, to zaburzenia ograniczą się do sąsiedztwa końców. Jednak gdy średnica otworu i odległości między końcami są wielkościami tego samego rzędu, zagadnienie musi być rozpatrywane jako trójwymiarowe. Badania tego rodzaju<sup>4)</sup> pokazują, że  $\sigma_\theta$  pozostaje największą składową naprężenia, a jej wartość jest bardzo bliska wartości otrzymanej na podstawie rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego.

**33. Siła skupiona działająca na prostej krawędzi tarczy.** Rozpatrzmy obecnie działanie siły skupionej, przyłożonej na poziomym, prostym brzegu  $AB$  tarczy półnieskończonej (rys. 52a). Siła  $P$ , prostopadła do brzegu, rozłożona jest równomiernie na całej grubości tarczy w sposób pokazany na rys. 52b. Przyjmuje się, że tarcza ma grubość jednostkową, a więc  $P$  jest obciążeniem na jednostkę grubości.

<sup>1)</sup> K. Sezawa i G. Nishimura: „Rept. Aeronaut. Research. Inst.“, Tokyo Imp. Univ., t. 6, nr 25, 1931; J. N. Goodier: „Trans. A. S. M. E.“ t. 55, str. 39, 1933.

<sup>2)</sup> L. H. Donnell: „Theodore von Kármán Anniversary Volume“, str. 293, Pasadena, 1941.

<sup>3)</sup> W. E. Thibodeau i L. A. Wood: „J. Research. Natl. Bur. Standards“, t. 20, str. 393, 1938.

<sup>4)</sup> A. E. Green: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, t. 193, str. 229, 1948; E. Sternberg i M. Sadowsky: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), t. 16, str. 27, 1949.

Rozkład naprężeń w tym przypadku jest bardzo prosty i nazywamy go *prostym rozkładem promieniowym*<sup>1)</sup>. Dowolny element  $C$ , położony w odległości  $r$  od punktu przyłożenia obciążenia, poddany jest w kierunku promieniowym prostemu ścisłaniu o wielkości

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad [66]$$

Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  i styczne  $\tau_{r\theta}$  równe są zero. Łatwo sprawdzić, że te wartości naprężenia spełniają równania równowagi [37] (patrz par. 25).

Warunki brzegowe są także spełnione, ponieważ  $\sigma_\theta$  i  $\tau_{r\theta}$  są równe zero wzdłuż brzegu tarczy, który jest wolny od sił zewnętrznych z wyjątkiem punktu przyłożenia obciążenia ( $r=0$ ). W punkcie tym  $\sigma_r$  dąży do nieskończoności. Wypadkowa sił działających na powierzchnię walcową o promieniu  $r$  (rys. 52b) musi równoważyć siłę  $P$ . Otrzymuje się to przez zsumowanie pionowych składowych  $\sigma_r r d\theta \cos \theta$  działających na każdy z elementów  $r d\theta$  powierzchni walcowej. W ten sposób znajdujemy

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

Aby dowieść, że rozwiązanie [66] jest ścisłym rozwiązaniem zagadnienia, należy rozważyć nadto równanie ciągłości odkształceń [39]. Przytoczone rozwiązanie wynika z funkcji naprężeń

$$\Phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad [a]$$

Możemy to sprawdzić posługując się związkami [38]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \quad [66']$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

które są zgodne z rozwiązaniem [66]. Przez podstawienie funkcji [a] do równania [39] możemy łatwo pokazać, że równanie to jest spełnione. Tak więc równanie [a] przedstawia poprawną funkcję naprężeń, równania [66'] — poprawny rozkład naprężeń.

Przyjmując okrąg o dowolnej średnicy  $d$ , styczny do osi  $y$  w punkcie  $O$ , ze środkiem położonym na osi  $x$ , mamy w dowolnym punkcie  $C$  okręgu  $d \cos \theta = r$ . Na tej podstawie, z równania [66] wynika, że

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$$

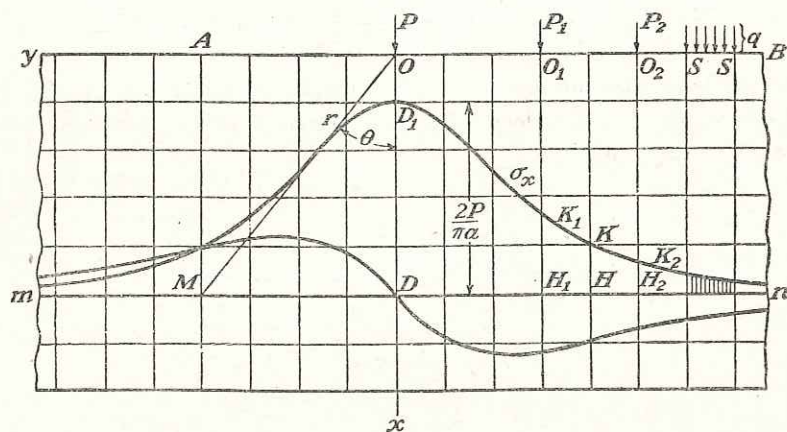
<sup>1)</sup> Rozwiązanie tego zagadnienia zostało otrzymane z rozwiązania trójwymiarowego zagadnienia *Boussinesqa* (str. 362) przez *Flamanta*: „Compt. rend.“, t. 114, str. 1465, 1892, Paris. Rozszerzenie rozwiązania na przypadek siły nachylonej pochodzi od *Boussinesqa*: „Compt. rend.“, t. 114, str. 1510, 1892. Patrz także pracę *J. H. Michella*: „Proc. London Math. Soc.“, t. 32, str. 35, 1900. Eksperymentalne badania, które dały podstawę do powyższych opracowań teoretycznych przeprowadził *Carus Wilson*: „Phil. Mag.“, t. 32, str. 481, 1891.

co oznacza, że naprężenia we wszystkich punktach okręgu mają tę samą wartość — z wyjątkiem punktu  $O$ , który jest punktem przyłożenia obciążenia.

Składową normalną i styczną naprężenia w dowolnym punkcie  $M$  płaszczyzny  $mn$ , położonej w odległości  $a$  od brzegu (rys. 52a), można obliczyć rozpatrując proste ściskanie w kierunku promieniowym:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P \cos^3 \theta}{\pi r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P \sin \theta \cos^2 \theta}{\pi r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta\end{aligned}\quad [67]$$

Na rys. 53 przedstawiony jest graficznie rozkład naprężeń  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$  wzdłuż poziomej płaszczyzny  $mn$ .



Rys. 53

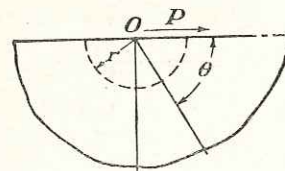
Naprężenie w punkcie przyłożenia obciążenia jest teoretycznie nieskończone, ponieważ siła o wielkości skończonej działa tu na nieskończoną małą powierzchnię. W praktyce, w punkcie przyłożenia obciążenia zachodzi zawsze pełne uplastycznienie materiału, a w wyniku tego obciążenie rozkłada się na skończoną powierzchnię. Wyobraźmy sobie, że ta część materiału, która uległa odkształceniu plastycznemu, została wycięta wzdłuż powierzchni walcowej o małym promieniu  $r$  (rys. 52b). Wtedy do pozostałej części tarczy można stosować równania teorii sprężystości.

Analogiczne rozwiązanie można otrzymać dla siły  $P$  przyłożonej stycznie do prostej krawędzi tarczy półnieskończonej (rys. 54). Składowe naprężenia oblicza się w tym przypadku znów z równań [66'], inaczej tylko mierzy się kąt  $\theta$ . Należy go mianowicie mierzyć od kierunku działania siły, tak jak to jest pokazane na rysunku. Obliczenie wypadkowej sił działających na powierzchnię walcową, zaznaczoną na rys. 54 linią przerywaną, daje

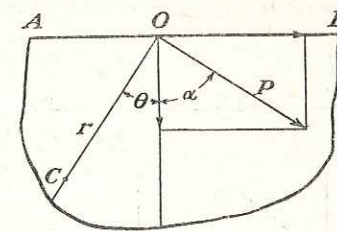
$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = -P$$

Wypadkowa ta równoważy siłę zewnętrzną  $P$ , a ponieważ składowe naprężenia  $\tau_{\theta}$  i  $\sigma_\theta$  na krawędzi tarczy równają się zero, to rozwiązanie [66'] spełnia również warunki brzegowe.

Znając rozwiązania dla pionowych i poziomych sił skupionych, można przez superpozycję otrzymać rozwiązania dla sił nachylonych pod kątem do krawędzi. Po rozłożeniu pochyłonej



Rys. 54



Rys. 55

siły  $P$  na dwie składowe: pionową  $P \cos \alpha$  i poziomą  $P \sin \alpha$  (rys. 55) i po wykorzystaniu związków [66'], naprężenie w kierunku promieniowym w dowolnym punkcie  $C$  wyraża się za pomocą równania

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r} \left[ P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta) \quad [68]$$

Tak więc związki [66'] można wykorzystać przy każdym kierunku działania siły pod warunkiem, że kąt  $\theta$  mierzy się od kierunku siły.

Funkcję naprężeń [a] można wykorzystać i w tym przypadku, gdy na płaski brzeg tarczy działa moment pary sił (rys. 56a). Łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy siła rozciągająca  $P$  przyłożona jest w punkcie  $O_1$  w odległości  $a$  od początku układu współrzędnych, to funkcję naprężeń można otrzymać z funkcji  $\Phi$  określonej równaniem [a], jeśli zamienić zmienne  $r$  i  $\theta$  na  $y$  i  $x$ , podstawiając jednocześnie  $y + a$  zamiast  $y$  oraz  $-P$  zamiast  $P$ . Ta nowa funkcja w połączeniu z funkcją wyjściową  $\Phi$  pozwala otrzymać funkcję naprężeń odpowiadającą działaniu dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił, przyłożonych w punkcie  $O$  i  $O_1$  w postaci

$$-\Phi(x, y + a) + \Phi(x, y)$$

Gdy  $a$  jest bardzo małe, funkcja ta dąży do wartości

$$\Phi_1 = -a \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad [b]$$

Podstawienie [a] do równania [b] i uwzględnienie (patrz par. 25), że

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

pozwała nam znaleźć

$$\Phi_1 = \frac{Pa}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{M}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \quad [69]$$

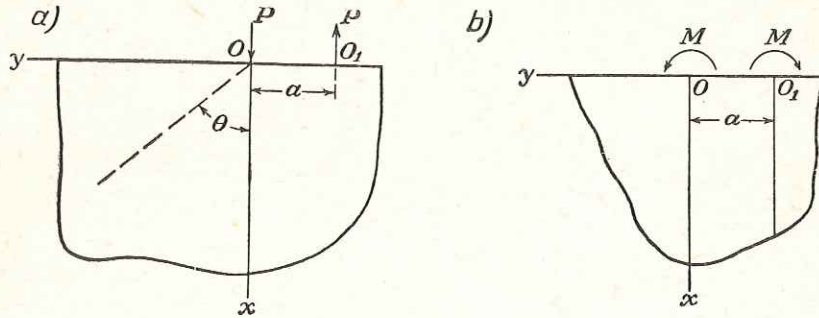
gdzie  $M$  jest momentem przyłożonej pary sił.

Rozumując w ten sam sposób przekonamy się, że przez zróżniczkowanie  $\Phi_1$  otrzymamy funkcję naprężeń  $\Phi_2$ , która opisuje przypadek dwóch równych i przeciwnie skierowanych momentów  $M$  umieszczonych w bliskich sobie punktach  $O$  i  $O_1$  (rys. 56b). Znajdujemy wobec tego, że

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \left( \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} a \right) = -a \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\frac{2Ma}{\pi r} \cos^3 \theta \quad [70]$$

Jeśli kierunki momentów ulegają zmianie, należy jedynie zmienić znak funkcji [70].

Szereg funkcji naprężeń otrzymanych przez kolejne różniczkowanie znalazł zastosowanie do rozwiązania zadania koncentracji naprężenia, wywołanej półkolistym wycięciem w półnieskończonej tarczy, poddanej rozciąganiu równoległemu do brzegu<sup>1)</sup>. Maksymalne naprężenie rozciągające nieco więcej niż trzykrotnie przewyższa naprężenia rozciągające panujące daleko od wycięcia. Było także badane pasmo z półkolistymi wycięciami na każdym brzegu<sup>2)</sup>. Współczynnik koncentracji naprężenia (stosunek naprężenia maksymalnego do średniego w najwęższym miejscu) spada poniżej trzech i dąży do jedności, gdy wycięcia stają się większe.



Rys. 56

Znając rozkład naprężeń można otrzymać odpowiadające mu przemieszczenia posługując się jak zwykle związkami [49] do [51]. W przypadku siły normalnej do prostego brzegu (rys. 52) mamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi E r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P \cos \theta}{\pi E r} \\ \gamma_{r\theta} &= r \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \end{aligned} \quad [c]$$

Po scałkowaniu pierwszego z tych równań znajdujemy

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r + f(\theta) \quad [d]$$

gdzie  $f(\theta)$  oznacza funkcję jedynie  $\theta$ . Po podstawieniu w drugi ze związków [c] i po scałkowaniu otrzymamy

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad [e]$$

Tutaj  $F(r)$  jest funkcją tylko  $r$ . Podstawiając [d] i [e] do trzeciego z równań [c] stwierdzamy, że

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta; \quad F(r) = Cr \quad [f]$$

gdzie  $A$ ,  $B$  i  $C$  są stałymi całkowania, które wyznaczymy z warunków utwierdzenia brzegu. Wyrażenia na przemieszczenia na podstawie [d] i [e] mają postać

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta \\ v &= \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \\ &\quad + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr \end{aligned} \quad [g]$$

Załóżmy, że utwierdzenie tarczy półnieskończonej (rys. 52) nie pozwala na poziome przemieszczenia punktów tarczy, leżących na osi  $x$ . Wtedy  $v = 0$ , gdyż  $\theta = 0$ , a z drugiego równania [g] wynika, że  $A = 0$  i  $C = 0$ . Przy tych wartościach stałych całkowania, przemieszczenia punktów położonych na osi  $x$  wyrażają się

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \log r + B \quad [h]$$

W celu wyznaczenia stałej  $B$  przyjmijmy, że punkt położony na osi  $x$  w odległości  $d$  od początku układu współrzędnych nie doznaje przemieszczenia pionowego. Wtedy na podstawie równania [h] znajdujemy

$$B = \frac{2P}{\pi E} \log d$$

Ponieważ mamy już wszystkie wartości stałych całkowania, możemy z równań [g] wyliczyć przemieszczenia dowolnego punktu półnieskończonej tarczy.

Rozważmy na przykład przemieszczenia punktów prostego brzegu tarczy. Przemieszczenia poziome otrzymujemy podstawiając w pierwszym z równań [g]  $\theta = \pm \pi/2$ :

$$(u)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}; \quad (u)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad [71]$$

Tak więc krawędź tarczy po obu stronach początku układu współrzędnych doznaje w każdym punkcie stałego przemieszczenia (równanie [71]) w kierunku początku układu. Możemy przyjąć, że przemieszczenie takie jest fizycznie możliwe, jeśli tylko pamiętamy, że w okolicy punktu przyłożenia obciążenia  $P$  usunęliśmy część materiału ograniczoną powierzchnią walcową o małym promieniu (rys. 52b), której równania teorii sprężystości nie dotyczą. W rzeczywistości materiał ten ulega odkształceniu plastycznemu i powstaje przemieszczenie [71] na krawędzi tarczy. Przemieszczenia pionowe brzegu otrzymuje się z drugiego z równań [g]. Pamiętając, że  $v$  jest dodatnie, gdy skierowane jest w kierunku wzrostu kąta  $\theta$  oraz mając na uwadze symetrię odkształcenia względem osi  $x$ , znajdujemy, że skierowane ku dołowi przemieszczenia pionowe w odległości  $r$  od początku układu wyrażają się za pomocą równania

$$(v)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = - (v)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \quad [72]$$

W początku układu równanie to daje przemieszczenie nieskończenie duże. Aby usunąć tę trudność, musimy przyjąć, że część materiału otaczającego punkt przyłożenia siły została

<sup>1)</sup> F. G. Maunsell: „Phil. Mag.” t. 21, str. 765, 1936.

<sup>2)</sup> C. B. Ling: „J. Applied Mechanics” (Trans. A. S. M. E.), t. 14, str. A-275, 1947; H. Poritsky, H. D. Snively i C. R. Wylie: ibid., t. 6, str. A-63, 1939.

wycięta wzdłuż powierzchni cylindrycznej o małym promieniu. W innych punktach brzegu równanie [72] daje skończone wartości przemieszczeń.

**34. Dowolne obciążenie pionowe przyłożone na prostej krawędzi tarczy.** Krzywe  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$  z poprzedniego paragrafu (rys. 53) mogą być wykorzystane jako *linie wpływowe*. Przyjmijmy, że krzywe te odpowiadają naprężeniom wywołanym siłą  $P$  równą jednostce obciążenia, np. 1 kG. Wtedy naprężenie  $\sigma_x$  w dowolnym punkcie  $H$  płaszczyzny  $mn$ , wywołane dowolną inną wartością siły  $P$ , otrzymuje się przez pomnożenie rzędnej  $\overline{HK}$  przez  $P$ .

Jeśli na prosty poziomy brzeg  $AB$  działa kilka sił  $P, P_1, P_2, \dots$ , to naprężenie na poziomej płaszczyźnie  $mn$  otrzymuje się przez superpozycję naprężeń wywołanych przez każdą z tych sił oddzielnie. Dla każdej z nich krzywe  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$  otrzymuje się przez przesunięcie krzywych  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$ , wykreślonych dla  $P$ , do nowych początków układów współrzędnych  $O_1, O_2, \dots$ . Z tego wynika, że na przykład naprężenie  $\sigma_x$ , wywołane siłą  $P_1$  w punkcie  $D$  płaszczyzny  $mn$ , otrzymuje się z pomnożenia rzędnej  $\overline{H_1 K_1}$  przez  $P_1$ . W ten sam sposób naprężenie  $\sigma_x$  w punkcie  $D$  wywołane siłą  $P_2$  wynosi  $\overline{H_2 K_2} \cdot P_2$ , itd. Całkowite naprężenia normalne w punkcie  $D$  płaszczyzny  $mn$ , wywołane działaniem sił  $P, P_1, P_2, \dots$ , równe jest sumie

$$\sigma_x = \overline{DD_1} \cdot P + \overline{H_1 K_1} \cdot P_1 + \overline{H_2 K_2} \cdot P_2 + \dots$$

Dlatego właśnie krzywa  $\sigma_x$ , pokazana na rys. 53, jest linią wpływową naprężenia normalnego  $\sigma_x$  w punkcie  $D$ . W ten sam sposób stwierdzamy, że krzywa  $\tau_{xy}$  jest linią wpływową naprężenia stycznego w punkcie  $D$  płaszczyzny  $mn$ .

