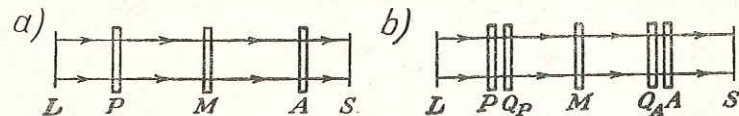


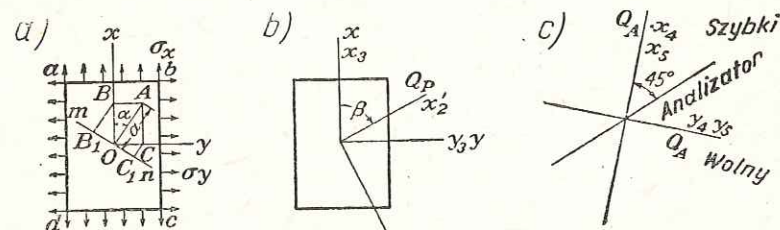
plaszczyną drgań<sup>1)</sup>. Tego rodzaju światło stosuje się w elastoptycznych badaniach stanu naprężenia. Będziemy brać pod uwagę jedynie światło monochromatyczne.

Rys. 98a przedstawia schemat polaryskopu liniowego. Wiązka promieni świetlnych, wychodząca z  $L$ , przechodzi przez polaryzator  $P$ , a następnie — przez przezroczysty model  $M$ ,



Rys. 98

w którym, w zależności od panującego w nim stanu naprężenia, ulega odpowiedniej modyfikacji. Po przejściu przez model wiązka przechodzi przez drugi filtr polaryzacyjny  $A$ , tak zwany analizator, i pada na ekran  $S$ , na którym powstaje układ prążków interferencyjnych (rys. 100—104).



Rys. 99

Na rys. 99a przedstawiony jest mały element  $abcd$  lewej powierzchni modelu  $M$ , na którym naprężenia główne  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  zaznaczone są dla wygody pionowo i poziomo. Spolaryzowany w płaszczyźnie  $OA$  promień świetlny (rys. 99) przybywa z  $P$  w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Przyjmując, że odpowiadające rozpatrywanemu promieniowi drganie jest drganiem prostym i harmonicznym, można przedstawić je za pomocą „przesunięcia” o kierunku  $OA$  i wartości

$$s = a \cos pt \quad [a]$$

gdzie  $p$  oznacza częstość drgań pomnożoną przez  $2\pi$ , zależną od barwy światła, zaś  $t$  — czas.

Przesunięcie [a] w płaszczyźnie  $OA$  rozkłada się na dwie składowe o amplitudach  $OB = a \cos \alpha$  i  $OC = a \sin \alpha$ , leżące odpowiednio w płaszczyznach  $Ox$  i  $Oy$ . Odpowiednie składowe przesunięcia równają się

$$x = a \cos \alpha \cos pt; \quad y = a \sin \alpha \cos pt \quad [b]$$

Wpływ naprężeń głównych  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ , działających w punkcie  $O$  płytki, polega na zmianie prędkości, z którą te składowe przechodzą przez płytkę. Niech  $v_x$  i  $v_y$  oznaczają prędkość w płaszczyznach  $Ox$  i  $Oy$ . Jeśli  $h$  jest grubością płytki, to czasy, w których te dwie składowe przebywają płytkę, wynoszą odpowiednio

$$t_1 = \frac{h}{v_x}; \quad t_2 = \frac{h}{v_y} \quad [c]$$

<sup>1)</sup> Niektórzy autorzy wprowadzają pojęcie płaszczyzny polaryzacji, określając tą nazwą płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny drgań. W płaszczyźnie drgań leży oś polaryzacyjna filtru polaryzacyjnego (przyp. tłum.).

Ponieważ fale świetlne przewodzone są bez zmiany postaci, to przesunięcie  $x_1$  (w kierunku osi  $x$ ) światła opuszczającego płytkę w chwili  $t$  odpowiada przesunięciu w kierunku osi  $x$  światła padającego na płytkę we wcześniejszej chwili  $t_1$ . Tak więc

$$x_1 = a \cos \alpha \cos p(t - t_1); \quad y_1 = a \sin \alpha \cos p(t - t_2) \quad [d]$$

Tym samym, przy opuszczaniu płytki, składowe te charakteryzuje pewna różnica faz  $\Delta = p(t_2 - t_1)$ . Ustalono doświadczalnie, że dla określonego materiału, znajdującego się w określonej temperaturze, różnica faz jest proporcjonalna do różnicy wartości naprężeń głównych. Różnica faz jest ponadto również proporcjonalna do grubości płytki. Związek ten zwykle przedstawia się w postaci

$$\Delta = \frac{2\pi h}{\lambda} \cdot C(\sigma_x - \sigma_y) \quad [e]$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali (w próżni), a  $C$  — określoną doświadczalnie stałą elastoptyczną, przy czym  $C$  zależy od długości fali, temperatury i od rodzaju materiału.

Analizator  $A$  przepuszcza jedynie drgania lub ich składowe zachodzące w jego płaszczyźnie drgań. Jeśli płaszczyzna ta tworzy kąt prosty z płaszczyzną drgań polaryzatora<sup>1)</sup> i nie ma modelu w przestrzeni pomiarowej polaryskopu, to  $A$  nie przepuszcza światła i ekran pozostaje ciemny.

Zbadamy obecnie, co zachodzi, gdy w przestrzeni pomiarowej polaryskopu znajduje się model. Składowe [d], dochodzące do analizatora, można przedstawić następująco

$$x_2 = a \cos \alpha \cos \psi; \quad y_2 = a \sin \alpha \cos (\psi - \Delta) \quad [f]$$

ponieważ zachowują one różnicę faz  $\Delta$  przy przejściu od  $M$  do  $A$ . W równaniach [f] przyjęto oznaczenie  $\psi = p t + \text{const}$ .

Płaszczyzna drgań  $A$  przedstawiona jest na rys. 99a dla wygody prostą  $mn$ , prostopadłą do  $OA$ . Składowe drgań [f], przepuszczane przez  $A$ , pokrywają się z kierunkiem  $Om$  i za pomocą równań [f] wyrażają się następująco

$$x_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cos \psi; \quad -y_2 \cos \alpha = -\frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cos (\psi - \Delta)$$

Drganie wypadkowe wzdłuż  $mn$  jest przeto określone wyrażeniem

$$\frac{1}{2} a \sin 2\alpha [\cos \psi - \cos (\psi - \Delta)] = -a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \sin \left( \psi - \frac{\Delta}{2} \right)$$

Czynnik  $\sin \left( \psi - \frac{\Delta}{2} \right)$  świadczy o tym, że mamy do czynienia z drganiem prostym harmonicznym. Amplituda tego drgania wynosi

$$a \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \quad [g]$$

Z powyższego wynika, że pewna część światła osiągnie ekran, jeśli tylko nie będzie  $\sin 2\alpha = 0$  lub  $\sin \Delta/2 = 0$ . Jeśli  $\sin 2\alpha = 0$ , to kierunki naprężeń głównych są równoległe do (wzajemnie prostopadłych) kierunków polaryzacji  $P$  i  $A$ . Tak więc promienie, które przechodzą przez takie punkty

<sup>1)</sup> Mówi się, że polaryzator i analizator są „skrzyżowane”.

modelu  $M$ , będą wygaszane i odpowiednie punkty na ekranie pozostaną ciemne. Punkty te są zwykle ułożone na jednej lub większej liczbie krzywych, które na ekranie  $S$  uwidoczniają się w postaci ciemnych pasm. Każdą taką krzywą nazywamy „izokliną“. Na izoklinie można wykreślić cały szereg krótkich odcinków równoległych do osi  $P$  i  $A$ , dla zaznaczenia głównych kierunków naprężeń w tych punktach. Przez obrót polaryzatora  $P$  i analizatora  $A$ , przy wzajemnie prostopadłych osiach otrzymuje się różne izokliny. Naniesione na izoklinach krótkie odcinki tworzą układy elementów kierunkowych, przy czym układy te są podobne do obrazu utworzonego przez opiłki stalowe w polu sił magnetycznych. Układy elementów kierunkowych umożliwiają wykreślenie linii krzywych stycznych w każdym punkcie do kierunków naprężeń głównych.

Jeśli  $\sin \Delta/2 = 0$ , to wtedy  $\Delta = 2n\pi$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ . Gdy  $\Delta = 0$ , wtedy naprężenia główne są sobie równe. Punkty, w których to zachodzi, nazywają się punktami osobliwymi (izotropowymi) i na ekranie pozostają ciemne.

Punkty, w których  $n = 1, n = 2, \dots$  tworzą ciemne prążki 1, 2 itd. rzędu. Prążki te nazywają się izochromami (ponieważ przy użyciu światła białego każdy z nich odpowiada wygaszonym promieniom o pewnej długości fali, a więc tym samym pewnej barwie widma). Z równań [e] wynika, że różnica  $\sigma_x - \sigma_y$  na izochromie o  $n = 2$  jest dwa razy większa od różnicy  $\sigma_x - \sigma_y$  na izochromie o  $n = 1$ , itd... Aby określić różnicę naprężeń głównych, należy znać różnicę naprężeń, odpowiadającą izochromie pierwszego rzędu, czyli tak zwaną wartość rzędu izochromy<sup>1)</sup>.

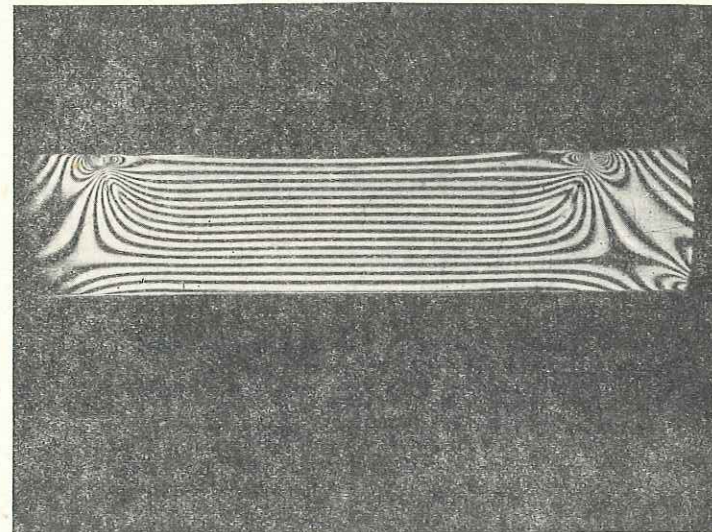
Wartość rzędu izochromy można wyznaczyć za pomocą poddanej prostemu rozciąganiu próbki w kształcie wąskiego płaskownika. Ponieważ stan naprężenia w próbce jest równomierny, przeto podczas rozciągania cały widoczny na ekranie obraz modelu równomiernie rozjaśnia się lub ciemnieje. Przy obciążeniu zerowym obraz jest ciemny. Gdy naprężenie w modelu wzrasta, obraz rozjaśnia się, a następnie ciemnieje, gdy różnica naprężeń głównych (w tym przypadku wprost naprężenie rozciągające) osiąga wartość rzędu izochromy. Przy dalszym wzroście naprężenia obraz rozjaśnia się i ciemnieje ponownie, gdy naprężenie osiąga wartość odpowiadającą izochromie drugiego rzędu itd.

Podobne cykle rozjaśnienia i ciemnienia będą oczywiście występować w każdym punkcie niejednorodnego pola naprężeń w miarę wzrastania obciążenia — o ile różnica naprężeń głównych w danym punkcie osiągać będzie wielokrotności wartości rzędu izochromy. Cykлом tym, zachodzącym w poszczególnych punktach, odpowiada w całym obserwowanym polu stopniowe przemieszczanie się izochrom, a także pojawianie się nowych izochrom w miarę wzrostu obciążenia. Przez obserwację tego ruchu i przeliczanie występujących kolejno izochrom można więc określić ich rzędy.

Na przykład w płaskiej beleczce, poddanej czystemu zginaniu, występuje układ izochrom przedstawiony na rys. 100. Równoległość izochrom wynika z faktu, że w częściach beleczki oddalonych od punktów przyłożenia obciążenia rozkład naprężeń we wszystkich przekrojach pionowych jest identyczny. Obserwując ekran można stwierdzić, że w miarę wzrostu obciążenia na górnym i dolnym brzegu beleczki pojawiają się nowe izochromy i dążą do środka; cały obraz staje się coraz gęściej zapełniony izochromami. Istnieje tylko jedna izochroma, która pokrywa się z warstwą obojętną i przez cały czas pozostaje ciemna. Oczywiście jest to izochroma rzędu zerowego  $n = 0$ .

<sup>1)</sup> W literaturze polskiej używa się również terminu — stała modelowa (przyp. tłum.).

**43. Polaryskop kołowy.** Stwierdziliśmy poprzednio, że w omawianym wyżej polaryskopie liniowym powstają, przy danej wartości kąta  $\alpha$ , zarówno izokliny, jak i izochromy. Rys. 100 powinien więc wykazywać zaciemnienia w tych miejscach, w których kierunki naprężeń głównych pokrywają się z kierunkami osi polaryzatora i analizatora. Zdjęcie na rys. 100 otrzymano w rzeczywistości za pomocą polaryskopu kołowego, który w odróżnieniu od polaryskopu liniowego umożliwia wyeliminowanie izoklin<sup>1)</sup>. Schemat polaryskopu kołowego



Rys. 100

przedstawiony jest na rys. 98b. Polaryskop ten różni się od polaryskopu liniowego przedstawionego na rys. 98a tym, że posiada dodatkowo dwie płytki ćwierćfalowe  $Q_P$  i  $Q_A$ . Płytką ćwierćfalowa jest kryształem o dwóch osiach polaryzacji, przy czym wpływ jej na światło jest podobny do wpływu równomiernie naprężonego modelu i polega na wprowadzeniu różnicy faz  $\Delta$ , podobnie jak wyrażono to w równaniu [f]; grubość płytki jest jednak tak dobrana, aby  $\Delta = \pi/2$ . Korzystając obecnie z równania [f] w przypadku światła opuszczającego  $Q_P$  i uwzględniając powyższą wartość  $\Delta$ , stwierdzamy, że prosty wynik otrzymuje się przez przyjęcie dla kąta  $\alpha$ , który jest teraz kątem zawartym między płaszczyzną  $P$  i jedną z osi  $Q_P$ , wartości  $45^\circ$ . Możemy napisać

$$x_2' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \psi; \quad y_2' = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \psi \quad [h]$$

Tutaj  $x_2'$  odpowiada „szybszej“ osi płytki ćwierćfalowej. Punkt poruszający się, przy tych przemieszczeniach składowych ( $\psi$  zawsze ma postać  $pt +$  wartość stała dla danego punktu wzdłuż promienia), zakreśla okrąg. Dlatego też światło takie określa się jako kołowo spolaryzowane.

Składowe [h] brane są wzdłuż osi polaryzacji  $Q_P$ . Oznaczając przez  $\beta$  kąt między  $x_2'$  i kierunkiem  $\sigma_x$  w modelu (rys. 99b), a przez  $\Delta$  — ponownie różnicę faz spowodowaną na-

<sup>1)</sup> Przy obrocie polaryzatora i analizatora i zachowaniu prostopadłości ich osi izochromy pozostają nieruchome, podczas gdy izokliny podlegają przemieszczeniom. Przy szybkim obrocie tych filtrów izokliny stają się niewidoczne. Polaryskop kołowy prowadzi do tego samego wyniku przy pomocy środków czysto optycznych.

prężeniami w elemencie, dla światła opuszczającego model odpowiadające  $x'_2$  składowe można wyrazić następująco:

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \beta \cos \psi; \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos (\psi - \Delta) \quad [i]$$

Podobnie w odniesieniu do  $y'_2$  otrzymuje się:

$$x_3 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \sin \psi; \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \beta \sin (\psi - \Delta) \quad [j]$$

Po dodaniu składowych opisanych równaniami [i] oraz [j] znajdujemy dla światła opuszczającego model:

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \psi'; \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin (\psi' - \Delta) \quad [k]$$

gdzie  $\psi' = \psi + \beta$ .

