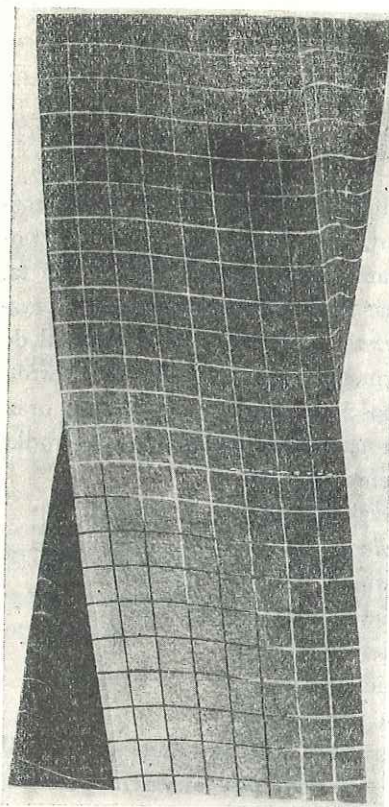


*Saint-Venant* przyjmuje, że odkształcenie skręcanego wału składa się: a) z obrotu przekroju poprzecznego wału, tak jak w przypadku wału kołowego; b) ze *spaczenia* przekroju, które jest jednakowe dla wszystkich przekrojów. Obierając początek układu współrzędnych na końcowym przekroju poprzecznym (rys. 147) znajdziemy, że przemieszczenia odpowiadające obrotowi przekroju poprzecznego są następujące



Rys. 146

$$u = -\theta zy; \quad v = \theta zx \quad [a]$$

gdzie  $\theta$  z jest kątem obrotu przekroju poprzecznego w odległości  $z$  od początku układu.

Spaczenie przekroju zdefiniowano za pomocą funkcji

$$w = \theta \psi(x, y) \quad [b]$$

Dla przyjętych przemieszczeń [a] i [b] obliczymy składowe odkształcenia ze związków [2], skąd

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \end{aligned} \quad [c]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

Odpowiednie składowe naprężenia otrzymamy ze związków [3] oraz [6]

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{xz} &= G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \end{aligned} \quad [d]$$

$$\tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

Możemy zauważyć, że przyjmując założenia [a] i [b] dotyczące odkształceń, nie będziemy mieli naprężeń normalnych działających pomiędzy podłużnymi włóknami wału albo wzdłuż kierunku tych włókien. Nie będziemy mieli również zniekształceń płaszczyzn przekrojów poprzecznych, ponieważ  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  znikają. Mamy w każdym punkcie czyste ścinanie, określone składowymi  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . Funkcja  $\psi(x, y)$ , wyznaczająca spaczenie przekroju poprzecznego, musi być określona w ten sposób, aby równania równowagi [127] były spełnione. Podstawiając wyrażenia [d] do tych równań i pomijając siły masowe, znajdziemy, że funkcja  $\psi$  musi spełniać równanie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad [139]$$

Rozpatrzmy obecnie warunki brzegowe [128]. Dla powierzchni bocznej pręta, na którą nie działają siły zewnętrzne i której normalna jest prostopadła do osi  $z$ , mamy  $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$  i  $\cos(Nz) = n = 0$ . Pierwsze dwa z równań [128] są spełnione tożsamościowo, a trzecie daje nam

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \quad [e]$$

co oznacza, że wypadkowe naprężenie styczne na brzegu jest skierowane wzdłuż stycznej do brzegu (rys. 148). Pokazaliśmy już przedtem (por. str. 233), że warunek ten musi być spełniony, jeżeli na powierzchnię boczną nie działają siły zewnętrzne.

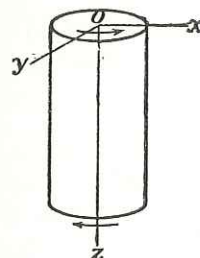
Rozważając nieskończenie mały element  $abc$  przy brzegu oraz przyjmując, że  $s$  wzrasta w kierunku od  $c$  do  $a$ , mamy

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}; \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}$$

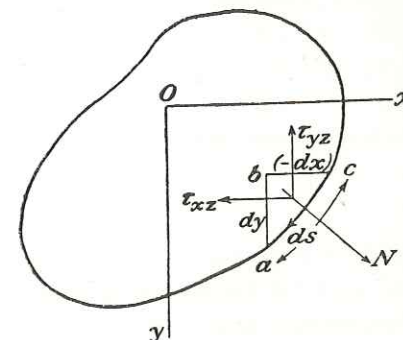
a wyrażenie [e] przyjmie postać

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} = 0 \quad [140]$$

W ten sposób każde zadanie dotyczące skręcania sprowadza się do problemu znalezienia funkcji  $\psi$ , spełniającej równanie [139] i warunek brzegowy [140].



Rys. 147



Rys. 148

Drugi sposób, który daje tę korzyść, że prowadzi do prostszego warunku brzegowego, jest następujący. Z powodu znikania  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$  (równ. [d]), równania równowagi [127] sprowadzają się do następujących

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Pierwsze dwa równania są już spełnione, ponieważ  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ , dane równaniami [d], są niezależne od  $z$ . Trzecie oznacza, że  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  możemy wyrazić jako

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad [141]$$

gdzie  $\Phi$  jest funkcją  $x$  i  $y$  i nazywana jest *funkcją naprężeń*<sup>1)</sup>.

Z równań [141] i [d] otrzymamy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right); \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad [f]$$

<sup>1)</sup> Została ona wprowadzona przez *L. Prandla*. Patrz „Physik. Z.“, tom 4, 1903.

Eliminując  $\psi$  przez różniczkowanie pierwszego równania względem  $y$ , drugiego względem  $x$  i odjęcie od pierwszego, znajdziemy, że funkcja naprężeń musi spełniać następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = F \quad [142]$$

gdzie

$$F = -2G\theta \quad [143]$$

Warunek brzegowy [e] po wprowadzeniu równania [141] przyjmie postać

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad [144]$$

Oznacza to, że funkcja naprężeń  $\Phi$  musi być stała wzdłuż brzegu przekroju poprzecznego. W przypadku brzegu jednospójnego, tzn. dla pręta pełnego, stała ta może być dowolna i w dalszych rozważaniach będziemy przyjmować ją równą zero. W ten sposób wyznaczenie rozkładu naprężeń na przekroju poprzecznym skręcanego pręta polega na znalezieniu funkcji  $\Phi$ , która spełnia równanie [142] i jest równa zero na brzegu. W dalszym ciągu pokażemy kilka zastosowań powyższej ogólnej teorii do poszczególnych postaci przekrojów.

Obecnie rozważmy warunki na końcach skręcanego pręta. Normalne do końców przekrojów poprzecznych są równoległe do osi  $z$ . Stąd  $l = m = 0$ ,  $n = \pm 1$  i równania [128] przyjmują postać

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz}; \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz} \quad [g]$$

Znak  $+$  powinniśmy przyjąć dla tego końca pręta, dla którego normalna zewnętrzna ma kierunek dodatniej osi  $z$ , tak jak dla dolnego końca pręta na rys. 147. Widzimy, że na końcach siły styczne rozmieszczone są w ten sam sposób, jak naprężenia styczne w przekrojach poprzecznych pręta. Możemy łatwo udowodnić, że siły te sprowadzają się do momentu skręcającego. Podstawiając do równań [g] wartości naprężeń z [141] i uwzględniając, że  $\Phi$  na brzegu jest równe zero, znajdziemy

$$\iint \bar{X} dx dy = \iint \tau_{xz} dx dy = \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy = \int dx \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$$

$$\iint \bar{Y} dx dy = \iint \tau_{yz} dx dy = - \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy = - \int dy \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = 0$$

W ten sposób wypadkowa sił rozmieszczonych na końcach pręta równa się zero i siły te przedstawiają parę o wielkości

$$M_t = \iint (\bar{Y}_x - \bar{X}_y) dx dy = - \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} y dx dy \quad [h]$$

Całkując powyższe przez części i uwzględniając, że  $\Phi = 0$  na brzegu, mamy

$$M_t = 2 \iint \Phi dx dy \quad [145]$$

Każda z całek w ostatnim wyrażeniu w wyrażeniu [h] jest połową momentu skręcającego. W ten sposób okazuje się, że połowę momentu skręcającego powoduje  $\tau_{xz}$ , a drugą połowę  $\tau_{yz}$ . Widzimy, że przyjmując przemieszczenia [a] i [b] oraz wyznaczając składowe naprężenia  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  z równań [141], [142], [144] otrzymujemy rozkład naprężeń, który spełnia równania

równowagi [127], pozostawia powierzchnie boczne pręta wolne od sił zewnętrznych i zakłada, że na końcach działają momenty skręcające dane równaniem [145]. Równania odkształceń [130] nie muszą być rozpatrywane, ponieważ naprężenia są wyprowadzone z przemieszczeń [a] i [b]. W ten sposób wszystkie równania teorii sprężystości są spełnione i otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym zagadnienia skręcania.

Wykazano, że rozwiązanie to żąda, aby siły na końcach pręta były rozmieszczone w określony sposób. Jednak zakres praktyczny zastosowań rozwiązania nie ogranicza się do takich przypadków. Z zasady *Saint-Venanta* wynika, że dla długich skręcanych prętów w dostatecznej odległości od końca, naprężenia zależą tylko od wielkości momentu skręcającego  $M_t$  i są praktycznie niezależne od sposobu, w jaki siły powierzchniowe są rozmieszczone na końcach.

**91. Pręty o przekroju eliptycznym.** Niech brzeg przekroju poprzecznego (rys. 149) dany będzie równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad [a]$$

Wtedy równanie [142] i warunek brzegowy [144] są spełnione, o ile przyjmimy funkcję naprężeń w następującej postaci

$$\Phi = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad [b]$$

gdzie  $m$  jest stałą. Podstawiając [b] do równania [142], otrzymujemy

$$m = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} F$$

skąd

$$\Phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad [c]$$

Wielkość stałej  $F$  zostanie obecnie wyznaczona z równania [145]. Podstawiając wyrażenie [c] do tego równania, otrzymujemy

$$M_t = \frac{a^2 b^2 F}{a^2 + b^2} \left( \frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right) \quad [d]$$

Ponieważ

$$\iint x^2 dx dy = J_y = \frac{\pi b a^3}{4}; \quad \iint y^2 dx dy = J_x = \frac{\pi a b^3}{4}; \quad \iint dx dy = \pi ab$$

znajdziemy z [d]

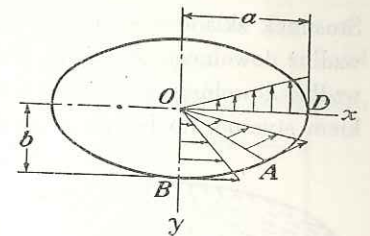
$$M_t = - \frac{\pi a^3 b^3 F}{2(a^2 + b^2)}$$

skąd

$$F = - \frac{2M_t(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad [e]$$

Wtedy z [c]

$$\Phi = - \frac{M_t}{\pi ab} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad [f]$$

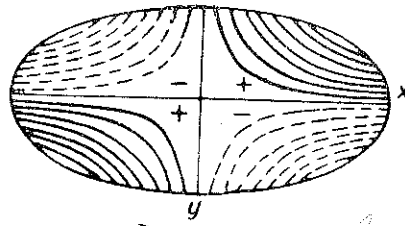


Rys. 149

Podstawiając wartość  $\Phi$  do wyrażeń [141], otrzymujemy składowe naprężenia

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_1 y}{\pi a b^3}; \quad \tau_{yz} = \frac{2M_1 x}{\pi a^3 b} \quad [146]$$

Stosunek składowych naprężenia jest proporcjonalny do stosunku  $y/x$  i dlatego jest stały wzdłuż dowolnego promienia  $OA$  (rys. 149). Oznacza to, że wypadkowa naprężeń stycznych wzdłuż dowolnego promienia  $OA$  ma stały kierunek, który oczywiście pokrywa się z kierunkiem stycznej do brzegu w punkcie  $A$ . Wzdłuż pionowej osi  $OB$  składowa naprężenia  $\tau_{yz}$  jest równa zero, a wypadkowe naprężenie równa się  $\tau_{xz}$ . Wzdłuż poziomej osi  $OD$  wypadkowe naprężenie styczne jest równe  $\tau_{yz}$ . Oczywiście maksymalne naprężenie występuje na brzegu i możemy łatwo udowodnić, że jest ono największe na końcach mniejszej osi elipsy. Podstawiając  $y=b$  do pierwszego wyrażenia [146] znajdziemy, że wartość bezwzględna tego maksimum wynosi



Moment skręcający  
Rys. 150

$$\tau_{\max} = \frac{2M_1}{\pi a b^2} \quad [147]$$

Dla  $a=b$  równanie to pokrywa się z dobrze znanym równaniem dla przekroju kołowego. Podstawiając [e] do [143] znajdziemy wyrażenie na kąt skręcenia

$$\theta = M_1 \cdot \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} \quad [148]$$

Czynnik, przez który dzielimy moment skręcający, aby otrzymać kąt skręcenia odniesiony do jednostki długości, nazywamy sztywnością skręcania. Oznaczamy ją przez  $C$ , a jej wartość dla przekroju eliptycznego z [148] wynosi

$$C = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} = \frac{G}{4\pi^2} \frac{(A)^4}{J_p} \quad [149]$$

gdzie

$$A = \pi a b; \quad J_p = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi b a^3}{4}$$

są powierzchnią przekroju i biegunowym momentem bezwładności przekroju.