Mając te krzywe, można łatwo otrzymać składowe naprężenia w punkcie  $D$  dla dowolnego rodzaju pionowego obciążenia przyłożonego na brzegu tarczy  $AB$ .

Jeśli na odcinku  $\overline{ss}$  krawędzi działa, zamiast sił skupionych, równomiernie rozłożone obciążenie ciągłe o intensywności  $q$  (rys. 53), to wywołane tym obciążeniem naprężenie normalne  $\sigma_x$  w punkcie  $D$  otrzymuje się mnożąc przez  $q$  odpowiednią *powierzchnię wpływową* (zakreskowaną na rys. 53).

Zagadnienie równomiernie rozłożonego obciążenia można rozwiązać w inny sposób, posługując się funkcją naprężeń w postaci

$$\Phi = Ar^2 \theta \quad [a]$$

gdzie  $A$  oznacza pewną stałą. Odpowiednie składowe naprężenia są

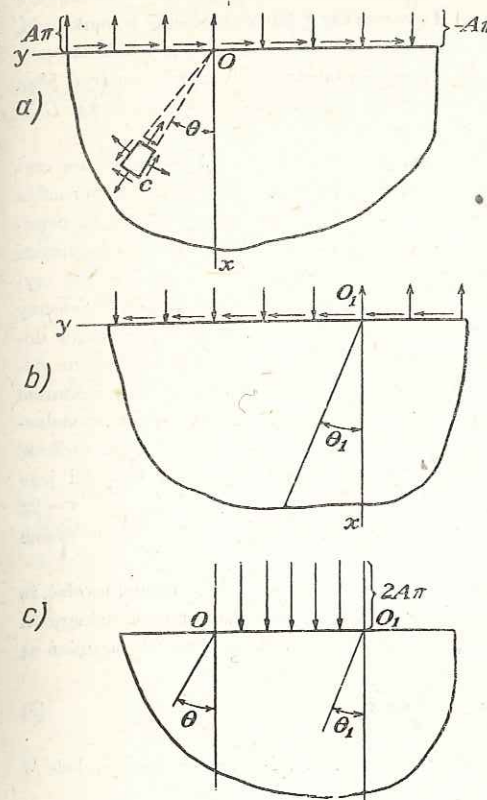
$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 2A\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 2A\theta \quad [b]$$

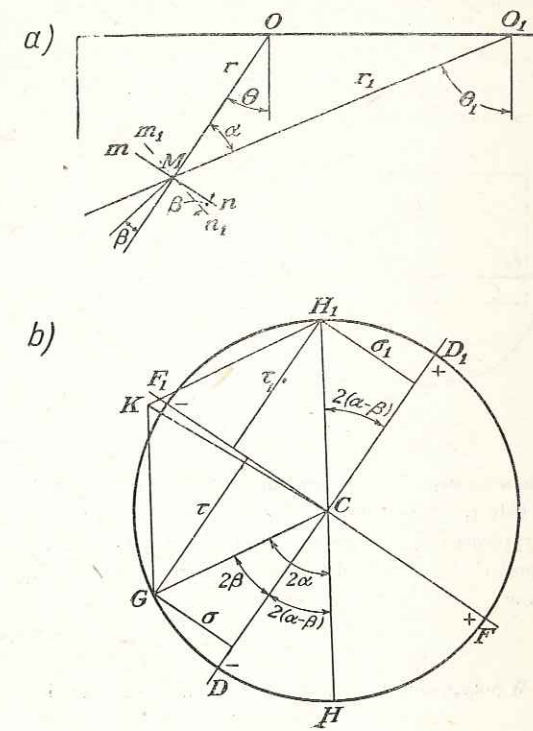
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = -A$$

Stosując to rozwiązanie do półnieskończonej tarczy, dochodzimy do rozkładu obciążenia pokazanego na rys. 57a. Na prostą krawędź tarczy działa równomiernie rozłożone obciążenie styczne o intensywności  $-A$  i równomiernie rozłożone obciążenie normalne o intensywności  $A\pi$ , zmieniające w sposób nagły znak w początku układu współrzędnych  $O$ . Takie kierunki sił wynikają z dodatnich zwrotów składowych naprężenia działającego na element  $C$ .

Przez przesunięcie początku układu do  $O_1$  i zmianę znaku funkcji naprężeń  $\Phi$ , dochodzimy do rozkładu obciążenia pokazanego na rys. 57b. Po dodaniu obu przypadków obciążenia (rys. 57a i 57b) otrzymujemy przypadek równomiernie rozłożonego obciążenia na odcinku



Rys. 57



Rys. 58

krawędzi półnieskończonej tarczy (rys. 57c). Aby otrzymać żadaną intensywność równomiernie rozłożonego obciążenia  $q$ , przyjmujemy

$$2A\pi = q; \quad A = \frac{1}{2\pi} q$$

a wtedy naprężenie w dowolnym punkcie tarczy określi funkcja naprężeń<sup>1)</sup> w postaci

$$\Phi = A(r^2 \theta - r_1^2 \theta_1) = \frac{q}{2\pi} (r^2 \theta - r_1^2 \theta_1) \quad [c]$$

Z równań [b] widać, że pierwszy składnik funkcji naprężeń [c] prowadzi w każdym punkcie  $M$  tarczy (rys. 58a) do wszechstronnego równomiernego rozciągania  $2A\theta$  i równomiernego czystego ścinania  $-A$ . Podobnie drugi składnik funkcji opisuje równomierne ściskanie  $-2A\theta_1$  i czyste ścinanie o wielkości  $A$ . Równomierne ściskanie i rozciąganie można po prostu dodać i w wyniku otrzymamy równomierne ściskanie

$$p = 2A\theta - 2A\theta_1 = 2A(\theta - \theta_1) = -2A\alpha \quad [d]$$

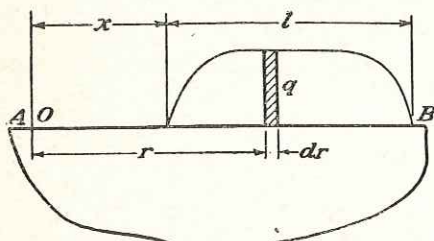
$\alpha$  oznacza tu kąt między promieniami  $r$  i  $r_1$ .

<sup>1)</sup> Rozwiązanie to podał J. H. Michell, Proc. London Math. Soc. t. 34, str. 134, 1902.



Przy superpozycji dwóch stanów czystego ścinania, z których pierwszy odpowiada kierunkowi  $r$ , a drugi — kierunkowi  $r_1$ , posłużymy się kołem Mohra (rys. 58b), które w tym przypadku ma promień równy liczbowej wartości czystego ścinania  $A$ . Przez przyjęcie dwu średnic, z których pierwsza  $DD_1$  jest równoległa do  $r$ , a druga  $FF_1$  prostopadła do  $r$ , jako osi  $r$  i  $\sigma$ , otrzymujemy układ, w którym możemy przedstawić czyste ścinanie odpowiadające kierunkowi  $r$ . Promienie  $CF$  i  $CF_1$  przedstawiają naprężenia  $A$  i  $-A$  i tworzą kąt  $\pi/4$  z promieniem  $r$  w punkcie  $M$ , odpowiadającym prostemu ścinaniu, a promień  $CD$  przedstawia naprężenie styczne  $-A$  na płaszczyźnie  $mn$  prostopadłej do  $r$ . W przypadku płaszczyzny  $m_1n_1$  nachylonej pod kątem  $\beta$  względem płaszczyzny  $mn$  (rys. 58a), składowe naprężenia opisane są przez współrzędne  $\sigma$  i  $\tau$  punktu  $G$  położonego na kole i tworzącego kąt  $GCD$  równy  $2\beta$ .

Tym samym kołem można się posłużyć także wtedy, gdy rozważamy składowe naprężenia spowodowane czystym ścinaniem w kierunku  $r_1$  (patrz par. 9). Rozważamy ponownie płaszczyznę  $m_1n_1$  i zauważamy, że normalna do niej tworzy kąt  $\alpha - \beta$  z kierunkiem  $r_1$  (rys. 58a), co powoduje, że składowe naprężenia opisane są współrzędnymi punktu  $H$  leżącego na kole. Mając na uwadze znak czystego ścinania odpowiadającego kierunkowi  $r_1$ , musimy zmienić znaki składowych naprężenia i w ten sposób dochodzimy do punktu  $H_1$  na naszym kole. Całkowite naprężenie na płaszczyźnie  $m_1n_1$  określone jest wektorem  $CK$ , którego składowe równają się naprężeniu normalnemu  $-(\sigma + \sigma_1)$  i stycznemu  $\tau_1 - \tau$ . Wektor  $CK$  ma wielkość niezależną od wartości kąta  $\beta$ , ponieważ długości jego składowych  $CH_1$  i  $CG$  oraz kąt między nimi zawarty  $\pi - 2\alpha$  nie zależą od  $\beta$ . Tak więc, po dodaniu do siebie dwóch



Rys. 59

stanów czystego ścinania, otrzymaliśmy ponownie czyste ścinanie (patrz par. 9).

Gdy  $\tau_1 - \tau = 0$ , to kąt  $\beta$  określa kierunek jednego z naprężeń głównych w punkcie  $M$ . Z rysunku widać, że  $\tau$  i  $\tau_1$  równają się sobie liczbowo jeśli  $2\beta = 2(\alpha - \beta)$ , skąd otrzymuje się  $\beta = \alpha/2$ . Wynika stąd wniosek, że kierunki naprężeń głównych są dwusiecznymi kątów zawartych między promieniami  $r$  i  $r_1$ . Wielkości tych naprężeń są równe

$$\pm 2\sigma = \pm 2A \sin 2\beta = \pm 2A \sin \alpha \quad [e]$$

W połączeniu z równomiernym ściskaniem [d] znajdujemy całkowitą wartość naprężenia głównego w punkcie  $M$

$$-2A(\alpha + \sin \alpha); \quad -2A(\alpha - \sin \alpha) \quad [f]$$

Ponieważ kąt  $\alpha$ , oparty na łuku dowolnego koła poprowadzonego przez punkty  $O$  i  $O_1$  jest stały, to i naprężenia główne [f] pozostają stałe na całym okręgu tego koła. Na brzegu, kąt  $\alpha$  między punktami  $O$  i  $O_1$  (rys. 58a) równy jest  $\pi$  i na podstawie [f] znajdujemy, że oba naprężenia główne równają się  $-2\pi A = -q$ . Dla pozostałych części brzegu  $\alpha$  równa się zeru i oba naprężenia główne są także równe zeru.

Z tego wynika, że jeśli dowolne obciążenie ciągle (rys. 59) uważać za złożone z dużej liczby obciążeń o różnej intensywności, działających na krótkich odcinkach brzegu, to naprężenie poziome  $\sigma_x$  pod obciążeniem elementarnym (jak to pokazano na rys. 59) zależy tylko od niego i

$$\sigma_x = \sigma_y = -q \quad [g]$$

wzdłuż całego brzegu.

Kilka innych przypadków rozkładu obciążenia na prostym brzegu tarczy półnieskończonej omawiał S. D. Ca-rothers<sup>1)</sup> i M. Sadowsky<sup>2)</sup>. Inny sposób rozwiązania tego zagadnienia omówiony będzie później (patrz par. 41).

Ugięcia krawędzi tarczy dla dowolnego rozkładu obciążenia można znaleźć przy pomocy związku [72], wyprowadzonego dla przypadku siły skupionej. Jeśli  $q$  jest intensywnością

piónowego obciążenia (rys. 59), to ugięcie w punkcie  $O$  w odległości  $r$  od zakreskowanego elementu obciążenia  $q dr$ , wynosi na podstawie wzoru (72)

$$v_{0, \frac{1}{2}} = \frac{2q}{\pi E} \log \frac{d}{r} dr - \frac{(1+\nu)q}{\pi E} dr$$

a ugięcie całkowite w punkcie  $O$  wyraża się całkami

$$v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_x^{l+x} q \log \frac{d}{r} dr - \frac{1+\nu}{\pi E} \int_x^{l+x} q dr \quad [h]$$

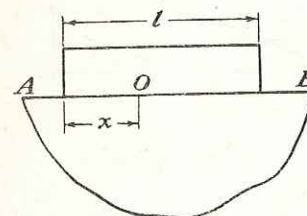
W przypadku gdy  $q = \text{const}$ , znajdujemy

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[ (l+x) \log \frac{d}{l+x} - x \log \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql \quad [i]$$

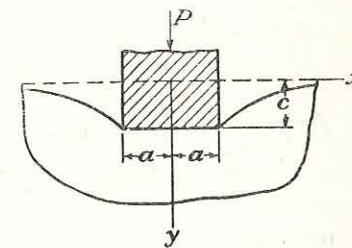
W ten sam sposób dla punktu znajdującego się pod obciążeniem (rys. 60) mamy

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[ (l-x) \log \frac{d}{l-x} + x \log \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\nu}{\pi E} ql \quad [j]$$

Równanie [h] może być wykorzystane również w tym przypadku, gdy dane jest ugięcie brzegu, a poszukujemy rozkładu obciążenia  $q$ . Przyjmując na przykład, że ugięcie obciążonej części



Rys. 60



Rys. 61

prostego brzegu (rys. 61) jest stałe, można pokazać, że rozkład ciśnienia na tym odcinku opisany jest związkem<sup>1)</sup>

$$q = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$$

**35. Siła działająca na wierzchołku klina.** Przy badaniu naprężenia w klinie można posługiwać się rozkładem naprężenia omówionym w par. 33, który odpowiada prostemu rozkładowi promieniowemu. Siła przyłożona jest do wierzchołka klina i działa wzdłuż jego osi symetrii, jak to pokazane jest na rys. 62. Grubość klina w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $xy$  jest jednostkowa. Warunki wzdłuż brzegów klina  $\theta = \pm \alpha$  wypełnimy przyjmując, że składowe naprężenia mają następujące wartości:

$$\sigma_r = -\frac{kP \cos \theta}{r}; \quad \sigma_\theta = 0; \quad \tau_\theta = 0 \quad [a]$$

<sup>1)</sup> M. Sadowsky, loc. cit.

<sup>1)</sup> Proc. Roy. Soc. (London), seria A, t. 97, str. 110, 1920.

<sup>2)</sup> Z. angew. Math. Mech., t. 8, str. 107, 1928.

Obecnie należy wyznaczyć  $k$  tak, aby był spełniony warunek równowagi w punkcie  $O$ . Przyrównując wypadkową sił działających na powierzchnię walcową, zaznaczoną na rysunku linią przerywaną, do  $-P$ , znajdujemy

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P$$

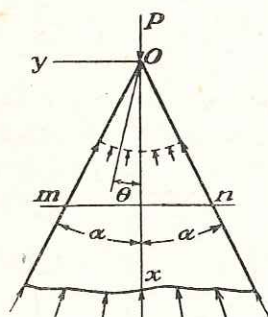
skąd

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

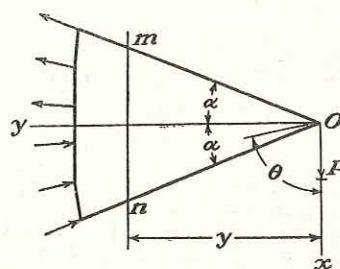
Na podstawie równania [a] mamy<sup>1)</sup>

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \quad [73]$$

Przyjmując  $\alpha = \pi/2$ , dochodzimy do rozwiązania [66], które odpowiada omówionemu już rozwiązaniu przypadku tarczy półnieskończonej. Okazuje się, że rozkład naprężeń normalnych



Rys. 62



Rys. 63

wzdłuż dowolnego przekroju  $mn$ , prostopadłego do osi klina, nie jest równomierny, a stosunek naprężenia normalnego w punktach  $m$  lub  $n$  do maksymalnej wartości naprężenia na osi klina wynosi  $\cos^4 \alpha$ .

Jeśli siła jest prostopadła do osi klina (rys. 63), to można posługiwać się tym samym rozwiązaniem [a], jeśli kąt  $\theta$  mierzy się od kierunku działania siły. Stały mnożnik  $k$  wyznacza się z równania równowagi

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = -P$$

skąd

$$k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

a naprężenie osiowe otrzymuje się w postaci

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \quad [74]$$

<sup>1)</sup> Rozwiązanie to podał *Michell*, loc. cit. Patrz także *A. Mesnager*: „Ann. ponts et chaussées”, 1901.

Naprężenia normalne i styczne w dowolnym przekroju poprzecznym  $mn$  równają się

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{Pyx \sin^4 \theta}{y^3 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \\ \tau_{xy} &= -\frac{Px^2 \sin^4 \theta}{y^3 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha)} \end{aligned} \quad [b]$$

W przypadku małego kąta  $\alpha$  możemy przyjąć

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}$$

Oznaczając następnie przez  $J$  moment bezwładności przekroju poprzecznego  $mn$  na podstawie równań [b] znajdujemy

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{Pyx}{J} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \\ \tau_{xy} &= -\frac{Px^2}{J} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \end{aligned} \quad [c]$$

Dla małych kątów  $\alpha$  można przyjmować, że czynnik  $(\operatorname{tg} \alpha / \alpha)^3 \sin^4 \theta$  jest bliski jedności. Wtedy równanie na naprężenie  $\sigma_y$  pokrywa się z tym, które podaje elementarna teoria zginania belek. Największe naprężenia styczne występują w punktach  $m$  oraz  $n$  i są dwukrotnie większe od tych, które otrzymuje się z teorii elementarnej w środku prostokątnego przekroju belki.