Przed zbadaniem wpływu  $Q_A$  i  $A$  na światło przechodzące przez polaryskop wygodnie jest przedstawić ruch [k] jako superpozycję dwóch ruchów kołowych. Można tego dokonać następująco. Oznaczając  $\psi' - (\Delta/2)$  przez  $\psi''$  i  $a/\sqrt{2}$  przez  $b$ , otrzymuje się równania [k] w postaci

$$x_3 = b \cos \left( \psi'' + \frac{\Delta}{2} \right) = b \left( \cos \frac{\Delta}{2} \cos \psi'' - \sin \frac{\Delta}{2} \sin \psi'' \right) \quad [l]$$

$$y_3 = b \sin \left( \psi'' - \frac{\Delta}{2} \right) = b \left( \cos \frac{\Delta}{2} \sin \psi'' - \sin \frac{\Delta}{2} \cos \psi'' \right) \quad [m]$$

która przedstawia superpozycję ruchu kołowego o promieniu  $b \cos (\Delta/2)$  zgodnie (rys. 99b) z ruchem wskazówek zegara (promień skierowany w kierunku kartki papieru) i ruchu kołowego o promieniu  $b \sin (\Delta/2)$ , przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Możemy obecnie pokazać, że gdy oś polaryzacji analizatora  $A$  jest obrócona o  $45^\circ$  względem osi polaryzacji  $Q_A$ , to jeden z ruchów kołowych przekazywany jest na ekran  $S$ , a drugi zostaje wygaszony i w wyniku otrzymuje się obraz zawierający izochromy bez izoklin, czyli taki, o który nam chodziło.

Kierunki składowych  $x_3, y_3$ , w równaniach [l] i [m], pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych w modelu. Zmiana osi przy ruchu kołowym wpłynie jedynie na zmianę kąta fazowego  $\psi''$  o wartość stałą. Tak więc ruch kołowy, zgodny z ruchem wskazówek zegara, może być przedstawiony składowymi w postaci

$$x_4 = c \cos \psi; \quad y_4 = c \sin \psi \quad [n]$$

wzdłuż osi  $Q_A$ , gdzie  $\psi$  ma ponownie postać  $pt + \text{const}$ . Utożsamiając kierunek  $x_4$  z kierunkiem szybszej osi  $Q_A$ , będziemy mieli po wyjściu z  $Q_A$

$$x_5 = c \cos \psi; \quad y_5 = c \sin \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -c \cos \psi \quad [o]$$

gdzie  $\psi$  ponownie zmieniło się o stałą wartość.

Jeśli teraz obrócimy oś analizatora  $A$  o kąt  $45^\circ$  względem  $Ox_4$  i  $Oy_4$  (rys. 99c), to składowe przemieszczeń [o] w kierunku tej osi równają się

$$c \cos 45^\circ \cos \psi - c \cos 45^\circ \cos \psi$$

lub zero. Tak więc ruch kołowy, zgodny z ruchem wskazówek zegara, ulega wygaszeniu.

Rozpatrując w ten sam sposób tę część ruchu opisanego równaniami [l] i [m], która ma zwrot przeciwny do ruchu wskazówek zegara, czyli

$$x'_4 = -c \sin \psi; \quad y'_4 = -c \cos \psi \quad [n']$$

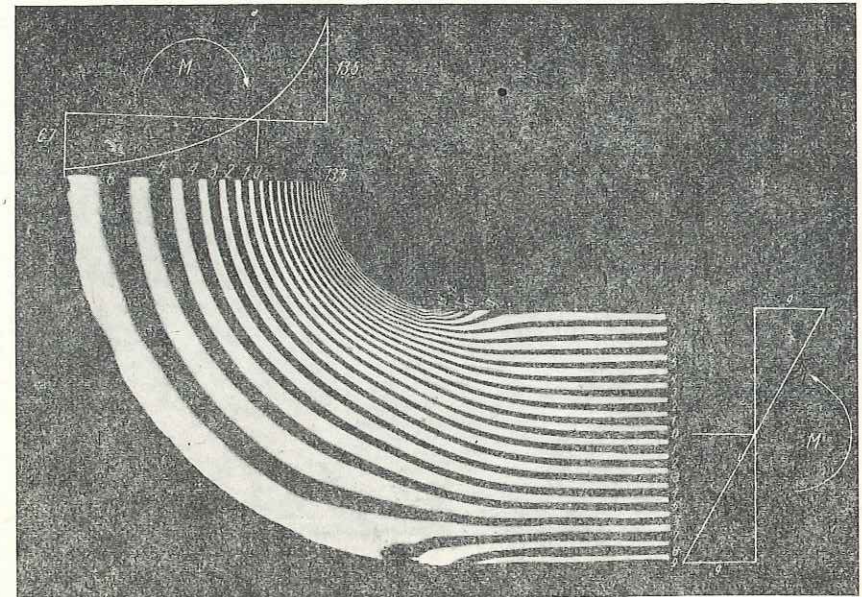
znajdujemy, że przemieszczenia zachodzące wzdłuż osi analizatora wynoszą

$$-c \cos 45^\circ \sin \psi - c \cos 45^\circ \sin \psi$$

a ich amplituda jest równa

$$\sqrt{2} c \text{ lub } \sqrt{2} b \sin \frac{\Delta}{2} \text{ lub } a \sin \frac{\Delta}{2} \quad [p]$$

gdzie  $b$  oznacza  $a/\sqrt{2}$ , zaś  $a$  jest amplitudą drgania opuszczającego polaryzator. Nie uwzględnialiśmy tu oczywiście straty światła w przyrządzie. Porównując otrzymany wynik z wynikiem [g] dla polaryskopu liniowego stwierdzamy, że obecnie nie występuje czynnik  $\sin 2\alpha$ , a tym samym na ekranie widoczne są jedynie izochromy bez izoklin.



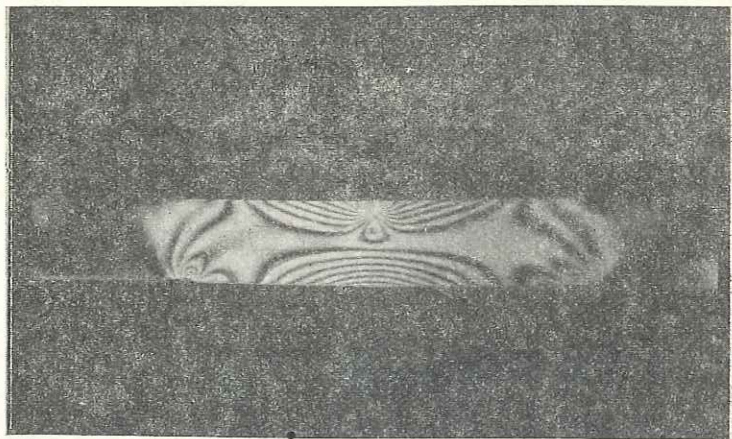
Rys. 101

Jeśli  $\Delta$  równa jest zero, to i amplituda [p] jest równa zero. Tak więc, jeśli model jest nieobciążony lub w przestrzeni pomiarowej nie ma modelu, to ekran pozostaje ciemny. Rozpatrywane ustawienie elementów optyki polaryskopu kołowego odpowiada zatem ciemnemu polu widzenia. Jeśli oś analizatora obrócimy o  $90^\circ$  względem  $Q_A$ , to otrzymamy jasne pole widzenia, a na obrazie modelu jasne prążki zajmą miejsce ciemnych. Ten sam efekt osiąga się w polaryskopie liniowym, jeśli osie polaryzatora i analizatora nie są prostopadłe ale równoległe.

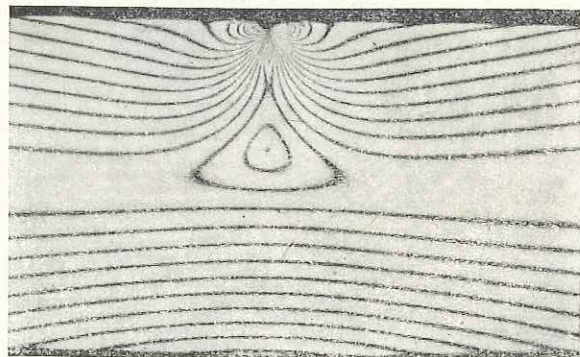
**44. Przykłady wyznaczania naprężeń metodą elastooptyczną.** Metoda elastooptyczna dostarczyła specjalnie ważnych wyników w dziedzinie badań spiętrzenia na-

prężen na brzegach otworów i karbów (wycięć). W takich przypadkach maksymalne naprężenie występuje na brzegu i może być bezpośrednio wyznaczone metodą optyczną, ponieważ jedno z naprężeń głównych na swobodnym brzegu znika.

Zdjęcie na rys. 101 przedstawia układ izochrom w zakrzywionym przecię<sup>1)</sup> zginanym momentami  $M$ . Promień zewnętrzny pręta jest trzykrotnie większy od wewnętrznego. Liczby



Rys. 102

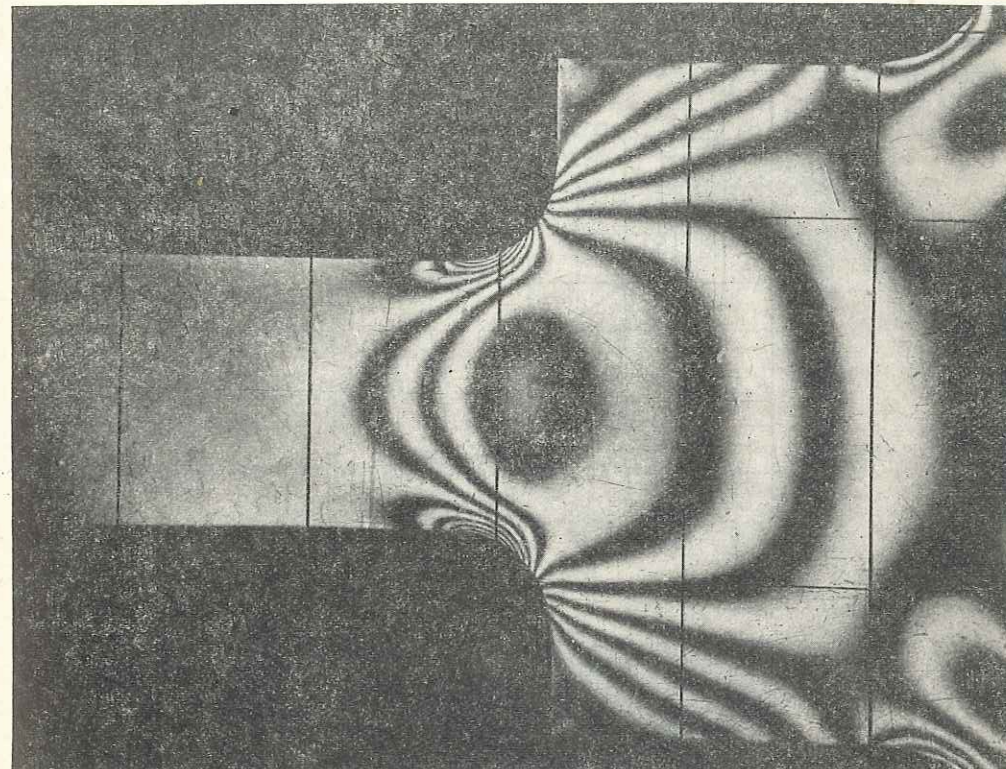


Rys. 103

wskazujące rząd izochrom, podane na prawym brzegu rysunku, wskazują na maksimum równe 9, występujące we włóknach skrajnych pręta. Równe odstępki między izochromami odpowiadają liniowemu rozkładowi naprężeń wywołanych zginaniem części prostoliniowej. Rzędy izochrom, zaznaczone wzdłuż górnego brzegu, pokazują rozkład naprężeń w części zakrzywionej (w modelu pełnym brzeg ten leży na jego osi symetrii) i wskazują na naprężenia ściskające na brzegu wewnętrznym, przedstawione liczbą 13,5, oraz na naprężenia rozciągające na brzegu zewnętrznym, którym odpowiada liczba 6,7. Wartości te pokrywają się bardzo ściśle (w sensie proporcjonalności) z wartościami otrzymanymi z rozwiązania „ściśłego“ teoretycznego, a wyszczególnionymi w ostatnim wierszu tablicy podanej w par. 27.

<sup>1)</sup> E. E. Weibel: „Trans. A. S. M. E.“, t. 56, str. 637, 1934.

Rys. 102 i 103 przedstawiają przypadek zginania belki siłą skupioną przyłożoną w środku<sup>1)</sup>. Gęstość rozkładu ciemnych prążków wskazuje na duże naprężenia w okolicy punktu przyłożenia obciążenia. Rzędy izochrom, przecinających poprzeczne przekroje belki, maleją w miarę oddalania się od środka belki, co wywołane jest zmniejszeniem się momentu zginającego.



Rys. 104

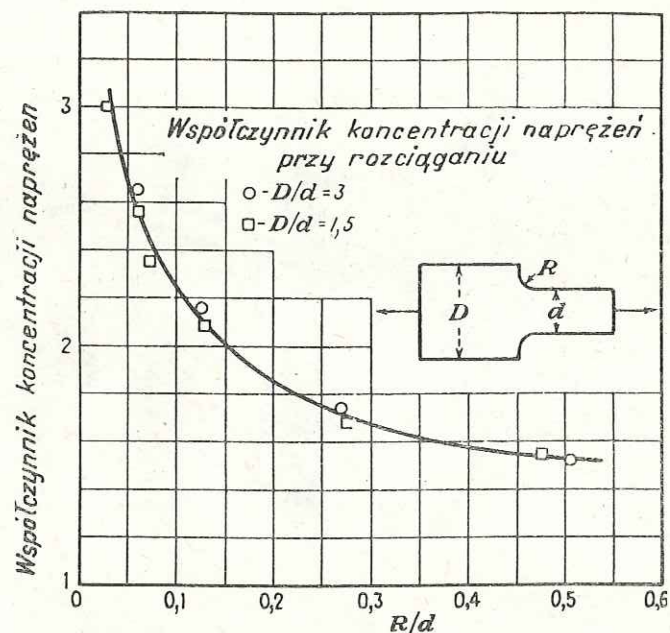
Rys. 104 przedstawia rozkład naprężeń w osiowo rozciągającym płaskowniku, którego przekrój zmienia się skokowo. Widzimy, że naprężenia maksymalne powstają w miejscach nagłej zmiany przekroju. Stosunek tych naprężeń maksymalnych do naprężeń średnich w wąskiej części płaskownika nazywa się współczynnikiem kształtu<sup>2)</sup>. Współczynnik ten zależy od stosunku promienia przejścia  $R$  do szerokości  $d$  płaskownika. Pewne wartości współczynnika kształtu otrzymane doświadczalnie<sup>3)</sup> podane są na wykresie na rys. 105. Widać, że naprężenia maksymalne gwałtownie wzrastają, gdy stosunek  $R/d$  maleje, a przy  $R/d=0,1$  maksymalne naprężenie jest więcej niż dwukrotnie większe od średniego. Rys. 106 przedstawia ten sam płaskownik poddany czystemu zginaniu momentem par sił przyłożonych na końcach i działających w płaszczyźnie środkowej płaskownika. Na wykresie (rys. 107) podano odpowiedni współczynnik kształtu.

<sup>1)</sup> M. M. Frocht: „Trans. A. S. M. E.“, t. 53, 1931.

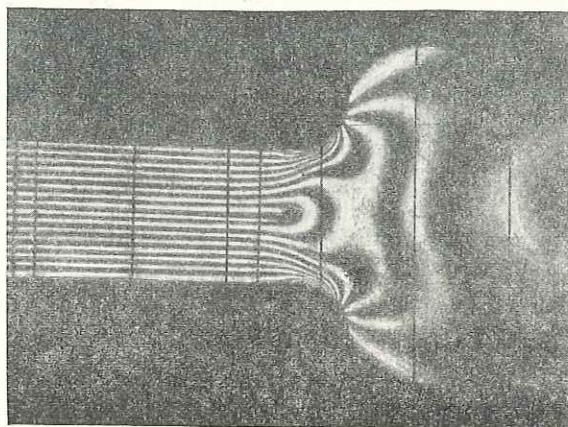
<sup>2)</sup> W oryginale użyto nazwy: współczynnik spiętrzenia naprężeń. W tłumaczeniu przyjęto powszechnie stosowany w Polsce termin „współczynnik kształtu“ (przyp. tłum.).

<sup>3)</sup> Patrz praca Weibela, loc. cit.

45. **Określenie naprężeń głównych.** Poprzednio stwierdziliśmy, że w zwykłym polaryskopie określa się jedynie różnicę między naprężeniami głównymi i ich kierunki. Gdy należy określić naprężenia główne w całym modelu lub na brzegu o nieznanym rozkładzie ob-



Rys. 105



Rys. 106

ciążenia zewnętrznego, trzeba przeprowadzić dodatkowe pomiary lub obliczenia. W tym celu stosowano już lub proponowano wiele różnych metod. Podamy tutaj jedynie krótki opis kilku z nich<sup>1)</sup>.

Sumę naprężeń głównych wyznaczyć można drogą pomiaru zmian grubości tarczy<sup>2)</sup>.