Mając składowe naprężenia [146] możemy łatwo otrzymać przemieszczenia. Składowe  $u$  i  $v$  dane są wyrażeniami [a] par. 90. Przemieszczenie  $w$  znajdziemy z [d] i [b] par. 90. Podstawiając wyrażenia [146] i [148] oraz całkując, dostajemy

$$w = M_1 \frac{(b^2 - a^2)xy}{\pi a^3 b^3 G} \quad [150]$$

Wyrażenie to wskazuje, że warstwy spalonego przekroju poprzecznego są hiperbolami o asymptotach, którymi są osie główne elipsy (rys. 150).

**92. Inne rozwiązania elementarne.** Badając zagadnienie skręcania *Saint-Venant* rozpatrzył kilka rozwiązań równania [142] w postaci wielomianów. Aby rozwiązać zadanie, przedstawmy funkcję naprężeń w postaci

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) \quad [a]$$

Wtedy otrzymamy z równania [142]

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad [b]$$

a na brzegu zgodnie z warunkiem brzegowym [144]

$$\Phi_1 + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) = \text{const} \quad [c]$$

W ten sposób zagadnienie skręcania zostało sprowadzone do znalezienia rozwiązania równania [b], spełniającego warunek brzegowy [c]. W celu otrzymania rozwiązań w postaci wielomianów weźmy funkcję zmiennej zespolonej

$$(x + iy)^n \quad [d]$$

Zarówno rzeczywista jak i urojona część tego wyrażenia jest rozwiązaniem równania [b] (por. str. 169). Biorąc np.  $n=2$ , otrzymamy rozwiązania  $x^2 - y^2$  i  $2xy$ . Przy  $n=3$  otrzymujemy rozwiązania  $x^3 - 3xy^2$  oraz  $3x^2y - y^3$ . Dla  $n=4$  dochodzimy do rozwiązań w postaci jednorodnych funkcji czwartego stopnia itd. Składając takie rozwiązania, możemy otrzymać różne rozwiązania w postaci wielomianów.

Biorąc np.

$$\Phi = \frac{F}{4} (x^2 + y^2) + \Phi_1 = \frac{F}{2} \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) + b \right] \quad [e]$$

otrzymamy rozwiązanie równania [142] w postaci wielomianu trzeciego stopnia ze stałymi  $a$  i  $b$ , które będą dobrane później. Wielomian ten jest rozwiązaniem zagadnienia skręcania, jeżeli spełnia warunek brzegowy [144], to znaczy jeżeli brzeg przekroju pręta jest dany równaniem o postaci

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) + b = 0 \quad [f]$$

Zmieniając w tym równaniu wartość stałej  $b$ , otrzymujemy różne postacie przekrojów.

Biorąc  $b = -\frac{2}{27} a^2$  otrzymamy rozwiązanie dla trójkąta równobocznego. W tym przypadku równanie [f] przyjmuje postać

$$(x - \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a)(x + \sqrt{3}y - \frac{2}{3}a)(x + \frac{1}{3}a) = 0$$

która jest iloczynem trzech równań boków trójkąta pokazanego na rys. 151. Uwzględniając, że  $F = -2G\theta$ , i podstawiając

$$\Phi = -G\theta \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27} a^2 \right] \quad [g]$$

do wyrażenia [141], otrzymamy składowe naprężenia  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . Z warunku symetrii wzdłuż osi  $x$  mamy  $\tau_{xz}=0$  i z równania [g] znajdujemy

$$\tau_{yz} = \frac{3G\theta}{2a} \left( \frac{2ax}{3} - x^2 \right) \quad [h]$$

Największe naprężenie ma miejsce w środku boków trójkąta i wynosi zgodnie z [h]

$$\tau_{\max} = \frac{G\theta a}{2} \quad [k]$$

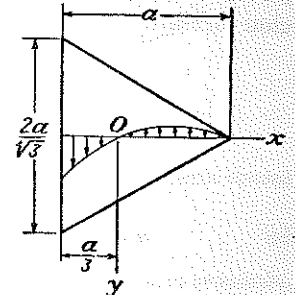
W wierzchołkach trójkąta naprężenie styczne jest równe zero (por. rys. 151).

Podstawiając [g] do wyrażenia [145] znajdujemy

$$M_1 = \frac{G\theta a^4}{15\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \theta G J_p \quad [l]$$

Biorąc rozwiązanie równania [142] w postaci wielomianu czwartego stopnia, zawierającego tylko parzyste potęgi  $x$  i  $y$ , otrzymamy następującą funkcję naprężeń

$$\Phi = -G\theta \left[ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{a}{2} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{1}{2} (a-1) \right]$$



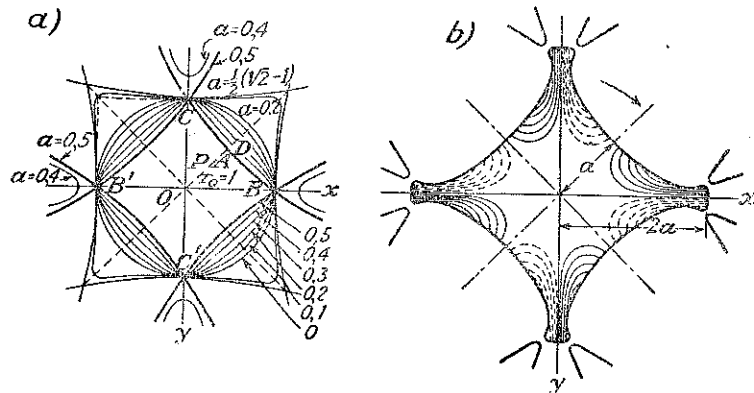
Rys. 151

Warunek brzegowy [144] jest spełniony, jeżeli brzeg przekroju dany jest równaniem

$$x^2 + y^2 - a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + a - 1 = 0$$

Zmieniając wartość  $a$ , *Saint-Venant* otrzymał rodzinę przekrojów poprzecznych pokazaną na rys. 152a. Składając rozwiązania w postaci wielomianów czwartego i ósmego stopnia, *Saint-Venant* otrzymał przekrój, pokazany na rysunku 152b.

Na podstawie swych badań *Saint-Venant* wyciągnął pewne ogólne wnioski, ważne dla praktyki. Wykazał on mianowicie, że w przypadku brzegów jednospójnych i dla danej powierzchni przekroju sztywność na skręcanie wzrasta, jeżeli biegunowy moment bezwładności



Rys. 152

przekroju maleje. W ten sposób przy danej ilości materiału wał o przekroju kołowym posiada największą sztywność na skręcanie. Podobne wnioski można wyciągnąć odnośnie maksymalnego naprężenia stycznego. Dla danego momentu skręcającego i danej powierzchni przekroju maksymalne naprężenie jest najmniejsze dla przekroju o najmniejszym biegunowym momencie bezwładności.

Porównując różne przekroje poprzeczne o brzegach jednospójnych, *Saint-Venant* znalazł, że sztywność na skręcanie może być obliczona w sposób przybliżony z wyrażenia [149], tzn. przez zastąpienie danego wału wałem o przekroju eliptycznym, posiadającym tę samą powierzchnię przekroju oraz ten sam biegunowy moment bezwładności, co dany wał.

Maksymalne naprężenie we wszystkich przypadkach badanych przez *Saint-Venanta* znajdowało się na brzegu w punktach najbliższych środka ciężkości przekroju. Bardziej szczegółowe badania tego zagadnienia przeprowadzone przez *Filona*<sup>1)</sup> wykazały, że istnieją przypadki, gdy punkty maksymalnych naprężeń, jakkolwiek zawsze leżące na brzegu, nie są punktami najbliższymi środka ciężkości przekroju.

Przyjmując w wyrażeniu [d]  $n=1$  i  $n=-1$  i stosując biegunowy układ współrzędnych  $r$  i  $\psi$ , otrzymamy następujące rozwiązania równania [b]:

$$\Phi_1 = r \cos \psi; \quad \Phi_2 = \frac{1}{r} \cos \psi$$

Wtedy funkcję naprężeń [a] możemy przyjąć w postaci

$$\Phi = \frac{F}{4}(x^2 + y^2) - \frac{Fa}{2} r \cos \psi + \frac{Fb^2}{2} \frac{a}{r} \cos \psi - \frac{F}{4} b^2 \quad [m]$$

<sup>1)</sup> L. N. G. Filon: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 193, 1900. Patrz również prace G. Polya: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 10, str. 353, 1930.

gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi. Funkcja ta spełnia warunki brzegowe [144], jeżeli na brzegu przekroju mamy  $\Phi=0$ , lub  $z [m]$ ,

$$r^2 - b^2 - 2a(r^2 - b^2) \frac{\cos \psi}{r} = 0 \quad [n]$$

lub

$$(r^2 - b^2) \left(1 - \frac{2a \cos \psi}{r}\right) = 0 \quad [o]$$

i przedstawia równanie brzegu przekroju<sup>1)</sup> pokazanego na rys. 153. Przyjmując

$$r^2 - b^2 = 0$$

otrzymujemy koło o promieniu  $b$  ze środkiem w początku układu współrzędnych, a przyjmując

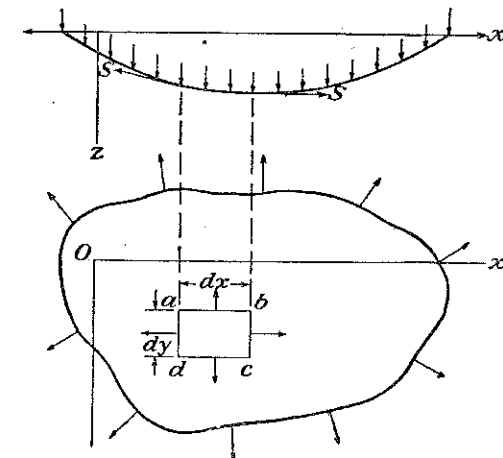
$$r - \frac{2a \cos \psi}{r} = 0$$

mamy koło o promieniu  $a$ , styczne do osi  $y$  w początku układu współrzędnych. Maksymalne naprężenia styczne występują w punkcie  $A$  i wynoszą

$$\tau_{\max} = G\theta(2a - b) \quad [p]$$

Gdy  $b$  jest bardzo małe w porównaniu z  $a$ , tzn. gdy mamy półkolisty podłużny rowek o bardzo małym promieniu, to naprężenie na spodzie rowka jest dwa razy większe od maksymalnego naprężenia występującego w wale kołowym o promieniu  $a$  i nie posiadającym rowka.

**93. Analogia błonowa.** Wprowadzona przez *L. Prandla*<sup>2)</sup> analogia błonowa okazała się bardzo cenna przy rozwiązywaniu zagadnień dotyczących skręcania. Wyobraźmy sobie jednorodną błonę (rys. 154) podpartą na brzegu, o tym samym obrysie co przekrój poprzeczny



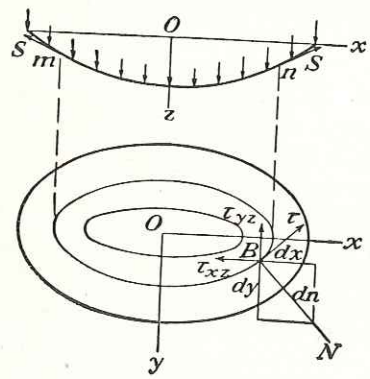
Rys. 154

skręcanego pręta, poddaną równomiernemu rozciąganiu na brzegu i równomiernemu ciśnieniu na powierzchni. Jeżeli  $q$  jest ciśnieniem odniesionym do jednostki powierzchni błony, a  $S$  jest równomiernym rozciąganiem odniesionym do jednostki długości brzegu, to siły rozciągające działające na boki  $ad$  i  $bc$  nieskończenie małego elementu  $abcd$  (rys. 154), dadzą

<sup>1)</sup> Zagadnienie to zostało rozpatrzone przez *C. Webera*: „Forschungsarbeiten“, nr. 249, 1921.

<sup>2)</sup> „Physik. Z.“, tom 4, 1903. Patrz również Anthes: „Dinglers polytech. J.“, str. 342, 1906. Dalsze rozwinięcie analogii i różne przypadki zastosowań podano w pracach *A. A. Griffitha* i *G. I. Taylora*: „Tech. Rept. Adv. Comm. Aeronautics, tom 3, str. 910 i 938, 1917—1918.

nam w przypadku małych ugięć błony wypadkową —  $S(\partial^2 z/\partial x^2) dx dy$  skierowaną w górę. W ten sam sposób siły rozciągające działające na dwóch pozostałych bokach elementu dadzą wypadkową  $-S(\partial^2 z/\partial y^2) dx dy$  i równanie równowagi elementu ma postać następującą



Rys. 155

$$q dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy = 0$$

skąd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad [151]$$

Ugięcie błony na brzegu jest równe zero. Porównując równanie [151] oraz warunek brzegowy na ugięcie  $z$  błony z równaniem [142] i warunkiem brzegowym [144] (por. str. 236) dla funkcji naprężeń  $\Phi$ , dochodzimy do wniosku, że oba te zagadnienia są identyczne. Stąd, znając ugięcia błony, możemy otrzymać wartości funkcji  $\Phi$ , zastępując wielkość  $-(q/S)$  z równania [151] wielkością  $F = -2G\theta$  z równania [142].