Ponieważ dysponujemy rozwiązaniami dwóch przypadków obciążenia, przedstawionymi na rys. 62 i 63, to tym samym mamy rozwiązanie i dla siły  $P$  o dowolnym kierunku w płaszczyźnie  $xy$ ; wystarczy bowiem rozłożyć tę siłę na dwa wzajemnie prostopadłe kierunki i zastosować zasadę superpozycji<sup>1)</sup>. Należy zauważyć, że rozwiązania [73] oraz [74] przedstawiają rozwiązanie ściśle jedynie w tym przypadku, gdy utwierdzony brzeg klina podlega działaniu sił promieniowych, rozłożonych zgodnie z naszymi rozwiązaniami. W przeciwnym razie otrzymane rozwiązania będą słuszne jedynie dla punktów położonych w dużych odległościach od utwierdzonego brzegu.

Zagadnienie klina obciążonego w wierzchołku momentem skupionym  $M$ , działającym w płaszczyźnie klina, rozwiązuje się za pomocą funkcji naprężeń<sup>2)</sup>

$$\Phi = M \frac{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \quad [d]$$

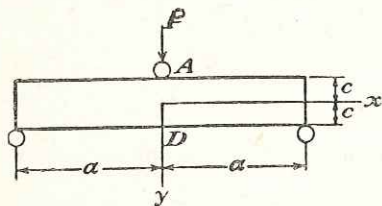
gdzie kąt  $\theta$  mierzy się zgodnie z rys. 62, a przyłożony moment  $M$  ma zwrot przeciwny ruchowi wskazówek zegara. Naprężenia mają postać

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{M}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \cdot \frac{4}{r^2} \sin 2\theta; \quad \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \cdot \frac{2}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \end{aligned} \quad [e]$$

<sup>1)</sup> Kilka przykładów rozkładu naprężeń w klinach omówił *Akira Miura* w pracy: „Spannungskruven in rechteckigen und keilförmigen Trägern“, Berlin 1928. Przypadki sił przyłożonych poza wierzchołkiem klina oraz tarczy, z której został wycięty klin, były rozważane przez *J. H. A. Brahtza*: „Physics“, t. 4, str. 56, 1953 oraz przez *W. M. Shepherd*: „Proc. Roy. Soc.“ (London), seria A, t. 148, str. 284, 1935.

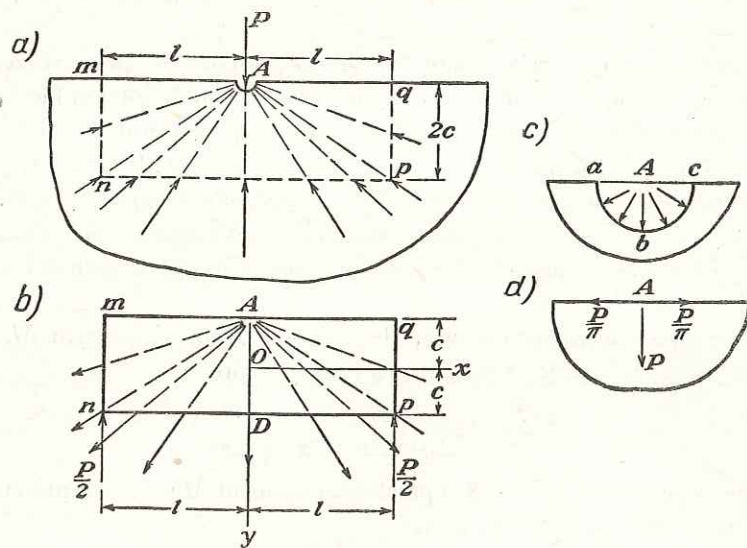
<sup>2)</sup> *C. E. Inglis*: „Trans. Inst. Nav. Arch.“ (London), 1922, t. 64,

**36. Działanie siły skupionej na belkę.** Zagadnienie rozkładu naprężeń w belce poddanej działaniu siły skupionej ma bardzo duże znaczenie praktyczne. Poprzednio (par. 22) pokazaliśmy, że w belkach o wąskim przekroju prostokątnym, poddanych działaniu obciążenia ciągłego, dostatecznie dokładny rozkład naprężeń daje elementarna teoria zginania. Jednakże w pobliżu punktu przyłożenia siły skupionej należy oczekiwać znacznych



Rys. 64

zaburzeń lokalnych w rozkładzie naprężeń i dlatego jest konieczne dodatkowe zbadanie tego problemu. Pierwsze badania poświęcone wspomnianym naprężeniom lokalnym przeprowadził na drodze doświadczalnej Carus Wilson<sup>1)</sup>. Posługiwał się on prostokątną belką szklaną opartą na dwu podporach (rys. 64) i używał światła spolaryzowanego (patrz par. 42), co pozwoliło mu pokazać, że w punkcie A, położonym w środku belki, gdzie przyłożone jest obciążenie, rozkład naprężeń zbliżony jest do rozkładu, który wywołuje działanie siły skupionej w tarczy półnieskończonej. Wzdłuż przekroju AD naprężenie normalne  $\sigma_x$  nie podlega prawu liniowemu, a naprężenie przy rozciąganiu w punkcie D, leżącym naprzeciw punktu A, jest mniejsze niż należałoby się z elementarnej teorii zginania belek spodziewać. Wyniki te zostały wyjaśnione przez G. G. Stokesa<sup>2)</sup> w oparciu o pewne założenia empiryczne. Układ przedstawiony na rys. 64 można otrzymać przez superpozycję dwóch układów z rys. 65.



Rys. 65

Promieniowe naprężenia ściskające, działające na przekroju  $mn$ ,  $np$  oraz  $pq$  tarczy półnieskończonej (rys. 65a) są zrównoważone przez równe im promieniowe naprężenia rozciągające, działające na brzegi prostokątnej belki, opartej w punktach  $n$  i  $p$  (rys. 65b). Aby otrzymać przypadek rozważony przez Stokesa, należy na stan naprężenia w tej belce nałożyć stan naprężenia panujący w półnieskończonej tarczy.

<sup>1)</sup> Loc. cit.

<sup>2)</sup> Wilson, loc. cit., G. G. Stokes: „Mathematical and Physical Papers“, t. 5, str. 238.

Przy określaniu naprężeń w belce posłużymy się elementarnym równaniem zginania belek. Moment zginający w przekroju środkowym belki AD równa się różnicy momentu reakcji podporowej  $P/2$  oraz momentów wszystkich sił rozciągających, przyłożonych do jednej połowy belki. Ostatni z momentów łatwo obliczyć, jeśli się zauważy, że promieniowy rozkład sił rozciągających jest statycznie równoważny rozkładowi ciśnienia na ćwiartkę  $ab$  powierzchni walcowej  $abc$  w punkcie A (rys. 65c) lub, zgodnie z równaniem [66], równoważny jest sile poziomej  $P/\pi$  i sile pionowej  $P/2$ , przyłożonym w punkcie A (rys. 65d). Wtedy moment zginający, czyli moment względem punktu O, równa się

$$\frac{P}{2}l - \frac{P}{\pi}c$$

a odpowiednie naprężenia pochodzące od zginania wynoszą<sup>1)</sup>

$$\sigma_x' = \frac{P}{J} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y$$

Do tych naprężeń (wywołanych zginaniem) należy dodać równomiernie rozłożone naprężenie rozciągające  $P/2\pi c$ , wywołane siłą rozciągającą  $P/\pi$ . Rozkład naprężeń normalnych wzdłuż przekroju AD, otrzymany na podstawie przeprowadzonych elementarnych rozważań, określony jest równaniem

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c}$$

Wynik ten pokrywa się z równaniem podanym przez Stokesa.

Lepsze przybliżenie uzyskać można jeśli się zauważy, że na dolny brzeg belki działa obciążenie ciągłe (rys. 65b) i uwzględni się równania [36']. Intensywność obciążenia w punkcie D, zgodnie z równaniem [66], wynosi  $P/\pi c$ . Podstawiamy tę wartość do [36'] i dodajemy naprężenie  $\sigma_x$  otrzymane wyżej, uzyskując w ten sposób drugie przybliżenie

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left( \frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right) \quad [a]$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left( \frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right)$$

Aby otrzymać całkowite naprężenie wzdłuż przekroju AD, trzeba do naprężeń [a] dodać naprężenia

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi(c+y)} \quad [b]$$

odpowiadające tarczy półnieskończonej.

Porównanie z podanym niżej dokładniejszym rozwiązaniem (patrz tablica w niniejszym paragrafie) pokazuje, że związki [a] i [b] podają naprężenia z bardzo dużą dokładnością we

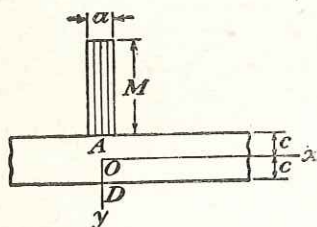
<sup>1)</sup> Przyjmujemy podobnie jak poprzednio, że siła P odnosi się do jednostki grubości tarczy.

wszystkich punktach z wyjątkiem punktu  $D$  na dolnej krawędzi belki, gdzie poprawka do zwykłego równania zginania belek wynosi

$$-\frac{3P}{2\pi c} + \frac{P}{2\pi c} + \frac{1}{5} \frac{P}{\pi c} = -0,254 \frac{P}{c}$$

podczas gdy dokładniejsze rozwiązanie podaje jedynie  $-0,133 (P/c)$ .

Pierwszym, który usiłował znaleźć ściślejsze rozwiązanie tego zagadnienia był *J. Boussinesq*<sup>1)</sup>. Wykorzystał on rozwiązanie *Flamanta* (patrz par. 33) dla tarczy półnieskończonej.



Rys. 66

W celu zlikwidowania naprężeń na brzegu  $np$  (rys. 65a) *Boussinesq* dodał układ równych i przeciwnie skierowanych naprężeń i ponownie zastosował rozwiązanie *Flamanta*, traktując belkę jako tarczę półnieskończoną, rozciągającą się ponad linię  $np$ . Ten dodatkowy układ wprowadza dodatkowe naprężenia na powierzchni belki, które można ponownie zredukować za pomocą rozwiązania *Flamanta* itd. Proces ten jest jednak bardzo wolnozbieżny i nie prowadzi do zadowalającego wyniku.

Rozwiązanie zagadnienia za pomocą szeregów trygonometrycznych otrzymał *L. N. G. Filon*<sup>2)</sup>. Zastosował on to rozwiązanie do przypadku sił skupionych i wykonał obliczenia dla pewnych przypadków szczegółowych (patrz par. 23); obliczenia te wykazują dobrą zgodność z późniejszymi badaniami.

Dalszego postępu w rozwiązaniu tego zagadnienia dokonał *H. Lamb*<sup>3)</sup>. Rozważając nieskończoną belkę obciążoną w równych odstępach równymi siłami skupionymi, działającymi na przemian w dół i w górę, *Lamb* uprościł rozwiązanie zagadnienia płaskiego i otrzymał dla pewnych przypadków wyrażenia na linie ugięcia. W ten sposób okazało się, że elementarna teoria zginania *Bernoulli-Eulera* jest wystarczająco dokładna, jeśli tylko wysokość belki jest mała w porównaniu z jej długością. Oprócz tego stwierdzono, że poprawka uwzględniająca działanie siły poprzecznej uzyskana z elementarnej teorii *Rankina* i *Grashofa* (patrz par. 21) jest nieco zawyżona i należy ją zmniejszyć do około 0,75 jej wartości<sup>4)</sup>.

Bardziej szczegółowe badania rozkładu naprężenia i krzywizny w okolicy punktu przyłożenia obciążenia skupionego przeprowadził *T. v. Kármán*<sup>5)</sup> i *F. Seewald*<sup>5)</sup>. *Kármán* rozważa nieskończenie długą belkę i wykorzystuje rozwiązanie dla półnieskończonej tarczy obciążonej dwoma równymi i przeciwnie skierowanymi momentami, działającymi w dwóch sąsiednich punktach na jej prostym brzegu (rys. 56b). Naprężenia na dolnej krawędzi belki, które wynikają z tego przyjęcia, można zredukować przez zastosowanie rozwiązania w postaci szeregu trygonometrycznego (patrz par. 23), które w przypadku nieskończenie długiej belki przekształca się w całkę *Fouriera*. W ten sposób *Kármán* dochodzi do następującej funkcji naprężeń

$$\Phi = \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \sinh \alpha c \sinh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x \, d\alpha +$$

$$-\frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \cosh \alpha c \cosh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x \, d\alpha \quad [c]$$

<sup>1)</sup> Compt. rend., t. 114, str. 1510, 1892.

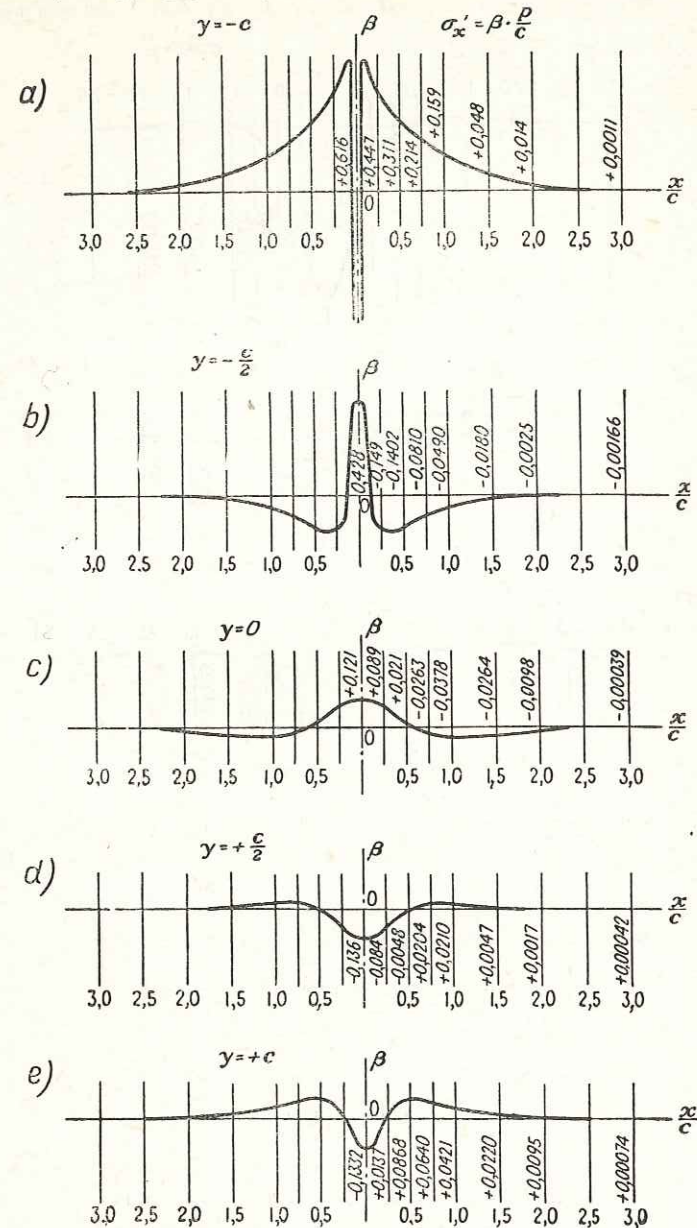
<sup>2)</sup> L. N. G. Filon: „Trans. Roy. Soc.” (London), seria A, t. 201, str. 63, 1903.

<sup>3)</sup> H. Lamb: Atti. IV Congr. Intern. Matemat., t. 3, str. 12, Roma, 1909.

<sup>4)</sup> Do tego samego wniosku dochodzi w swojej pracy (loc. cit.) Filon.

<sup>5)</sup> „Abhandl. aerodynam. Inst., Tech. Hochschule“, Aachen, t. 7, 1927.

Funkcja ta daje rozkład naprężeń w belce, w której wykres momentów zginających przedstawia się w postaci bardzo wąskiego prostokąta (rys. 66). W przypadku najogólniejszego obciążenia górnej krawędzi belki siłami pionowymi odpowiedni wykres momentów zginających można podzielić na elementarne prostokąty<sup>1)</sup> takie, jak na rys. 66. Odpowiednią funkcję naprężeń znajdziemy całkując wyrażenie [c] wzdłuż długości belki.