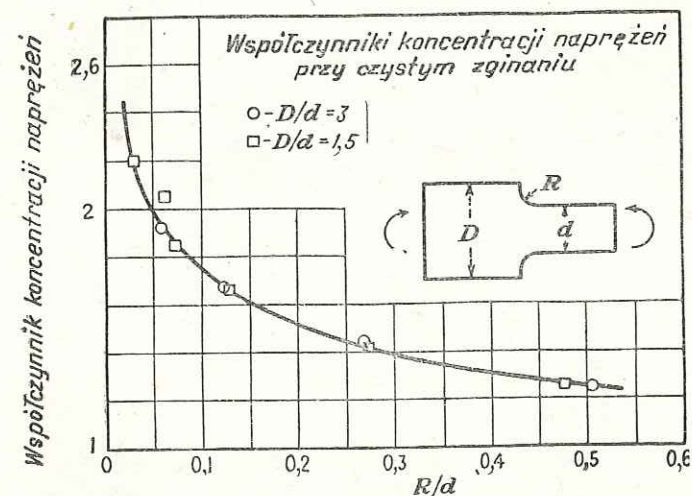
<sup>1)</sup> Dalsze informacje — patrz odnośnik 7, str. 127.

<sup>2)</sup> Metodę tę zaproponował Mesnager, loc. cit.

Zmniejszenie grubości wywołane stanem naprężenia wynosi

$$\Delta h = \frac{h\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad [a]$$

Jeśli dysponujemy pomiarami  $\Delta h$  w każdym punkcie, w którym chcemy wyznaczyć naprężenia, to możemy z powyższego wyliczyć  $\sigma_x + \sigma_y$ . Do tych celów opracowano kilka specjalnych tensometrów<sup>1)</sup>. Jedną z metod określenia zmian grubości modelu przedstawia się następująco. Model umieszcza się przy płytce szklanej o ściankach płaskich i równoległych. Między powierzchnią a ścianką płytki powstaje warstewka powietrza o zmiennej grubości, określonej



Rys. 107

zmianą grubości modelu. Dzięki tej warstewce powstaje układ prążków interferencyjnych, który po sfotografowaniu dostarcza żądanych informacji odnośnie rozkładu sumy naprężeń  $\sigma_x + \sigma_y$ .

Suma naprężeń głównych spełnia równanie różniczkowe [b] par. 16; równanie to spełniają również ugięcia membrany<sup>2)</sup> w rodzaju np. błonki mydlanej, poddanej równomiernemu rozciąganiu. Jeśli przyjęc odpowiednie wartości brzegowe, to ugięcie takiej membrany przedstawia w pewnej skali sumę  $\sigma_x + \sigma_y$ . W wielu przypadkach wartości brzegowe  $\sigma_x + \sigma_y$ , potrzebne do sporządzenia modelu membrany, można wyznaczyć na podstawie rozkładu izochrom uzyskanego na drodze elastooptycznej. Izochromy określają różnicę naprężeń  $\sigma_x - \sigma_y$ . Na brzegu swobodnym jedno naprężenie główne, np.  $\sigma_y$ , równe jest zero i suma  $\sigma_x + \sigma_y$  staje się równa różnicy  $\sigma_x - \sigma_y$ . Również w takim punkcie brzegu, w którym działa wyłącznie naprężenie normalne o znanej wartości, stanowi ono zarazem naprężenie główne i elastooptyczny pomiar różnicy naprężeń głównych wystarcza do określenia ich sumy. To samo równanie różniczkowe jest spełnione przez potencjał elektryczny prądu przepływającego przez płytę i fakt ten może stanowić podstawę pomiaru metodą elektryczną<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Patrz M. M. Frocht: „Photoelasticity“, t. 2.

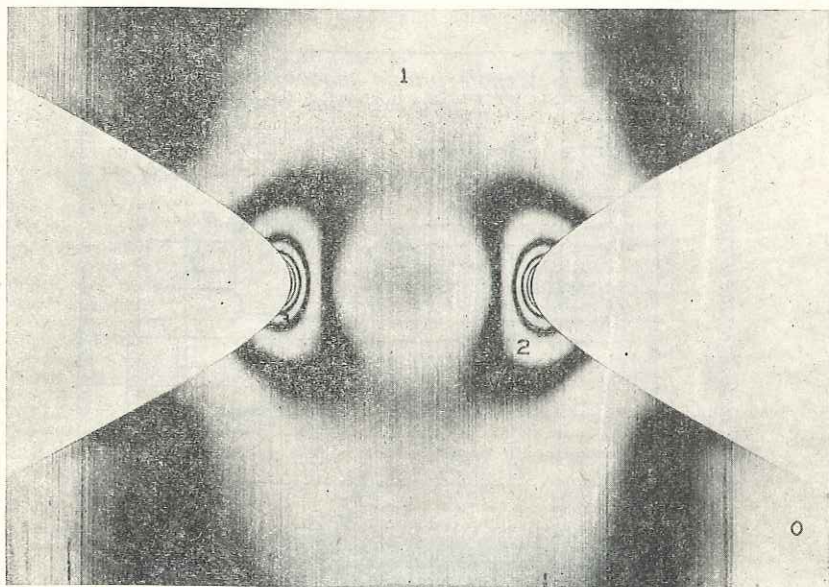
<sup>2)</sup> J. P. Den Hartog: Z. angew. Math. Mech., t. 11, str. 156, 1931.

<sup>3)</sup> Patrz R. D. Mindlin: „J. Applied Phys.“, t. 10, str. 282, 1939.

Niezależnie od tych metod doświadczalnych opracowano szereg efektywnych metod numerycznych, które są omówione w „Dodatku“.

Naprężenia główne mogą być również określone za pomocą obserwacji czysto elastoptycznych; są one jednak bardziej pracochłonne od metod omówionych w paragrafach 42 i 43.

**46. Elastooptyka trójwymiarowa.** Modele używane w zwykłej elastoptyce obciąża się w temperaturze pokojowej; są one sprężyste, a po usunięciu obciążenia układ prążków znika. Ponieważ światło musi przechodzić przez całą grubość modelu, interpretacja tego układu jest możliwa jedynie wtedy, gdy model znajduje się w płaskim stanie naprężenia, to znaczy

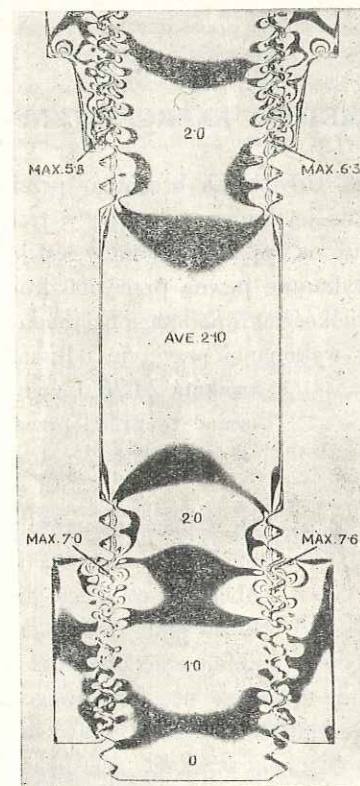


Rys. 108

wtedy, gdy składowe naprężenia nie ulegają prawie wcale zmianom na grubości modelu. W przeciwnym przypadku trójwymiarowego rozkładu naprężeń, efekt optyczny stanowi całkę wpływów naprężeń we wszystkich punktach, przez które przechodzi promień świetlny<sup>1)</sup>.

Trudność ta została pokonana za pomocą metody opartej na obserwacjach dokonanych przez Brewstera i Clerka Maxwella<sup>2)</sup>, którzy stwierdzili, że materiały o konsystencji galaretowatej, takie jak klej produkowany z pewnego gatunku ryb, zastygające pod obciążeniem, a następnie odciążone, zachowują trwały układ izochrom w polaryskopie — tak, jak gdyby były wciąż obciążone i sprężyste. Żywyce, takie jak bakelit i fosteryt obciążone na gorąco, a następnie oziębione posiadają, jak to stwierdzili późniejsi badacze, tę samą własność. Można to wyjaśnić przyjmując<sup>3)</sup>, że materiały te posiadają strukturę złożoną z mocnego szkieletu sprężystego lub siatki molekularnej, na którą ciepło nie ma wpływu, a wolne przestrzenie wypełnione są masą złożoną z luźno związanych cząstek, która mięknie pod wpływem ogrzania. Gdy obciążamy rozgrzaną próbkę, wtedy całe obciążenie przenosi szkielet sprężysty,

który bez przeszkód odkształca się sprężysto. Po oziębieniu miękka masa, w której zanurzony jest sprężysty szkielet, „zastyga“ i utrzymuje szkielet w prawie niezmiennym stanie odkształcenia nawet po odjęciu obciążenia. W podobny sposób utrzymuje się zasadniczo również i efekt elastoptyczny i nie ulega zaburzeniom po pocięciu próbki na części. Próbkę trój-



Rys. 109

wymiarową można więc pociąć na cienkie płytki i każdą z nich badać w polaryskopie. Stan naprężenia w płytce, który wywołał rozpatrywany efekt optyczny, nie jest płaski, lecz wiadomo, że składowe  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_z$  nie mają wpływu na promień świetlny biegnący w kierunku z normalnym do płytki. Układ izochrom, przedstawiony na rys. 108, pochodzi z takiej właśnie płytki, wyciętej wzdłuż osiowego przekroju okrągłego pręta (wykonanego z fosterytu) z hiperbolicznym karbem<sup>1)</sup>. Naprężenie maksymalne otrzymane z tego układu różni się o dwa lub trzy procent od wartości teoretycznej. Zdjęcie na rys. 109 przedstawia inny układ izochrom tego samego charakteru, otrzymany z modelu (bakelitowego) złącza gwintowego<sup>2)</sup>. Dolna nakrętka ma kształt typowy, zaś górna posiada stożkowe zwięźlenie i wykazuje niższe spiętrzenie naprężeń.

<sup>1)</sup> Patrz artykuł D. C. Druckera w „Handbook of Experimental Stress Analysis“, który w zwięzłej formie omawia elastoptykę trójwymiarową.

<sup>2)</sup> J. Clerk Maxwell: „Sci. Papers“, t. 1, str. 30.

<sup>3)</sup> M. Hetényi: „J. Applied Phys.“, t. 10, str. 295, 1939.

<sup>1)</sup> Leven, loc. cit.

<sup>2)</sup> M. Hetényi: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), t. 10, str. A-93, 1943. W pracy tej podane są również wyniki dla innych kształtów nakrętek.

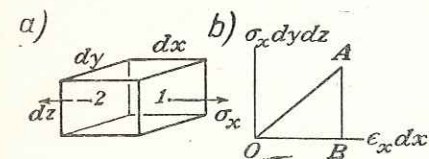
## ROZDZIAŁ 6

### METODY ENERGETYCZNE

**47. Energia odkształcenia.** Gdy belka o stałym przekroju poddana jest prostemu rozciąganiu, to siły działające na jej końce wykonują w trakcie rozciągania pewną pracę. Tak więc, jeśli element pokazany na rys. 110, poddany jest jedynie działaniu naprężeń normalnych  $\sigma_x$ , to siła  $\sigma_x dy dz$  wykonuje pewną pracę na drodze równej wydłużeniu  $\epsilon_x dx$ . Związek między tymi dwoma wielkościami podczas obciążenia przedstawiony jest linią prostą na rys. 110b, a wartość pracy wykonanej przy tym odkształceniu równa się powierzchni trójkąta  $AOB$  i wynosi  $\frac{1}{2} (\sigma_x dy dz) (\epsilon_x dx)$ . Oznaczając tę pracę przez  $dV$ , otrzymujemy

$$dV = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad [a]$$

Oczywiście na każdym takim elemencie o tej samej objętości wykonana jest taka sama praca. Zbadamy obecnie, co dzieje się z tą pracą — w jaki rodzaj lub w jakie rodzaje energii przekształca się ta praca?



Rys. 110

W przypadku gazu adiabatyczne zmniejszenie objętości wywołuje wzrost temperatury. Podczas adiabatycznego ściskania zwykłego pręta stalowego istnieje analogiczne zjawisko, ale podwyższenie temperatury jest znikomym małym. Odpowiednia ilość ciepła stanowi jedynie bardzo drobny ułamek pracy wykonanej przez siły ściskające<sup>1)</sup>. Dla naszych celów tę małą część pracy można pominąć. Przyjmujemy więc, że cała praca zamienia się w elemencie na *energię odkształcenia*, a żadna jej część nie zostaje zużyta na wytworzenie ciepła. Przyjmuje się, że element pozostaje sprężysty, a nadto — że nie wywiązuje się przy tym energia kinetyczna.

Te same rozważania stosują się i do przypadku, gdy na element działa sześć składowych naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  (rys. 3). Zgodnie z zasadą zachowania energii, wykonana praca nie zależy od kolejności przyłożenia sił, a jedynie od ich końcowych wartości. W przeciwnym razie moglibyśmy obciążać w jednej kolejności a odciążać w innej, odpowiadającej większej ilości energii. Tak więc z elementu moglibyśmy uzyskać pewną ilość pracy podczas pełnego cyklu obciążenia i odciążenia.

Obliczenie wykonanej pracy jest najprostsze, jeśli wszystkie siły lub naprężenia wzrastają równocześnie w tym samym stosunku. Wtedy związek między każdą z sił a odpowiednim przemieszczeniem jest liniowy, jak to pokazano na rys. 110b, i praca wykonana przez wszystkie siły wyraża się równaniem

$$dV = V_0 dx dy dz \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Jeśli byłoby inaczej, to istniałaby zasadnicza różnica między adiabatycznym i izotermicznym modulem sprężystości. Rzeczywista różnica jest bardzo znikomą. Patrz *G. F. C. Searle: „Experimental Elasticity“, rozdz. I.*

gdzie

$$V_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad [c]$$

Tak więc  $V_0$  jest ilością pracy przypadającej na jednostkę objętości lub energią właściwą odkształcenia.

W powyższych rozważaniach przyjęto, że na przeciwległe ścianki elementu działają naprężenia o tej samej wielkości oraz że siły masowe równają się zeru. Obecnie rozważymy ponownie pracę wykonaną na elemencie przy założeniu, że pole naprężeń zmienia się wewnątrz ciała oraz przy uwzględnieniu sił masowych. Rozważymy na początku działanie siły  $\sigma_x dy dz$  na ściankę 1 elementu pokazanego na rys. 110a. Wykonuje ona na przemieszczeniu  $u$  tej ścianki pracę wielkości  $\frac{1}{2} (\sigma_x u)_1 dy dz$ , gdzie wskaźnik 1 oznacza, że funkcje  $\sigma_x$  i  $u$  mierzone są w punkcie 1. Siła  $\sigma_x dy dz$  wykonuje na ściance 2 pracę  $-\frac{1}{2} (\sigma_x u)_2 dy dz$ . Całkowita praca wykonywana na obu ściankach wynosi

$$\frac{1}{2} [(\sigma_x u)_1 - (\sigma_x u)_2] dy dz$$

a w granicy dąży do

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u) dx dy dz \quad [d]$$

W dalszym ciągu obliczamy pracę wykonaną przez naprężenia styczne  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  na ściankach 1 i 2 i dodajemy do [d]. W ten sposób otrzymujemy pracę wykonaną na obu powierzchniach przez wszystkie trzy składowe naprężenia

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) dx dy dz$$

gdzie  $v$  i  $w$  są składowymi przemieszczenia w kierunkach osi  $y$  i  $z$ . Pracę wykonaną na dwóch pozostałych parach powierzchni można wyrazić w podobny sposób. Całkowita praca wykonana przez naprężenia na wszystkich ściankach wyraża się następująco

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v + \tau_{yz} w + \tau_{xy} u) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z w + \tau_{xz} u + \tau_{yz} v) \right] dx dy dz \quad [e]$$

Gdy ciało obciążone jest siłami masowymi  $X dx dy dz$  itd., to wykonana przez nie praca wyraża się następująco

$$\frac{1}{2} (Xu + Yv + Zw) dx dy dz \quad [f]$$

Całkowita praca wykonana w elemencie jest sumą [e] i [f]. Wykonując różniczkowanie [e] otrzymujemy następujące równanie pracy całkowitej

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + u \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) + v \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) + \right. \\ \left. + w \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

Ale na podstawie równań równowagi [127], wyprowadzonych w par. 76, wyrażenia w nawiasach mnożone przez  $u, v, w$  równe są zeru. Wielkości, przez które mnoży się składowe naprężenia na podstawie związków [2], równają się  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ . Tak więc, całkowita praca wykonana na elemencie sprowadza się do wielkości określonej równaniami [b] i [c]. Równania te opisują więc pracę wykonaną na elemencie lub zgmagazynowaną w nim energię odkształcenia również i w tym przypadku, gdy naprężenia są zmienne i istnieją siły masowe.