Mając powierzchnię ugięcia błony, przedstawioną warstwicami (rys. 155), wyciągniemy kilka ważnych wniosków, dotyczących rozkładu naprężeń przy skręcaniu. Rozpatrzmy dowolny punkt  $B$  błony. Ugięcie błony wzdłuż warstwic przechodzącej przez ten punkt jest stałe i mamy

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

Odpowiednie równanie funkcji naprężeń  $\Phi$  ma postać

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0$$

Równanie to wyraża twierdzenie, że rzut na normalną  $N$  do warstwic wypadkowego naprężenia stycznego w punkcie  $B$  jest równy zero i dlatego możemy wnioskować, że naprężenie styczne w punkcie  $B$  skręcanego pręta działa w kierunku stycznej do warstwic, przechodzącej przez ten punkt. Krzywe wykreślone na przekroju poprzecznym skręcanego pręta w ten sposób, że wypadkowe naprężenia stycznego w dowolnym punkcie krzywej działają w kierunku stycznej do krzywej nazywają się *trajektoriami naprężenia stycznego*. W ten sposób warstwicę błony są trajektoriami naprężenia stycznego przekroju skręcanego pręta.

Wielkość wypadkowej naprężenia  $\tau$  w punkcie  $B$  (rys. 155) otrzymamy rzutując na styczną składowe naprężenia  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . Wtedy

$$\tau = \tau_y \cos(Nx) - \tau_{xz} \cos(Ny)$$

Podstawiając

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \cos(Nx) = \frac{dx}{dn}; \quad \cos(Ny) = \frac{dy}{dn}$$

otrzymamy

$$\tau = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) = -\frac{d\Phi}{dn}$$

W ten sposób wielkość naprężenia stycznego w punkcie  $B$  mierzy się największym spadkiem powierzchni błony w tym punkcie. Musimy jedynie w wyrażeniu na spadek powierzchni

zastąpić  $q/S$  przez  $2G\theta$ . Stąd dochodzimy do wniosku, że największe ścinanie występuje w punktach, gdzie warstwicę są najgęstsze.

Z wyrażenia [145] dochodzimy do wniosku, że podwójna objętość ograniczona powierzchnią ugięcia błony i płaszczyzną  $xy$  (rys. 155) przedstawia moment skręcający, o ile tylko zastąpimy  $q/S$  przez  $2G\theta$ .

Możemy zauważyć, że postać błony, a co za tym idzie rozkład naprężeń, nie zależy od tego, który z punktów przekroju został przyjęty jako początek układu współrzędnych w zagadnieniu skręcania. Punkt ten, oczywiście jest punktem obrotu przekroju. Na pierwszy rzut oka wydaje się dziwne, że przekroje mogą obracać się wokół różnych (równoległych) osi będąc skręcane ciągle tym samym momentem skręcającym. Różnica ta jest jednak kwestią po prostu obrotu ciała sztywnego. Rozważmy na przykład wałek kołowy, skręcany przez obracanie wokół osi środkowej. Tworząca na powierzchni nachyli się względem swego kierunku początkowego, lecz można ją sprowadzić z powrotem przez obrót całego walca, jako ciała sztywnego, wokół średnicy. Końcowe położenia przekrojów poprzecznych odpowiadają wtedy obrotom skrętnym wokół tej tworzącej jako ustalonej osi. Przekroje poprzeczne pozostają płaskie, lecz są nachylone względem swoich płaszczyzn początkowych na skutek obrotu walca jako ciała sztywnego. W dowolnym przekroju wystąpi spaczenie i przy danym wyborze osi nachylenie zadanego elementu powierzchni w przekroju końcowym jest określone, a  $\partial w/\partial x$  i  $\partial w/\partial y$  są dane zależnościami [d] i [b] par. 90. Element taki można sprowadzić z powrotem do orientacji początkowej przez obrót walca jako ciała sztywnego wokół osi, przechodzącej przez przekrój końcowy. Obrót ten spowoduje przesunięcie równoległe osi obrotów skrętnych do osi równoległej. W ten sposób można określić oś lub środek obrotu skrętnego, lub środek skręcania, jeśli tylko ustalona jest końcowa orientacja elementu powierzchni w końcowym przekroju walca, jak to ma np. miejsce w przypadku gdy jest on utwierdzony zupełnie.

Rozważmy obecnie warunek równowagi części  $mn$  błony ograniczonej warstwicą (rys. 155). Nachylenie powierzchni błony wzdłuż tej linii w każdym punkcie jest proporcjonalne do naprężeń stycznych  $\tau$  i równe  $\tau \cdot q/S \cdot 1/2 G\theta$ . Oznaczając wtedy przez  $A$  powierzchnię rzutu poziomego części  $mn$  błony, otrzymamy równanie równowagi tej części błony

$$\int S \left( \tau \frac{q}{S} \frac{1}{2G\theta} \right) ds = qA$$

lub

$$\int \tau ds = 2G\theta A \quad [152]$$

Stąd możemy otrzymać średnią wartość naprężenia stycznego wzdłuż warstwic.

Biorąc  $q=0$ , tzn. rozważając błonę bez obciążenia poprzecznego, dostajemy równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad [153]$$

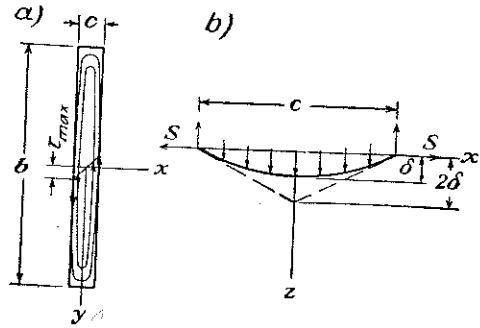
pokrywające się z równaniem [b] poprzedniego paragrafu dla funkcji  $\Phi_1$ . Przyjmując wartości rzędnych błony na brzegu tak, że

$$z + \frac{F}{4}(x^2 + y^2) = \text{const} \quad [154]$$

warunek brzegowy [c] poprzedniego paragrafu jest również spełniony. W ten sposób z powierzchni ugięcia nieobciążonej błony wyznaczyć można funkcję  $\Phi_1$ , o ile tylko rzędne powierzchni błony na brzegu mają określoną wartość. Później pokażemy, że zarówno obciążona jak i nieobciążona błona może służyć do wyznaczenia za pomocą doświadczenia rozkładu naprężeń w skręcanym pręcie.

Analogia błonowa jest użyteczna nie tylko wtedy, gdy pręt jest skręcany w granicach sprężystości, lecz również wtedy, gdy materiał w pewnych częściach przekroju znajduje się

w stanie plastycznego płynięcia<sup>1)</sup>. Zakładając, że naprężenie styczne w czasie płynięcia pozostaje stałe, rozkład naprężeń w sprężystej strefie przekroju będzie przedstawiony jak przedtem przez błonę, lecz w strefie plastycznej naprężenie określi powierzchnia mająca stałe, maksymalne nachylenie, odpowiadające granicy plastyczności. Wyobraźmy sobie taką powierzchnię skonstruowaną w postaci dachu nad przekrojem poprzecznym pręta, oraz błonę rozciągniętą i obciążoną tak, jak to wyjaśniono powyżej. Zwiększając ciśnienie dojdziemy do stanu, gdy błona zaczyna dotykać dachu. Odpowiada to początkowi płynięcia plastycznego



Rys. 156

w skręcanym pręcie. Przy wzroście ciśnienia pewna część błony będzie stykać się z dachem. Te części styku przedstawiają strefę plastycznego płynięcia skręcanego pręta. *A. Nádai* wykonał interesujące doświadczenia ilustrujące tę teorię<sup>2)</sup>.

**94. Skręcanie pręta o wąskim przekroju prostokątnym.** W przypadku wąskiego, prostokątnego przekroju analogia błonowa daje nam bardzo proste rozwiązanie zagadnienia skręcania. Pomijając wpływ krótkich boków prostokąta i przyjmując, że powierzchnia lekko zgiętej błony jest walcowa (rys. 156), otrzymamy ugięcie błony z elementarnego równania dla parabolicznej linii ugięcia równomiernie obciążonego cięgną<sup>3)</sup> (rys. 156b)

$$\delta = \frac{qc^2}{8S} \quad [a]$$

Na podstawie znanych własności paraboli<sup>4)</sup> maksymalne nachylenie występuje w środkowej części długich boków prostokąta i jest równe

$$\frac{4\delta}{c} = \frac{qc}{2S} \quad [b]$$

Objętość ograniczona odkształconą błoną i płaszczyzną  $xy$ , obliczona dla walca parabolicznego, wynosi

$$V = \frac{2}{3} c\delta b = \frac{qbc^3}{12S} \quad [c]$$

Stosując analogię błonową i podstawiając  $2G\theta$  zamiast  $q/S$  do [b] oraz [c], znajdziemy

$$\tau_{\max} = cG\theta; \quad M_t = \frac{1}{3}bc^3G\theta \quad [d]$$

<sup>1)</sup> Wskazał na to *L. Prandtl*; patrz *A. Nádai*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 3, str. 442, 1923. Patrz również *E. Trefftz*: tamże tom 5, str. 64, 1925.

<sup>2)</sup> Patrz „Trans. A. S. M. E., Applied Mechanics Division“, 1930. Patrz również *A. Nádai*: „Theory of Flow and Fracture of Solids“, 1950, Rozdział 35 i 36.

<sup>3)</sup> Patrz *S. Timoshenko* i *D. H. Young*: „Engineering Mechanics“ str. 35.

skąd

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3}bc^3G} \quad [155]$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}bc^2} \quad [156]$$

Dla parabolicznej linii ugięcia (rys. 156b)

$$z = \frac{4\delta}{c^2} \left( \frac{c^2}{4} - x^2 \right)$$

a nachylenie błony w dowolnym punkcie wynosi

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{8\delta x}{c^2} = -\frac{q}{S}x$$

Odpowiednie naprężenia w skręcanym pręcie są równe

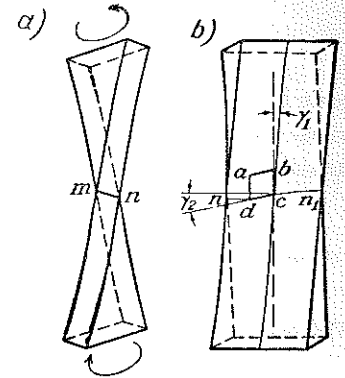
$$\tau_{yz} = 2G\theta x$$

Rozkład naprężeń jest liniowy, jak to pokazano na rys. 156a. Obliczając wielkość momentu skręcającego, odpowiadającego temu rozkładowi naprężeń, znajdziemy

$$\frac{\tau_{\max}}{4} c \frac{2}{3} c b = \frac{1}{6} bc^2 \tau_{\max}$$

Jest to jedna druga całego momentu skręcającego danego wyrażeniem [156]. Druga połowa pochodzi od składowych naprężenia  $\tau_{xz}$ , które były całkowicie pominięte, gdy przyjmowaliśmy, że powierzchnia ugiętej błony jest walcowa. Chociaż naprężenia te mają znaczną wielkość tylko w pobliżu krótkich boków prostokąta, a ich maksymalna wartość jest mniejsza niż obliczone powyżej  $\tau_{\max}$ , lecz za to działają one w większej odległości od osi pręta, a ich moment przedstawia drugą połowę momentu skręcającego  $M_t$ <sup>1)</sup>.

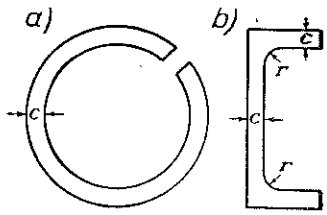
Warto zauważyć, że  $\tau_{\max}$  dane pierwszym z wyrażen [d] jest dwa razy większe niż w przypadku wału kołowego o średnicy równej  $c$  i poddanej temu samemu skręceniu. Wytłumaczmy to rozważając spaczenie przekroju poprzecznego. Boki przekrojów takich jak  $nn_1$  (rys. 157) pozostają normalne do włókien podłużnych pręta w narożach  $n$  i  $n_1$ , jak pokazano na rysunku. Całkowite odkształcenie postaciowe elementu takiego jak  $abcd$  składa się z dwóch odkształceń składowych: ze składowej  $\gamma_1$ , przyczyną której jest obrót przekroju poprzecznego wokół osi pręta, równej odkształceniu postaciowemu kołowego pręta o średnicy  $c$ , oraz z części  $\gamma_2$ , przyczyną której jest spaczenie przekroju poprzecznego. W przypadku wąskiego przekroju prostokątnego  $\gamma_2 = \gamma_1$  wypadkowe odkształcenie postaciowe jest dwa razy większe niż w przypadku przekroju kołowego o średnicy  $c$ .