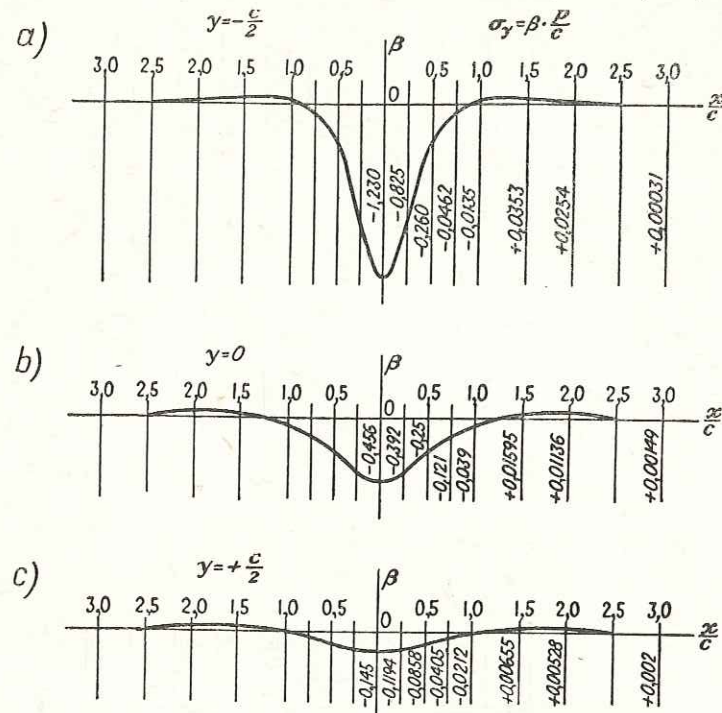


Rys. 67

Taką metodę rozwiązania zastosował *Seewald* do przypadku belki obciążonej siłą skupioną  $P$  (rys. 64). Pokazał on, że naprężenie  $\sigma_x$  można rozłożyć na dwie części: jedną, która wynika ze zwykłych równań elementarnych dla

<sup>1)</sup> Przypadek obciążenia skupionego, przyłożonego w powierzchni środkowej belki, był rozważany przez *R. C. J. Howlanda*: „Proc. Roy. Soc.” (London), t. 124, str. 89, 1929 (patrz poniżej par. 38).

zginania belek, i druga, która obejmuje naprężenia lokalne w pobliżu punktu przyłożenia obciążenia. Tę ostatnią część, oznaczoną przez  $\sigma'_x$ , można przedstawić w postaci  $\beta(P/c)$ , przy czym  $\beta$  stanowi współczynnik liczbowy zależny od położenia punktu, dla którego liczy się naprężenia lokalne. Wartości tego współczynnika podane są na wykresach rys. 67. Dwie pozostałe składowe  $\sigma_y$  oraz  $\tau_{xy}$ , naprężenia można również przedstawić w postaci  $\beta(P/c)$ . Odpowiednie wartości współczynnika  $\beta$  podane są na wykresach rys. 68 i 69. Z wykresów tych wynika, że naprężenia



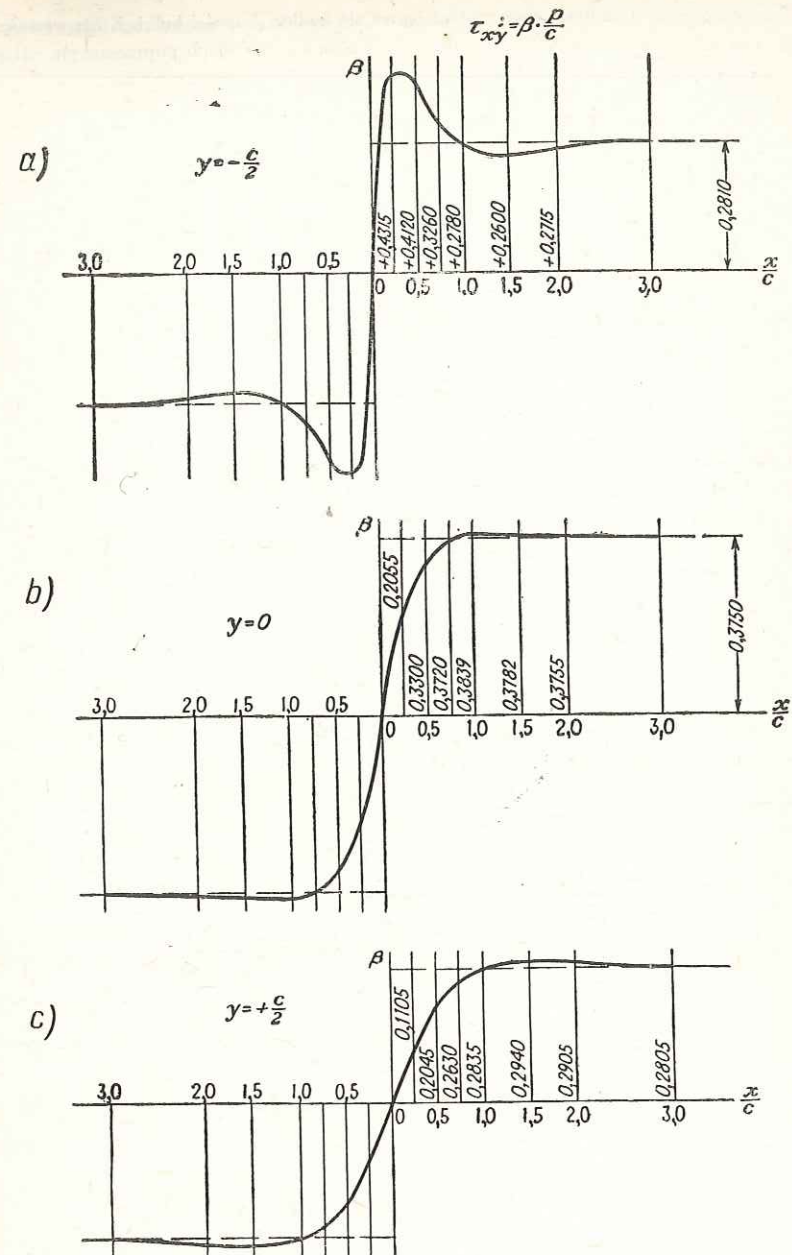
Rys. 68

lokalne maleją bardzo szybko wraz ze wzrostem odległości od punktu przyłożenia obciążenia i w odległości równej wysokości belki mogą być zwykle pomijane. Znalezione za pomocą współczynnika  $\beta$  dla  $x = 0$  wartości naprężeń lokalnych w pięciu punktach przekroju  $AD$ , tj. na linii działania siły (rys. 64), podane są poniżej tabelarycznie. Dla porównania podano także wartości naprężeń lokalnych<sup>1)</sup>, otrzymanych w tym paragrafie z równań [a] i [b]. Jak widzimy, równania te określają wartości naprężeń lokalnych z dostateczną dokładnością.

TABLICA WSPÓŁCZYNNIKÓW  $\beta$  DLA ŚRODKA

$y =$	$-c$	$-\frac{c}{2}$	0	$\frac{c}{2}$	$c$
ROZWIĄZANIE DOKŁADNE					
$\sigma'_x =$	...	0,428	0,121	-0,136	-0,133
$\sigma_y =$	$\infty$	-1,23	-0,456	-0,145	0
ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE					
$\sigma'_x =$	0,573	0,426	0,159	-0,108	-0,255
$\sigma_y =$	$\infty$	-1,22	-0,477	-0,155	0

<sup>1)</sup> Tzn. naprężeń, które należy dodać do naprężeń otrzymanych z elementarnych równań dla zginania.

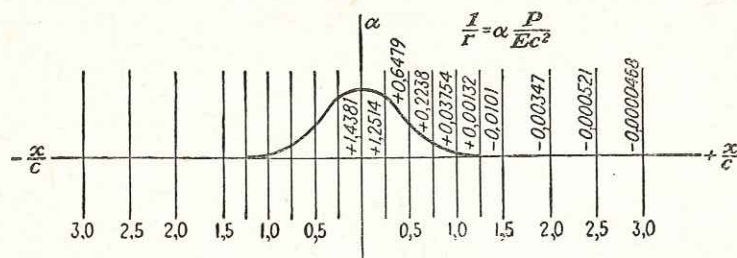


Rys. 69

Znając naprężenia możemy już bez trudu określić krzywiznę i ugięcie belki. Obliczenia te pokazują, że krzywiznę linii ugięcia można także podzielić na dwie części. Jedna z nich wynika z elementarnej teorii zginania belek, a druga przedstawia lokalny wpływ obciążenia skupionego  $P$ . Ta dodatkowa krzywizna linii środkowej może być przedstawiona za pomocą równania

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{P}{Ec^2} \quad [d]$$

w którym  $\alpha$  jest współczynnikiem liczbowym zmieniającym się wzdłuż długości belki. Kilka wartości tego współczynnika podano na wykresie rys. 70. Z wykresu tego wynika, że w przekrojach poprzecznych, odległych od linii działania siły o więcej niż połowę wysokości belki, dodatkową krzywiznę można pominąć.



Rys. 70

W wyniku tego zjawiska o charakterze lokalnym można uważać, że dwie gałęzie linii ugięcia  $AB$  i  $AC$  (rys. 71) przecinają się pod kątem

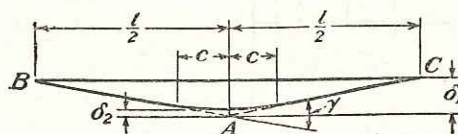
$$\gamma = \frac{P}{c} \left( \frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad [e]$$

a odpowiednie ugięcie w środku wynosi

$$\delta_1 = \frac{\gamma l}{4} = \frac{Pl}{4c} \left( \frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) \quad [f]$$

Od tego ugięcia należy odjąć dalszą małą poprawkę  $\delta_2$  w celu zlikwidowania nagłej zmiany kąta nachylenia linii w punkcie  $A$ . Wielkość jej obliczył *Seewald*; wynosi ona

$$\delta_2 = 0,21 \frac{P}{E}$$



Rys. 71

Oznaczając obecnie przez  $\delta_0$  ugięcie otrzymane na podstawie teorii elementarnej, znajdujemy całkowite ugięcie pod obciążeniem

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Pl}{4c} \left( \frac{3}{4G} - \frac{3}{10E} - \frac{3\nu}{4E} \right) - 0,21 \frac{P}{E} \quad [75]$$

Przyjmując  $\nu = 0,3$ , otrzymujemy

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EJ} \left[ 1 + 2,85 \left( \frac{2c}{l} \right)^2 - 0,84 \left( \frac{2c}{l} \right)^3 \right] \quad [75']$$

Elementarna teoria *Rankine'a-Grashofa* (patrz par. 21) daje w tym przypadku wartość

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EJ} \left[ 1 + 3,90 \left( \frac{2c}{l} \right)^2 \right]$$

Okazuje się, że równanie [g] daje zawyżoną wartość poprawki na działanie sił poprzecznych. Wszystkie przytoczone równania nie uwzględniały ugięć wywołanych lokalnym odkształceniem w pobliżu punktów podparcia.

**37. Naprężenia w tarczy kołowej.** Zaczniemy od prostego przypadku dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił  $P$ , działających wzdłuż średnicy  $AB$  (rys. 72). Przyjmując, że każda z tych sił wywołuje prosty promieniowy stan naprężenia (równanie [66]), możemy obliczyć, jakie siły należy przyłożyć na obwodzie tarczy, aby utrzymać taki stan naprężenia. W każdym punkcie  $M$  na obwodzie tarczy powstają naprężenia ściskające skierowane wzdłuż  $r$  i  $r_1$  i równe odpowiednio  $\frac{2P \cos \theta}{\pi - r}$  oraz  $\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1}$ . Ponieważ  $r$  i  $r_1$  są do siebie prostopadłe oraz

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d} \quad [a]$$

( $d$  jest średnicą tarczy), możemy stwierdzić, że oba naprężenia główne w punkcie  $M$  są sobie równe, działają ściskająco i mają wartości  $2P/\pi d$ . Z tego wynika, że na każdą płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $M$  i prostopadłą do płaszczyzny tarczy działa takie samo naprężenie ściskające oraz, że aby zachować przyjęty układ dwóch prostych promieniowych rozkładów naprężenia, trzeba na całym obwodzie tarczy przyłożyć naprężenia ściskające o stałej intensywności  $2P/\pi d$ .

Jeśli brzeg tarczy jest wolny od sił zewnętrznych, to naprężenia w każdym punkcie tarczy otrzymujemy dodając do siebie stan równomiernego rozciągania w płaszczyźnie tarczy o wielkości  $2P/\pi d$  oraz omówione wyżej dwa proste promieniowe stany naprężenia. Rozważmy naprężenia na przekroju poprowadzonym wzdłuż poziomej średnicy w punkcie  $N$ . Ze względu na symetrię można stwierdzić, że wzdłuż tego przekroju nie ma naprężeń stycznych. Naprężenie normalne, wywołane przez dwa stany promieniowych naprężeń ściskających, wynosi

$$-2 \cdot \frac{2P \cos \theta}{\pi} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r}$$

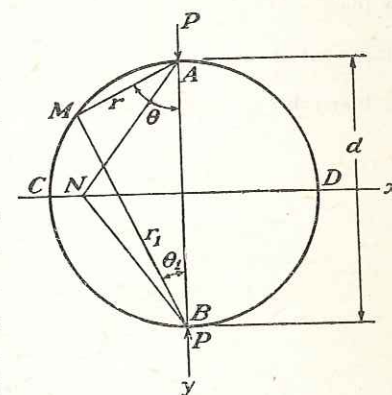
gdzie  $r$  jest odległością  $AN$ , a  $\theta$  — kątem między kierunkiem  $AN$  i średnicą pionową. Dodając do tych stanów naprężeń stan równomiernego rozciągania  $2P/\pi d$ , otrzymujemy całkowite naprężenie w punkcie  $N$  poziomej płaszczyzny w postaci

$$\sigma_y = -\frac{4P \cos^3 \theta}{\pi r} + \frac{2P}{\pi d}$$

lub wykorzystując fakt, że

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}}$$

<sup>1)</sup> Przyjmuje się, że  $P$  jest siłą przypadającą na jednostkę grubości tarczy.



Rys. 72

znajdujemy

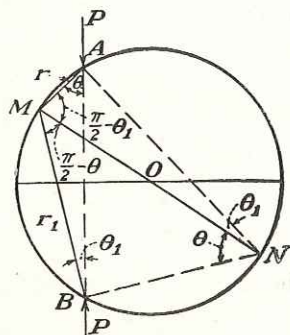
$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[ 1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad [b]$$

Maksymalne naprężenie ściskające wzdłuż średnicy  $CD$  występuje w środku tarczy, gdzie osiąga wartość

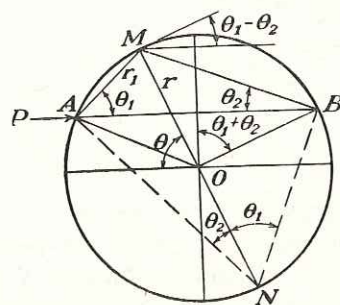
$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}$$

Na końcach średnicy naprężenie ściskające  $\sigma_y$  znika.

Obecnie rozważymy przypadek dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił  $P$ , działających wzdłuż cięciwy  $AB$  (rys. 73). Przyjmując ponownie istnienie dwóch prostych rozkładów promieniowych rozchodzących się od punktów  $A$  i  $B$ , otrzymamy naprężenie w płaszczyźnie stycznej do obwodu tarczy w punkcie  $M$  przez superpozycję tych dwóch naprężeń ściskających o wielkości  $\frac{2P \cos \theta}{\pi r}$  oraz  $\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1}$ , działających odpowiednio w kierunku  $r$  i  $r_1$ . Normalna  $MN$  do stycznej w punkcie  $M$  jest średnicą tarczy. Z tego wy-



Rys. 73



Rys. 74

nika, że trójkąty  $MAN$  oraz  $MBN$  są prostokątne, a kąty, które normalna  $MO$  tworzy z  $r$  oraz  $r_1$ , równają się odpowiednio  $\pi/2 - \theta_1$  oraz  $\pi/2 - \theta$ . Naprężenia normalne i styczne, działające na element obwodu tarczy w punkcie  $M$ , są równe

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \\ &= -\frac{2P}{\pi} \left( \frac{\cos \theta \sin^2 \theta_1}{r} + \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta}{r_1} \right) \\ \tau &= -\frac{2P}{\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r} \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta \cos \theta \right) \end{aligned} \quad [c]$$

Równania te można uprościć, jeśli się zauważy, że z rozważania trójkątów  $MAN$  i  $MBN$  wynikają zależności

$$r = d \sin \theta_1; \quad r_1 = d \sin \theta$$

Podstawiając je do równań [c] znajdujemy:

$$\sigma = -\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1); \quad \tau = 0 \quad [d]$$

Z rys. 73 można stwierdzić, że  $\sin(\theta + \theta_1)$  pozostają wielkością stałą wzdłuż całego brzegu. Tak więc, aby zachować przyjęty promieniowy rozkład naprężenia, należy na całym brzegu przyłożyć równomiernie rozłożone siły ściskające o wielkości  $2P/\pi d \sin(\theta + \theta_1)$ . Aby otrzymać rozwiązanie odpowiadające tarczy ze swobodnym brzegiem, należy jedynie dodać do dwóch omówionych promieniowych stanów naprężeń stan równomiernego rozciągania o intensywności  $2P/\pi d \sin(\theta + \theta_1)$ .

Zagadnienie rozkładu naprężeń w tarczy kołowej można rozwiązać w ogólniejszym przypadku, kiedy na brzeg<sup>1)</sup> tarczy działa dowolny samorzównoważony układ sił. Załóżmy, że jedna z tych sił przyłożona jest w punkcie  $A$  i działa w kierunku cięciwy  $AB$  (rys. 74). Przyjmując ponownie prosty promieniowy rozkład naprężenia, otrzymujemy w punkcie  $M$  proste promieniowe ściskanie o wielkości  $(2P/\pi) \cos \theta_1/r_1$  i kierunku  $AM$ . Jako początek biegunowego układu współrzędnych przyjmijmy obecnie środek tarczy  $O$ , a kąt  $\theta$  będziemy mierzyć w kierunku pokazanym na rysunku. Wtedy składowe normalną i styczną naprężenia działającego na element styczny do brzegu w punkcie  $M$  można łatwo znaleźć biorąc pod uwagę fakt, że kąt między normalną  $MO$  do tego elementu i kierunkiem ściskania  $r_1$  jest równy  $\pi/2 - \theta_2$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \sin^2 \theta_2 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2P \cos \theta_1}{\pi r_1} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad [e]$$

Ponieważ z trójkąta  $AMN$  wynika, że  $r_1 = d \sin \theta_2$ , to związki [e] można napisać w postaci

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad [f]$$

Naprężenia te, działające na element styczny do brzegu w punkcie  $M$ , można otrzymać przez superpozycję następujących trzech stanów naprężeń:

- 1) naprężenia normalnego, rozłożonego równomiernie wzdłuż brzegu

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad [g]$$

- 2) naprężenia stycznego, rozłożonego równomiernie wzdłuż brzegu

$$-\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad [h]$$

- 3) naprężenia, którego składowe normalna i styczna mają wartości:

$$-\frac{P}{\pi d} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{oraz} \quad -\frac{P}{\pi d} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad [k]$$

Uwzględniając, że kąt między siłą  $P$  i styczną w punkcie  $M$  równa się  $\theta_1 - \theta_2$  możemy stwierdzić, że naprężenie [k] ma wartość  $P/\pi d$  i ma zwrot przeciwny do zwrotu siły  $P$ .

<sup>1)</sup> Rozważane w tym paragrafie zagadnienia rozwiązywali: *H. Hertz* Z. Math. Physik, t. 28, 1883 lub „Gesammelte Werke“, t. 1, str. 283, oraz *J. H. Michell*, Proc. London Math. Soc., t. 32, str. 44, 1900 i t. 34, str. 134, 1901. Zagadnienie odpowiadające rys. 72, gdy tarcza zastąpiona jest prostokątem, rozważał *J. N. Goodier*, Trans. A. S. M. E., t. 54, str. 173, 1932 z uwzględnieniem wpływów rozkładu obciążenia na małych odcinkach brzegu.