Właściwą energię odkształcenia  $V_0$ , określoną równaniem [c] możemy wyrazić za pomocą prawa Hooke'a (równania [3] i [6]) jako funkcję jedynie składowych naprężeń. Wtedy

$$V_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad [84]$$

Możemy także postąpić odwrotnie: wykorzystać [11] i wyrazić  $V_0$  jako funkcję jedynie składowych odkształcenia. W tym przypadku mamy

$$V_0 = \frac{1}{2} \lambda e^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \quad [85]$$

gdzie

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Wynika stąd natychmiast, że  $V_0$  jest zawsze wielkością dodatnią.

Łatwo pokazać, że pochodne  $V_0$  z równania [85] względem każdej składowej odkształcenia dają odpowiednią składową naprężenia. Obliczając np. pochodną względem  $\varepsilon_x$  i wykorzystując równanie [11], znajdujemy

$$\frac{\partial V_0}{\partial \varepsilon_x} = \lambda e + 2G\varepsilon_x = \sigma_x \quad [g]$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia, w którym  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , na podstawie równania [84], mamy

$$V_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 \quad [86]$$

Całkowitą energię odkształcenia ciała sprężystego otrzymuje się przez całkowanie właściwej energii odkształcenia  $V_0$

$$V = \iiint V_0 dx dy dz \quad [87]$$

Przedstawia ona całkowitą pracę, wykonaną przeciw siłom wewnętrznym w procesie obciążenia. Jeśliby przyjąć, że ciało składa się z nieskończonej liczby cząstek połączonych ze sobą sprężynkami, to można uważać energię odkształcenia za pracę zużytą na rozciągnięcie lub ściśnięcie tych sprężynek.

Przy wykorzystaniu równań [84] lub [85] można tę pracę przedstawić albo jako funkcję składowych naprężenia, albo jako funkcję składowych odkształcenia. Zastosowanie obu tych postaci przedstawimy w dalszym ciągu dyskusji.

Ilość energii odkształcenia zawartą w jednostce objętości materiału przyjmuje się niekiedy za podstawę do określenia naprężenia granicznego, przy którym następuje zniszczenie materiału<sup>1)</sup>. W celu pogodzenia tej teorii z faktem, że materiał izotropowy może podlegać bez uplastycznienia bardzo dużemu ciśnieniu hydrostatycznemu, dzieli się energię odkształcenia na dwie części: jedną — wywołaną zmianą objętości ciała i drugą — wywołaną zmianami postaciowymi i przyjmuje się, że jedynie druga część określa wytrzymałość<sup>2)</sup>.

Wiemy, że zmiana objętości jest proporcjonalna do sumy trzech składowych normalnych naprężenia (równanie [8]), jeśli więc suma ta równa się zeru, to odkształcenie polega jedynie na zmianie postaci. Każdą składową naprężenia możemy rozłożyć na dwie części

$$\sigma_x = \sigma'_x + p; \quad \sigma_y = \sigma'_y + p; \quad \sigma_z = \sigma'_z + p$$

gdzie

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}\Theta \quad [h]$$

Ponieważ na podstawie powyższego

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$$

stan naprężenia  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  wywołuje jedynie odkształcenie postaciowe, a zmiana objętości zależy całkowicie<sup>1)</sup> od wielkości równomiernego rozciągania  $p$ . Ta część energii, która odpowiada zmianie objętości, na podstawie równania [8] równa się

$$\frac{ep}{2} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad [i]$$

Wylączając te wyrażenia z równania [84] i posługując się tożsamością

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x = -\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

możemy tę część energii, która odpowiada zmianie postaci, przedstawić równaniem

$$V_0 - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad [88]$$

W przypadku prostego rozciągania w kierunku osi  $x$  istnieje jedynie naprężenie  $\sigma_x$  i energia odkształcenia postaciowego [88] równa się  $\sigma_x^2(1+\nu)/3E$ . W przypadku czystego ścinania zachodzącego np. między płaszczyznami  $xz$  i  $yz$  istnieje tylko jedno różne od zera naprężenie  $\tau_{xy}$  i energia odkształcenia postaci w tym przypadku równa się  $(1/2G)\tau_{xy}^2$ . Jeśli prawdziwe jest założenie, że niezależnie od stanu naprężenia zniszczenie zachodzi w danym układzie tylko wtedy, gdy energia odkształcenia postaciowego przekracza pewną granicę (charakterystyczną dla danego materiału), to stosunek krytycznej wartości samego naprężenia rozciągającego i samego naprężenia stycznego można znaleźć z zależności

$$\frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_x^2$$

z której otrzymujemy

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_x = 0,577\sigma_x \quad [j]$$

Doświadczenia przeprowadzone dla stali wykazują<sup>2)</sup>, że zależność między granicą plastyczności przy rozciąganiu i przy ścinaniu przedstawiona jest bardzo dobrze równaniem [j].

Rozważając energię odkształcenia można wykazać, że zasada *de Saint-Venanta* (patrz par. 18) jest konsekwencją zasady zachowania energii<sup>3)</sup>. Zgodnie z tą zasadą, dwa różne układy sił, mające tę samą wypadkową i działające na mały obszar ciała, wywołują takie same stany naprężenia w całym ciele z wyjątkiem bezpośredniego otoczenia jego części obciążonej. Jeśli jednemu z tych układów nadać zwroty przeciwne i dodać układy jeden do drugiego, to otrzyma się zerowy stan naprężenia z wyjątkiem jego bezpośredniego otoczenia. Układ obu obciążeń jest samorzównoważony i zasada ta jest w rzeczywistości równoważna stwierdzeniu, że samorzównoważony układ sił, działający na małą część ciała, powoduje jedynie lokalny rozkład naprężenia.

Każdy taki układ sił w trakcie obciążenia wykonuje pracę jedynie dzięki odkształceniom w obszarze obciążonym. Niech jeden z elementów powierzchniowych tego obszaru będzie zamocowany w taki sposób, aby nie zmienił położenia i orientacji. Jeśli  $p$  oznacza rząd wielkości (np. wielkość średnią) siły przypadającej na jednostkę powierzchni, natomiast  $a$  stanowi wymiar liniowy (tj. średnicę) obciążonej części, to składowe odkształcenia są rzędu  $(p/E)$ , a przemieszczenia wewnątrz obciążonej powierzchni są rzędu  $pa/E$ . Wykonana praca jest rzędu  $pa^2 \cdot pa/E$  lub  $p^2a^3/E$ .

Z drugiej strony, składowe naprężenia rzędu  $p$  powodują energię odkształcenia rzędu  $p^2/E$  na jednostkę objętości. Wykonana praca wystarcza więc jedynie dla objętości rzędu  $a^3$ , co jest zgodne z przyjętą zasadą.

Założyliśmy tutaj, że mamy do czynienia z ciałem zwartym i podlegającym prawu *Hooke'a*. Drugie z tych ograniczeń nie jest koniecznością; wystarczy w przytoczonym rozumowaniu przez  $E$  rozumieć jedynie rząd wielkości kąta nachylenia stycznej do krzywych, przedstawiających zależność odkształceń od naprężeń. Jeśli ciało nie ma budowy zwartej, jak na przykład belka cienkościenna lub cienka powłoka walcowa, to samorzównoważony układ

<sup>1)</sup> Różne teorie wytrzymałościowe omawia S. Timoshenko w swojej monografii „Strength of Materials“, t. 2.

<sup>2)</sup> M. T. Huber: „Zasopismo techniczne“, Lwów, 1904, Patrz także R. v. Mises: „Göttingen Nachrichten Math.-phys. Klasse“, 1913, str. 582 i F. Schleicher: „Z. angew. Math. Mech.“, t. 5, str. 199, 1925.

<sup>1)</sup> Składowe styczne  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  wywołują odkształcenia postaciowe, nie prowadzące do żadnej zmiany objętości

<sup>2)</sup> Por. prace W. Lode'a: „Z. Physik“, t. 36, str. 913, 1926 oraz „Forschungsarbeiten“, nr 303, Berlin, 1928

<sup>3)</sup> J. N. Goodier: „Phil. Mag.“, seria 7, t. 24, str. 325, 1937; „J. Applied Phys.“, t. 13, str. 167, 1942.



sił na jednym końcu może wywołać zakłócenie w odległościach wielokrotnie większych od grubości lub średnicy<sup>1)</sup> dźwigara.

To samo rozumowanie można bez zmian powtórzyć w przypadku obciążenia, którego wypadkowa jest różna od zera, jeśli tylko w okolicy lub w samym obszarze obciążenia istnieje utwierdzony element powierzchniowy; tak więc, jeśli ośrodek odkształcalny przytwierdzony jest do ciała sztywnego, to obciążenie przyłożone na małym obszarze w pobliżu miejsca utwierdzenia wywoła jedynie naprężenia lokalne<sup>2)</sup>.

**48. Zasada prac przygotowanych.** Przy rozwiązywaniu zagadnień teorii sprężystości stosuje się niekiedy z korzyścią *zasadę prac przygotowanych*. W przypadku punktu materialnego zasada ta głosi, że jeśli punkt znajduje się w równowadze, to suma prac wszystkich sił działających na ten punkt, na dowolnym *przemieszczeniu przygotowanym*, równa się zeru. Za przemieszczenie przygotowane punktu, który posiada pełną swobodę ruchów, można przyjąć dowolne małe przemieszczenie. Jeśli  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  są składowymi przemieszczenia przygotowanego w kierunkach  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , a  $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$ ,  $\Sigma Z$  są sumami rzutów na te kierunki sił działających na punkt materialny, to zasada prac przygotowanych prowadzi do związków:

$$\delta u \Sigma X = 0; \quad \delta v \Sigma Y = 0; \quad \delta w \Sigma Z = 0$$

Równania te spełnione są dla dowolnego przemieszczenia przygotowanego, jeśli

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0$$

Tak więc dochodzimy do znanych równań równowagi punktu materialnego. Przy stosowaniu zasady prac przygotowanych przyjmuje się, że siły działające w trakcie przemieszczeń przygotowanych są stałe. Jeśli niektóre z sił działających na punkt materialny są reakcjami sprężystymi, jak np. reakcje prętów w przegubie kratownicy, to przyjmuje się, że przemieszczenia przygotowane są tak małe, że zmiany wielkości lub kierunków reakcji mogą być pominięte.

Ciało sprężyste w stanie spoczynku, obciążone siłami powierzchniowymi i masowymi, przedstawia sobą układ punktów materialnych, z których każdy podlega działaniu sił znajdujących się w równowadze. Całkowita praca tych sił na dowolnym przemieszczeniu przygotowanym dla każdego punktu równa się zeru, a tym samym, całkowita praca wszystkich sił przyłożonych do układu także równa się zeru.

*Przemieszczenie przygotowane* w przypadku ciała sprężystego — to dowolne małe przemieszczenie, zgodne z warunkiem ciągłości i z warunkami przemieszczeniowymi na powierzchni ciała, jeśli takie warunki są zadane. Jeśli np. wiadomo, że pewna część powierzchni ciała, np. utwierdzony koniec belki, nie może się poruszać lub ma zadane przemieszczenia, to przemieszczenie przygotowane dla tej części powinno być równe zeru.

Rozpatrzmy np. przypadek płaskiego stanu naprężenia w tarczy. Przez  $u$  i  $v$  oznaczmy składowe rzeczywistych przemieszczeń, wywołanych działaniem obciążeń, a przez  $\delta u$  i  $\delta v$  — składowe przemieszczeń przygotowanych, mierzonych od położenia równowagi pod obciążeniem. Te ostatnie są dowolnie małymi wielkościami, czyniącymi zadość warunkom ciągłości odkształceń sprężystych, czyli są ciągłymi funkcjami zmiennych  $x$  i  $y$ .

Przy dowolnym układzie przemieszczeń praca zużyta na pokonanie sił międzycząsteczkowych równa jest nagromadzonej energii odkształcenia, tj. energii odkształcenia odpowiadającej przemieszczeniom. Dlatego, jeśli zwiększymy  $u$  i  $v$  o  $\delta u$  i  $\delta v$ , to praca zużyta na pokonanie sił międzycząsteczkowych będzie równa różnicy między energią odkształcenia, odpo-

wiadającą  $u + \delta u$ ,  $v + \delta v$  i energią odkształcenia, odpowiadającą  $u$  i  $v$ . Przemieszczenia przygotowane wywołują zmiany składowych odkształcenia

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}; \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}; \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}$$

Na podstawie wyrażenia [85] odpowiednia zmiana energii odkształcenia na jednostkę objętości równa się

$$\delta V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial V_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial V_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \quad [a]$$

Całkowita zmiana energii odkształcenia ciała jest więc równa  $\iint \delta V_0 dx dy$ , gdzie całkowanie rozciąga się na całą powierzchnię tarczy o grubości jednostkowej.

Jak już stwierdziliśmy, ta zmiana energii odkształcenia mierzy się pracą, zużytą na pokonanie sił międzycząsteczkowych. Aby otrzymać wielkość tej pracy, należy tylko zmienić znak. Tak więc, praca wykonana przez te siły na przemieszczeniach przygotowanych równa się

$$- \iint \delta V_0 dx dy \quad [b]$$

Przy określaniu pracy wykonanej na przemieszczeniach przygotowanych przez siły zewnętrzne, należy uwzględnić siły przyłożone na brzegach tarczy i siły masowe. Przez  $\bar{X}$  i  $\bar{Y}$  oznaczmy siły brzegowe odniesione do jednostki powierzchni. Pracę, wykonaną przez te siły na przemieszczeniach przygotowanych o składowych  $\delta u$  i  $\delta v$ , można wyrazić następująco

$$\int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds \quad [c]$$

gdzie całkowanie przebiega wzdłuż brzegu  $s$  tarczy.

Podobnie wyraża się praca wykonana przez siły masowe

$$\iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy \quad [d]$$

gdzie  $X$  i  $Y$  są składowymi sił masowych odniesionych do jednostki objętości, a całkowanie przebiega po całej powierzchni tarczy. Warunek równości zeru całej pracy wykonanej na przemieszczeniu przygotowanym przyjmuje obecnie, na podstawie [b], [c] i [d], postać:

$$\int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds + \iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy - \iint \delta V_0 dx dy = 0 \quad [89]$$

Ponieważ przy zastosowaniu zasady prac przygotowanych, dane siły i rzeczywiste składowe naprężenia, odpowiadające położeniu równowagi, są przyjmowane jako stałe w trakcie przemieszczeń przygotowanych, to w równaniu [89] symbole wariacji  $\delta$  można wynieść przed symbole całki, a po zmianie znaków napisać

$$\delta [\iint V_0 dx dy - \iint (Xu + Yv) dx dy - \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds] = 0 \quad [89']$$

Pierwszy składnik w nawiasie jest energią potencjalną odkształcenia. Drugi i trzeci składnik łącznie przedstawiają energię potencjalną sił działających na ciało, jeśli energię potencjalną tych sił w stanie nienaprzężonym ( $u=v=0$ ) przyjęto równą zeru. Całe wyrażenia w nawiasach przedstawia *całkowitą energię potencjalną układu*.

Tak więc, porównując różne wartości przemieszczeń  $u$  i  $v$ , można stwierdzić, że przemieszczenia, które powstają w rzeczywistości w układzie sprężystym pod działaniem danych sił zewnętrznych, mają tę własność, że sprowadzają do zera całkowitą wariację energii potencjalnej układu dla dowolnego przemieszczenia przygotowanego, mierzonego od położenia równowagi. Oznacza to, że całkowita energia potencjalna układu w położeniu równowagi osiąga

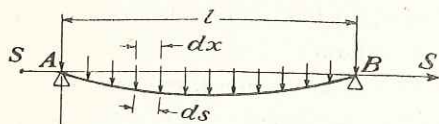
<sup>1)</sup> W. Z. Własow: „Thin Walled Elastic Bars“, Moskwa 1940; J. N. Goodier i M. V. Barton: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), t. 11, str. A-35, 1944; N. J. Hoff: „J. Aeronaut. Sci“, t. 12, str. 455, 1945.

<sup>2)</sup> J. N. Goodier: „J. Applied Phys.“, loc. cit.

ekstremum. Aby stwierdzić, czy energia osiąga swoje maksimum, czy też minimum, należałoby rozważyć wielkości małe wyższego rzędu, które pomijaliśmy<sup>1)</sup> w poprzednich rozważaniach. Jeśli na tej drodze okaże się, że dla dowolnego przemieszczenia przygotowanego przyrost całkowitej energii układu jest dodatni, to będziemy mieli przypadek minimum. Jeśli natomiast przyrost ten okaże się zawsze ujemny, to będziemy mieli przypadek maksimum. Aby istniał stan równowagi trwałej, zawsze jest konieczne, aby praca przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym, mierzonym od położenia równowagi, miała wartość dodatnią. Tak więc całkowita energia układu w położeniu równowagi ma wartość minimalną.