Rys. 157

<sup>1)</sup> Zagadnienie to zostało wyjaśnione przez lorda *Kelvina*; patrz *Kelvin* i *Tait*: „Natural Philosophy“, tom 2, str. 267.

Zależności [155] i [156], otrzymane powyżej dla wąskiego prostokąta, mogą być zastosowane w przypadkach prętów cienkościennych o przekrojach takich, jak pokazano na rys. 158, przez przyjęcie  $b$  równego rozwiniętej długości obwodu przekroju poprzecznego. Wynika,



Rys. 158

to stąd, że jeżeli grubość  $c$  rury ze szczeliną (rys. 158a) jest mała w porównaniu ze średnicą to maksymalne nachylenie błony i objętość ograniczona błoną będą prawie takie same, jak w przypadku wąskiego przekroju prostokątnego o szerokości  $c$  i długości równej obwodowi środkowej powierzchni rury. Analogiczny wniosek możemy wyciągnąć w przypadku ceownika (rys. 158b). Należy zauważyć, że w tym ostatnim przypadku przy wewnętrznych narożach powstaje znaczna koncentracja naprężeń, które zależą od

wielkości promienia  $r$  zaokrągleń, przy czym równanie [156] nie ma zastosowania w tych punktach. Problem ten będzie rozpatrzony dokładniej w par. 98.

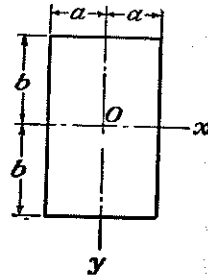
**95. Skręcanie prętów prostokątnych.** Przy zastosowaniu analogii błonowej zagadnienie sprowadza się do znalezienia ugięcia równomiernie obciążonej błony prostokątnej, jak to pokazano na rys. 159. Ugięcia te muszą spełniać równanie [151]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad [a]$$

oraz są równe zeru na brzegu.

Warunek symetrii względem osi  $y$  i warunki brzegowe dla boków prostokąta  $x = \pm a$  spełnimy przez przyjęcie  $z$  w postaci szeregu

$$z = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2a} Y_n \quad [b]$$



Rys. 159

gdzie  $b_1, b_3, \dots$  są stałymi współczynnikami, a  $Y_1, Y_3, \dots$  są funkcjami wyłącznie  $y$ . Podstawiając [b] do równania [a] i spostrzegając, że prawa strona tego równania może być przedstawiona w postaci szeregu<sup>1)</sup>

$$-\frac{q}{S} = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q}{S} \frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad [c]$$

wyznaczamy  $Y_n$  z następującego równania

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{4a^2} Y_n = -\frac{q}{S} \frac{4}{n\pi b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad [d]$$

skąd

$$Y_n = A \sinh \frac{n\pi y}{2a} + B \cosh \frac{n\pi y}{2a} + \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad [e]$$

Z warunku symetrii powierzchni ugięcia błony względem osi  $x$  wynika, że stała całkowania  $A$  musi być równa zeru. Stała  $B$  zostanie wyznaczona z warunku, że ugięcie błony równa

<sup>1)</sup> B. O. Peirce: „A Short Table of Integrals“, str. 95, 1910.

się zeru dla  $y = \pm b$ , tzn.  $(Y_n)_{y=\pm b} = 0$ , skąd

$$Y_n = \frac{16qa^2}{Sn^3\pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh (n\pi y/2a)}{\cosh (n\pi b/2a)} \right] \quad [f]$$

i ogólne wyrażenia dla powierzchni ugięcia błony, zgodnie z [b], przedstawia się następująco:

$$z = \frac{16qa^2}{S\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh (n\pi y/2a)}{\cosh (n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Zastępując  $q/S$  przez  $2G\theta$ , otrzymujemy funkcję naprężeń

$$\Phi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh (n\pi y/2a)}{\cosh (n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad [g]$$

Po zróżniczkowaniu równań [141] dostaniemy składowe naprężenia. Np.

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh (n\pi y/2a)}{\cosh (n\pi b/2a)} \right] \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad [h]$$

Przy  $b > a$ , największe naprężenie styczne, odpowiadające największemu nachyleniu powierzchni błony, otrzymujemy w środkach dłuższych boków prostokąta  $x = \pm a$ . Podstawiając  $x = a, y = 0$  do [h], znajdziemy

$$\tau_{\max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh (n\pi b/2a)} \right]$$

lub, biorąc pod uwagę, że

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

mamy

$$\tau_{\max} = 2G\theta a - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh (n\pi b/2a)} \quad [157]$$

Szereg nieskończony po prawej stronie, dla  $b > a$  jest szybkozbieżny i obliczenie  $\tau_{\max}$  z dostateczną dokładnością dla dowolnej wartości stosunku  $b/a$  nie przedstawia trudności. W przypadku np. bardzo wąskiego prostokąta,  $b/a$  jest dużą liczbą, tak że możemy pominąć w [157] sumę szeregu nieskończonego i dostaniemy

$$\tau_{\max} = 2G\theta a$$

Pokrywa się to z pierwszym z wyrażeń [d] poprzedniego paragrafu.

W przypadku przekroju kwadratowego  $a = b$  otrzymujemy z równania [157]

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= 2G\theta a \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[ \frac{1}{\cosh (\pi/2)} + \frac{1}{9 \cosh (3\pi/2)} + \dots \right] \right\} = \\ &= 2G\theta a \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{1}{2,509} + \frac{1}{9 \times 55,67} + \dots \right) \right] = 1,351 G\theta a \end{aligned} \quad [158]$$

W przypadku ogólnym mamy

$$\tau_{\max} = k2G\theta a \quad [159]$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem liczbowym, zależącym od stosunku  $b/a$ . Kilka wartości tego współczynnika podano w tablicy poniżej.

$\frac{b}{a}$	$k$	$k_1$	$k_2$	$\frac{b}{a}$	$k$	$k_1$	$k_2$
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,312
2,5	0,968	0,249	0,258	$\infty$	1,000	0,333	0,333

Obliczmy obecnie moment skręcający  $M_t$  jako funkcję kąta skręcenia  $\theta$ . Posługując się w tym celu równaniem [145], znajdziemy

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \Phi \, dx \, dy = \frac{64G\theta a^2}{\pi^3} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \right\} dx \, dy = \frac{32G\theta(2a)^3(2b)}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{64G\theta(2a)^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a}$$

lub biorąc pod uwagę że<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

mamy

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad [160]$$

Szereg po prawej stronie jest szybkozbieżny i moment  $M_t$  można bez trudu obliczyć dla dowolnej wartości  $a/b$ . W przypadku wąskiego prostokąta możemy przyjąć

$$\operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a} = 1$$

Wtedy

$$M_t = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left( 1 - 0,630 \frac{a}{b} \right) \quad [161]$$

W przypadku kwadratu,  $a=b$  i mamy z [160]

$$M_t = 0,1406G\theta(2a)^4 \quad [162]$$

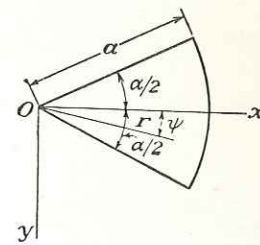
W ogólności moment skręcający

$$M_t = k_1 G\theta(2a)^3(2b) \quad [163]$$

gdzie  $k_1$  jest współczynnikiem liczbowym, zależnym od wielkości stosunku  $b/a$ . Kilka wartości tego współczynnika podano w tablicy na str. 248.

Podstawiając wartość  $\theta$  z wyrażenia [163] do równania [159] otrzymujemy maksymalne naprężenie styczne jako funkcję momentu skręcającego

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_2(2a)^2(2b)} \quad [164]$$



Rys. 160

gdzie  $k_2$  jest współczynnikiem liczbowym, którego wartości mogą być wzięte z tablicy na str. 248.

**96. Dodatkowe wyniki.** Podobnie jak w poprzednim paragrafie, możemy za pomocą szeregów nieskończonych rozwiązać zagadnienie skręcania dla kilku innych kształtów przekrojów poprzecznych.

W przypadku *wycinka koła*<sup>1)</sup> (rys. 160) jego brzegi są przedstawione równaniami  $\psi = \pm\alpha/2$ ,  $r=0$ ,  $r=a$ . Bierzemy funkcję naprężeń w następującej postaci

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{F}{4}(x^2 + y^2) = \Phi_1 - \frac{G\theta r^2}{2}$$

Funkcja  $\Phi_1$  musi spełniać równanie Laplace'a (patrz par. 92). Przyjmując rozwiązanie powyższego równania w postaci szeregu

$$\Phi_1 = \frac{G\theta}{2} \left[ \frac{r^2 \cos 2\psi}{\cos \alpha} + a^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \left( \frac{r}{a} \right)^{n\pi/\alpha} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right]$$

dostajemy funkcję naprężeń w postaci

$$\Phi = \frac{G\theta}{2} \left[ -r^2 \left( 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + a^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \left( \frac{r}{a} \right)^{n\pi/\alpha} \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} \right]$$

Wyrażenie to jest równe zero na brzegach

$$\psi = \pm \frac{\alpha}{2}$$

Aby wyrażenie to zniknęło również wzdłuż brzegu kołowego  $r=a$ , musimy przyjąć

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\psi}{\alpha} = 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha}$$

skąd otrzymamy zwykłą drogą

$$A_n = \frac{16\alpha^2}{\pi^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n \left( n + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left( n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)}$$

Dlatego funkcja naprężeń przyjmuje postać

$$\Phi = \frac{G\theta}{2} \left[ -r^2 \left( 1 - \frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} \right) + \frac{16\alpha^2 a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{r}{a} \right)^{n\pi/\alpha} \frac{\cos \frac{n\pi\psi}{\alpha}}{n \left( n + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left( n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)} \right]$$

<sup>1)</sup> Problem ten był rozpatrywany przez *Saint-Venanta*: „Compt. rend.“, tom 87, str. 849 i 893, 1878. Patrz również *A. G. Greenhill*: „Messenger of Math.“, tom 9, str. 35, 1879. Inna metoda rozwiązania za pomocą zastosowania funkcji *Bessela* została podana przez *A. Dinnika*: „Bull. Don Polytech. Inst.“, Nowoczerkask, tom. 1, str. 309. Patrz również *A. Föppl* i *L. Föppl*: „Drang und Zwang“, str. 96, 1928.



Podstawiając ją do równania [145], znajdziemy  $M_t = 2 \int \int \Phi r \, dy \, dr = kGa^4\theta$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem zależnym od kąta  $\alpha$  wycinka. Kilka wartości  $k$  obliczonych przez *Saint-Venanta* podajemy poniżej.

$\alpha =$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$
$k =$	0,0181	0,0349	0,0825	0,148	0,296	0,572*	0,672*	0,878**
$k_1 =$	.....	0,452	.....	0,622	0,719	.....	.....	.....
$k_2 =$	.....	0,490	.....	0,652	0,849	.....	.....	.....

\*) Liczby te poprawił *A. Aisseu*. Patrz *G. Pólya* i *G. Szegő*: „Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics“, str. 261, Princeton University Press, 1951.

\*\*) Wynik ten poprawił *Dinnik*, loc. cit.

Maksymalne naprężenia styczne wzdłuż kołowej i promieniowej części brzegu wynoszą odpowiednio  $k_1 Ga\theta$  i  $k_2 Ga\theta$ . Kilka wartości  $k_1$  i  $k_2$  podano w tabelcy powyżej.

Rozwiązanie dla prostokąta krzywoliniowego, ograniczonego dwoma współśrodkowymi łukami koła i dwoma promieniami, otrzymujemy w ten sam sposób<sup>1)</sup>.

W przypadku równoramiennego trójkąta<sup>2)</sup> prostokątnego kąt skręcenia

$$\theta = 38,3 \frac{M_t}{Ga^4}$$

gdzie  $a$  jest długością przyprostokątnych. Największe naprężenie styczne powstaje w środku przeciwprostokątnej i wynosi

$$\tau_{\max} = 18,02 \frac{M_t}{a^3}$$

Przez wprowadzenie współrzędnych krzywoliniowych zbadano kilka innych przekrojów. Przyjmując współrzędne eliptyczne (patrz str. 180) i stosując funkcje sprzężone  $\xi$  i  $\eta$ , określone równaniem

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$$

otrzymujemy przekrój poprzeczny ograniczony elipsami i hiperbolami o wspólnych ogniskach<sup>3)</sup>. Przez zastosowanie równania<sup>4)</sup>

$$x + iy = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2$$

otrzymamy przekroje poprzeczne ograniczone ortogonalnymi parabolami.

Znaleziono również rozwiązania dla wielu innych przekrojów<sup>5)</sup>, zarówno pełnych jak i wydrążonych, włączając w to wielokąty, kątowniki, kardioidy, lemniskaty<sup>6)</sup> i koła z kilkoma mimośrodkowymi wydrążeniami<sup>7)</sup>. Jeżeli przekrój daje się odwzorować wiernokątnie na koło jednostkowe, to możemy zawsze napisać rozwiązanie w postaci całki zmiennej zespolonej<sup>8)</sup>.