Przyjmijmy obecnie, że istnieje kilka sił, które działają na brzeg tarczy i każda z nich wywołuje prosty promieniowy rozkład naprężenia. Siły, które należy przyłożyć do brzegu tarczy, aby zachować ten stan naprężenia, powinny składać się z:

1) siły normalnej, rozłożonej równomiernie wzdłuż brzegu, o intensywności

$$- \sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad [l]$$

2) sił stycznych o intensywności

$$- \sum \frac{P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad [m]$$

3) sił, których intensywność i kierunek otrzymuje się z wektorowego dodania wyrażeń [k]. Sumowanie musi obejmować wszystkie siły działające na brzeg.

Moment wszystkich sił zewnętrznych względem punktu  $O$ , zgodnie z rys. 74, równa się

$$\sum \frac{P \cos(\theta_1 + \theta_2) d}{2}$$

Ponieważ moment ten musi równać się zeru, jeśli układ sił jest w równowadze, to siły styczne [m] równają się zeru. Siła otrzymana przez sumowanie naprężeń [k], proporcjonalna do sumy wektorowej sił zewnętrznych, jest także równa zeru, jeśli układ znajduje się w równowadze. Tak więc, aby zachować prosty promieniowy rozkład naprężenia, należy jedynie przyłożyć do brzegu tarczy równomierne ściskanie [l]. Jeśli brzeg jest wolny od równomiernego ściskania, to naprężenie w dowolnym punkcie tarczy otrzymuje się przez superpozycję równomiernego rozciągania o wielkości

$$\sum \frac{P}{\pi d} \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

i prostych rozkładów promieniowych.

Za pomocą podanej metody ogólnej można łatwo rozwiązać także i inne zagadnienia rozkładów naprężenia w tarczach kołowych<sup>1)</sup>. Możemy np. wybrać przykład działania na tarczę momentu pary sił (rys. 75), zrównoważonego momentem przyłożonym w środku tarczy. Przyjmując dwa jednakowe rozkłady promieniowe naprężeń w punktach  $A$  i  $B$ , widzimy, że w tym przypadku siły [l] i suma naprężeń [k] równają się zeru i na to, aby zachować prosty promieniowy rozkład naprężeń, wystarczy do brzegu tarczy przyłożyć jedynie siły styczne [m]. Intensywność tych sił, jak wynika z [m], powinna być równa

$$- \frac{2P}{\pi d} \cos(\theta_1 + \theta_2) = - \frac{2M_t}{\pi d^2} \quad [n]$$

gdzie  $M_t$  oznacza moment pary sił. Aby otrzymać brzeg swobodny od sił stycznych i przenieść moment pary sił  $P$  z obwodu tarczy do jej środka, wystarczy dodać do prostych promieniowych rozkładów naprężeń stan naprężenia odpowiadający przypadkowi pokazanemu na rys. 75b. Stan ten wywołany jest czystym ścinaniem na brzegu i można go łatwo wyznaczyć, jeśli się zauważy, że dla każdego współśrodkowego koła o promieniu  $r$  naprężenia styczne muszą dać moment  $M_t$ . Tak więc

$$\tau_{r\theta} 2\pi r^2 = M_t; \quad \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2} \quad [p]$$

Naprężenia te można łatwo również wyznaczyć z zależności ogólnych [38], jeśli funkcję naprężeń przyjmie się w postaci

$$\Phi = \frac{M_t \theta}{2\pi} \quad [q]$$

<sup>1)</sup> Kilka interesujących przykładów omówił *J. H. Michell*, loc. cit.

skąd wynika, że

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = \frac{M_t}{2\pi r^2}$$

**38. Siła przyłożona w punkcie tarczy nieograniczonej.** Jeśli siła  $P$  działa w płaszczyźnie środkowej tarczy nieograniczonej (rys. 76a), to rozkład naprężenia można łatwo otrzymać przez superpozycję omówionych poprzednio układów. Nie możemy jednakże otrzymać rozwiązań na drodze prostego dodawania dwóch rozwiązań dla półnieskończonych tarcz, pokazanych na rys. 76b i c. Choćby przemieszczenia pionowe są w obu przypadkach jednakowe, to jednak przemieszczenia poziome wzdłuż prostych brzegów są różne. W przypadku przedstawionym na rys. 76b przemieszczenie to skierowane jest od punktu  $O$ , a w przypadku z rys. 76c — przeciwnie. W obu przypadkach wartości tych przemieszczeń równają się według równania [71]

$$\frac{1-\nu}{4E} \cdot P \quad [a]$$

Tę różnicę w przemieszczeniach poziomych można usunąć przez dodanie do obciążeń, przedstawionych na rys. 76b i c, rozwiązań odpowiadających przypadkom pokazanym na rys. 76d i e, w których wzdłuż prostoliniowych brzegów działają siły styczne. Przemieszczenia odpowiadające tym dwóm ostatnim przypadkom można otrzymać z rozważonego przez nas zagadnienia zginania pręta zakrzywionego, pokazanego na rys. 46. Przyjmując, że promień wewnętrzny tego pręta dąży do zera, a promień zewnętrzny — do nieskończoności, otrzymamy przypadek półnieskończonej tarczy. Przemieszczenie wzdłuż prostoliniowego brzegu tej tarczy, w kierunku siły stycznej działającej na brzeg na podstawie równania [61] równa się

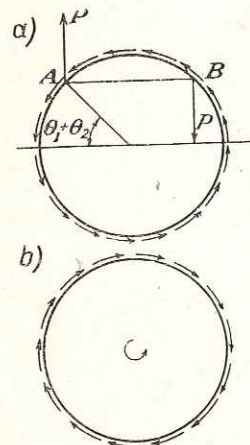
$$\frac{D\pi}{E} \quad [b]$$

Stała całkowania  $D$  musi być tak dobrana, aby suma przemieszczeń określonych przez [a] i [b] równała się zeru. Tak więc

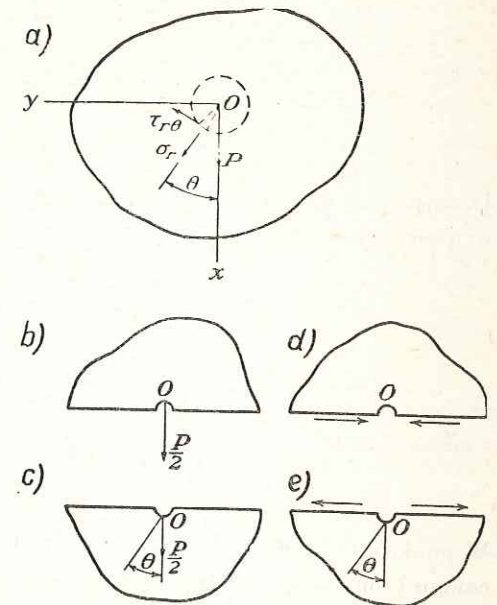
$$\frac{D\pi}{E} = \frac{1-\nu}{4E} P; \quad D = \frac{1-\nu}{4\pi} P \quad [c]$$

Takie przyjęcie daje w wyniku nałożenia na siebie przypadków, przedstawionych na rys. 76b, c, d i e, tarczę nieskończoną, obciążoną w punkcie (rys. 76a).

Rozkład naprężeń w tarczy można łatwo otrzymać drogą dodania naprężeń w tarczy półnieskończonej, wywołanych działaniem siły normalnej  $0,5P$  na jej prostoliniowym brzegu (por. par. 33), na naprężenia w zakrzywionym pręcie, zawierające stałą całkowania  $D$ . Uwzględ-



Rys. 75



Rys. 76



niając różnicę w sposobie mierzenia kąta  $\theta$  w przykładach podanych na rys. 46 i 76 i wykorzystując równanie [60], otrzymujemy naprężenia w zakrzywionym przecię, przy czym kąt  $\theta$  mierzony jest zgodnie z rys. 76.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{D \sin \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned}$$

Dodając do nich naprężenia [66] dla siły  $P/2$ , otrzymamy następujący rozkład naprężeń w nieskończonej tarczy:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} - \frac{P \cos \theta}{\pi r} = -\frac{(3+\nu)}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r}\end{aligned} \quad [76]$$

W punkcie  $O$  tarczy (rys. 76a) wycinamy teraz mały element ograniczony powierzchnią walcową o promieniu  $r$  i rzutujemy siły, działające na tę powierzchnię, na osie  $x$  i  $y$ . W wyniku otrzymujemy:

$$\begin{aligned}X &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = P \\ Y &= 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0\end{aligned}$$

Znaczy to, że siły działające na powierzchni cylindrycznej odpowiadają sile  $P$  przyłożonej w punkcie  $O$ . Za pomocą równań [13] składowe naprężenia we współrzędnych kartezjańskich przyjmą, na podstawie równań [76], następujące wartości:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} [-(3+\nu) + 2(1+\nu) \sin^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{P}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} [1-\nu - 2(1+\nu) \sin^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} [1-\nu + 2(1+\nu) \cos^2 \theta]\end{aligned} \quad [77]$$

Stosując zasadę superpozycji można za pomocą rozwiązania [77] otrzymać rozwiązanie odpowiadające innym rodzajom obciążenia. Zajmiemy się np. przypadkiem pokazanym na rys. 77, w którym na tarczę działają dwie równe i przeciwnie skierowane siły przyłożone w bliskich sobie punktach  $O$  i  $O_1$ , odległych o  $d$ . Naprężenia w dowolnym punkcie  $M$  otrzymuje się drogą superpozycji naprężeń wywołanych działaniem siły w punkcie  $O$ , z naprężeń

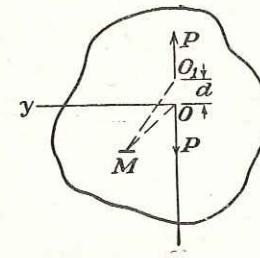
niemi wywołanymi działaniem siły w punkcie  $O_1$ . Rozważmy element powierzchni w punkcie  $M$ , prostopadły do osi  $x$  i oznaczmy przez  $\sigma_x$  naprężenie normalne działające na ten element pod wpływem siły przyłożonej w punkcie  $O$ . Wtedy naprężenie normalne  $\sigma'_x$ , działające na element pod wpływem obu sił pokazanych na rysunku, wynosi

$$\sigma'_x = \sigma_x - \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d \right) = -d \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -d \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

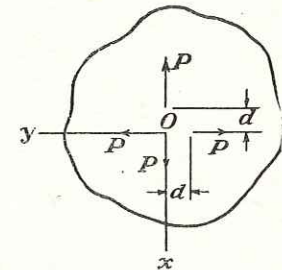
Tak więc składowe naprężenia w przypadku przedstawionym na rys. 77 otrzymuje się z równań [77] przez różniczkowanie. W ten sposób znajdujemy:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{dP}{4\pi r^2} [-(3+\nu) \cos^2 \theta + (1-\nu) \sin^2 \theta + 8(1+\nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ \sigma_y &= \frac{dP}{4\pi r^2} [(1-\nu) \cos^2 \theta + (1+3\nu) \sin^2 \theta - 8(1+\nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] \\ \tau_{xy} &= \frac{dP}{4\pi r^2} [-(6+2\nu) + 8(1+\nu) \sin^2 \theta] \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Widzimy, że składowe naprężenia maleją bardzo szybko ze wzrostem  $r$  i w odległości  $r$  dużej w porównaniu z  $d$  można je pominąć. Takiego wyniku należało oczekiwać zgodnie z zasadą *de Saint-Venanta*, jeśli działające siły przyłożone są blisko siebie.



Rys. 77



Rys. 78

Za pomocą superpozycji dwóch rozkładów naprężenia, opisanych równaniami [78], można otrzymać rozwiązanie zagadnienia pokazanego na rys. 78. Składowe naprężenia w tym przypadku równają się:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \sigma_y &= 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \tau_{xy} &= -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

Ten sam rozkład naprężeń wyrażony we współrzędnych biegunowych ma postać:

$$\sigma_r = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2}; \quad \sigma_\theta = 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad [79]$$

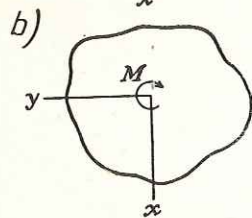
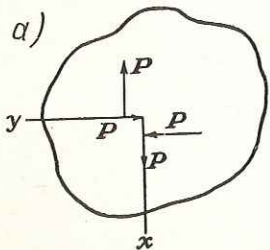
Rozwiązanie to można doprowadzić do postaci zgodnej z rozwiązaniem [46], które odpowiada grubościenną rurze, poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego, jeśli przyjąć w nim, że jej promień zewnętrzny jest nieskończenie duży.

W podobny sposób możemy otrzymać rozwiązanie dla przypadku przedstawionego na rys. 79a. Składowe naprężenia mają postać<sup>1)</sup>

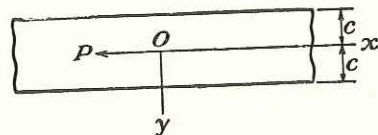
$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} \quad [80]$$

Przedstawiają one naprężenia wywołane działaniem momentu  $M$  przyłożonego w początku układu współrzędnych (rys. 79b).

Jeśli zamiast tarczy nieskończonej mamy do czynienia z nieskończenie długim pasmem, poddanym działaniu siły podłużnej  $P$  (rys. 80), możemy na wstępie posłużyć się rozwiązaniem [77] tak, jakby tarcza była nieograniczona. Naprężenia powstałe wzdłuż brzegów pasma można zlikwidować przez dodanie układu obciążeń o przeciwnym znaku, a stan naprężeń, wywołany tym korygującym układem sił, można z kolei wyznaczyć za pomocą metody ogólnej opisanej w par. 23. Obliczenia przeprowadzone przez R. C. J. Howlanda<sup>2)</sup> pokazują, że naprężenia lokalne, wywołane działaniem siły skupionej  $P$ , maleją bardzo szybko w miarę oddalania się od punktu przyłożenia siły, a w odległości większej niż szerokość pasma rozkład naprężeń wzdłuż przekroju poprzecznego jest praktycznie stały. W podanej poniżej tabelicy podano kilka wartości naprężeń  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ , obliczonych przy założeniu, że pasmo jest utwierdzone na końcu  $x = \infty$ , a liczba Poissona równa się  $\frac{1}{4}$ .



Rys. 79



Rys. 80

Naprężenia wywołane działaniem na półnieskończoną tarczę siły, umieszczonej w pewnej odległości od brzegu, omówił E. Melan<sup>3)</sup>.

**39. Ogólne rozwiązanie zagadnienia płaskiego we współrzędnych biegunowych.** Po omówieniu różnych przypadków szczególnych dwuwymiarowego zagadnienia we współrzędnych biegunowych, możemy już podać rozwiązanie ogólne. Wyrażenie ogólne na funkcję naprężeń, spełniające równanie ciągłości odkształceń [39] ma postać<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi = & a_0 \log r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \log r + d_0 r^2 \theta + a_0' \theta + \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta + \\ & - \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}) \cos n\theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2}) \sin n\theta \end{aligned} \quad [81]$$

1) A. E. H. Love: „Theory of Elasticity“, str. 214, Cambridge, 1927.

2) Loc. cit. O tym samym traktuje praca E. Melana: „Z. angew. Math. Mech.“, t. 5, str. 314, 1925.

3) „Z. angew., Math. Mech.“ t. 12, str. 343, 1932.

4) Rozwiązanie to podał J. H. Michell, Proc. London. Math. Soc., t. 31, str. 100, 1899, Patrz także A. Timpe: „Z. Math. Physik.“, t. 52, str. 348, 1905. Analogiczne rozwiązanie w przypadku pierścienia eliptycznego podał również A. Timpe: „Math. Z.“, t. 17, str. 189, 1923.

	$\frac{x}{c} =$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{30}$	0
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	-0,118	-0,992	.....	.....	$\infty$
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	+0,159	+0,511	0,532	0,521	0,500
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	0,110	0,364	.....	.....	.....
	$\frac{x}{c} =$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = 0$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	.....	.....	1,992	1,118	1,002
$y = c$	$\frac{\sigma_x 2c}{P} =$	0,479	0,468	0,489	0,841	0,973
$y = 0$	$\frac{\sigma_y 2c}{P} =$	.....	.....	-0,364	-0,110	-0,049

Pierwsze trzy składniki pierwszego wiersza przedstawiają w tym równaniu rozwiązanie odpowiadające osiowo-symetrycznemu rozkładowi naprężenia w początku układu współrzędnych (patrz par. 26). Cztery składnik opisuje rozkład naprężeń w przypadku pokazanym na rys. 57. Piąty składnik dotyczy przypadku czystego ścinania (rys. 75b). Pierwszy składnik w drugim wierszu odpowiada prostemu promieniowemu rozkładowi w przypadku obciążenia skierowanego w kierunku  $\theta = 0$ . Pozostałe składniki drugiego wiersza przedstawiają rozwiązanie odpowiadające zginaniu części pierścienia kołowego siłą promieniową (rys. 46). Wszystkie składniki drugiego wiersza łącznie dają rozwiązanie zagadnienia siły działającej na nieskończoną tarczę (par. 38). Podobne rozwiązania można znaleźć także za pomocą trzeciego wiersza równania [81], z tą jednak różnicą, że kierunek siły obrócony jest o kąt  $\pi/2$ . Dalsze składniki [81] przedstawiają rozwiązanie odpowiadające siłom stycznym i normalnym, proporcjonalnym do  $\sin n\theta$  oraz  $\cos n\theta$ , działającym na wewnętrznym i zewnętrznym brzegu pierścienia kołowego. Przykład tego rodzaju występował przy omawianiu rozkładu naprężenia wokół małego otworu kołowego (par. 32).