W przypadku trójosiowego stanu naprężenia łatwo jest podać równanie analogiczne do [89].

Zasada prac przygotowanych jest szczególnie użyteczna przy poszukiwaniu odkształceń ciała sprężystego, wywołanych znanym układem sił. W celu zilustrowania zastosowania tej metody rozważmy tutaj kilka prostych przykładów, których rozwiązania są znane.



Rys. 111

Jako pierwszy przykład rozważymy linię ugięcia doskonale wiotkiej, sprężystej struny AB, rozciąganej siłami S między stałymi punktami A i B (rys. 111) i obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem pionowym o intensywności q. Przyjmujemy, że początkowy naciąg

struny jest tak duży, że jego wzrost spowodowany dodatkowym rozciąganiem struny przy ugięciu może być pominięty. Wtedy przyrost energii odkształcenia przy ugięciu otrzyma się przez pomnożenie początkowych sił rozciągających S przez przyrost długości struny wywołany ugięciem. Przyjmując układ współrzędnych jak na rys. 111, znajdujemy:

$$ds - dx = dx \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Przyrost długości struny równa się

$$\int_0^l (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

a odpowiedni przyrost energii odkształcenia struny wynosi

$$\frac{S}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad [e]$$

Aby otrzymać całkowitą wartość energii odkształcenia struny należy do [e] dodać stałą wartość energii, wywołaną naciągiem początkowym. W tym przypadku zasada prac przygotowanych prowadzi do następującego równania analogicznego do równania [89]

$$\int_0^l q \delta y dx - \frac{S}{2} \int_0^l \delta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 0 \quad [f]$$

Obliczając wariację drugiego składnika, otrzymujemy:

$$\int_0^l \delta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 2 \int_0^l \frac{dy}{dx} \delta \frac{dy}{dx} dx = 2 \int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{d \delta y}{dx} dx$$

<sup>1)</sup> Pomijamy je, czyniąc założenie, że składowe naprężenia i siły nie ulegają zmianie podczas przemieszczeń przygotowanych.

Całkując przez części i uwzględniając, że na końcach struny  $\delta y = 0$ , znajdujemy

$$2 \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{d \delta y}{dx} dx = 2 \left( \left. \frac{dy}{dx} \delta y \right|_0^l - \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx \right) = -2 \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx$$

Po podstawieniu do równania [f] otrzymujemy

$$S \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta y dx + \int_0^l q \delta y dx = 0$$

lub

$$\int_0^l \left( S \frac{d^2 y}{dx^2} + q \right) \delta y dx = 0$$

Równanie to będzie spełnione dla dowolnego przemieszczenia przygotowanego  $\delta y$ , jeśli tylko

$$S \frac{d^2 y}{dx^2} + q = 0 \quad [g]$$

W ten sposób otrzymaliśmy znane równanie różniczkowe poprzecznej obciążonej struny.

Zasada prac przygotowanych służy nie tylko do wyznaczenia równania różniczkowego linii ugięcia, jak to miało miejsce w powyższym przykładzie, ale również do bezpośredniego wyznaczania ugięć<sup>1)</sup>. Rozważmy np. belkę pryzmatyczną, podpartą na końcach i obciążoną siłą skupioną P (rys. 112). W najogólniejszym przypadku linii ugięcia takiej belki przedstawić można za pomocą szeregu trygonometrycznego

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad [h]$$

Podstawiamy ten szereg do równania energii odkształcenia zginanej belki pryzmatycznej<sup>2)</sup> i znajdujemy

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 \quad [k]$$

Rozważmy obecnie przemieszczenie przygotowane, liczone od rzeczywistej krzywej ugięcia, które otrzymuje się przez wariację  $\delta a_n$  dowolnego współczynnika  $a_n$  szeregu [h]. Wtedy

$$\delta y = \delta a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad [l]$$

Na podstawie równania [k] odpowiednia zmiana energii odkształcenia równa się

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n \quad [m]$$

<sup>1)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Bull. Polytech.“ Kijów. 1909. Patrz również S. Timoshenko: „Strength of Materials“, t. 2, str. 44, 1941.

<sup>2)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Strength of Materials“, t. 1, str. 297, 1941.

$$P \delta a_n \sin \frac{n\pi c}{l} \quad [n]$$

Po wykorzystaniu [m] i [n] równanie prac przygotowanych przyjmuje postać

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n - P \delta a_n \sin \frac{n\pi c}{l} = 0$$

skąd otrzymujemy

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c}{l}}{EJ\pi^4 n^4}$$

Po podstawieniu do szeregu [h] znajdujemy krzywą ugięcia

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4} \quad [o]$$

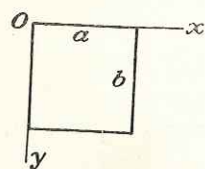
Szereg ten jest szybkozbieżny i kilka jego pierwszych składników daje już zadowalające przybliżenie. Przyjmując np. siłę  $P$  w środku rozpiętości ( $c=l/2$ ), otrzymujemy ugięcie pod punktem obciążenia równe

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left( 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right)$$

Uwzględnienie jedynie pierwszego składnika szeregu prowadzi do wyniku

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48,7EJ}$$

Występuje tu czynnik 48,7, zamiast wartości ściślej 48, skąd wynika, że błąd przy uwzględnieniu jedynie pierwszego składnika szeregu wynosi około 1,5 procent.



Rys. 113

W poprzednich rozważaniach rozpatrywaliśmy przemieszczenia jedynie w jednym kierunku i przedstawiliśmy je szeregiem sinusowym [h]. Podobną metodę można zastosować również w bardziej złożonych przypadkach. Rozważmy obecnie tarczę prostokątną z utwierdzonymi brzegami (rys. 113), poddaną działaniu sił masowych, działających w jej płaszczyźnie. Ogólne wyrażenia na przemieszczenia  $u$  i  $v$  przyjętą można w postaci następujących szeregów:

$$\begin{aligned} u &= \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v &= \sum \sum B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad [p]$$

Każdy ze składników tego szeregu zanika na krawędzi tarczy i dlatego warunki brzegowe są

spełnione. W celu obliczenia współczynników  $A_{mn}$  i  $B_{mn}$  postępujemy tak jak w przypadku belki i przyjmujemy przemieszczenia przygotowane w postaci

$$\delta u = \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\delta v = \delta B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Równanie przemieszczeń przygotowanych [89] daje związki

$$\begin{aligned} \delta A_{mn} \iint X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \delta A_{mn} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \iint V_0 dx dy \\ \delta B_{mn} \iint Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \delta B_{mn} \frac{\partial}{\partial B_{mn}} \iint V_0 dx dy \end{aligned} \quad [q]$$

Do obliczenia energii odkształcenia w przypadku płaskiego stanu naprężenia posługujemy się równaniem

$$V = \iint V_0 dx dy = \iint \left[ \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{E}{4(1+\nu)} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy \quad [r]$$

Podstawiając do niego<sup>1)</sup>

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum \sum \frac{m\pi}{a} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum \sum \frac{n\pi}{b} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum \sum \frac{n\pi}{b} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \\ &+ \sum \sum \frac{m\pi}{a} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

i wykonując całkowanie, znajdujemy

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi^2 Eab}{4} \left[ \sum \sum A_{mn}^2 \left( \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{n^2}{b^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum \sum B_{mn}^2 \left( \frac{1}{2(1-\nu^2)} \frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{m^2}{a^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Po podstawieniu tego wyrażenia na energię odkształcenia w równaniach [q] otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_{mn} \frac{Eab\pi^2}{4} \left( \frac{m^2}{a^2(1-\nu^2)} + \frac{n^2}{2b^2(1+\nu)} \right) &= \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ B_{mn} \frac{Eab\pi^2}{4} \left( \frac{m^2}{2a^2(1+\nu)} + \frac{n^2}{b^2(1-\nu^2)} \right) &= \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Nie zawsze wolno całkować szereg Fouriera wyraz po wyrazie. Warunki dostateczne znaleźć można w książce E. T. Whittakera i G. N. Watsona: „Modern Analysis”, str. 169. W naszym zagadnieniu warunki te są spełnione.

Widać stąd, że dla każdego układu sił masowych można łatwo obliczyć współczynniki równań [p] i otrzymać pełne rozwiązanie zagadnienia.

Metoda przemieszczeń przygotowanych może być wykorzystana dla znalezienia rozwiązań przybliżonych zagadnień dwuwymiarowych, gdy dane są wartości brzegowe przemieszczeń. Przyjmijmy, że przemieszczenia  $u$  i  $v$  można z wystarczającą dokładnością przedstawić za pomocą szeregów

$$\begin{aligned} u &= \Phi_0(x, y) + \sum_m a_m \Phi_m(x, y) \\ v &= \Psi_0(x, y) + \sum_m b_m \Psi_m(x, y) \end{aligned} \quad [s]$$

które spełniają zadane warunki brzegowe. Na przykład, możemy tak wybrać funkcje  $\Phi_0$  i  $\Psi_0$ , aby dawały one na brzegu żądane przemieszczenia, a pozostałe funkcje  $\Phi$  i  $\Psi$  mogą na brzegu znikać. Dla obliczenia współczynników  $a_1, \dots, a_m, \dots, b_1, \dots, b_m, \dots$  posłużymy się zasadą przemieszczeń przygotowanych [89]. Przyjęcie przemieszczeń przygotowanych w postaci

$$\delta u_m = \delta a_m \Phi_m(x, y); \quad \delta v_m = \delta b_m \Psi_m(x, y) \quad [t]$$

pozwała wypisać tyle równań równowagi, podobnych do równań [q] poprzedniego przykładu, ile jest współczynników w równaniach [s]. Będą to równania liniowe względem  $a_1, \dots, a_m, \dots, b_1, \dots, b_m, \dots$ . Rozwiązując je, znajdziemy wartości współczynników występujących w szeregach [s], które przedstawiają przybliżone rozwiązanie zagadnienia<sup>1)</sup>.

Przy stosowaniu zasady przemieszczeń przygotowanych [89] zakłada się, że właściwa energia odkształcenia  $V_0$  przedstawiona jest funkcją składowych odkształceń (równanie [r]), obliczanych z równań [s]. Obliczenia wariacji energii odkształcenia można uprościć, jeśli się zauważy, że

$$\begin{aligned} \delta V &= \iint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy = \\ &= \iint \left[ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \delta v + \tau_{xy} \left( \frac{\partial}{\partial y} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta v \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Po scałkowaniu przez części i uwzględnieniu, że  $\delta u$  i  $\delta v$  na brzegu znikają, otrzymujemy

$$\delta V = - \iint \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \delta u + \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta v \right] dx dy$$

Przyjmując przemieszczenia przygotowane według równań [t] otrzymujemy równania, konieczne do wyznaczenia współczynników  $a_1, \dots, a_m, \dots, b_1, \dots, b_m, \dots$  w następującej postaci:

$$\delta a_m \iint X \Phi_m(x, y) dx dy = - \delta a_m \iint \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \Phi_m(x, y) dx dy$$

$$\delta b_m \iint Y \Psi_m(x, y) dx dy = - \delta b_m \iint \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \Psi_m(x, y) dx dy$$

<sup>1)</sup> Metodę tę zastosował do teorii sprężystości *W. Ritz* i używał jej z powodzeniem do badania zginania płyt prostokątnych. Patrz „J. reine u. angew. Math.“, t. 135, str. 1–61. Patrz także „Gesammelte Werke“ str. 192, Paryż, 1911.

lub

$$\begin{aligned} \iint \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) \Phi_m(x, y) dx dy &= 0 \\ \iint \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) \Psi_m(x, y) dx dy &= 0 \end{aligned} \quad [90]^{1)}$$

Jako przykład zastosowania tych równań rozważmy ponownie tarczę prostokątną (rys. 113) i założmy, że trzy jej brzegi są utwierdzone zupełnie, a czwarty brzeg ( $y=b$ ) doznaje przemieszczeń określonych równaniami

$$u = 0; \quad v = Cb \sin \frac{\pi x}{a}$$

Warunki brzegowe będą spełnione, jeśli przyjąć

$$\begin{aligned} u &= \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v &= Cy \sin \frac{\pi x}{a} + \sum \sum B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad [u]$$

Odpowiednie składowe naprężenia będą miały postać

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \sum \sum A_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + \nu \sum \sum B_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \nu C \sin \frac{\pi x}{a} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \sum \sum B_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + C \sin \frac{\pi x}{a} + \nu \sum \sum A_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \sum \sum A_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + \sum \sum B_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + Cy \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \right) \end{aligned}$$

Podstawiając do równań [90] i przyjmując

$$\delta u = \delta A_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad \delta v = \delta B_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

<sup>1)</sup> Równania przemieszczeń przygotowanych w tej postaci noszą niekiedy nazwę równań *Galerkina*, jakkolwiek obie postacie równań: [q] i [90] podane są w wymienionej pracy *W. Ritz*a. Patrz „Gesammelte Werke“, str. 228.

otrzymujemy po scałkowaniu

$$-\frac{E\pi^2 ab}{4} \left( \frac{m^2}{a^2(1-\nu^2)} + \frac{n^2}{2b^2(1+\nu)} \right) A_{mn} + \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

$$-\frac{E\pi^2 ab}{4} \left( \frac{n^2}{b^2(1-\nu^2)} + \frac{m^2}{2a^2(1+\nu)} \right) B_{mn} - \frac{C\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^b y \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy +$$

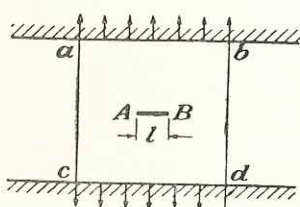
$$+ \iint Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

Przy braku sił masowych okazuje się, że wszystkie współczynniki  $A_{mn}$  znikają. Współczynniki  $B_{mn}$  różnią się od zera jedynie wtedy, gdy  $m=1$ . Mamy wtedy

$$\frac{E\pi^2 ab}{4} \left( \frac{n^2}{b^2(1-\nu^2)} + \frac{1}{2a^2(1+\nu)} \right) B_{1n} = -\frac{C\pi^2}{2a} \int_0^b y \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{C\pi b^2}{2a} \frac{\cos n\pi}{n}$$

Po wyznaczeniu z tego równania współczynników  $B_{1n}$  i podstawieniu ich do [u] otrzymujemy przemieszczenia wywołane przyjętymi przemieszczeniami brzegowymi.

Ogólne rozważania nad całkowitą energią układu prowadził *A. A. Griffith* w związku ze swoją teorią zniszczenia materiałów kruchych<sup>1)</sup>. Wiadomo, że materiały wykazują zawsze



Rys. 114

nizszą wytrzymałość niż należałoby tego oczekiwać na podstawie badań sił molekularnych. Dla pewnego gatunku szkła *Griffith* znalazł teoretyczną wytrzymałość na rozciąganie rzędu 112000 kG/cm<sup>2</sup>, podczas gdy doświadczenia przeprowadzone na prętach sporządzonych z tego szkła wykazały tylko 1820 kG/cm<sup>2</sup>. *Griffith* wykazał, że tę rozbieżność między teorią a doświadczeniem można wytłumaczyć, jeśli się założy, że w takich materiałach, jak szkło, istnieją mikroskopowe szczeliny lub rysy, wywołujące duże koncentracje naprężeń i powodujące tym samym dalsze rozprzestrzenianie się szczelin. Dla celów obliczeniowych *Griffith* przyjął istnienie szczeliny w postaci wąskiego otworu eliptycznego, którego większa oś jest prostopadła do kierunku sił rozciągających. Rozważmy tarczę utwierdzoną wzdłuż krawędzi *ab* i *cd* rozciąganą równomiernie rozłożonym obciążeniem *S*, działającym na tych krawędziach (rys. 114). Jeśli w tarczy przyjąć mikroskopowy otwór eliptyczny *AB* o długości *l*, to początkowa energia odkształcenia, wywołana działaniem obciążenia *S* ulegnie zmniejszeniu, jeśli tylko krawędzie *ab* i *cd* nie zmieniają położenia. Odpowiedni ubytek energii obliczymy za pomocą rozwiązania dla otworu eliptycznego<sup>2)</sup>. W przypadku tarczy o grubości jednostkowej ubytek ten wynosi

$$V = \frac{\pi l^2 S^2}{4E} \quad [v]$$

Gdy szczelina wydłuża się, następuje dalsze zmniejszanie się energii odkształcenia zawartej w tarczy. Jednakże wydłużenie szczeliny powoduje wzrost energii powierzchniowej, ponieważ na powierzchni ciała stałego istnieje nacięcie powierzchniowe, podobne jak na po-

wierzchni cieczy. *Griffith* znalazł np., że w przypadku użytego do doświadczeń szkła wartość energii powierzchniowej, odniesiona do jednostki powierzchni, była rzędu  $T=0,22 \times 10^{-3}$  kG/cm<sup>2</sup>. Jeśli przyrost długości szczeliny wymaga wzrostu energii powierzchniowej kosztem zmniejszenia się wartości energii odkształcenia, to wydłużenie szczeliny może wzrastać bez wzrostu całkowitej energii układu. Warunkiem samorzutnego wzrostu pęknięcia będzie równość tych dwóch wartości energii, którą po wykorzystaniu zależności [v] można zapisać następująco

$$\frac{dV}{dl} dl = \frac{\pi l S \sigma^2}{2E} dl = 2dl T$$

skąd

$$S \sigma = \sqrt{\frac{4ET}{\pi l}} \quad [w]$$

Doświadczenia, w których szczeliny wykonane za pomocą diamentu miały znaną wielkość, wykazały zadowalającą zbieżność z równaniem [w].