<sup>1)</sup> *Saint-Venant*, loc. cit. Patrz również *A. E. H. Love*: „Theory of Elasticity“, 4 wyd. str. 319, 1927.

<sup>2)</sup> *B. G. Galerkin*; „Bull. acad. des. sci. de Russ.“, str. 111, 1919; *G. Kolosow*: „Compt. rend.“, tom 178, str. 2057, 1924.

<sup>3)</sup> *A. G. Greenhill*: „Quart. J. Math.“, tom 16, 1879. Patrz również *L. N. G. Filon*: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 193, 1900.

<sup>4)</sup> *E. W. Anderson* i *D. L. Holl*: „Lowa State Coll. J. Sci.“, tom 3, str. 231, 1929.

<sup>5)</sup> Zestawienie podał *T. J. Higgins*: „Am. J. Phys.“, tom 10, str. 248, 1942.

<sup>6)</sup> Odnośniki do prac podających ściśle rozwiązania dla takich przekrojów są zbyt liczne na to, aby je tutaj przytaczać. Można je znaleźć w „Applied Mechanics Reviews, Science Abstracts A, Mathematical Reviews, i Zentralblatt für Mechanik“. Większość odnośników (par. 110) dotyczy lub zawiera odpowiednie zagadnienie skręcania.

<sup>7)</sup> Patrz *C. B. Ling*; „Quart. Applied Math.“, tom 5, str. 168, 1947.

<sup>8)</sup> Według *N. I. Muscheliszwillego*. Patrz *I. S. Sokolnikoff*; „Mathematical Theory of Elasticity“, Rozdział 4, 1946.

## 97. Rozwiązanie zagadnień skręcania za pomocą metody energetycznej<sup>1)</sup>.

Widzieliśmy, że rozwiązanie zagadnień skręcania w każdym poszczególnym przypadku sprowadza się do wyznaczenia funkcji naprężeń, spełniającej równanie różniczkowe [142] oraz warunki brzegowe [144]. Przy wyprowadzeniu przybliżonego rozwiązania zagadnienia można, zamiast rozwiązywać równanie różniczkowe, wyznaczyć funkcję naprężeń z warunku minimum pewnej całki<sup>2)</sup>, którą otrzymujemy z rozważania energii odkształcenia skręcanego pręta.

Energia odkształcenia skręcanego pręta odniesiona do jednostki długości, z równania [88], jest równa

$$V = \frac{1}{2G} \int \int (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2G} \int \int \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy$$

Jeżeli funkcji naprężeń  $\Phi$  nadamy dowolnie małą wariację  $\delta\Phi$  znikającą na brzegu<sup>3)</sup>, to otrzymany przyrost energii odkształcenia wynosi

$$\frac{1}{2G} \delta \int \int \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy$$

a przyrost momentu skręcającego obliczymy z równania [145]

$$2 \iint \delta\Phi \, dx \, dy$$

Rozważania, analogiczne do rozważań prowadzonych przy wyprowadzaniu równania [91] na str. 155, dają w wyniku

$$\frac{1}{2G} \delta \int \int \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy = 2\theta \int \int \delta\Phi \, dx \, dy$$

lub

$$\delta \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\Phi \right\} \, dx \, dy = 0$$

W ten sposób ściśłym wyrażeniem na funkcję naprężeń  $\Phi$  jest to, które sprowadza do zera wariację całki

$$U = \int \int \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\Phi \right\} \, dx \, dy \quad [165]$$

Do tego samego wniosku dojdziemy stosując analogię błonową i zasadę prac przygotowanych (par. 48). Jeżeli  $S$  jest równomiernym rozciąganiem błony, to przyrost energii odkształcenia błony na skutek ugięcia otrzymujemy przez pomnożenie wielkości  $S$  przez przyrost powierzchni błony. W ten sposób mamy

$$\frac{1}{2} S \int \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy$$

gdzie  $z$  jest ugięciem błony. Jeżeli założymy teraz pewne przemieszczenie przygotowane błony z położenia równowagi, to zmiana energii odkształcenia błony, spowodowana tym przemieszczeniem, musi być równa pracy wyko-

<sup>1)</sup> Przegląd wraz z odnośnikami tych oraz innych metod przybliżonych, patrz *T. J. Higgins*: „J. Applied Phys.“, tom 14, str. 469, 1943.

<sup>2)</sup> Sposób ten zaproponował *W. Ritz*, który używał go przy rozwiązywaniu zagadnień zginania i drgań płyt prostokątnych. Patrz „J. reine angew. Math.“, tom 135, 1908, i „Ann. Physik“, seria 4, tom 28, str. 737, 1909.

<sup>3)</sup> Jeżeli przyjmujemy, że  $\delta\Phi$  na brzegu równa się zero, to wariacja  $\Phi$  nie wprowadzi żadnych sił na bocznych powierzchniach pręta.

nanej przez równomierne obciążenie  $q$  na przemieszczeniu przygotowanym. W ten sposób otrzymamy

$$\frac{1}{2} S \delta \iint \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint q \delta z dx dy$$

i wyznaczenie powierzchni ugięcia błony zostało sprowadzone do znalezienia wyrażenia na funkcję  $z$  taką, aby całka

$$\iint \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{q}{S} z \right\} dx dy$$

przyjmowała wartość minimum. Jeśli do tej całki podstawimy  $2G\theta$  zamiast  $q/S$ , to otrzymamy znów całkę [165].

Przy przybliżonym rozwiązywaniu skręcania zastępujemy powyższe zagadnienie rachunku wariacyjnego prostym zadaniem, polegającym na znalezieniu minimum funkcji. Bierzemy funkcję naprężeń w postaci szeregu

$$\Phi = a_0 \Phi_0 + a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + \dots \quad [a]$$

gdzie  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \dots$  są funkcjami spełniającymi warunki brzegowe, tzn. znikającymi na brzegu. Przy wyborze tych funkcji należy posługiwać się analogią błonową i przyjmować je w postaci odpowiedniej dla przedstawienia funkcji  $\Phi$ . Wielkości  $a_0, a_1, a_2, \dots$  są współczynnikami liczbowymi, które wyznaczymy z warunku minimum całki [165]. Podstawiając do tej całki szereg [a], otrzymujemy po scałkowaniu funkcję drugiego stopnia względem  $a_0, a_1, a_2, \dots$  i warunek na minimum tej funkcji ma postać

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0; \dots \quad [b]$$

W ten sposób otrzymujemy układ równań liniowych, z których wyznaczymy współczynniki  $a_0, a_1, a_2 \dots$ . Zwiększając liczbę wyrazów szeregu [a], zwiększamy dokładność naszego rozwiązania przybliżonego, a stosując szereg nieskończony, otrzymamy ściśle rozwiązanie zagadnienia skręcania<sup>1)</sup>.

Weźmy jako przykład przypadek przekroju prostokątnego<sup>2)</sup> (rys. 159). Brzegi są określone równaniami  $x = \pm a, y = \pm b$ , a funkcja  $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$  jest równa zero na brzegu. Szereg [a] możemy przyjąć w postaci

$$\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum \sum a_{mn} x^m y^n \quad [c]$$

gdzie z powodu symetrii  $m$  i  $n$  muszą być parzyste.

Przyjmując, że przekrój jest kwadratowy i ograniczając się do pierwszego wyrazu szeregu [c], mamy

$$\Phi = a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \quad [d]$$

Podstawiając powyższe do [165], znajdziemy z warunku minimum, że

$$a_0 = \frac{5 G \theta}{8 a^2}$$

Z wyrażenia [145] otrzymujemy wielkość momentu skręcającego

$$M_t = 2 \iint \Phi dx dy = \frac{20}{9} G \theta a^4 = 0,1388(2a)^4 G \theta$$

Porównując powyższe z rozwiązaniem dokładnym [162], widzimy, że błąd w wartości momentu skręcającego wynosi około 1 $\frac{1}{3}$ %.

W celu otrzymania lepszego przybliżenia, bierzemy trzy pierwsze wyrazy szeregu [c]. Wtedy, korzystając z warunku symetrii, otrzymamy

$$\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) [a_0 + a_1(x^2 + y^2)] \quad [e]$$

Podstawiając wyrażenie to do [165] i wykorzystując równania [b], znajdziemy

$$a_0 = \frac{5}{8} \cdot \frac{259}{277} \cdot \frac{G \theta}{a^2}, \quad a_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \cdot \frac{G \theta}{a^4}$$

Podstawiając do wyrażenia na moment skręcający [145], otrzymujemy

$$M_t = \frac{20}{9} \left( \frac{259}{277} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{35}{277} \right) G \theta a^4 = 0,1404 G \theta (2a)^4$$

Wartość ta jest tylko o 0,15% mniejsza od dokładnej.

O wiele większy błąd otrzymamy dla wartości maksymalnego naprężenia. Podstawiając [e] do wyrażen [141] na składowe naprężenia, znajdujemy, że błąd dla maksymalnego naprężenia wynosi 4% i żeby otrzymać większą dokładność, musimy wziąć więcej wyrazów szeregu [c].

Z analogii błonowej wynika, że postępując tak, jak to wyjaśniono powyżej, otrzymujemy na ogół dla momentu skręcającego wartości mniejsze od wartości ścisłych. Doskonale wiotka błona, równomiernie rozciągana na brzegu i równomiernie obciążona, jest układem o nieskończonej liczbie stopni swobody. Ograniczenie się do kilku wyrazów szeregu [c] jest równoważne z wprowadzeniem pewnych więzów do układu, które sprowadzą go do układu z kilkoma tylko stopniami swobody. Więzy takie obniżają wiotkość układu i zmniejszają objętość ograniczoną ugiętą błoną. Stąd moment skręcający obliczony z tej objętości będzie na ogół mniejszy od prawdziwej wartości.

E. Trefftz zaproponował<sup>1)</sup> inną metodę przybliżonego wyznaczania funkcji naprężeń  $\Phi$ . Przy tej metodzie przybliżona wartość momentu skręcającego jest większa od prawdziwej. Stąd, używając metodę *Ritza* i metodę *Trefftza*, możemy określić granice błędu rozwiązania przybliżonego.

Stosując metodę *Ritza* nie jesteśmy ograniczeni do wielomianów [c]. Możemy przyjąć funkcje występujące w szeregu [a]  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$  w innej postaci, odpowiedniej dla przedstawienia funkcji naprężeń  $\Phi$ . Biorąc, np. funkcje trygonometryczne i uwzględniając warunki symetrii (rys. 159), otrzymamy

$$\Phi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad [f]$$

<sup>1)</sup> Zbieżność tej metody rozwiązywania badań *Ritz*, loc. cit. Patrz również E. Trefftz: „Handbuch der Physik“, tom 6, str. 130, 1928.

<sup>2)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Biuletyn Inst. Dróg i Komunikacji“, St. Petersburg, 1913, i „Proc. London Math. Soc.“, seria 2, tom 20, str. 389, 1921.

<sup>1)</sup> E. Trefftz; „Proc. Second Intern. Congr. Applied Mech.“, Zürich, 1926, str. 131. Patrz również N. M. Basu: „Phil. Mag.“, tom 10, str. 886, 1930.

Podstawiając do [165] i wykonując całkowanie, znajdziemy, że

$$U = \frac{\pi^2 ab}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) +$$

$$- 2G\theta \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \cdot \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}$$

Równania [b] otrzymują następującą postać

$$\frac{\pi^2 ab}{4} a_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - 2G\theta \cdot \frac{16ab}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} = 0$$

skąd

$$a_{mn} = \frac{128G\theta b^2 (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\pi^4 mn(m^2 \alpha^2 + n^2)}$$

gdzie  $\alpha = b/a$ . Podstawiając do [f], otrzymamy dokładne rozwiązanie zagadnienia w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego. Wtedy moment skręcający jest równy

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \Phi dx dy = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{128G\theta b^2}{\pi^4 mn(m^2 \alpha^2 + n^2)} \cdot \frac{32ab}{mn\pi^2} \quad [g]$$

Wyrażenie to pokrywa się z wyrażeniem [160], danym poprzednio, o ile zauważymy, że

$$\frac{1}{m^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2(m^2 \alpha^2 + n^2)} = \frac{\pi^4}{96m^2} \operatorname{tgh} \frac{m\alpha\pi}{2} - \frac{m\alpha\pi}{2} - \frac{1}{\frac{3}{8}(m\alpha\pi/2)^3}$$

Jako drugi przykład weźmy wąski prostokąt, gdy  $b$  jest bardzo duże w porównaniu z  $a$  (rys. 159). W tym przypadku możemy przyjąć jako pierwsze przybliżenie

$$\Phi = G\theta(a^2 - x^2) \quad [h]$$

które pokrywa się z rozwiązaniem rozpatrzonym poprzednio (par. 94). W celu otrzymania lepszego przybliżenia spełniającego warunki brzegowe na krótszych bokach prostokąta, możemy wziąć

$$\Phi = G\theta(a^2 - x^2) [1 - e^{-\beta(b-y)}] \quad [k]$$

i dobrać wielkość  $\beta$  w ten sposób, aby całka [165] osiągnęła minimum. W ten sposób znajdziemy

$$\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Dzięki wykładniczemu wyrazowi w nawiasach wyrażenia [k] otrzymujemy rozkład naprężeń praktycznie pokrywający się z rozkładem naprężeń z rozwiązania [h] we wszystkich punktach, znajdujących się w znacznej odległości od krótkich boków prostokąta. W pobliżu tych boków funkcja naprężeń [k] spełnia warunek brzegowy [144]. Podstawiając [k] do rów-

nia [145] na moment skręcający, dostajemy

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \Phi dx dy = \frac{1}{3} G\theta(2a)^3(2b) \left( 1 - 0,632 \frac{a}{b} \right)$$

Wyrażenie to pozostaje w dobrej zgodności z wyrażeniem [161], otrzymanym poprzednio przy użyciu nieskończonego szeregu.