Stale całkowania w przypadku wycinka pierścienia kołowego, występujące w równaniach [81], można wyznaczyć bez trudu z warunków brzegowych. Jeśli rozważamy pierścień zamknięty, to niekiedy dla określenia stałych całkowania konieczne stają się dodatkowe badania przemieszczeń. Rozważymy ogólny przypadek pierścienia zamkniętego i założymy, że intensywność sił normalnych i stycznych na brzegach  $r = a$  oraz  $r = b$  zadana jest następującymi szeregami trygonometrycznymi:

$$(\sigma_r)_{r=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = A_0' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n' \sin n\theta$$

[a]

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\theta$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = C_0' + \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n' \sin n\theta$$

gdzie stałe  $A_0, A_n, B_n, \dots$ , określa się w zwykły sposób dla danych rozkładów sił na brzegach (patrz par. 23). Po obliczeniu składowych stanu naprężenia z równania [81] przy użyciu równań [38] i po przyrównaniu ich wielkości przy  $r=a$  i  $r=b$  do wielkości podanych równaniami [a], otrzymamy liczbę równań dostateczną do wyznaczenia stałych całkowania w każdym przypadku, gdy tylko  $n \geq 2$ . Dla  $n=0$ , to jest dla składników pierwszego wiersza wyrażenia [81] i dla  $n=1$ , czyli dla składników drugiego i trzeciego wiersza, konieczne są dalsze rozważania.

Jeśli przyjmując jako funkcję naprężeń jedynie pierwszy wiersz wyrażenia [81], to stała  $a'_0$  określa się wielkością sił stycznych, rozłożonych równomiernie wzdłuż brzegów (patrz par. 37). Rozkład naprężeń określony składnikiem, w którym występuje stała  $d_0$ , jest wieloznaczny (patrz par. 34) i dlatego w przypadku pełnego pierścienia musimy przyjąć  $d_0=0$ . Dla określenia pozostałych trzech stałych  $a_0, b_0$  i  $c_0$  dysponujemy jedynie dwoma równaniami

$$(\sigma_r)_{r=a} = A_0 \quad \text{oraz} \quad (\sigma_r)_{r=b} = A'_0$$

Dodatkowe równanie, służące do określenia tych stałych, otrzymuje się przez rozważenie przemieszczeń. Przemieszczenia w zamkniętym pierścieniu powinny być jednoznaczne funkcją kąta  $\theta$ .

Nasze poprzednie rozważania pokazują, że ten warunek jest spełniony, jeśli przyjmując  $c_0=0$  (patrz par. 26). Tak więc, pozostałe dwie stałe  $a_0$  i  $b_0$  określone są podanymi poprzednio dwoma warunkami brzegowymi.

Rozważmy obecnie bardziej szczegółowe składniki, dla których  $n=1$ . W celu określenia ośmiu stałych  $a_1, b_1, \dots, d_1'$ , wchodzących w skład drugiego i trzeciego wiersza wyrażenia [81], obliczamy najpierw składowe naprężenia  $\sigma_r$  i  $\tau_{r\theta}$ , posługując się tą częścią funkcji  $\Phi$ . Następnie wykorzystujemy równania [a] i przyrównujemy do siebie odpowiednie współczynniki przy  $\sin\theta$  i  $\cos\theta$  na brzegu wewnętrznym i zewnętrznym, skąd otrzymujemy osiem następujących równań:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1')a^{-1} + 2b_1a - 2a_1'a^{-3} &= A_1 \\ (a_1 + b_1')b^{-1} + 2b_1b - 2a_1'b^{-3} &= A_1' \\ (c_1 + d_1')a^{-1} + 2d_1a - 2c_1'a^{-3} &= B_1 \\ (c_1 + d_1')b^{-1} + 2d_1b - 2c_1'b^{-3} &= B_1' \end{aligned} \quad [b]$$

$$\begin{aligned} 2d_1a - 2c_1'a^{-3} + d_1'a^{-1} &= -C_1 \\ 2d_1b - 2c_1'b^{-3} + d_1'b^{-1} &= -C_1' \\ 2b_1a - 2a_1'a^{-3} + b_1'a^{-1} &= D_1 \\ 2b_1b - 2a_1'b^{-3} + b_1'b^{-1} &= D_1' \end{aligned} \quad [c]$$

Porównanie równań [b] i [c] doprowadza do wniosku, że są one spełnione jedynie wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a_1a^{-1} &= A_1 - D_1 \\ a_1b^{-1} &= A_1' - D_1' \\ c_1a^{-1} &= B_1 + C_1 \\ c_1b^{-1} &= B_1' + C_1' \end{aligned} \quad [d]$$

skąd wynika, że

$$a(A_1 - D_1) = b(A_1' - D_1'); \quad a(B_1 + C_1) = b(B_1' + C_1') \quad [e]$$

Można pokazać, że równania [e] są zawsze spełnione, jeśli tylko siły działające na pierścień znajdują się w równowadze. Przyrównując np. do zera sumę rzutów wszystkich sił na oś  $x$ , znajdujemy

$$\int_0^{2\pi} \{ [b(\sigma_r)_{r=b} - a(\sigma_r)_{r=a}] \cos\theta - [b(\tau_{r\theta})_{r=b} - a(\tau_{r\theta})_{r=a}] \sin\theta \} d\theta = 0$$

Po podstawieniu  $\sigma_r$  i  $\tau_{r\theta}$  z [a] otrzymujemy pierwsze z równań [e]. W podobny sposób, przyrównując do zera sumy rzutów wszystkich sił na oś  $y$ , otrzymamy drugie z równań [e].

Gdy z równań [d] wyznaczymy stałe  $a_1$  i  $c_1$ , to okaże się, że układy równań [b] i [c] stają się identyczne i do wyznaczenia pozostałych sześciu stałych dysponujemy jedynie czterema równaniami. Konieczne dwa dodatkowe równania wynikają z rozważania przemieszczeń. Składniki drugiego wiersza w wyrażeniu [81] przedstawiają kombinację prostego rozkładu promieniowego i naprężeń zginających w zakrzywionym pręcie (rys. 46). Nakładając

na siebie<sup>1)</sup> ogólne równania na przemieszczenia w obu przypadkach, a mianowicie — równania [g] (par. 33) i równania [q] (par. 31) i podstawiając  $a_1/2$  zamiast  $-P/\pi$  w równaniu [g] oraz  $b_1'$  zamiast  $D$  w równaniach [q], otrzymujemy dwa wieloznaczne składniki w wyrażeniach na przemieszczenia  $u$  i  $v$ :

$$\frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} \theta \sin\theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \sin\theta; \quad \frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} \theta \cos\theta + \frac{2b_1'}{E} \theta \cos\theta$$

W przypadku pełnego pierścienia składniki te muszą zniknąć, a stąd wynika, że

$$\frac{a_1}{2} \frac{1-\nu}{E} + \frac{2b_1'}{E} = 0$$

lub

$$b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4} \quad [f]$$

Rozważając w ten sam sposób trzeci wiersz wyrażenia [81], znajdujemy

$$d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad [g]$$

Związki [f] i [g] wraz z równaniami [b] i [c] wystarczają do określenia wszystkich stałych w funkcji naprężeń, złożonej z drugiego i trzeciego wiersza wyrażenia [81].

Stwierdzamy więc, że w przypadku pełnego pierścienia warunki brzegowe [a] nie wystarczają do określenia rozkładu naprężenia i trzeba przeprowadzić analizę przemieszczeń. Przemieszczenia w pełnym pierścieniu muszą być jednoznaczne i po to, aby ten warunek spełnić, trzeba przyjąć:

$$c_0 = 0; \quad b_1' = -\frac{a_1(1-\nu)}{4}; \quad d_1' = -\frac{c_1(1-\nu)}{4} \quad [82]$$

Widzimy, że stałe  $b_1'$  i  $d_1'$  zależą od liczby Poissona, dlatego też rozkład naprężeń w pełnym pierścieniu jest zwykle zależny od stałych materiałowych. Staje się on niezależny od stałych sprężystych jedynie wtedy, gdy znikają współczynniki  $a_1$  i  $c_1$  i, zgodnie ze związkami [82],  $b_1' = d_1' = 0$ . Ten przypadek szczególny ma miejsce wtedy, gdy (patrz równania [d])

$$A_1 = D_1 \quad \text{oraz} \quad B_1 = -C_1$$

Z takimi warunkami spotykamy się wtedy, gdy wypadkowa sił przyłożonych na każdym brzegu pierścienia równa się zeru. Obliczamy np. wypadkową rzutów na oś  $x$  wszystkich sił przyłożonych do brzegu  $r=a$ . Ta wypadkowa, zgodnie z równaniem [a], równa się

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta) a d\theta = a\pi(A_1 - D_1)$$

Jeśli ona znika, to musi być  $A_1 = D_1$ . Obliczając w ten sam sposób rzut wszystkich sił na oś  $y$  otrzymujemy  $B_1 = -C_1$ , jeśli tylko wypadkowa tych rzutów równa się zeru. Możemy stąd wywnioskować, że rozkład naprężeń w pełnym pierścieniu nie zależy od stałych materiałowych wtedy, jeśli wypadkowa sił przyłożonych na każdym brzegu równa się zeru. Moment tych sił nie musi być równy zeru.

Powyższe wnioski, otrzymane dla przypadku pełnego pierścienia, pozostają w mocy także w najogólniejszym przypadku zagadnienia dwuwymiarowego w ciele wielospójnym. Z ogólnych rozważań J. H. Michella<sup>2)</sup> wynika, że w przypadku ciał wielospójnych (rys. 81) należy wyprowadzić zależności podobne do równań [82] i warunki jednoznaczności przemieszczeń oddzielnie dla każdego niezależnego obiegu — takiego jak obiegi  $A$  i  $B$  na rys. 81. Rozkłady naprężeń w takich ciałach zależą w ogólności od stałych sprężystości materiału. Nie zależą od nich jedynie wtedy, gdy siła wypadkowa obciążenia na każdym brzegu równa się zeru<sup>3)</sup>. Ilościowy wpływ tych stałych na największą wartość naprężenia jest zwykle bardzo mały i praktycznie można go pominąć<sup>4)</sup>. Wniosek ten ma zna-

<sup>1)</sup> Należy zauważyć, że jeśli kąt jest mierzony od osi pionowej (rys. 52), zamiast od osi poziomej (rys. 46), to zamiast  $\theta$  podstawić należy  $\theta + \pi/2$ .

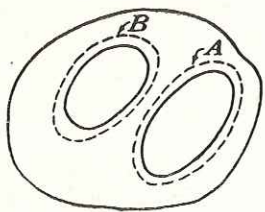
<sup>2)</sup> Loc. cit.

<sup>3)</sup> Należy pamiętać, że pomija się tu siły masowe.

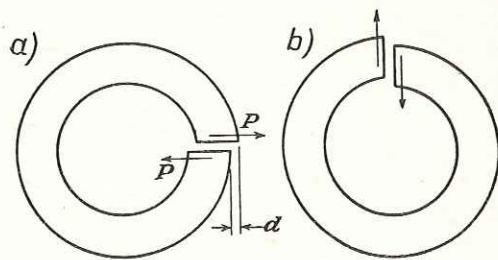
<sup>4)</sup> Badanie tego zagadnienia przeprowadził L. N. G. Filon: „Brit. Assoc. Advancement Sci. Rept.“, 1921. Patrz E. G. Coker i L. N. G. Filon: „Photo-elasticity“, § 6, 07 i § 6. 16.

czenie praktyczne. Zobaczmy później, że naprężenia w materiałach przezroczystych, takich jak szkło lub celuloza, można określić metodą optyczną za pomocą światła spolaryzowanego (patrz par. 42). Opierając się na wspomnianym wniosku, uzyskane na tych materiałach wyniki doświadczalne można zastosować bezpośrednio do innych materiałów takich jak stal — jeśli tylko siły zewnętrzne są takie same.

Wspomnieliśmy (patrz par. 29), że fizyczny sens rozwiązań wieloznacznych można objaśnić przez rozważenie naprężeń początkowych w ciałach wielospójnych. Załóżmy np., że równanie [f] nie jest spełnione. Odpowiednie przemieszczenie pokazano na rys. 82a. Przemieszczenie takie można wywołać działaniem sił  $P$  na pierścień po jego rozcięciu. Jeśli obecnie złączyć ponownie końce pierścienia przez zespawanie lub w jakiś inny sposób, otrzymamy pierścień z naprężeniami wstępnymi. Wielkości tych naprężeń zależą od przemieszczenia początkowego  $d^1$ ). Podobny wynik otrzymamy, jeśli pierścień przetniemy wzdłuż pionowego promienia i dokonamy wzajemnego przesunięcia obu końców pierścienia w kierunku pionowym (rys. 82b). Naprężenia wstępne, wywołane w przy-



Rys. 81



Rys. 82

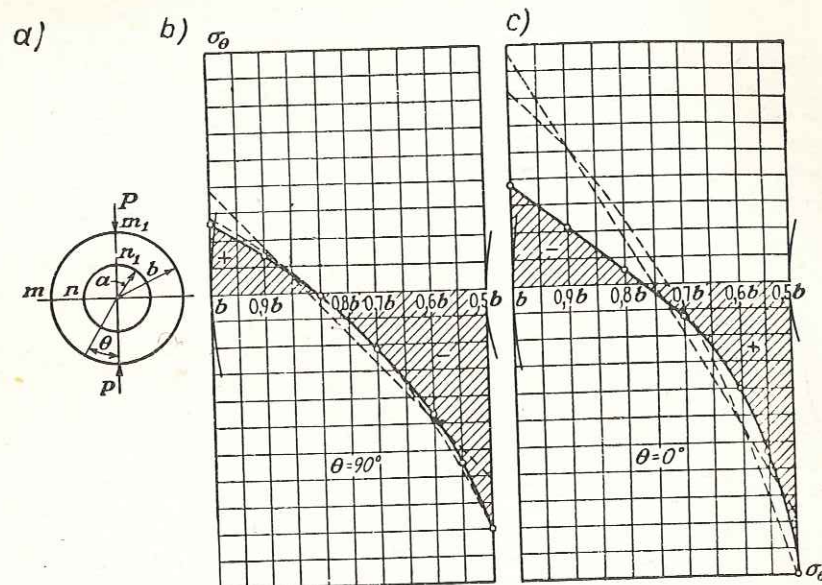
padkach pokazanych na rys. 82a i 82b, odpowiadają wieloznacznym składnikom rozwiązania ogólnego, gdy równania [f] i [g] nie są spełnione.

Pełne rozwiązanie tych zagadnień można otrzymać przez zastosowanie wyników, podanych w par. 31. Okazuje się (por. zad. 4 rozdziału), że przemieszczenia [q] (par. 31) zastosowane do pierścienia posiadają odpowiedni typ nieciągłości.

**40. Zastosowania ogólnego rozwiązania we współrzędnych biegunowych.** Jako pierwszy przykład zastosowania ogólnego rozwiązania zagadnienia płaskiego we współrzędnych prostokątnych rozważymy pierścień kołowy, ściskany dwiema równymi i przeciwnie skierowanymi siłami przyłożonymi wzdłuż średnicy<sup>2)</sup> (rys. 83a). Zaczniemy od rozwiązania dla pełnej tarczy kołowej (par. 37). Wycinamy w tarczy współśrodkowy otwór o promieniu  $a$  i wyznaczamy rozkład naprężeń normalnych i stycznych na brzegu tego otworu. Siły te można zlikwidować drogą przyłożenia układu sił o tej samej wielkości, ale o przeciwnych zwrotach. Układ ten można przedstawić z wystarczającą dokładnością za pomocą kilku pierwszych składników szeregu *Fouriera*. Wtedy odpowiednie naprężenia w pierścieniu można otrzymać za pomocą rozwiązania ogólnego, zamieszczonego w poprzednim paragrafie. Naprężenia te, łącznie z naprężeniami dla pełnej tarczy, stanowią całkowite naprężenie w pierścieniu. Obliczony w ten sposób stosunek  $\sigma_\theta:2P/\pi b$ , dla różnych punktów przekroju  $mn$  i  $m_1n_1$ , dla przypadku  $b=2a$ , podaje tablica<sup>3)</sup> na str. 119.

Dla porównania, w tablicy podane są także wartości naprężeń obliczone na podstawie dwóch teorii elementarnych, opartych na następujących założeniach: 1) przekroje pozostają płaskie, co pociąga za sobą hiperboliczny rozkład naprężenia wzdłuż przekroju, 2) naprężenia rozłożone są według zależności liniowej. Tablica pokazuje, że w przekroju  $mn$ , który jest odpowiednio odległy od punktu przyłożenia obciążeń  $P$ , hiperboliczny rozkład naprężenia daje wyniki prawie ściśle. Błąd w maksymalnej wartości naprężenia wynosi tylko około 3 procent. W przypadku przekroju  $m_1n_1$  błąd rozwiązania przybliżonego jest znacznie większy. Interesujące jest stwierdzenie, że wypadkowa naprężeń normalnych wzdłuż przekroju  $m_1n_1$  wynosi  $P/\pi$ . Należało tego oczekiwać, pamiętając sposób

działania siły skupionej na klin pokazany na rys. 65d. Rozkłady naprężeń normalnych wzdłuż przekrojów  $mn$  i  $m_1n_1$ , obliczone na podstawie podanych trzech metod, przedstawiają wykresy z rys. 83b i 83c. Omówioną tutaj metodę, zastosowaną do przypadku dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił, można stosować także w ogólnym przypadku obciążenia pierścienia siłami skupionymi<sup>1)</sup>.



Rys. 83

Jako drugi przykład rozważymy część ogniwa pewnego typu łańcucha<sup>2)</sup> (rys. 84). Rozkład nacisków wzdłuż brzegu otworu zależy od wielkości luzu między sworzniem i otworem. Podane niżej wyniki otrzymane zostały

$r =$	$b$	0,9b	0,8b	0,7b	0,6b	0,5b
TEORIA DOKŁADNA						
$mn$	2,610	1,477	-0,113	-2,012	-4,610	-8,942
$m_1n_1$	-3,788	-2,185	-0,594	1,240	4,002	10,147
HIPERBOLICZNY ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ						
$mn$	2,885	1,602	0,001	-2,060	-4,806	-8,653
$m_1n_1$	-7,036	-5,010	-2,482	0,772	5,108	11,18
LINIOWY ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ						
$mn$	3,90	1,71	-0,48	-2,67	-4,86	-7,04
$m_1n_1$	-8,67	-5,20	-1,73	1,73	5,20	8,67

<sup>1)</sup> L. N. G. Filon: The Stresses in a Circular Ring, „Selected Engineering Papers“, nr 12, London, 1924, wydane przez Institution of Civil Engineers.