Wykazano także na drodze doświadczalnej, że gdy zastosować pewne środki eliminujące mikroskopowe szczeliny, to można uzyskać znacznie większą niż zwykle wytrzymałość materiału.

Szereg prętów szklanych wykazał w badaniach *Griffitha* granicę wytrzymałości rzędu 63000 kG/cm<sup>2</sup>, co stanowi więcej niż połowę wspomnianej wyżej wytrzymałości teoretycznej.

**49. Twierdzenie Castigliano.** W poprzednim paragrafie postać równowagi ciała sprężystego, przy zadanych siłach masowych i warunkach brzegowych, porównywaliśmy z postacią nieznacznie zmienioną przez przemieszczenia przygotowane  $\delta u$  i  $\delta v$ , liczone do położenia równowagi. Ustaliliśmy, że rzeczywiste przemieszczenia, odpowiadające położeniu równowagi trwałej, mają tę własność, że całkowita energia potencjalna układu osiąga minimum.

Zamiast przemieszczeń rozważmy obecnie naprężenia odpowiadające położeniu równowagi. Dla przykładu równowazymy ponownie przypadek płaskiego stanu naprężenia. Wiemy, że równania równowagi [18], wraz z warunkami brzegowymi [20], nie wystarczają do określenia składowych stanu naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ . Drogą doboru różnych funkcji naprężeń  $\Phi$  w równaniach [29] można znaleźć wiele różnych rozkładów naprężeń, które spełniają równania równowagi i warunki brzegowe. Powstaje pytanie: co odróżnia rzeczywisty stan naprężenia od wszystkich innych, statycznie możliwych rozkładów naprężeń?

Niech  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  oznaczają składowe rzeczywistego stanu naprężenia, odpowiadającego położeniu równowagi, a  $\delta\sigma_x$ ,  $\delta\sigma_y$ ,  $\delta\tau_{xy}$  — małe wariacje tych składowych dobrane w ten sposób, by nowe składowe naprężenia  $\sigma_x + \delta\sigma_x$ ,  $\sigma_y + \delta\sigma_y$ ,  $\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$  spełniały te same równania równowagi [18]. Wtedy, odejmując równania dla pierwszego układu naprężeń od równań dla drugiego układu, znajdujemy, że przyrosty składowych naprężenia powinny spełniać następujące równania równowagi:

$$\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

[a]

<sup>1)</sup> *A. A. Griffith*: „Trans. Roy. Soc.” (London), ser. A, t. 221, str. 163; 1921. Patrz także jego praca w „Proc. Intern. Congr. Appl. Mech.”, Delft, 1924. Bibliografię tego zagadnienia można znaleźć w „Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik”, t. 4, cz. 2, 1931.

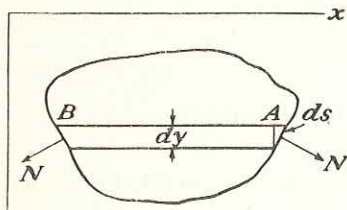
<sup>2)</sup> Patrz par. 63.

Odpowiednio do tych zmian składowych naprężenia wzrosną także siły powierzchniowe. Niech  $\delta\bar{X}$  i  $\delta\bar{Y}$  oznaczają te małe zmiany sił powierzchniowych. Wtedy, zgodnie z warunkami brzegowymi [20], otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m &= \delta\bar{X} \\ \delta\sigma_y m + \delta\tau_{xy} l &= \delta\bar{Y} \end{aligned} \quad [b]$$

Rozważmy obecnie zmianę energii odkształcenia ciała, spowodowaną wspomnianymi przyrostami składowych naprężenia. Posługując się energią odkształcenia odniesioną do jednostki objętości wyrażoną przez składowe naprężenia [86], znajdujemy przyrost tej energii w postaci

$$\delta V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial V_0}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_{xy}} \delta\tau_{xy} \quad [c]$$



Rys. 115

w której

$$\frac{\partial V_0}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) = \epsilon_x$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) = \epsilon_y$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \gamma_{xy}$$

Powyższe równości pozwalają napisać

$$\delta V_0 = \epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}$$

a całkowita zmiana energii odkształcenia, wywołana zmianami składowych naprężenia, równa się

$$\delta V = \iint \delta V_0 dx dy = \iint (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}) dx dy \quad [d]$$

Obliczmy tę zmianę energii, biorąc pod uwagę warunki brzegowe [b]. Pierwszy składnik równania [d], po scałkowaniu przez części, daje

$$\iint \epsilon_x \delta\sigma_x dx dy = \int dy \int \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x dx = \int dy |u \delta\sigma_x| - \iint u \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} dx dy \quad [e]$$

Tutaj wyrażenie  $|u \delta\sigma_x|$  przedstawia różnicę wartości funkcji  $u \delta\sigma_x$  na dwóch przeciwległych punktach brzegu, takich jak A i B (rys. 115). Mamy

$$dy |u \delta\sigma_x| = dy (u \delta\sigma_x)_A - dy (u \delta\sigma_x)_B = ds (u \delta\sigma_x \cos Nx)_A + ds (u \delta\sigma_x \cos Nx)_B \quad [f]$$

gdzie  $\cos Nx = l$  jest cosinusem kąta zawartego między normalną zewnętrzną do brzegu N a osią x, a ds jest elementem brzegu. Po zsumowaniu wyrażen takich, jak podane w równaniu [f], znajdujemy

$$\int dy |u \delta\sigma_x| = \int u \delta\sigma_x l ds$$

i równanie [e] przybiera postać

$$\iint \epsilon_x \delta\sigma_x dx dy = \int u \delta\sigma_x l ds - \iint u \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} dx dy \quad [g]$$

gdzie pierwsze całkowanie rozciąga się wzdłuż brzegu, a drugie — na całej powierzchni tarczy.

W ten sam sposób można przekształcić drugi i trzeci składnik równania [d] i znaleźć

$$\begin{aligned} \iint \epsilon_y \delta\sigma_y dx dy &= \int dx \int \frac{\partial v}{\partial y} \delta\sigma_y dy = \int dx |v \delta\sigma_y| + \\ &- \iint v \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} dx dy = \int v \delta\sigma_y m ds - \iint v \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} dx dy \\ \iint \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} dx dy &= \int dy \int \frac{\partial v}{\partial x} \delta\tau_{xy} dx + \int dx \int \frac{\partial u}{\partial y} \delta\tau_{xy} dy = \\ &= \int dy |v \delta\tau_{xy}| - \iint v \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} dx dy + \int dx |u \delta\tau_{xy}| + \\ &- \iint u \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} dx dy = \int v \delta\tau_{xy} l ds + \int u \delta\tau_{xy} m ds + \\ &- \iint v \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} dx dy - \iint u \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad [h]$$

Po podstawieniu [g] i [h] do równania [d], otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta V &= \int [u (\delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m) + v (\delta\sigma_y m + \delta\tau_{xy} l)] ds + \\ &- \iint \left[ u \left( \frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial \delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

gdzie pierwsze całkowanie rozciąga się wzdłuż brzegu, a drugie — na całą powierzchnię tarczy. Wykorzystując równania [a] i [b], otrzymujemy ostatecznie wyrażenie na zmianę energii odkształcenia, odpowiadającą wariacji składowych naprężenia, w następującej postaci:

$$\delta V = \int (u \delta\bar{X} + v \delta\bar{Y}) ds \quad [91]$$

Prawa strona tego równania przedstawia pracę wykonaną przez przyrosty sił na przemieszczeniach rzeczywistych.

Naprężenia rzeczywiste, to takie naprężenia, które spełniają to równanie. Analogiczne równanie można otrzymać dla trójosiowego stanu naprężenia. W nawiasie wyrażenia [91] pojawi się wtedy trzeci składnik  $w \delta\bar{Z}$ , a całkowanie przebiegać będzie nie po krzywej, a po powierzchni brzegowej ciała.

Jeśli zamiast obciążenia ciągłego powierzchni mamy do czynienia z siłami skupionymi, to całkowanie należy w równaniu [91] zastąpić sumowaniem. Niech  $P_1, P_2, \dots$  oznaczają niezależne obciążenia skupione, a  $d_1, d_2, \dots$  składowe przemieszczeń rzeczywistych punktów przyłożenia tych obciążeń w kierunku ich działania. Wtedy równanie [91] przyjmie postać

$$\delta V = d_1 \delta P_1 + d_2 \delta P_2 + \dots \quad [92]$$

W naszych rozważaniach przyjmowaliśmy wariacje naprężeń w najogólniejszej postaci, spełniającej równania równowagi [a].

Rozważymy obecnie taki przypadek szczególny, w którym wariacje składowych naprężenia są tego rodzaju, że mogą być wywołane w ciele sprężystym odpowiednimi zmianami sił zewnętrznych. Przyjmujemy, że składowe naprężenia wyrażone są w funkcji obciążeń

zewnętrznych  $P_1, P_2, \dots$  i rozważamy te zmiany składowych naprężenia, które wywołane są zmianami tych sił  $\delta P_1, \delta P_2, \dots$ . Rozpatrując jedynie takie przypadki, w których składowe naprężenia są liniowymi funkcjami obciążeń<sup>1)</sup>  $P_1, P_2, \dots$  i podstawiając te funkcje do równania [84], otrzymujemy wyrażenie na energię odkształcenia w postaci jednorodnej funkcji kwadratowej sił zewnętrznych.

Należy zauważyć, że reakcje podporowe, które daje się wyznaczyć z równań równowagi ciała sztywnego, wyrażone będą w postaci funkcji zadanych obciążeń  $P_1, P_2, \dots$  i nie wejdą do równania na energię odkształcenia. Jeśli istnieją jeszcze więzy dodatkowe, to odpowiednie reakcje należy rozpatrywać wraz z obciążeniami  $P_1, P_2, \dots$  jako siły statyczne niezależne.

Mając wyrażenie na energię odkształcenia w postaci funkcji sił zewnętrznych, możemy napisać zmianę jej wywołaną przez zmiany sił

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial V}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do równania [92] znajdujemy

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P_1} - d_1 \right) \delta P_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial P_2} - d_2 \right) \delta P_2 \dots = 0 \quad [i]$$

Jak już wyjaśniliśmy poprzednio, siły  $P_1, P_2, \dots$  są statycznie niezależne i ich zmiany  $\delta P_1, \delta P_2, \dots$  są zupełnie dowolne. Możemy więc wszystkie wariacje z wyjątkiem jednej przyjąć równe zeru. Z równania [i] wynika więc, że

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = d_1; \quad \frac{\partial V}{\partial P_2} = d_2 \dots \quad [93]$$

Widzimy, że jeśli energia odkształcenia  $V$  układu sprężystego jest funkcją statycznie niezależnych sił zewnętrznych  $P_1, P_2, \dots$  to pochodne cząstkowe tej funkcji względem którejkolwiek z tych sił dają rzeczywiste przemieszczenia punktu przyłożenia siły w kierunku jej działania. Jest to ogólnie znane twierdzenie *Castigliano*.

**50. Zasada najmniejszej pracy.** Przy wyprowadzeniu równania [91] zakładaliśmy dowolne przyrosty składowych naprężenia, spełniające równania równowagi. Jeśli obecnie uczynimy założenie, że przyrosty te nie zmieniają sił powierzchniowych, to otrzymamy zamiast równań [b] poprzedniego paragrafu związki

$$\delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m = 0$$

$$\delta \sigma_y m + \delta \tau_{xy} l = 0$$

i równanie [91] przyjmie postać

$$\delta V = 0 \quad [94]$$

Oznacza to, że jeśli rozważamy ciało obciążone na brzegu danymi siłami zewnętrznymi i rozpatrujemy takie przyrosty składowych naprężenia, które nie wpływają na równanie równowagi i warunki brzegowe, to rzeczywistymi składowymi naprężeniami będą te, które dają wariacje energii odkształcenia równe zeru. Można wykazać, że te poprawne wartości składowych na-

<sup>1)</sup> Wykluczamy np. taki przypadek, jak zginanie cienkiego pręta siłami poprzecznymi z równoczesnym ściskaniem lub rozciąganiem siłami osiowymi. W takich przypadkach naprężenia spowodowane działaniem sił osiowych zależą od wielkości ugięcia spowodowanego siłami poprzecznymi i nie są już liniowymi funkcjami sił zewnętrznych.

prężenia dają *minimum* energii odkształcenia. Równanie [94] wyraża wtedy tzw. *zasadę najmniejszej pracy*.

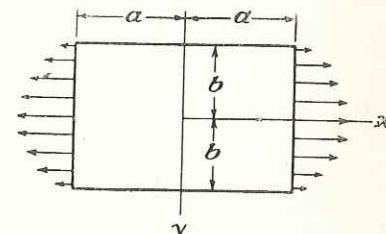
Równanie to obowiązuje również w tym przypadku, gdy część powierzchni jest sztywno utwierdzona za pomocą więzów i przyrosty składowych naprężenia są tego rodzaju, że powodują zmiany sił powierzchniowych na utwierdzonej części brzegu. Ponieważ przemieszczenia na zamocowanej części brzegu równają się zeru, to prawa strona równania [91] znika i dochodzimy ponownie do równania [94].

Zasadę najmniejszej pracy stosuje się bardzo często przy elementarnym sposobie obliczania układów<sup>1)</sup> statycznie niewyznaczalnych. Jeśli  $X, Y, Z, \dots$  są siłami lub momentami, działającymi na nadliczbowe elementy lub podpory statycznie niewyznaczalnych układów sprężystych, to ich wartości można obliczyć z warunku, że energia odkształcenia układu, przedstawiona w postaci funkcji  $X, Y, Z, \dots$ , musi osiągać minimum; otrzymujemy więc równania

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0, \dots \quad [95]$$

W następnym paragrafie omówimy kilka zastosowań zasady najmniejszej pracy przy rozwiązywaniu zagadnień dwuwymiarowych.

**51. Zastosowanie zasady najmniejszej pracy — tarcze prostokątne.** Rozważymy dla przykładu tarczę prostokątną. Poprzednio (par. 23) pokazaliśmy, że za pomocą szeregów trygonometrycznych można spełnić warunki na dwóch bokach tarczy prostokątnej. Otrzymane na tej drodze rozwiązania mogą przedstawiać wartość praktyczną wtedy, gdy szerokość tarczy jest mała w porównaniu z jej długością. Jeśli oba wymiary tarczy są tego samego rzędu, to trzeba rozważać warunki na wszystkich czterech krawędziach. Przy rozwiązywaniu zagadnień tego rodzaju można niekiedy z powodzeniem stosować zasadę minimum energii.



Rys. 116

Rozpatrzmy przypadek prostokątnej tarczy podlegającej rozciąganiu, która obciążona jest na brzegu siłami rozciągającymi, rozłożonymi według zależności parabolicznej<sup>2)</sup> (rys. 116). Warunki brzegowe w tym przypadku mają następującą postać:

$$\text{dla } x = \pm a$$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \sigma_x = S \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad [a]$$

$$\text{dla } y = \pm b$$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = 0$$

Na podstawie równania [86], energia odkształcenia tarczy o grubości jednostkowej ma postać

$$V = \frac{1}{2E} \iint [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2] dx dy \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Patrz np. S. Timoshenko: „Strength of Materials“, t. 1, 1940, lub Timoshenko i Young: „Theory of Structures“.

<sup>2)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Phil. Mag.“, t. 47, str. 1095, 1924.