Wyrażenie funkcji naprężeń w postaci wielomianu, analogicznej do wyrażenia [c], użytego powyżej dla prostokąta, może być pomyślnie zastosowane we wszystkich przypadkach przekrojów, ograniczonych wielokątami wypukłymi. Jeżeli

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0; \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \dots$$

są równaniami boków wielokąta, to funkcję naprężeń możemy przyjąć w następującej postaci

$$\Phi = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \dots (a_nx + b_ny + c_n) \Sigma \Sigma a_{mn} x^n y^m$$

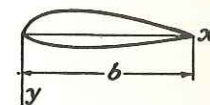
przy czym zwykle kilka pierwszych wyrazów szeregu wystarcza do otrzymania dostatecznej dokładności.

Metoda energetyczna jest również użyteczna w przypadku, gdy brzeg przekroju poprzecznego (rys. 161) jest dany za pomocą dwu krzywych<sup>1)</sup>

$$y = a\psi \left( \frac{x}{b} \right) \quad \text{oraz} \quad y = -a_1\psi \left( \frac{x}{b} \right)$$

gdzie

$$\psi \left( \frac{x}{b} \right) = \psi(t) = (t)^m [1 - (t)^p]^q$$



Rys. 161

Warunki brzegowe będą spełnione, jeżeli przyjmiemy dla funkcji naprężeń przybliżone wyrażenie

$$\Phi = A(y - a\psi)(y + a_1\psi)$$

Podstawiając je do całki [165] znajdziemy z równania  $dJ/dA=0$ ,

$$A = - \frac{G\theta}{1 + \alpha(a^2 + a_1^2 + aa_1)/b^2}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\int_0^1 \psi^3 (d\psi/dt)^2 dt}{\int_0^1 \psi^3 dt}$$

Z równania [145] otrzymamy wartość momentu skręcającego

$$M_t = -A \frac{b(a + a_1)^3}{3} \int_0^1 \psi^3 dt$$

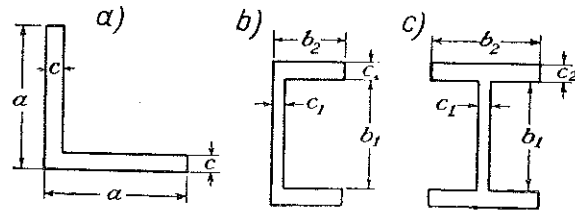
<sup>1)</sup> Takie zagadnienia były rozważane przez L. S. Leibensona. Patrz jego książka „Variational Methods for Solving Problems of the Theory of Elasticity“, (Metody wariacyjne rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości), Moskwa, 1943. Patrz również W. J. Duncan: „Phil. Mag.“, seria 7, tom 25, str. 634, 1938.

W przypadku szczególnym, gdy  $m = \frac{1}{2}$ ,  $p = q = 1$ ,  $a = a_1$ , mamy  $y = \pm ap(x/b) = \pm \sqrt{x/b}$  [1 - (x/b)] i wtedy otrzymamy

$$A = - \frac{G\theta}{1 + \frac{11}{13} \frac{a^2}{b^2}}, \quad M_t = 0,0736 \frac{G\theta b a^3}{1 + \frac{11}{13} \frac{a^2}{b^2}}$$

Przybliżone rozwiązanie i porównanie z wynikami doświadczeń dla przekrojów ograniczonych łukiem koła i cięciwą podał A. Weigand<sup>1)</sup>. Metody numeryczne zostaną rozpatrzone w Dodatku.

**98. Skręcanie walcowanych kształtowników.** Przy badaniu skręcania walcowanych kształtowników takich jak kątowniki, ceowniki, dwuteowniki, możemy zastosować równanie wyprowadzone dla przypadku prętów o przekroju wąskiego prostokąta (par. 94). Jeżeli ścianki przekroju posiadają stałą grubość, jak na rys. 162a, to kąt skręcenia możemy otrzymać z dostateczną dokładnością z równania [155], podstawiając w nim zamiast  $b$  — długość rozwiniętej linii środkowej<sup>2)</sup>, a mianowicie  $b = 2a - c$ . W przypadku przekroju ceowego



Rys. 162

(rys. 162b) grube przybliżenie na kąt skręcenia otrzymamy, przyjmując dla półek średnią grubość  $c_2$ , dzieląc przekrój poprzeczny na trzy prostokąty i podstawiając do równań [155]  $b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3$  zamiast  $bc^3$ , tzn. przyjmując, że sztywność na skręcanie ceownika jest równa sumie sztywności na skręcanie trzech prostokątów<sup>3)</sup>. Wtedy

$$\theta = \frac{3M_t}{(b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3)G} \quad [a]$$

Aby obliczyć naprężenia na brzegu w znacznej odległości od naroży przekroju poprzecznego, możemy jeszcze raz zastosować wyrażenie dla wąskiego prostokąta i przyjąć

$$\tau = c\theta G$$

Wtedy z wyrażenia [a] otrzymamy dla półek ceownika

$$\tau = \frac{3M_t c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad [b]$$

Te same równania przybliżone możemy zastosować dla przekroju dwuteowego (rys. 162c).

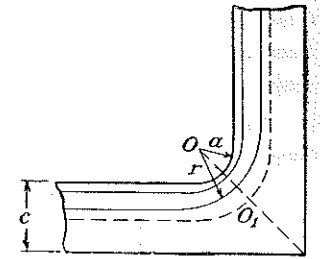
<sup>1)</sup> „Luftfahrt-Forsch.“, tom 20, 1944, tłumaczenie na jęz. ang. N. A. C. A. Tech. Mem. 1182, 1948.

<sup>2)</sup> Bardziej skomplikowaną zależność, uwzględniającą zwiększenie sztywności na skutek połączenia prostokątów, opartą na badaniach z błoną mydlaną i doświadczeniach ze skręcaniem, podał G. W. Trayer i H. W. March; „Nat. Advisory Comm. Aeronaut.“, Rept. 334, 1930.

<sup>3)</sup> Porównanie otrzymanych w ten sposób sztywności skręcenia ze sztywnościami otrzymanymi na drodze doświadczalnej podano dla kilku rodzajów walcowanych kształtowników i dla różnych wymiarów w pracy A. Föppl: „Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.“, str. 295, Monachium, 1921. Patrz również „Bauingenieur“, seria 5, tom 3, str. 42, 1922.

W załomach istnieje znaczna koncentracja naprężeń, wielkość której zależy od promieni zaokrąglenia. Grube przybliżenie dla maksymalnego naprężenia, występującego w tych zaokrągleniach możemy otrzymać z analogii błonowej. Rozważmy przekrój w postaci kątownika o stałej grubości  $c$  (rys. 163) i o promieniu zaokrąglenia w załomie  $a$ . Przyjmując, że powierzchnia błony na dwusiecznej  $OO_1$  zaokrąglenia jest w przybliżeniu powierzchnią obrotową o osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku w punkcie  $O$  oraz stosując współrzędne biegunowe, otrzymamy równanie [151] powierzchni ugięcia błony w następującej postaci (patrz str. 66)

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = - \frac{q}{S} \quad [c]$$



Rys. 163

Pamiętając, że kąt nachylenia powierzchni błony  $dz/dr$  daje nam naprężenia styczne  $\tau$ , gdy zastąpimy  $q/S$  przez  $2G\theta$ , znajdziemy z [c] następujące równanie, z którego wyznaczmy naprężenia styczne

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = - 2G\theta \quad [d]$$

Odpowiednie równanie w półkach kątownika w znacznej odległości od załomów, gdzie błona tworzy powierzchnię prawie walcową, ma postać następującą

$$\frac{d\tau}{dn} = - 2G\theta \quad [e]$$

gdzie  $n$  jest normalną do brzegu. Oznaczając przez  $\tau_1$  naprężenie na brzegu, otrzymamy z [e] znalezione poprzednio rozwiązanie dla wąskiego prostokąta  $\tau_1 = G\theta c$ . Wykorzystując tę wartość, otrzymamy z [d]

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = - \frac{2\tau_1}{c} \quad [d']$$

Skąd przez całkowanie

$$\tau = \frac{A}{r} - \frac{\tau_1 r}{c} \quad [f]$$

gdzie  $A$  jest stałą całkowania. W celu wyznaczenia stałej przypuśćmy, że naprężenie styczne w punkcie  $O_1$ , w odległości  $c/2$  od brzegu jest równe zero (rys. 163). Wtedy z wyrażenia [f] mamy

$$\frac{A}{a + (c/2)} - \frac{\tau_1 [a + (c/2)]}{c} = 0$$

oraz

$$A = \frac{\tau_1}{c} \left( a + \frac{c}{2} \right)^2$$

Podstawiając do [f] i biorąc  $r = a$ , znajdziemy

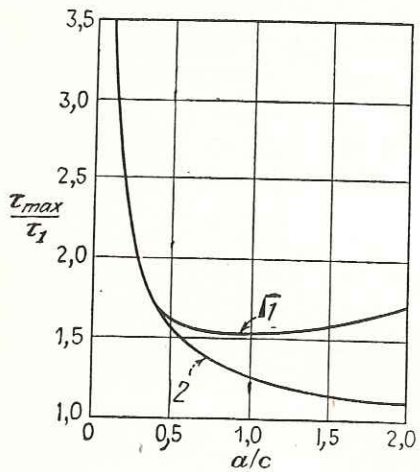
$$\tau_{\max} = \tau_1 \left( 1 + \frac{c}{4a} \right) \quad [g]$$

Dla  $a = c/2$ , jak przyjęto na rys. 163, mamy  $\tau_{\max} = 1,5 \tau_1$ . Dla bardzo małego promienia zaokrąglenia maksymalne naprężenia będą bardzo duże. Np. dla  $a = 0,1 c$  otrzymujemy  $\tau_{\max} = 3,5 \tau_1$ .

Dokładniejsze i pełniejsze wyniki możemy otrzymać za pomocą obliczeń numerycznych opartych na metodzie różnic skończonych (patrz Dodatek). Na rys. 164 pokazana jest otrzymana przez zastosowanie tej metody<sup>1)</sup> krzywa  $\tau_{\max}/\tau_1$  jako funkcja  $a/c$  (krzywa 1). Druga (2) krzywa na tym rysunku przedstawia zależność [g]; widać stąd, że ta prosta zależność daje dobre wyniki w przypadku, gdy  $a/c$  jest mniejsze od 0,3.

### 99. Zastosowanie błon mydlanych przy rozwiązywaniu zagadnień skręcania.

Widzimy, że analogia błonowa pomaga nam uzmysłowić sobie rozkład naprężeń



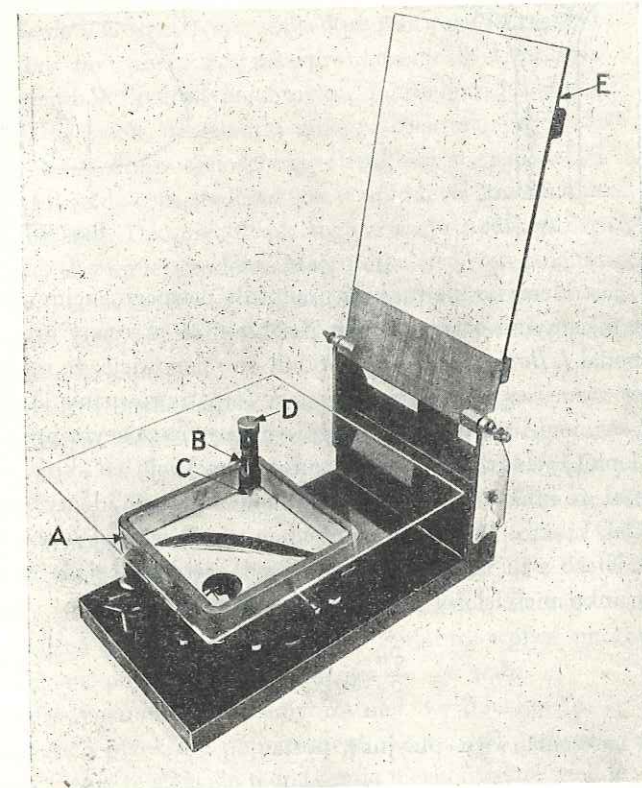
Rys. 164

w przekroju poprzecznym skręcanego pręta. Błony mydlanych używa się także dla bezpośredniego pomiaru naprężeń<sup>2), 3)</sup>. Błony tworzy się na otworach żądanego kształtu, wyciętych w płaskich płytach. W celu umożliwienia bezpośredniego wyznaczenia naprężeń musimy w tej samej płycie, dla porównania, wykonać otwór kołowy, przedstawiający kołowy przekrój. Poddając obie błony temu samemu ciśnieniu, otrzymujemy te same wartości  $q/S^4$ , które odpowiadają tym samym wartościom  $G\theta$  dla dwóch skręcanych prętów. W ten sposób mierząc nachylenie powierzchni obu błon mydlanych możemy porównać naprężenia w pręcie o danym przekroju z naprężeniami w wale kołowym, pod warunkiem, że posiadają one ten sam kąt skręcenia  $\theta$  na jednostkę długości oraz to samo  $G$ . Odpowiedni

stosunek momentów skręcających jest wyznaczony przez stosunek objętości pomiędzy błonami mydlanymi i płaszczyzną płyty.