<sup>2)</sup> H. Reissner: „Jahrb. wiss. Gesellsch. Luftfahrt“, str. 126, 1928; H. Reissner i F. Strauch: Ingenieur-Archiv, t. 4, str. 481, 1933.

<sup>1)</sup> Dyskusję takich naprężeń podał A. Timpe: „Z. Math. Physik“, t. 52, str. 348, 1905. Ogólną teorię podał V. Volterra: „Ann. écol. norm.“ Paris, seria 3, t. 24, str. 401—517, 1907. Patrz także A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, wyd. 4, str. 221, 1927; J. N. Goodier: „Proc. Fifth Intern. Congr. Applied Mechanics“, 1938, str. 129.

<sup>2)</sup> Patrz Timoshenko: „Bull. Polytech. Inst.“ Kiew, 1910, oraz Phil. Mag. t. 44, str. 1014, 1922. Patrz także K. Wieghardt: „Sitzber. Akad. Wiss.“, Wien, t. 124, Abt. II, str. 1119, 1915.

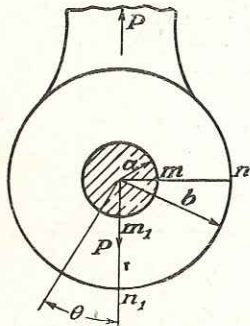
<sup>3)</sup> Przyjmuje się jednostkową grubość tarczy.

przy założeniu, że na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni brzegu działają jedynie naciski normalne o wartościach równych<sup>1)</sup>:

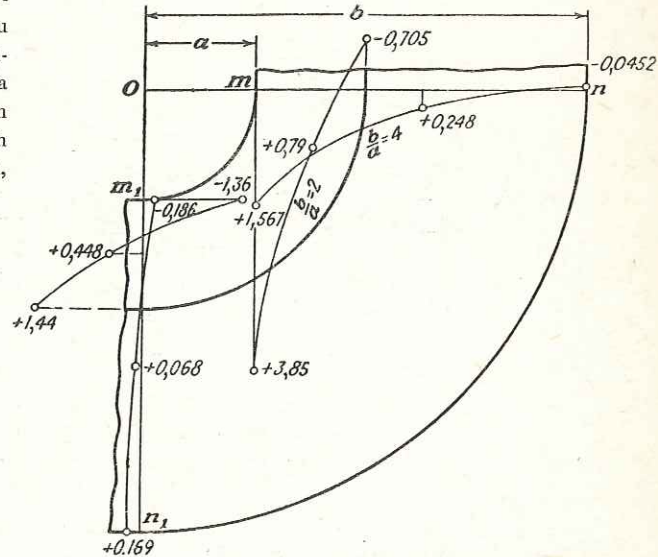
$$(\sigma_r)_{r=a} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi a} \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi b} \quad \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Znaczy to, że naciski rozłożone są na dolnej powierzchni otworu ogniwa i na górnej powierzchni jego kołowego brzegu. Po rozłożeniu tych rozkładów naprężeń w szereg trygonometryczny, obliczymy naprężenia w oparciu o rozwiązanie ogólne [81], podane w poprzednim paragrafie<sup>2)</sup>. Wartości stosunku  $\sigma_\theta : P/2a$  w przekrojach  $mn$  i  $m_1n_1$ , obliczone dla  $b/a = 4$  i  $b/a = 2$  przedstawia rys. 85. Należy zaznaczyć, że w tym przypadku wypadkowa sił działających na każdy z brzegów nie równa się zeru,



Rys. 84



Rys. 85

a więc rozkład naprężeń zależy od stałych sprężystości materiału. Obliczenia zostały przeprowadzone dla liczby Poissona  $\nu = 0,3$ .

**41. Klin obciążony wzdłuż brzegów.** Rozwiązanie ogólne [81] można stosować również w przypadku, gdy obciążenie brzegów klina<sup>3)</sup> przedstawione jest w postaci wielomianów. Po określeniu w zwykły sposób składowych naprężeń ze związku [81] i zachowaniu jedynie składników, w których występuje  $r^n$  ( $n \geq 0$ ), znajdujemy następujące wyrażenia na składowe naprężenia, wypisane według rosnących potęg argumentu  $r$ :

$$\sigma_\theta = 2b_0 + 2d_0\theta + 2a_2 \cos 2\theta + 2c_2 \sin 2\theta + 6r(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + a_3 \cos 3\theta + c_3 \sin 3\theta) + 12r^2(b_2 \cos 2\theta + d_2 \sin 2\theta + a_4 \cos 4\theta + c_4 \sin 4\theta) + \dots$$

$$(n+2)(n+1)r^n[b_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta + a_{n+2} \cos(n+2)\theta + c_{n+2} \sin(n+2)\theta] + \dots \quad [83]$$

$$\tau_{r\theta} = -d_0 + 2a_2 \sin 2\theta - 2c_2 \cos 2\theta + r(2b_1 \sin \theta - 2d_1 \cos \theta + 6a_3 \sin 3\theta - 6c_3 \cos 3\theta) + r^2(6b_2 \sin 2\theta - 6d_2 \cos 2\theta + 12a_4 \sin 4\theta - 12c_4 \cos 4\theta) + \dots$$

$$+ r^n[n(n+1)b_n \sin n\theta - n(n+1)d_n \cos n\theta + (n+1)(n+2) + a_{n+2} \sin(n+2)\theta - (n+1)(n+2)c_{n+2} \cos(n+2)\theta]$$

<sup>1)</sup>  $P$  jest siłą przypadającą na jednostkę grubości tarczy.

<sup>2)</sup> W sprawie elastooptycznej metody badania rozkładu naprężeń w ogniwie łańcucha patrz *E. G. Coker L. N. G. Filon: „Photoelasticity”, § 6. 18 oraz K. Takemura i Y. Hosokawa: Rept. 12, 1926, „Aeronaut. Research. Inst.”, Tôkyô Imp. Univ. Rozkład naprężeń w stalowych ogniwach łańcucha badał J. Mathar: „Forschungsarbeiten”, nr 306, 1928.*

<sup>3)</sup> Patrz *S. Timoshenko: „Theory of Elasticity”, wyd. ros., str. 119, Petersburg, 1914.*

W ten sposób każdej potędze argumentu  $r$  odpowiadają cztery dowolne parametry i jeśli naprężenia, przyłożone na brzegach  $\theta = \alpha$  i  $\theta = \beta$ , wyrażają się za pomocą wielomianów zmiennej  $r$ , to można określić stan naprężeń w klinie zawartym między tymi brzegami.

Jeśli np. warunki brzegowe mają postać:<sup>1)</sup>

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\alpha} = N_0 + N_1 r + N_2 r^2 + \dots$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\beta} = N_0' + N_1' r + N_2' r^2 + \dots \quad [a]$$

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=\alpha} = S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + \dots$$

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=\beta} = S_0' + S_1' r + S_2' r^2 + \dots$$

to przez przyrównanie współczynników przy tych samych potęgach  $r$  otrzymujemy

$$2(b_0 + d_0 \alpha + a_2 \cos 2\alpha + c_2 \sin 2\alpha) = N_0$$

$$6(b_1 \cos \alpha + d_1 \sin \alpha + a_3 \cos 3\alpha + c_3 \sin 3\alpha) = N_1 \quad [b]$$

i ogólnie

$$(n+2)(n+1)[b_n \cos n\alpha + d_n \sin n\alpha + a_{n+2} \cos(n+2)\alpha + c_{n+2} \sin(n+2)\alpha] = N_n$$

wraz z trzema pozostałymi grupami równań, wynikającymi z warunków dla  $\sigma_\theta$  i  $\tau_{r\theta}$  na brzegach  $\theta = \alpha$  i  $\theta = \beta$ . Równania te wystarczają do określenia stałych wchodzących w skład rozwiązania [83].

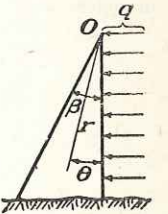
Rozważmy obecnie przykład pokazany na rys. 86. Na powierzchni klina  $\theta = 0$  działa równomiernie rozłożone ciśnienie  $q$ , a powierzchnia  $\theta = \beta$  jest wolna od obciążeń. Posługując się jedynie pierwszymi wierszami równań [83] na  $\sigma_\theta$  i  $\tau_{r\theta}$ , otrzymujemy równania, z których możemy określić stałe  $b_0, d_0, a_2$  i  $c_2$  w następującej postaci:

$$2b_0 + 2a_2 = -q$$

$$2b_0 + 2d_0\beta + 2a_2 \cos 2\beta + 2c_2 \sin 2\beta = 0$$

$$-d_0 - 2c_2 = 0$$

$$-d_0 + 2a_2 \sin 2\beta - 2c_2 \cos 2\beta = 0$$



Rys. 86

skąd, podstawiając  $k = \tan \beta - \beta$ , znajdujemy:

$$c_2 = \frac{q}{4k}; \quad a_2 = -\frac{q \tan \beta}{4k}; \quad d_0 = -\frac{q}{2k}; \quad 2b_0 = -q + \frac{q \tan \beta}{2k}$$

Po podstawieniu tych wielkości w równaniu [83], otrzymujemy<sup>2)</sup>

$$\sigma_\theta = \frac{q}{k} \left( -k + \frac{1}{2} \tan \beta - \theta - \frac{1}{2} \tan \beta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{q}{k} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \beta \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \quad [c]$$

$$\sigma_r = \frac{q}{k} \left( -k + \frac{1}{2} \tan \beta - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \tan \beta \cos 2\theta \right)$$

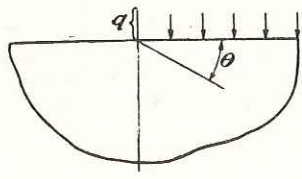
Składowe naprężenia odpowiadające innym wyrażeniom wielomianu [a], przedstawiającego rozkład obciążeń wyznaczyć można w podobny sposób.

Przedstawiona wyżej metoda, służąca do wyznaczenia naprężeń w klinie, może być również zastosowana do przypadku półnieskończonej tarczy. Należy jedynie przyjąć, że kąt wierzchołkowy klina  $\beta$  równa się  $\pi$ . Np. na-

<sup>1)</sup> Składniki  $N_0, N_0', S_0, S_0'$  nie są niezależne. Przedstawiają one naprężenia w wierzchołku klina  $r=0$  i można przyjąć dowolnie jedynie trzy z nich.

<sup>2)</sup> Rozwiązanie to inną metodą otrzymał *M. Levy: „Compt. rend.”, t. 126, str. 1235, 1898. Patrz także P. Füllinger: „Z. Math. Physik“ t. 60, 1912. Zastosowanie funkcji naprężeń tego typu w przypadku belek w kształcie klina o przekroju skrzynkowym podał E. Reissner: „J. Aeronaut. Sci.”, t. 7, str. 353, 1940. Inne obciążenia klinów rozważał C. J. Tranter: „Quart. J. Mechs. and Appl. Math.”, t. 1, str. 125, 1948.*

prężenia w przypadku pokazanym na rys. 87 otrzymuje się z równań [c] przez podstawienie  $\beta=\pi$ . Wtedy



Rys. 87

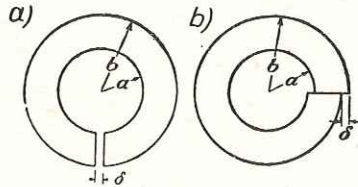
$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= -\frac{q}{\pi} \left( \pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{q}{2\pi} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_r &= -\frac{q}{\pi} \left( \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)\end{aligned}\quad [d]$$

### ZADANIA

1. Sprawdzić poprawność równania [d] par. 25 w przypadku

$$\Phi = x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = r^4 \cos 2\theta$$

2. Sprawdzić znaczenie funkcji naprężeń  $C\theta$ , gdzie  $C$  oznacza stałą. Zastosować ją do pierścienia  $a < r < b$  i do nieskończonej tarczy. Pierścień jest utwierdzony na brzegu  $x=a$  i poddany wzdłuż brzegu  $r=b$  równomiernemu ścinaniu, tworzącemu moment  $M$ . Korzystając z równań [49], [50] i [51] znaleźć wyrażenie na przemieszczenie obwodowe  $v$  dla  $r=b$ .



Rys. 88

3. Pokazać, że w zagadnieniu przedstawionym na rys. 45, gdy promień wewnętrzny  $a$  jest mały w porównaniu z promieniem zewnętrznym  $b$ , wartość  $\sigma_{\theta}$  na brzegu wewnętrznym wynosi

$$\frac{\nu E}{4\pi} \left( 1 - 2 \log \frac{b}{a} \right)$$

i jest duża oraz ma ujemną wartość, gdy  $\alpha$  jest dodatnie (rozważa się pierścień po zamknięciu szczeliny).

Jaka może być największa rozwartość szczeliny (kąt  $\alpha$ ), którą można zamknąć bez przekroczenia granicy sprężystości, jeśli  $b/a=10$ ,  $E=2,1 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>, granica sprężystości =  $2,8 \cdot 10^3$  kG/cm<sup>2</sup>.

4. Posługując się wynikami par. 31 należy otrzymać równania dla naprężeń spowodowanych przez zamknięcie pierścienia ze szczeliną równoległą o szerokości  $\delta$  (rys. 88a) oraz dla naprężeń wywołanych przesunięciem o wielkość  $\delta$  (rys. 88b), w funkcji parametru  $\delta$ .

5. Wykorzystując równania [62] znaleźć za pomocą superpozycji naprężenia w nieskończonej tarczy z otworem, gdy stan naprężenia w nieskończoności jest jednorodny i składa się z równomiernego rozciągania tak w kierunku  $x$ , jak i  $y$ .

Wyniki powinny odpowiadać równaniom [45], w których przyjęto  $b/a \rightarrow \infty$ ,  $p_i=0$ ,  $p_0 = -S$ . Wykorzystać ten fakt jako sprawdzian.

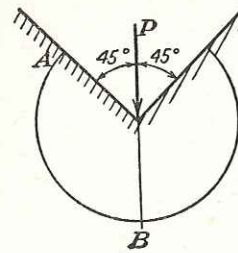
6. Znaleźć wyrażenia na przemieszczenia w przypadku naprężeń określonych równaniami [62] i sprawdzić, że są one jednoznaczne.

7. Przekształcić funkcję naprężeń [a] z par. 33 do współrzędnych kartezjańskich i następnie obliczyć naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , które są równoważne rozkładowi naprężenia wyrażonego równaniami [66']. Pokazać, że wartości te dążą do zera, gdy odległość od siły wzrasta w dowolnym kierunku.

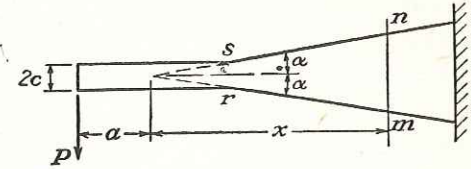
8. Sprawdzić, że w przypadku szczególnym  $\alpha=\pi/2$  funkcja naprężeń [d] z par. 35 jest zgodna z równaniem [69] oraz zbadać, czy rozkład naprężeń [c] par. 35, dąży do rozkładu wynikającego z elementarnej teorii zginania przy małych wartościach  $\alpha$ .

9. Pokazać drogę obliczenia sił wypadkowych, że rozkład naprężeń [c], par. 35, odpowiada w rzeczywistości obciążeniu klina w wierzchołku momentem pary sił  $M$ .

10. Siła  $P$  przypadająca na jednostkę grubości przyłożona jest w wierzchołku wycięcia o kącie  $90^\circ$ , wykonanego w dużej tarczy zgodnie z rys. 89. Wyznaczyć naprężenia i siłę poziomą, przenoszoną wzdłuż łuku  $AB$ .



Rys. 89



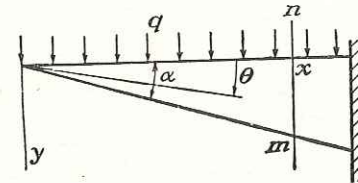
Rys. 90

11. Znaleźć wyrażenia na naprężenia  $\sigma_x$  w przekroju  $mn$  pokazanym na rys. 90. Z teorii klina, przedstawionej w niniejszym rozdziale, i z teorii belki wspornikowej, przedstawionej w rozdziale 3, otrzymuje się różne rozkłady naprężenia w złączu. Skomentować ten fakt.

12. Określić wartość stałej  $C$  występującej w funkcji naprężeń

$$\Phi = C[r^2(\alpha - \theta) + r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \alpha]$$

koniecznej dla spełnienia warunków na górnym i dolnym brzegu trójkątnej tarczy, pokazanej na rys. 91. Wyznaczyć składowe naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  w przekroju pionowym  $mn$ . Narysować krzywe odpowiadające przypadkowi  $\alpha=20^\circ$  i dla porównania podać krzywe otrzymane z elementarnej teorii belek.



Rys. 91

13. Określić wartość stałej  $C$ , występującej w funkcji naprężeń

$$\Phi = Cr^2 (\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$$

żądając spełnienia warunków

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = s \quad \text{przy } \theta = \alpha$$

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = -s \quad \text{przy } \theta = -\alpha$$

odpowiadających równomiernemu rozkładowi sił stycznych na każdym z brzegów klina skierowanych od wierzchołka. Sprawdzić, że na wierzchołek klina nie działa ani siła skupiona, ani moment pary sił.

14. Znaleźć funkcję naprężeń typu

$$\alpha_3 r^3 \cos 3\theta + b_1 r^3 \cos \theta$$

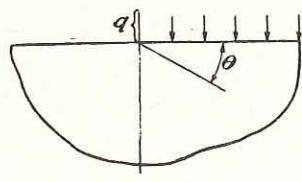
spełniającą warunki

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = sr \quad \text{przy } \theta = \alpha$$

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = -sr \quad \text{przy } \theta = -\alpha$$

w których  $s$  oznacza stałą. Wykreślić funkcję obciążenia dla dodatnich wartości  $s$ .

prężenia w przypadku pokazanym na rys. 87 otrzymuje się z równań [c] przez podstawienie  $\beta=\pi$ . Wtedy



Rys. 87

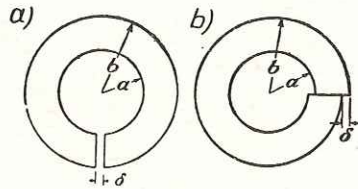
$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= -\frac{q}{\pi} \left( \pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{q}{2\pi} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_r &= -\frac{q}{\pi} \left( \pi - \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)\end{aligned}\quad [d]$$

### ZADANIA

1. Sprawdzić poprawność równania [d] par. 25 w przypadku

$$\Phi = x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = r^4 \cos 2\theta$$

2. Sprawdzić znaczenie funkcji naprężeń  $C\theta$ , gdzie  $C$  oznacza stałą. Zastosować ją do pierścienia  $a < r < b$  i do nieskończonej tarczy. Pierścień jest utwierdzony na brzegu  $x=a$  i poddany wzdłuż brzegu  $r=b$  równomiernemu ścinaniu, tworzącemu moment  $M$ . Korzystając z równań [49], [50] i [51] znaleźć wyrażenie na przemieszczenie obwodowe  $v$  dla  $r=b$ .