Należy podkreślić, że w przypadku konturu jednospójnego, takiego jaki występuje w naszym przykładzie, rozkład naprężeń nie zależy od stałych sprężystości materiału (patrz par. 15) i dlatego możemy uprościć dalsze rozważania przez przyjęcie liczby *Poissona* równej zeru. Wtedy, wprowadzając funkcję naprężeń  $\Phi$ , po podstawieniu w [b],

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad \nu = 0$$

znajdujemy

$$V = \frac{1}{2E} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad [c]$$

Poprawne równanie funkcji naprężeń powinno spełniać warunki [a] i dawać minimalną wartość energii odkształcenia [c].

Jeśli do wyznaczenia minimum [c] zastosujemy rachunek wariacyjny, to dojdziemy do równania [30], które określa funkcję naprężeń  $\Phi$ . Zastosujemy tu inną metodę wyznaczenia przybliżonego rozwiązania zagadnienia. Przyjmijmy funkcję naprężeń w postaci szeregu

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3 + \dots \quad [d]$$

i zażądamy, aby spełniał on warunki brzegowe [a]; stałe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  określimy później. Po podstawieniu tego szeregu do wyrażenia [c] otrzymujemy  $V$ , jako funkcję drugiego stopnia od  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ . Wielkość tych stałych można określić z warunków na minimum

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = 0; \dots \quad [e]$$

które będą miały postać równań liniowych względem  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

Przez odpowiedni dobór funkcji  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  możemy w ogólności otrzymać zadowalające rozwiązanie przybliżone, posługując się jedynie kilku pierwszymi składnikami szeregu [d]. W naszym przypadku warunki brzegowe spełnione są przez przyjęcie

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right)$$

ponieważ prowadzi ono do związków

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = 0; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} = S \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Pozostałe funkcje  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  muszą być tak dobrane, aby odpowiadające im naprężenia zniknęły na brzegu. Aby zapewnić spełnienie tego warunku, przyjmijmy we wszystkich tych funkcjach współczynnik o postaci  $(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$ . Druga pochodna tego wyrażenia względem  $x$  znika na brzegach  $y = \pm b$ , a druga pochodna względem  $y$  znika na brzegach  $x = \pm a$ . Pochodna mieszana  $\partial^2 / \partial x \partial y$  znika na wszystkich czterech brzegach tarczy. Funkcję naprężeń można więc przyjąć w postaci

$$\Phi = \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots) \quad [f]$$

W szeregu tym uwzględniliśmy jedynie parzyste potęgi  $x$  i  $y$ , ponieważ rozkład naprężeń jest symetryczny względem osi  $x$  i  $y$ . Ograniczając się jedynie do pierwszego składnika szeregu [f], otrzymujemy

$$\Phi = \frac{1}{2} S y^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{y^2}{b^2} \right) + \alpha_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

Pierwsze z równań [e] przyjmuje więc postać

$$\alpha_1 \left( \frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

W przypadku tarczy kwadratowej ( $a=b$ ) otrzymujemy

$$\alpha_1 = 0,04253 \frac{S}{a^6}$$

a składowe naprężenia

$$\sigma_x = S \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1702 S \left( 1 - \frac{3y^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2$$

$$\sigma_y = -0,1702 S \left( 1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right)^2$$

$$\tau_{xy} = -0,6805 S \frac{xy}{a^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right)$$

Rozkład  $\sigma_x$  w przekroju  $x=0$  przedstawiony jest<sup>1)</sup> krzywą II (rys. 117).

W celu otrzymania lepszego przybliżenia uwzględniamy obecnie trzy składniki szeregu [f]. Wtedy równania [e], które służą do obliczenia stałych  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , mają postać

$$\alpha_1 \left( \frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left( \frac{64}{77} + \frac{64}{49} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left( \frac{64}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

$$\alpha_1 \left( \frac{64}{11} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left( \frac{192}{143} + \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{192}{7} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left( \frac{64}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2} \text{ [g]}$$

$$\alpha_1 \left( \frac{64}{7} + \frac{64}{11} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_2 a^2 \left( \frac{64}{77} + \frac{64}{77} \frac{b^4}{a^4} \right) + \alpha_3 a^2 \left( \frac{192}{7} \frac{b^2}{a^2} + \frac{256}{77} \frac{b^4}{a^4} + \frac{192}{143} \frac{b^6}{a^6} \right) = \frac{S}{a^4 b^2}$$

Dla tarczy kwadratowej otrzymujemy

$$\alpha_1 = 0,04040 \frac{S}{a^6}; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0,01174 \frac{S}{a^8}$$

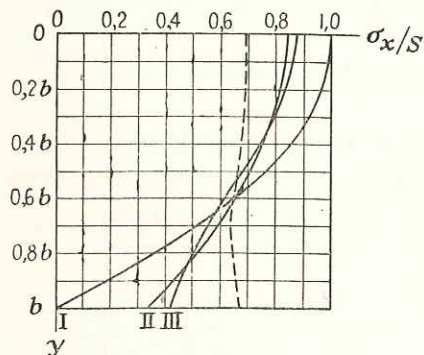
Rozkład  $\sigma_x$  w poprzecznym przekroju  $x=0$  podaje równanie

$$(\sigma_x)_{x=0} = S \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right) - 0,1616 S \left( 1 - 3 \frac{y^2}{a^2} \right) + 0,0235 \left( 1 - 12 \frac{y^2}{a^2} + 15 \frac{y^4}{a^4} \right)$$

Na wykresie (rys. 117) przedstawia je krzywa III<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Krzywa I przedstawia paraboliczny rozkład naprężenia na końcach tarczy.

<sup>2)</sup> Podobne wyniki otrzymał C. E. Inglis: „Proc. Roy. Soc.” (London), ser. A, t. 103, 1923 oraz G. Pickett: „J. Applied Mechanics” (Trans. A. S. M. E.), t. 11, str. 176, 1944.



Rys. 117



Gdy długość tarczy wzrasta, rozkład naprężenia wzdłuż przekroju  $x=0$  staje się coraz bardziej równomierny. Jeśli na przykład przyjąć  $a=2b$ , to na podstawie równań [g] znajdziemy

$$\alpha_1 = 0,07983 \frac{S}{a^4 b^2}; \quad \alpha_2 = 0,1250 \frac{S}{a^6 b^2}; \quad \alpha_3 = 0,01826 \frac{S}{a^6 b^2}$$

Odpowiednie wartości  $\sigma_x$  wzdłuż przekroju  $x=0$  podane są poniżej:

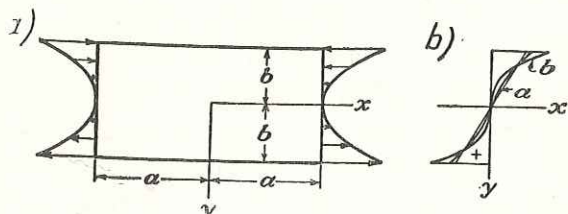
$$\frac{y}{b} = 0 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1,0$$

$$\sigma_x = 0,690 S \quad 0,684 S \quad 0,669 S \quad 0,653 S \quad 0,649 S \quad 0,675 S$$

Rozkład ten przedstawiony jest na wykresie (rys. 117) linią przerywaną. Widać, że w tym przypadku odchylenie od wartości średniej naprężenia równej  $\frac{2}{3}S$  jest bardzo małe.

Na to, aby przejść do innych, symetrycznych rozkładów sił wzdłuż brzegów  $x=\pm a$ , wystarczy jedynie zmienić postać funkcji  $\Phi$  w wyrażeniu [f]. Zmianie ulegają tylko prawe strony równań [g].

Jako przykład rozkładu naprężeń niesymetrycznego względem osi  $x$  rozważymy przypadek zginania<sup>1)</sup> pokazany na rys. 118, w którym siły przyłożone na końcach mają postać  $(\sigma_x)_{x=\pm a} =$



Rys. 118

$= Ay^3$  (krzywa  $b$  na rys. 118b). Oczywiście układ naprężeń będzie nieparzysty względem zmiennej  $x$  i parzysty względem zmiennej  $y$ . Warunki te spełnimy przez przyjęcie funkcji naprężeń w postaci

$$\Phi = \frac{1}{20} Ay^5 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 y + \alpha_2 y x^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 x^2 y^3 + \dots) \quad [h]$$

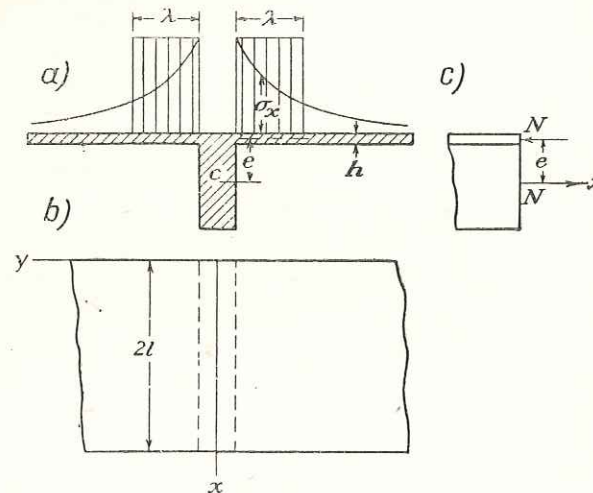
Tak jak poprzednio, pierwszy składnik spełnia warunki brzegowe dla  $\Phi$ . Podstawiając wyrażenie [h] z czterema współczynnikami  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  do równań [e], znajdujemy dla tarczy kwadratowej ( $a=b$ )

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2Aa^3 \left\{ \frac{1}{2} \eta^3 - (1 - \xi^2)^2 [0,08392 (5\eta^3 - 3\eta) + 0,004108 (21\eta^5 - 20\eta^3 + 3\eta)] + \right. \\ \left. - \xi^2 (1 - \xi^2)^2 [0,07308 (5\eta^3 - 3\eta) + 0,04179 (21\eta^5 - 20\eta^3 + 3\eta)] \right\} \quad [k]$$

gdzie  $\xi = x/a$ , a  $\eta = y/b$ . Rozkład naprężeń wzdłuż przekroju środkowego niewiele różni się od prostoliniowego. Pokazany jest on na rys. 118b w postaci krzywej  $a$ .

<sup>1)</sup> Obliczenia te pochodzą z rozprawy doktorskiej J. N. Goodiera, Michigan Univ., 1931, Patrz także „Trans. A. S. M. E.“, t. 54, str. 173, 1932.

**52. Szerokość współpracująca pólki w dźwigarach teowych.** Jako inny przykład zastosowania zasady najmniejszej pracy do dwuwymiarowych zagadnień tarcz prostokątnych, rozważymy belkę teową z bardzo szerokimi półkami (rys. 119). Belki takie często spotyka się w konstrukcjach żelbetowych i okrętowych. Elementarna teoria zginania zakłada, że naprężenia przy zginaniu są proporcjonalne do odległości od osi obojętnej, tzn. że naprężenia nie zmieniają się wzdłuż szerokości półki. Jeśli jednak ta szerokość jest bardzo duża, to wiadomo, że części pólki znajdujące się w pewnej odległości od środka nie biorą pełnego udziału w przenoszeniu momentu



Rys. 119

zginającego i belka okazuje się słabsza, niż to wynika z elementarnej teorii zginania. Przy określaniu naprężeń w takich belkach przyjęto w praktyce rzeczywistą szerokość półki zastępować pewną szerokością zredukowaną dobraną tak, aby stosowana do belek o przekroju zredukowanym elementarna teoria zginania dawała prawidłowe wartości maksymalnych naprężeń zginających. Tak zmniejszona szerokość półki nazywa się *szerokością współpracującą*. Omówimy poniżej teoretyczne podstawy określania tej szerokości<sup>1)</sup>.

W celu możliwie największego uproszczenia zagadnienia założymy, że mamy do czynienia z nieskończenie długą belką ciągłą opartą na równoległych podporach. Wszystkie przęsła belki są jednakowo obciążone obciążeniami symetrycznymi względem środka przęsła. Jedną z podpór w przęśle pokazanym na rys. 119 przyjmijmy za początek układu współrzędnych z osią  $x$  skierowaną wzdłuż osi belki. Dzięki symetrii wystarczy rozważyć jedynie jedno przęsło i jedną połowę półki, np. tę którą odpowiada dodatniej rzędnej  $y$ . Szerokość półki przyjmujemy się nieskończenie dużą, a grubość — bardzo małą w porównaniu z wysokością środka. Zginanie półki jako bardzo cienkiej płyty pomijamy. Można założyć, że przy zginaniu belki siły przekazywane są na półkę wzdłuż jej powierzchni środkowej, a rozkład naprężeń w półkach jest dwuwymiarowy. Odpowiednią funkcję naprężeń, spełniającą równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad [a]$$

można w przypadku symetrii przyjąć w postaci szeregu

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Zagadnienie to badał T. v. Kármán; patrz „Festschrift A. guust Föppl“ str. 114, 1923. Także G. Schnadel: „Werft und Reederei“, t. 9, str. 92, 1928; E. Reissner: „Der Stahlbau“, 1934, str. 206; E. Chwalla: „Der Stahlbau“ 1936; L. Beschkin: „Publ. Intern. Assoc. Bridge and Structural Engineering“, t. 5, str. 65, 1938.

w którym  $f_n(y)$  jest funkcją jedynie zmiennej  $y$ . Po podstawieniu do równania [a] otrzymujemy następujące równanie na funkcję  $f_n(y)$ :

$$f_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\frac{n\pi y}{l}} + C_n e^{\frac{n\pi y}{l}} + D_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{\frac{n\pi y}{l}} \dots \quad [c]$$

Dla spełnienia warunku, że dla nieskończonych wartości  $y$  naprężenia muszą zniknąć, przyjmujemy  $C_n = D_n = 0$ . Wyrażenie na funkcję naprężeń przybiera wtedy postać

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n \left(1 + \frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\frac{n\pi y}{l}} \right] \cos \frac{n\pi x}{l} \quad [d]$$

Współczynniki  $A_n$  i  $B_n$  określi się obecnie z warunku, że rzeczywistym rozkładem naprężeń jest ten, przy którym energia odkształcenia półki wraz z energią odkształcenia środnika osiąga minimum. Po podstawieniu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

do wyrażenia na energię odkształcenia

$$V_1 = 2 \cdot \frac{h}{2E} \int_0^{\infty} \int_0^{2l} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2] dx dy$$

i po wykorzystaniu równania [d] na funkcję naprężeń, energia odkształcenia półki przybiera następującą postać<sup>1)</sup>

$$V_1 = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^3}{l^2} \left( \frac{B_n^2}{E} + \frac{A_n B_n}{2G} + \frac{A_n^2}{2G} \right) \quad [e]$$

Rozpatrując oddzielnie energię odkształcenia środnika oznaczmy przez  $A$  — jego powierzchnię przekroju, przez  $J$  — jego moment bezwładności względem osi poziomej, przechodzącej przez środek ciężkości  $C$ , a przez  $e$  — odległość środka ciężkości środnika od powierzchni środkowej półki (rys. 119). Całkowity moment zginający, przenoszony przez dowolny przekrój półki wraz z żebrzem, można przedstawić w naszym symetrycznym przypadku w postaci szeregu

$$M = M_0 + M_1 \cos \frac{\pi x}{l} + M_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad [f]$$

W szeregu tym  $M_0$  jest wielkością statycznie niewyznaczalną, zależną od wielkości momentów podporowych, a pozostałe współczynniki  $M_1, M_2, \dots$  określić należy z warunków obciążenia. Niech  $N$  oznacza siłę ściskającą działającą na półkę (rys. 119c). Moment zginający  $M$  możemy rozłożyć na dwa momenty składowe:  $M'$ , który przenosi półka, i  $M'' = Ne$ , wywołany działaniem sił osiowych  $N$  w półce i żebrze. Z warunków statycznych wynika, że naprężenia normalne w dowolnym przekroju całej belki dają moment  $M$ . Tak więc

$$\begin{aligned} N + 2h \int_0^{\infty} \sigma_x dy &= 0 \\ M' - 2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy &= M \end{aligned} \quad [g]$$

gdzie  $-2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy = M''$  jest częścią momentu zginającego przeniesionego przez półkę. Energia odkształcenia żebra równa się

$$V_2 = \int_0^{2l} \frac{N^2 dx}{2AE} + \int_0^{2l} \frac{M''^2 dx}{2EJ} \quad [h]$$

Z pierwszego z równań [g] znajdujemy

$$N = -2h \int_0^{\infty} \sigma_x dy = -2h \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = 2h \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_0^{\infty}$$

<sup>1)</sup> Całki wchodzące w skład równania na energię odkształcenia podane są w pracy *Kármána*, loc. cit.