W celu uzyskania warstwic stosuje się urządzenie pokazane na rys. 165<sup>5)</sup>. Aluminiowa płyta z otworami jest zamocowana pomiędzy dwiema połowami żeliwnej skrzynki *A*. Dolna część skrzynki, mająca postać płytkiej tacy, jest podparta śrubami nastawczymi. Warstwicę nanosi się za pomocą śruby *B* przechodzącej przez otwór w płytce szklanej, dostatecznie dużej, aby pokryć skrzynkę w dowolnym położeniu. Dolny koniec śruby posiada ostrze *C* z twardej stali, którego odległość od płytki szklanej reguluje się za pomocą śruby. Ostrze przybliża się do błony przez poruszanie płytki szklanej aż do momentu, gdy zniekształcenie postaci błony wskaże, że ostrze dotknęło jej. Rysunek wykonuje się na kartce papieru przymocowanej do tablicy *E*, która może się obracać względem poziomej osi, będącej na tej samej wysokości

co zapisujące stalowe ostrze *D*. W celu zaznaczenia dowolnego położenia śruby, należy tylko nakłuć punkt na papierze przez obrócenie go do styku z zapisującym ostrzem. Gdy ostrze dotknie błonę w szeregu miejsc, wtedy punkty zapisane na papierze pozwalają nam wykreślić warstwicę. Przez pokręcenie śruby *B* możemy powyższą operację powtarzać w celu otrzymania żądanej liczby warstwic. Po wykreśleniu tych linii możemy otrzymać za pomocą sumowania objętość i odpowiadający jej moment skręcający. Nachylenia i odpowiadające im naprężenia otrzymujemy, mierząc odległości między sąsiednimi warstwicami. Nachylenie powierzchni błony możemy otrzymać z dużo większą dokładnością metodą optyczną, rzucając wiązkę światła na powierzchnię błony i mierząc kąt odbitego promienia. Normalna do po-



Rys. 165

wierzchni błony będzie dwusieczną kąta pomiędzy promieniem padającym i odbitym. *Griffith* i *Taylor* skonstruowali w tym celu specjalny przyrząd. Rys. 166 przedstawia przykład warstwic otrzymanych dla części dwuteownika (drewniany dźwigar skrzydła samolotu). Z zagęszczenia warstwic w pobliżu wcięć oraz w środku górnej płaszczyzny półki wynika, że naprężenia styczne w tych punktach są duże. Wystające części półki są naprężone nieznacznie. Największe naprężenie w środkowej części środnika jest praktycznie stałe wzdłuż środnika i równe naprężeniom występującym w wąskim prostokącie przy tym samym kącie skręcania. Zastosowanie pomiarów błony mydlanej do takich przekrojów poprzecznych jak elipsy i prostokąty, dla których dokładne rozwiązania są znane, wskazuje, że maksymalne naprężenia i moment skręcający mogą być pomierzone z dokładnością 1 do 2 procent. Jednak w punktach

<sup>1)</sup> *J. H. Huth*; *J. Applied Mechanics* (Trans. A. S. M. E.), tom 17, str. 388, 1950. Wznoszenie się tej krzywej w prawej części wykresu odpowiada granicznemu przypadkowi, gdy promień przejścia wzrasta w stosunku do grubości półki. Informacje dotyczące wcześniejszych prób rozwiązania tego zagadnienia wraz z pomiarami błony mydlanej podane są przez *I. Lyse'a* i *B. G. Johnstona*: „*Proc. A. S. C. E.*“, 1935, str. 469 oraz w pracy powyższej.

<sup>2)</sup> Patrz prace *Taylor* i *Griffitha*, loc. cit; również prace *Trayer* i *Marcha*, loc. cit.

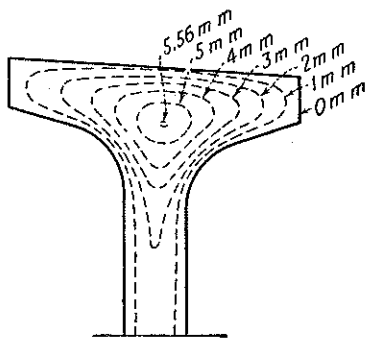
<sup>3)</sup> Przegląd tych i innych analogii dotyczących skręcania, wraz z podaniem źródeł, znajdujemy u *T. J. Higgins*: „*Experimental Stress Analysis*“, tom 2, nr 2, str. 17, 1945.

<sup>4)</sup> Przyjęto że napięcie powierzchniowe w obu błonach jest identyczne. Fakt ten został z dostateczną dokładnością potwierdzony doświadczeniami.

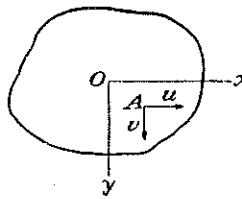
<sup>5)</sup> Patrz prace *Taylor* i *Griffitha*, loc. cit.

dużej koncentracji naprężeń, jak w przypadkach wcięć o bardzo małych promieniach zaokrąglenia, dokładność tego rzędu nie jest łatwo osiągalna<sup>1)</sup>.

**100. Analogie hydrodynamiczne.** Istnieje szereg analogii pomiędzy zagadnieniami skręcania i hydrodynamicznymi zagadnieniami ruchu cieczy w rurze. Lord Kelvin<sup>2)</sup> wykazał, że funkcja  $\Phi_1$  (patrz wyrażenie [a] par. 92), która jest czasem stosowana w rozwiązaniu za-



Rys. 166



Rys. 167

gadnień skręcania, jest identyczna z funkcją prądu dla pewnego ruchu niewirowego „cieczy idealnej“, zawartej w naczyniu o tym samym przekroju co skręcany pręt.

Inną analogię podał J. Boussinesq<sup>3)</sup>. Udowodnił on mianowicie, że równanie różniczkowe i warunek brzegowy wyznaczające funkcję naprężeń  $\Phi$  (patrz równania [142] i [144], par. 90) są identyczne z równaniem i warunkiem brzegowym, wyznaczającym prędkości w ruchu laminarnym cieczy lepkiej wzdłuż rury o tym samym przekroju co skręcany pręt<sup>4)</sup>.

Greenhill pokazał, że funkcja naprężeń  $\Phi$  jest matematycznie identyczna z funkcją prądu ruchu cieczy idealnej, krążącej ze stałym natężeniem wiru<sup>5)</sup> w rurze o tym samym przekroju co skręcany pręt<sup>6)</sup>. Niech  $u$  i  $v$  będą składowymi prędkości krążącej cieczy w punkcie  $\Phi$  (rys. 167). Wtedy z warunku nieściśłości idealnej cieczy otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [a]$$

Warunek stałości natężenia wiru przyjmie postać

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \text{const} \quad [b]$$

Przyjmując

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

<sup>1)</sup> Patrz prace C. B. Biezeno i J. M. Rademakera: „De Ingenieur“, nr 52, 1931. Patrz również prace P. A. Cushmana: „Trans. A. S. M. E.“, 1932, H. Quest: „Ingenieur-Archiv.“, tom 4, str. 510, 1933, i J. H. Huth, loc. cit

<sup>2)</sup> Kelvin i Tait; „Natural Philosophy“, pt. 2, str. 242.

<sup>3)</sup> J. Boussinesq: „J. Math. pure et appl.“, seria 2, tom 16, 1871.

<sup>4)</sup> Analogię tę zastosował M. Paschoud: „Compt. rend.“, tom 179, str. 451, 1924. Patrz również „Bull. tech. Suisse Rom.“ (Lausanne), listopad 1925.

<sup>5)</sup> Analityczne wyrażenie dla prędkości obrotu jest takie same jak dla obrotu  $\omega_2$  rozważanego na str. 207, o ile tylko  $u$  i  $v$  oznaczają składowe prędkości cieczy.

<sup>6)</sup> A. G. Greenhill: „Hydromechanics“ i prace w „Encyklopaedia Britannica“, 11 wyd., 1910.

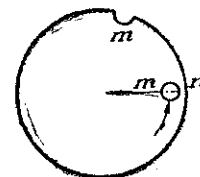
spełniamy równanie [a], a z równania [b] znajdziemy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \text{const} \quad [d]$$

co pokrywa się z równaniem [142] dla funkcji naprężeń skręcania.

Na brzegu prędkość krążącej cieczy ma kierunek styczny do brzegu i warunek brzegowy zagadnienia hydrodynamicznego jest taki sam jak warunek [144] dla problemu skręcania. Stąd rozkład prędkości w zagadnieniu hydrodynamicznym jest matematycznie identyczny z rozkładem naprężeń przy skręcaniu i, stosując znane rozwiązanie hydrodynamiki, możemy wyciągnąć ważne wnioski dotyczące skręcania.

Jako pierwszy przykład weźmiemy przypadek małego otworu kołowego w skręcanym wale kołowym<sup>1)</sup> (rys. 168). Wpływ otworu na rozkład naprężeń jest podobny do wpływu, jaki ma wprowadzenie do strumienia cieczy, krążącej w modelu hydrodynamicznym, nieruchomego walca o tej samej średnicy co otwór. Walec taki zmienia znacznie prędkość cieczy w swoim bezpośrednim sąsiedztwie. Prędkości w jego części przedniej i tylnej spadają do zera, podczas gdy w punktach bocznych  $m$  i  $n$  są dwukrotnie większe. Tak więc otwór tego rodzaju podwaja naprężenia styczne w tej części wału, w której jest umiejscowiony. Mały półkolisty rowek na powierzchni, równoległy do osi wału (rys. 168), posiada ten sam wpływ. Naprężenia styczne na dnie rowka, w punkcie  $m$ , jest około dwóch razy większe od naprężenia stycznego na powierzchni wału w dostatecznej odległości od rowka.



Rys. 168

Ta sama analogia hydrodynamiczna wyjaśnia wpływ małego otworu o przekroju eliptycznym lub półeliptycznym. Jeżeli jedna z osi głównych  $a$  małego otworu eliptycznego jest skierowana w kierunku promieniowym, a drugą osią główną jest oś  $b$ , to naprężenia na brzegu otworu na końcach osi  $a$  wzrastają w stosunku  $(1 + a/b) : 1$ . W ten sposób największe naprężenie powstające w tym przypadku zależy od stosunku wielkości  $a/b$ . Gdy duża oś elipsy jest skierowana wzdłuż promienia, wpływ otworu na naprężenie jest większy niż wówczas, gdy biegnie w kierunku obwodowym. Wyjaśnia to zagadnienie, dlaczego szczelina promieniowa wpływa tak osłabiająco na wytrzymałość wału. Podobny wpływ na rozkład naprężeń ma półeliptyczny rowek na powierzchni, równoległy do osi wału.

Z analogii hydrodynamicznej możemy również wywnioskować, że naprężenia styczne w wystających narożach przekroju poprzecznego skręcanego pręta stają się równe zeru oraz że w załomach naprężenia te stają się teoretycznie nieskończenie wielkie; znaczy to, że nawet najmniejszy moment skręcający spowoduje w takim narożu uplastycznienie materiału lub pęknięcie. Dlatego w przypadku prostokątnego rowka klinowego duża koncentracja naprężeń ma miejsce w wewnętrznych narożach na dnie rowka klinowego. Naprężenia te mogą być zmniejszone przez zaokrąglenie naroży<sup>2)</sup>.

**101. Skręcanie wałów wydrążonych.** Dotąd nasze rozważania ograniczały się do wałów o przekrojach poprzecznych ograniczonych zamkniętymi, pojedynczymi krzywymi. Rozpatrzmy obecnie wały wydrążone, których przekroje poprzeczne posiadają dwa lub więcej

<sup>1)</sup> Patrz J. Larmor: „Phil. Mag.“, tom 33, str. 76, 1892.