Rys. 88

3. Pokazać, że w zagadnieniu przedstawionym na rys. 45, gdy promień wewnętrzny  $a$  jest mały w porównaniu z promieniem zewnętrznym  $b$ , wartość  $\sigma_\theta$  na brzegu wewnętrznym wynosi

$$\frac{\nu E}{4\pi} \left( 1 - 2 \log \frac{b}{a} \right)$$

i jest duża oraz ma ujemną wartość, gdy  $\alpha$  jest dodatnie (rozważa się pierścień po zamknięciu szczeliny).

Jaka może być największa rozwartość szczeliny (kąt  $\alpha$ ), którą można zamknąć bez przekroczenia granicy sprężystości, jeśli  $b/a=10$ ,  $E=2,1 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>, granica sprężystości =  $2,8 \cdot 10^3$  kG/cm<sup>2</sup>.

4. Posługując się wynikami par. 31 należy otrzymać równania dla naprężeń spowodowanych przez zamknięcie pierścienia ze szczeliną równoległą o szerokości  $\delta$  (rys. 88a) oraz dla naprężeń wywołanych przesunięciem o wielkość  $\delta$  (rys. 88b), w funkcji parametru  $\delta$ .

5. Wykorzystując równania [62] znaleźć za pomocą superpozycji naprężenia w nieskończonej tarczy z otworem, gdy stan naprężenia w nieskończoności jest jednorodny i składa się z równomiernego rozciągania tak w kierunku  $x$ , jak i  $y$ .

Wyniki powinny odpowiadać równaniom [45], w których przyjęto  $b/a \rightarrow \infty$ ,  $p_i=0$ ,  $p_0=-S$ . Wykorzystać ten fakt jako sprawdzian.

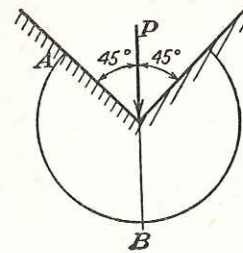
6. Znaleźć wyrażenia na przemieszczenia w przypadku naprężeń określonych równaniami [62] i sprawdzić, że są one jednoznaczne.

7. Przekształcić funkcję naprężeń [a] z par. 33 do współrzędnych kartezjańskich i następnie obliczyć naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , które są równoważne rozkładowi naprężenia wyrażonego równaniami [66']. Pokazać, że wartości te dążą do zera, gdy odległość od siły wzrasta w dowolnym kierunku.

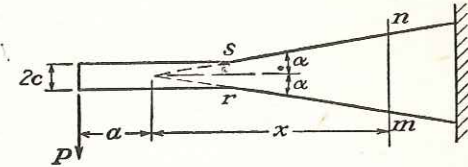
8. Sprawdzić, że w przypadku szczególnym  $\alpha=\pi/2$  funkcja naprężeń [d] z par. 35 jest zgodna z równaniem [69] oraz zbadać, czy rozkład naprężeń [e] par. 35, dąży do rozkładu wynikającego z elementarnej teorii zginania przy małych wartościach  $\alpha$ .

9. Pokazać drogę obliczenia sił wypadkowych, że rozkład naprężeń [e], par. 35, odpowiada w rzeczywistości obciążeniu klina w wierzchołku momentem pary sił  $M$ .

10. Siła  $P$  przypadająca na jednostkę grubości przyłożona jest w wierzchołku wycięcia o kącie  $90^\circ$ , wykonanego w dużej tarczy zgodnie z rys. 89. Wyznaczyć naprężenia i siłę poziomą, przenoszoną wzdłuż łuku  $AB$ .



Rys. 89



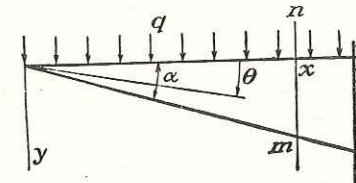
Rys. 90

11. Znaleźć wyrażenia na naprężenia  $\sigma_x$  w przekroju  $mn$  pokazanym na rys. 90. Z teorii klina, przedstawionej w niniejszym rozdziale, i z teorii belki wspornikowej, przedstawionej w rozdziale 3, otrzymuje się różne rozkłady naprężenia w złączu. Skomentować ten fakt.

12. Określić wartość stałej  $C$  występującej w funkcji naprężeń

$$\Phi = C[r^2(\alpha - \theta) + r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \alpha]$$

koniecznej dla spełnienia warunków na górnym i dolnym brzegu trójkątnej tarczy, pokazanej na rys. 91. Wyznaczyć składowe naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  w przekroju pionowym  $mn$ . Narysować krzywe odpowiadające przypadkowi  $\alpha=20^\circ$  i dla porównania podać krzywe otrzymane z elementarnej teorii belek.



Rys. 91

13. Określić wartość stałej  $C$ , występującej w funkcji naprężeń

$$\Phi = Cr^2 (\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$$

żądając spełnienia warunków

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = s \quad \text{przy } \theta = \alpha$$

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = -s \quad \text{przy } \theta = -\alpha$$

odpowiadających równomiernemu rozkładowi sił stycznych na każdym z brzegów klina skierowanych od wierzchołka. Sprawdzić, że na wierzchołek klina nie działa ani siła skupiona, ani moment pary sił.

14. Znaleźć funkcję naprężeń typu

$$a_3 r^3 \cos 3\theta + b_1 r^3 \cos \theta$$

spełniającą warunki

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = sr \quad \text{przy } \theta = \alpha$$

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = -sr \quad \text{przy } \theta = -\alpha$$

w których  $s$  oznacza stałą. Wykreślić funkcję obciążenia dla dodatnich wartości  $s$ .

15. Znaleźć funkcję naprężeń typu

$$a_4 r^4 \cos 4\theta + b_2 r^4 \cos 2\theta$$

spełniającą warunki

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = sr^2 \quad \text{przy} \quad \theta = \alpha$$

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = -sr^2 \quad \text{przy} \quad \theta = -\alpha$$

w których  $s$  jest wielkością stałą. Naskicować obciążenie.

16. Wyznaczyć rozkład naprężeń

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right); \quad \tau_{xy} = -\frac{p}{\pi} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

posługując się funkcją naprężeń (patrz równanie [a] par. 34)

$$\Phi = -\frac{p}{2\pi} \left[ (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - xy \right]$$

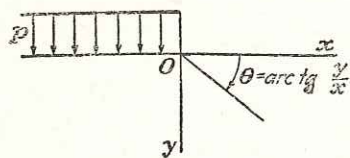
i pokazać, że rozwiązuje ona zagadnienia dla półnieskończonej tarczy, pokazanej na rys. 92. Obciążenie rozciąga się od zera do  $-\infty$ .

Zbadać wartość  $\tau_{xy}$ : a) dążąc do punktu  $O$  wzdłuż brzegu  $Ox$ , b) dążąc do punktu  $O$  wzdłuż osi  $y$  (różnica spowodowana jest nieciągłością obciążenia w punkcie  $O$ ).

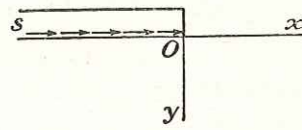
17. Pokazać, że funkcja naprężeń

$$\Phi = \frac{s}{\pi} \left[ \frac{1}{2} y^2 \log(x^2 + y^2) + xy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \right]$$

rozwiązuje zagadnienie tarczy półnieskończonej, pokazanej na rys. 93, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem stycznym  $s$ , rozciągającym się od punktu  $O$  do  $-\infty$ . Pokazać, że  $\sigma_x$  rośnie nieograniczenie, gdy zbliżamy się z dowolnego kierunku do punktu  $O$ . (Fakt ten wywołany jest nieciągłością obciążenia w punkcie  $O$ . Skończoną wartość  $\sigma_x$  otrzymujemy w przypadku wygładzenia tej nieciągłości przez zmianę przebiegu krzywej obciążenia w okolicy punktu  $O$ ).



Rys. 92



Rys. 93

18. Posługując się wynikami zadania 16 i korzystając z zasady superpozycji, znaleźć  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  w przypadku, gdy ciśnienie  $p$  działa na odcinku  $-a < x < a$  prostoliniowego brzegu tarczy półnieskończonej. Pokazać, że naprężenie styczne ma postać

$$\tau_{xy} = -\frac{p}{\pi} \frac{4axy^2}{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}$$

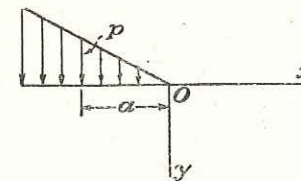
i sprawdzić jego zachowanie w punkcie  $x=a$  i  $y=0$  jeśli: a) zbliżamy się do tego punktu wzdłuż brzegu; b) zbliżamy się wzdłuż linii  $x=a$ .

19. Korzystając z wyników zadania 17 naskicować zmianę  $\sigma_x$  wzdłuż brzegu  $y=0$  w przypadku obciążenia równomiernym obciążeniem stycznym  $s$ , przyłożonym na odcinku brzegu  $-a < x < a$ .

20. Pokazać, że funkcja naprężeń

$$\Phi = -\frac{p}{2\pi a} \left[ \left( \frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{3} y^3 \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{3} x^2 y \right]$$

rozwiązuje zagadnienie półnieskończonej tarczy, pokazanej na rys. 94, obciążonej ciśnieniem wzrastającym liniowo i rozciągającym się od zera do  $-\infty$ .

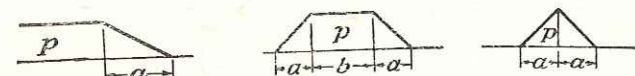


Rys. 94

21. Pokazać, że w przypadku, gdy ciśnienie  $p$  w zadaniu 20 zastąpić siłami stycznymi  $s$ , to odpowiednia funkcja naprężeń ma postać

$$\Phi = \frac{s}{2\pi a} \left[ xy^2 \log(x^2 + y^2) + (x^2 y - y^3) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 3xy^2 \right]$$

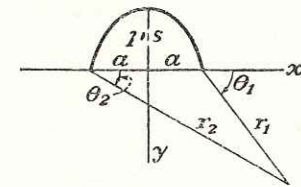
22. Pokazać, w jaki sposób można drogą superpozycji otrzymać rozkłady obciążeń pokazane na rys. 95, posługując się obciążeniami o charakterze pokazanym na rys. 94.



Rys. 95

23. Pokazać, że obciążenie paraboliczne, przedstawione na rys. 96, opisane jest w przypadku ciśnienia funkcją naprężeń

$$-\frac{p}{\pi} \left\{ -\frac{xy^3}{3a^2} \log \frac{r_2^2}{r_1^2} - \left[ \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \left( 1 - \frac{x^2}{6a^2} + \frac{y^2}{2a^2} \right) \right] \alpha + \frac{2}{3} ax\beta + \frac{1}{2} ay \left( 1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right\}$$



Rys. 96

a w przypadku obciążenia stycznego funkcją

$$\frac{s}{\pi} \left\{ \frac{y^2}{6a^2} (3a^2 - 3x^2 + y^2) \log \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{2}{3} ay\beta + \frac{xy}{3a^2} (x^2 - 3y^2 - 3a^2) \alpha + \frac{4xy^2}{3a} \right\}$$

przy czym

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2; \quad r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}; \quad \beta = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$



24. Pokazać, że w zagadnieniu przedstawionym na rys. 72 istnieje wzdłuż średnicy pionowej, z wyjątkiem punktów  $A$  i  $B$ , naprężenie rozciągające  $\sigma_x = 2P/\pi d$ . Rozważyć równowagę półkolistej części  $ADB$  posługując się małymi półokręgami poprowadzonymi wokół  $A$  i  $B$  w sposób pokazany na rys. 65c i d.

25. Sprawdzić, że funkcja naprężeń

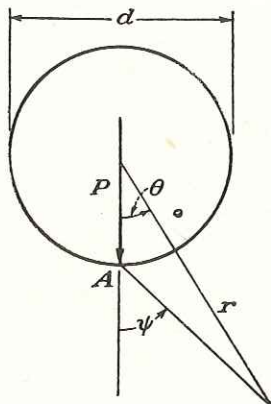
$$\Phi = -\frac{P}{\pi} \left\{ \psi r \cos^2 \theta - \frac{1}{4} (1 - \nu) r \log r \cos \theta - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta + \frac{d}{4} \log r - \frac{d^2}{32} (3 - \nu) \frac{1}{r} \cos \theta \right\}$$

spełnia warunki brzegowe w przypadku siły  $P$ , działającej na otwór w nieskończonej tarczy, daje zerową wartość naprężenia w nieskończoności oraz naprężenia obwodowe wokół otworu równe

$$\frac{P}{\pi d} [2 + (3 - \nu) \cos \theta]$$

z wyjątkiem punktu  $A$  (rys. 97).

Pokazać, że określa ona również jednoznacznie przemieszczenia.



Rys. 97

26. Wyprowadzić z zadania 25 drogą całkowania równanie na naprężenia obwodowe wokół otworu w przypadku równomiernego ciśnienia  $p$  na jego brzeg i sprawdzić otrzymany wynik za pomocą równań [46].

27. Znaleźć ogólną postać funkcji  $f(r)$ , wchodzącej w skład funkcji naprężeń  $\theta f(r)$  i znaleźć równanie na składowe naprężenia  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ . Czy taką funkcję można stosować w przypadku zamkniętego pierścienia?

## ROZDZIAŁ 5

### METODA ELASTOPTYCZNA

**42. Elastooptyczny pomiar naprężenia.** Granice tarcz do tej pory rozpatrywanych posiadały proste kształty geometryczne. Dla kształtów bardziej złożonych trudności, na jakie napotykały przy znajdowaniu rozwiązań analitycznych, stają się trudne do pokonania. Możemy ich uniknąć, rozwiązując tego rodzaju zagadnienia metodami numerycznymi (które omówimy w „Dodatku“) lub metodami eksperymentalnymi, takimi jak pomiar odkształceń na powierzchni za pomocą tensometrów lub metodą *elastoptyczną*. Metoda ta oparta jest na odkryciu *Dawida Brewstera*<sup>1)</sup>, który zauważył, że przy przejściu *spolaryzowanego* światła przez kawałek szkła, wskutek wywołanego w nim stanu naprężenia, pojawia się układ wielobarwnych prążków. *Brewster* zaproponował, aby układy tych barwnych prążków wykorzystać do pomiaru naprężeń w takich konstrukcjach inżynierskich, jak mosty kamienne, przeprowadzając badania w świetle spolaryzowanym szklanych modeli tych konstrukcji przy różnych warunkach obciążenia. Propozycja ta nie została w owym czasie wykorzystana przez inżynierów. Porównania układów barwnych prążków elastoptycznych z rozwiązaniami analitycznymi przeprowadzał fizyk *Maxwell*<sup>2)</sup>. Wspomniana propozycja została wykorzystana znacznie później przez *C. Wilsona* przy badaniu naprężeń w belce obciążonej siłą skupioną<sup>3)</sup> oraz przez *A. Mesnagera* przy badaniu mostów łukowych<sup>4)</sup>. Metodę tę rozwinął i szeroko stosował *E. G. Coker*<sup>5)</sup>, który na materiał modelu używał celulozoidu. Późniejsi badacze używali w tym celu bakelitu, a w ostatnich latach — fosterytu<sup>6)</sup>.

W dalszym ciągu weźmiemy pod uwagę jedynie najprostsze przyrządy elastoptyczne<sup>7)</sup>. Promieniowanie świetlne uważa się za fale poprzeczne, przy czym w świetle zwykłym (dziennym) drgania zachodzą w sposób nieuporządkowany we wszystkich kierunkach prostopadłych do kierunku promienia świetlnego. Przez odbicie światła od płytki szklanej pokrytej z jednej strony czarną farbą lub przepuszczenie przez filtr *polaryzacyjny* — *pryzmat Nicola* lub *polaroid* — otrzymujemy w większym lub mniejszym stopniu spolaryzowaną wiązkę promieni świetlnych, w której przeważają drgania poprzeczne o pewnym określonym kierunku. Płaszczyznę, w której zawarty jest promień i zachodzą drgania poprzeczne, nazywamy wprost

<sup>1)</sup> *D. Brewster*: „Trans. Roy. Soc.“ (London), 1816, str. 156.

<sup>2)</sup> *J. Clerk Maxwell*: „Sci. Papers“; t. 1, str. 30.

<sup>3)</sup> *C. Wilson*: „Phil. Mag.“, t. 32, str. 481, 1891.

<sup>4)</sup> *A. Mesnager*: „Ann. ponts et chaussées“, 4-e Trimestre, str. 129, 1901 i 9-e Series, t. 16, str. 135, 1913.

<sup>5)</sup> Liczne publikacje prof. *Cokera* zebrane są w jego pracach: „Gen. Elec. Rev.“, t. 23, str. 870, 1920 oraz „J. Franklin Inst.“, t. 199, str. 289, 1925. Patrz także *E. Coker* i *L. N. G. Filon*: „Photo-elasticity“ Cambridge University Press, 1931.

<sup>6)</sup> *M. M. Leven*: „Proc. Soc. Expl. Stress Analysis“, t. 6, nr 1, 1948.

<sup>7)</sup> Bardziej szczegółowe omówienia można znaleźć w następujących książkach: „Handbook of Experimental Stress Analysis“, 1950; *M. M. Frocht*: „Photoelasticity“, 1941 i 1948, oraz w książce cytowanej w przypisie 5.