Z równania [d] wynika, że

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=\infty} = 0; \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Tak więc

$$N = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$M' = M + 2he \int_0^{\infty} \sigma_x dy = M + Ne = M + 2he \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

lub po wprowadzeniu oznaczenia

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n$$

możemy napisać

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

[k]

$$M' = M + e \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{n\pi x}{l} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Po podstawieniu do [h] i wobec

$$\int_0^{2l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l; \quad \int_0^{2l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad (\text{gd}y \ m \neq n)$$

otrzymujemy

$$V_2 = \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 l}{EJ} + \frac{l}{2EJ} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2$$

Sumując tę energię z energią odkształcenia półki [c] i wprowadzając w [e] oznaczenia

$$2h \frac{n\pi}{l} A_n = X_n; \quad 2h \frac{n\pi}{l} B_n = Y_n$$

otrzymujemy następujące równanie całkowitej energii odkształcenia:

$$V = \frac{\pi}{2hE} \sum_{n=1}^{\infty} n [Y_n^2 + (1+\nu)X_n Y_n + (1+\nu)X_n^2] + \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{M_0^2 l}{EJ} + \frac{l}{2EJ} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 \quad [l]$$

Wielkości  $M_0, X_n, Y_n$  określa się z warunku na minimum energii odkształcenia [l]. Można się przekonać, że moment  $M_0$  występuje jedynie w składniku  $M_0^2 l / EJ$  i z warunku na minimum dla [l] wynika, że  $M_0 = 0$ .

Z warunku

$$\frac{\partial V}{\partial Y_n} = 0$$

wynika, że

$$2Y_n + (1+\nu)X_n = 0$$

$$Y_n = -\frac{1+\nu}{2} X_n$$

Po podstawieniu powyższego oraz  $M_0=0$  do równania [l] dochodzimy do wyrażenia na energię odkształcenia:

$$V = \frac{\pi}{2hE} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot X_n^2 + \frac{l}{2AE} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 + \frac{l}{2EJ} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n + eX_n)^2 \quad [m]$$

Z warunku, że  $X_n$  powinno dawać minimalne wartości  $V$ , wynika, że

$$\frac{\partial V}{\partial X_n} = 0$$

skąd znajdujemy

$$X_n = -\frac{M_n}{e} \frac{1}{1 + \frac{J}{Ae^2} + \frac{n\pi J}{hle^2} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}} \quad [n]$$

Rozważmy obecnie przypadek szczególny, w którym wykres momentu zginającego jest zwykłą cosinusoidą, czyli  $M=M_1 \cos(\pi x/l)$ . Wtedy, na podstawie równania [n]

$$X_1 = -\frac{M_1}{e} \frac{1}{1 + \frac{J}{Ae^2} + \frac{\pi J}{he^2 l} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}}$$

a na podstawie równania [k], moment sił podłużnych  $N$  w półce wynosi

$$M'' = -eN = -eX_1 \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{M}{1 + \frac{J}{Ae^2} + \frac{\pi J}{he^2 l} \cdot \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}} \quad [p]$$

Obecnie rozkład naprężenia  $\sigma_x$  na szerokości półki można wyznaczyć z równania [d], w którym wszystkie współczynniki  $A_n$  i  $B_n$ , z wyjątkiem  $A_1$  i  $B_1$ , przyjmuje się równe zero i zgodnie z naszymi oznaczeniami zakłada się

$$A_1 = \frac{lX_1}{2\pi h}; \quad B_1 = -\frac{1 + \nu}{2} A_1 = -\frac{(1 + \nu) lX_1}{4\pi h}$$

Otrzymany w ten sposób rozkład  $\sigma_x$  przedstawiony jest w postaci wykresu na rys. 119a. Naprężenie  $\sigma_x$  maleje ze wzrostem odległości od środka.

Określimy obecnie taką szerokość półki  $2\lambda$  (rys. 119a) przekroju teowego, przy której równomierny rozkład naprężenia  $\sigma_x$  wzdłuż przekroju półki (zakreskowany na rysunku), daje moment  $M''$  określony wyżej równaniem [p]. Będzie to właśnie szerokość współpracująca półki. Podobnie jak poprzednio przez  $M'$  i  $M''$  oznaczmy momenty przenoszone przez środek i półkę, przez  $\sigma_c$  — naprężenie w środku ciężkości środka  $C$ , a przez  $\sigma_e$  — naprężenie w powierzchni środkowej półki i na podstawie elementarnej teorii zginania napiszemy

$$\sigma_e = \sigma_c + \frac{M'e}{J} \quad [q]$$

Z równań statyki

$$\begin{aligned} 2\lambda h \sigma_e + \sigma_c A &= 0 \\ 2\lambda h \sigma_e e &= M'' \end{aligned} \quad [r]$$

Równania na obie części momentu zginającego, na podstawie równań [q] i [r], mają postać

$$M' = \frac{J}{e} (\sigma_e - \sigma_c) = \frac{J}{e} \left( 1 + \frac{2\lambda h}{A} \right) \sigma_e$$

$$M'' = 2\lambda h e \sigma_e$$

Stosunek  $M''$  do całkowitego momentu zginającego wynosi

$$\frac{M''}{M' + M''} = \frac{2\lambda h e \sigma_e}{2\lambda h e \sigma_e + \frac{J}{e} \left( 1 + \frac{2\lambda h}{A} \right) \sigma_e} = \frac{1}{1 + \frac{J}{Ae^2} + \frac{J}{2\lambda h e^2}} \quad [s]$$

Aby ten stosunek zrównać ze stosunkiem  $M''/M$ , obliczonym ze ścisłego rozwiązania [p], musimy przyjąć

$$\frac{J}{2\lambda h e^2} = \frac{\pi J}{h e^2 l} \frac{3 + 2\nu - \nu^2}{4}$$

Otrzymujemy stąd następujące wyrażenie na szerokość współpracującą  $2\lambda$

$$2\lambda = \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}$$

Przyjmując np.  $\nu=0,3$ , znajdujemy

$$2\lambda = 0,181 (2l)$$

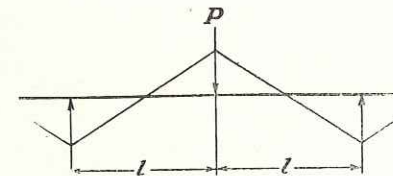
to znaczy, że dla przyjętego rozkładu momentu zginającego szerokość współpracująca półki wynosi około 18% rozpiętości.

W przypadku belki ciągłej, obciążonej równymi siłami skupionymi, przyłożonymi w środkach rozpiętości przeseł, wykres momentów pokazuje rys. 120. Po przedstawieniu tego wykresu szeregiem *Fouriera* i po wykorzystaniu przedstawionej wyżej metody znajdziemy, że szerokość współpracująca nad podporami równa się

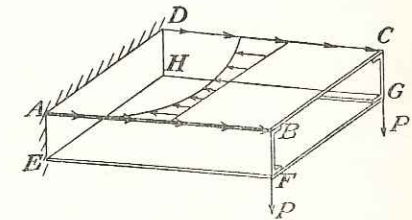
$$2\lambda = 0,85 \cdot \frac{4l}{\pi(3 + 2\nu - \nu^2)}$$

Jest ona więc nieco mniejsza niż w przypadku momentów rozłożonych według cosinusoidy.

**53. Ścinanie półek.** Zagadnienie podobnej natury, jak w par. 52, występuje w konstrukcjach lotniczych. Rozważmy belkę skrzynkową (rys. 121), złożoną z dwóch ceowników  $ABFE$  i  $DCGH$ , do których są przyspawane lub przynitowane cienkie płytki  $ABCD$  i  $EFGH$ . Jeśli cała belka jest z lewej strony utwierdzona zupełnie i obciążona jako wspornik dwiema siłami  $P$ , przyłożonymi do obu końców ceowników, to z elementarnej teorii zginania wynika, że naprężenia rozciągające przy zginaniu rozkładają się równomiernie w każdym przekroju półki  $ABCD$  równoległym do  $BC$ . W rzeczywistości jednak naprężenia rozciągające powstają w półkach na skutek działania naprężeń stycznych, istniejących pomiędzy ceownikami a płytą w miejscu ich połączenia (rys. 121). Naprężenia rozciągające nie będą więc na szerokości płytki rozłożone równomiernie, lecz przybiorą wartości wyższe na brzegach, a niższe w środku (rys. 121). To zjawisko, polegające na odchyleniu od równomiernego rozkładu naprężeń wynikającego z teorii elementarnej, bywa określone mianem „ścinania półek”, ponieważ prowadzi do odkształceń postaciowych w płytkach. Zagadnienie to było zbadane za pomocą metod energetycznych i innych oraz przy pewnych założeniach upraszczających<sup>1)</sup>.



Rys. 120



Rys. 121

## ZADANIA

1. Znaleźć wyrażenie na energię odkształcenia  $V$ , odniesioną do jednostki grubości walca lub graniastosłupa w płaskim stanie odkształcenia ( $\varepsilon_z=0$ ) w postaci funkcji  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .
2. Wypisać całkę dla energii odkształcenia  $V$  we współrzędnych biegunowych, w funkcji składowych naprężeń, w przypadku płaskiego stanu naprężenia (wykorzystać równanie [b], par. 51).

<sup>1)</sup> E. Reissner: „Quart. Applied Math.“, t. 4, str. 268, 1946; J. Hadji-Argriris (Brit.) „Aeronaut. Research Council, Reports and Memoranda“, Nr 2038, 1944; J. Hadji-Argriris i H. L. Cox, tamże Nr 1969, 1944. W wymienionych pracach podane są odnośniki do wcześniejszych badań.

Rozkład naprężeń podany równaniem [80] jest rozwiązaniem zagadnienia pokazanego na rys. 122, w którym moment  $M$ , przyłożony za pomocą równomiernie rozłożonych sił stycznych na powierzchni wewnętrznej pierścienia, równoważony jest momentem sił działających na powierzchni zewnętrznej. Wyznaczyć energię odkształcenia pierścienia i przez przyrównanie jej do pracy wykonywanej przez obciążenie znaleźć obrót zewnętrznego obwodu pierścienia, przyjmując, że jest on zamocowany na powierzchni wewnętrznej (posłużyć się zadaniem 2 z rozdziału 5).

3. Wyznaczyć energię odkształcenia przypadającą na jednostkę długości rury  $a < r < b$  poddanej ciśnieniu wewnętrznemu (patrz równanie [46]). Znaleźć przemieszczenie promieniowe powierzchni wewnętrznej.

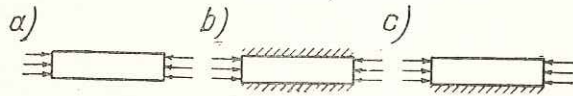
Dojść do tego samego wyniku przez wykorzystanie równania [50] (przyjmując  $v = 0$ ) i związków między naprężeniem i odkształceniem dla płaskiego stanu naprężenia.

4. Wyjaśnić znaczenie równania

$$\iint V_0 dx dy = \frac{1}{2} \iint (Xu + Yv) dx dy + \frac{1}{2} \iint (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds$$

i uzasadnić poprawność czynników  $\frac{1}{2}$  po jego prawej stronie.

5. Wskazać, posługując się równaniem [84], że jeśli mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, a odpowiedni przypadek płaskiego stanu odkształcenia  $\varepsilon_z = 0$  charakteryzuje się takimi samymi wielkościami naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , to energia odkształcenia przypadająca na jednostkę grubości jest większa w przypadku płaskiego stanu naprężenia.



Rys. 123

6. Na rys. 123a przedstawione jest pasmo ściskane, w którym na całej jego długości występować będzie naprężenie ściskające. Na rys. 123b pasmo jest przytwierdzone do sztywnych płaszczyzn na górnej i dolnej powierzchni. Czy naprężenia wzdłuż pręta będą miały jedynie charakter lokalny na jego końcach? Na rys. 123c górny brzeg pręta jest swobodny, a dolny — utwierdzony jak w przypadku [b]. Czy naprężenia będą miały charakter lokalny czy też nie?

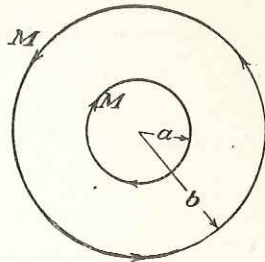
7. Korzystając z zasady, że układ w położeniu równowagi ma niższą energię potencjalną niż układ w stanie bliskim tego położenia, wykazać bez przeprowadzenia obliczeń, że energia odkształcenia tarczy, pokazanej na rys. 114, po wykonaniu rozcięcia  $AB$  albo zmniejszy się, albo pozostanie niezmienną.

8. Przedstawić twierdzenie *Castigliano*, wyrażone równaniem [91] w postaci dogodnej do wykorzystania we współrzędnych biegunowych. Siły brzegowe  $\bar{X}$  i  $\bar{Y}$  zastąpić składowymi: promieniową  $\bar{R}$  i styczną  $\bar{T}$ , a składowe przemieszczenia — przez odpowiednie składowe we współrzędnych biegunowych  $u$  i  $v$  zgodnie z rozdziałem 4.

9. „Równanie [91] jest słuszne, gdy  $\delta V, \delta \bar{X}, \delta \bar{Y}$  są spowodowane małymi zmianami składowych naprężeń, spełniających równania równowagi [a], par. 49, chociaż zmiany te nie spełniają warunków ciągłości (par. 15) lub też spełniają. W tym drugim przypadku zmiany naprężeń są takie, jakie rzeczywiście powstają w wyniku zmian sił brzegowych o  $\delta \bar{X}$ , i  $\delta \bar{Y}$ “. Czy takie postawienie zagadnienia jest poprawne?

Przyjąć że tak i pokazać, że przemieszczenia promieniowe w zadaniu 3 można obliczyć z równania

$$(u)_{r=a} = \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{\partial V}{\partial p_i}$$



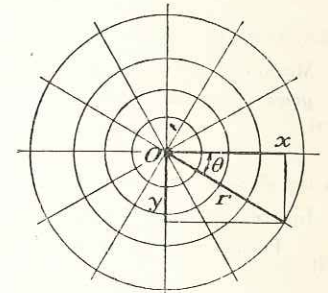
Rys. 122

## ROZDZIAŁ 7

### ZAGADNIENIE DWUWYMIAROWE WE WSPÓLRZĘDNYCH KRZYWOLINIOWYCH

**54. Funkcje zmiennej zespolonej.** W celu rozwiązania omówionych dotąd zagadnień wystarczały współrzędne prostokątne i biegunowe. Przy innych postaciach brzegu — elipsach, hiperbolach, kołach niewspółśrodkowych oraz bardziej złożonych krzywych — wygodniej jest zwykle stosować inne współrzędne. W rozważaniach oraz przy konstrukcji odpowiedniej funkcji naprężeń, wygodnie jest posługiwać się zmienną zespoloną.

Liczba zespolona  $x + iy$  składa się z dwóch liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  oraz z  $i = \sqrt{-1}$ . Ponieważ  $i$  nie należy do zbioru liczb rzeczywistych, należy zdefiniować znaczenia pojęć: równości, dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia<sup>1)</sup>. Tak więc, równość  $x + iy = x' + iy'$  oznacza z definicji, że  $x = x'$ ,  $y = y'$ , a  $i^2 = -1$ . Pozostałe operacje zdefiniowane są tak samo jak i dla liczb rzeczywistych.



Rys. 124

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \quad \text{ponieważ} \quad i^2 = -1$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych takich jak na rys. 124, mamy

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad [a]$$

Ponieważ

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \dots$$

oraz

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1, \text{ etc.},$$

mamy

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots\right) = \cos \theta + i \sin \theta$$

a tym samym na podstawie równania [a]

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad [b]$$

Funkcje algebraiczne, trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne i inne można tworzyć zarówno ze zmiennej  $z$ , jak i ze zmiennej rzeczywistej, o ile stosuje się definicje raczej analityczne, a nie geometryczne. Tak więc,  $\sin z$ ,  $\cos z$  i  $e^z$  można zdefiniować przez odpowiadające im szeregi potęgowe. Każdą taką funkcję można podzielić na część „rzeczywistą“ i „urojoną“, to jest przedstawić ją w postaci  $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ , gdzie część rzeczywista  $\alpha(x, y)$  i część urojona<sup>2)</sup>  $\beta(x, y)$  są zwykłymi funkcjami rzeczywistymi  $x$  i  $y$  (nie zawierają  $i$ ). Np., jeśli  $f(z)$  jest funkcja

<sup>1)</sup> Definicje opierają się właściwie na działaniach nad parą liczb rzeczywistych, a współczynnik  $i$  wprowadza się jedynie dla wygody. Patrz np. *E. T. Whittaker i G. N. Watson: „Modern Analysis“* wyd. 3, str. 6—8.

<sup>2)</sup> Należy zauważyć, że mimo swojej nazwy jest ona rzeczywista.