<sup>2)</sup> Naprężenia w rowkach klinowych były badane za pomocą metody błony mydlanej. Patrz prace A. A. Griffitha i G. I. Taylora: „Tech. Rept., Natl. Advisory Comm. Aeronaut.“, tom 3, str. 938, 1917—1918. To samo zagadnienie było rozważane za pomocą metody elastooptycznej. Patrz prace A. G. Solakiana i G. B. Karelitz: „Trans. A. S. M. E., Applied Mechanics Division“, 1931.

brzegów. Najprostszym zagadnieniem tego rodzaju jest wał wydrążony o wewnętrznym brzegu pokrywającym się z jedną z trajektorii naprężeń (por. str. 242) wału pełnego, o zewnętrznym brzegu takim, jak wał wydrążony.

Weźmy np. przekrój eliptyczny (rys. 149). Funkcja naprężeń wału pełnego ma postać

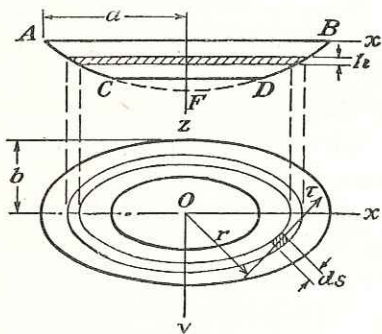
$$\Phi = \frac{a^2 b^2 F}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad [a]$$

Krzywa

$$\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1 \quad [b]$$

jest elipsą geometrycznie podobną do zewnętrznego brzegu przekroju. Wzdłuż tej elipsy funkcja naprężeń [a] jest stała i stąd dla  $k$  mniejszego od jedności *elipsa ta* jest trajektorią naprężeń dla pełnego wału eliptycznego. Naprężenia styczne w dowolnym punkcie tej linii mają kierunek stycznej do niej. Wyobraźmy sobie obecnie powierzchnię walcową utworzoną przez tę linię naprężeń o osi równoległej do osi wału. Z powyższego wniosku, dotyczącego kierunku naprężeń stycznych wynika, że nie wystąpią naprężenia o kierunku poprzecznym do tej powierzchni walcowej. Możemy sobie więc wyobrazić, że materiał ograniczony tą powierzchnią został usunięty bez zmiany rozkładu naprężeń w zewnętrznej części wału. Stąd wynika, że funkcja naprężeń [a] stosuje się również do wału wydrążonego.

Dla danego kąta skręcania  $\theta$  naprężenia w wale wydrążonym są takie same jak w odpowiadającym mu wale pełnym, lecz moment skręcający będzie mniejszy o tę wielkość, która w przypadku pełnego wału jest przenoszona przez część przekroju, odpowiadającą otworowi. Z wyrażenia [148] widzimy, że stosunek tej wielkości do całkowitego momentu skręcającego wynosi  $k^4 : 1$ . Stąd dla wału wydrążonego zamiast wyrażenia [148] będziemy mieli



Rys. 169

$$\theta = \frac{M_t}{1 - k^4} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G}$$

a funkcja naprężeń [a] przyjmie postać

$$\Phi = - \frac{M_t}{\pi ab (1 - k^4)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

Otrzymujemy następujące równanie na naprężenie maksymalne

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2} \frac{1}{1 - k^4}$$

W analogii błonowej środkowa część błony, odpowiadająca otworowi w wale (rys. 169), musi być zastąpiona poziomą płytką  $CD$ . Zauważmy, że równomierne ciśnienie, działające na część  $CFD$  błony, jest statycznie równoważne ciśnieniu o tej samej wielkości, równomiernie rozmieszczonemu na płytce  $CD$ , a siły rozciągające  $S$  w błonie, działające wzdłuż brzegu tej płytki, są w równowadze z jej obciążeniem równomiernym. Stąd, w rozważanym przypadku możemy zastosować tę samą doświadczalną metodę błony mydlanej co poprzednio, ponieważ zastąpienie części  $CFD$  błony płytką  $CD$  nie powoduje zmian w ukształtowaniu warunków równowagi pozostałej części błony.

Rozważmy obecnie przypadek ogólniejszy, gdy brzegi otworów nie są trajektoriami naprężeń pełnego wału. Z ogólnej teorii skręcania wiemy, (par. 90) że funkcja naprężeń musi być stała wzdłuż każdego z brzegów, lecz stałe te mogą być przyjęte dowolnie. Przy rozpatrywaniu brzegów wielospójnych w zagadnieniach dwuwymiarowych wykazaliśmy, że musimy się uciec do przemieszczeń i stałe całkowania powinny być znalezione w ten sposób, aby wyrażenia te były jednoznaczne. Analogiczny tok postępowania stosujemy w przypadku skręcania wałów wydrążonych. Stałe wartości funkcji naprężeń wzdłuż brzegów powinny być wyznaczone w ten sposób, aby przemieszczenia były jednoznaczne. Otrzymujemy wtedy wystarczającą liczbę równań dla wyznaczenia tych stałych.

Z równań [b] i [d] par. 90 mamy

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta y \right); \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta x \right) \quad [c]$$

Obliczamy teraz całkę

$$\int \tau ds \quad [d]$$

wzdłuż każdego brzegu. Wykorzystując związki [c] i rozkładając naprężenia całkowite na jego składowe, znajdziemy

$$\int \tau ds = \int \left( \tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) ds = G \int \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) - \theta G \int (y dx - x dy)$$

Pierwsza całka musi zniknąć, ponieważ całkowanie odbywa się wzdłuż krzywej zamkniętej i ponieważ  $w$  jest funkcją jednoznaną. Stąd

$$\int \tau ds = \theta G \int (x dy - y dx)$$

Całka po prawej stronie jest równa podwójnej powierzchni otworu. Wtedy

$$\int \tau ds = 2G\theta A \quad [e]$$

A więc stałe wartości funkcji naprężeń wzdłuż brzegów otworów musimy wyznaczyć w ten sposób, aby spełniały warunek [e] dla każdego brzegu. Warunek ten jest ważny dla każdej krzywej zamkniętej wykreślonej w przekroju poprzecznym o czym możemy się przekonać powtarzając dowód.

Fizyczny sens wyrażenia [e] był rozpatrzony poprzednio (por. równanie [152] str. 243). Oznacza to, że stosując analogię błonową poziomą każdej z płytek takich jak płytka  $CD$  (rys. 169) musimy przyjąć w ten sposób, aby pionowe obciążenie działające na płytkę było równe i przeciwnie skierowane do pionowej składowej wypadkowej sił rozciągających, przenoszonych z płytki na błonę. Jeżeli brzegi otworów pokrywają się z trajektoriami naprężeń odpowiedniego wału pełnego, to powyższy warunek wystarcza do zapewnienia równowagi płytek. W ogólnym przypadku warunek nie jest wystarczający i w celu utrzymania płytek w równowadze i w położeniu poziomym musimy zastosować specjalne kierujące przyrządy. Utrudnia to doświadczenia z błoną mydlaną dla wydrążonych wałów.

W celu usunięcia tej trudności możemy zastosować następujące postępowanie<sup>1)</sup>. Wykonujemy w płytce (rys. 165) otwór odpowiadający zewnętrznemu brzegowi wału. Wewnętrzne brzegi odpowiadające otworom w wale osadza się na pionowych, przesuwanych stojakach tak, że ich wysokość może być nastawiana. Przyjmując te wysokości dowolnie i naciągając błonę na brzegi otrzymujemy powierzchnię, która spełnia równanie [142] i warunki

<sup>1)</sup> A. A. Griffith i G. I. Taylor: „Tech. Rept. Natl. Advisory Comm. Aeronaut.“, tom 3, str. 938, 1917—1918.

brzegowe [144], lecz warunek [e] na ogół nie będzie spełniony i błona nie przedstawi rozkładu naprężeń w wydrążonym wale. Powtarzając takie doświadczenie tyle razy, ile mamy brzegów, lecz każdorazowo pomiary na błonie, otrzymamy wystarczające dane dla wyznaczenia właściwych wartości wysokości brzegów wewnętrznych i w końcu możemy naciągnąć błonę mydlaną w wymagany sposób. Możemy to udowodnić następująco: jeżeli  $i$  jest liczbą brzegów, a  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i$  są powierzchniami błony otrzymanymi dla  $i$  różnych ustawień wysokości brzegów, wtedy funkcja

$$\Phi = m_1 \Phi_1 + m_2 \Phi_2 + \dots + m_i \Phi_i \quad [f]$$

w której  $m_1, m_2, \dots, m_i$  są współczynnikami liczbowymi, jest również rozwiązaniem równania [142], o ile tylko

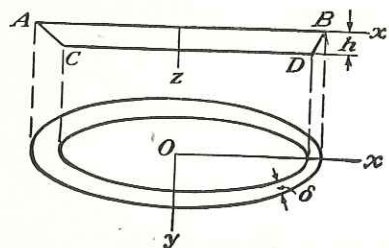
$$m_1 + m_2 + \dots + m_i = 1$$

Spostrzegając, że naprężenie styczne jest równe nachyleniu błony i podstawiając [f] do wyrażenia [e], otrzymujemy i równań o postaci

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 2G\theta A_i$$

skąd możemy wyznaczyć  $i$  współczynników  $m_1, m_2, \dots, m_i$  będących funkcjami  $\theta$ . Wtedy prawdziwą wartość funkcji naprężeń otrzymamy z [f]<sup>1)</sup>. Griffith i Taylor zastosowali tę metodę do wyznaczenia naprężeń w wydrążonych wałach kołowych z klinowym rowkiem. Za pomocą tego sposobu udowodniono, że maksymalne naprężenia mogą być znacznie zmniejszone, a wytrzymałość wału zwiększona przez wywiercenie mimośrodowego otworu w wale.

Moment w wale z jednym lub większą liczbą otworów otrzymamy obliczając podwójną objętość pod błoną i płaskimi płytkami. Aby przekonać się o tym, obliczymy moment skręcający, wywołany naprężeniami stycznymi, rozmieszczonymi na elementarnym pierścieniu pomiędzy dwiema przyległymi trajektoriami naprężeń, jak na rys. 169 (przedstawiającymi obecnie dowolny przekrój wydrążony).



Rys. 170

Oznaczamy przez  $\delta$  zmienną grubość pierścienia i rozpatrujemy element taki, jak zaznaczony na rysunku. Siła styczna, działająca na ten element, jest równa  $\tau \delta ds$ , a jej moment względem punktu  $O$  wynosi  $r \tau \delta ds$ . Moment skręcający elementarnego pierścienia równa się

$$dM_t = \int r \tau \delta ds \quad [g]$$

gdzie całkowanie rozciąga się wzdłuż długości pierścienia. Oznaczając przez  $A$  powierzchnię ograniczoną pierścieniem oraz spostrzegając, że  $\tau$  jest nachyleniem, tak że  $\tau \delta$  jest różnicą dwu warstw na poziomie  $h$ , znajdziemy z [c]

$$dM_t = 2hA \quad (h)$$

Znaczy to, że moment skręcający, odpowiadający elementarnemu pierścieniowi jest wyrażony podwójną objętością zacieniowaną na rysunku. Całkowity moment skręcający stanowi sumę tych objętości. tzn. dwie — objętości — pomiędzy  $AB$ , błoną  $AC$  i  $DB$  i płaską płytką  $CD$ . Podobny wniosek otrzymujemy dla kilku otworów.

**102. Skręcanie rur cienkościennych.** Przybliżone rozwiązanie zagadnienia skręcania rur cienkościennych możemy łatwo otrzymać stosując analogię błonową. Niech  $AB$  i  $CD$  (rys. 170) przedstawiają poziomy zewnętrzny i wewnętrzny brzeg, a  $AC$  i  $DB$  są

<sup>1)</sup> Griffith i Taylor na podstawie swoich doświadczeń doszli do wniosku, że zamiast błon znajdujących się pod stałym ciśnieniem, przy rozważaniu rozkładu naprężeń w wydrążonych wałach jest wygodniej stosować błony o zerowym ciśnieniu (por. str. 244). Szczegółowe omówienie sposobu obliczania współczynników  $m_1, m_2, \dots$  podano w ich pracy.

przekrojami poprzecznymi błony rozpiętej pomiędzy tymi brzegami. W przypadku cienkich ścian możemy pominąć zmianę nachylenia błony na grubości i przyjąć, że  $AC$  i  $BD$  są liniami prostymi. Jest to równoznaczne założeniu, że naprężenia styczne są rozmieszczone równomiernie na grubości ścianki. Wtedy przy oznaczeniu przez  $h$  różnicy poziomów dwu brzegów i przez  $\delta$  zmiennej grubości ścianki mamy naprężenia w dowolnym punkcie dane kątem nachylenia błony

$$\tau = \frac{h}{\delta} \quad [a]$$

odwrotnie proporcjonalne do grubości ścianki; są one więc największe tam, gdzie grubość ścianki jest najmniejsza.

W celu ustalenia zależności pomiędzy naprężeniami i momentem skręcającym  $M_t$  zastosujemy znowu analogię błonową oraz obliczymy moment skręcający z objętości  $ACDB$ . Wtedy

$$M_t = 2Ah = 2A\delta\tau \quad [b]$$

gdzie  $A$  jest średnią z powierzchni zamkniętych zewnętrznym i wewnętrznym brzegiem poprzecznego przekroju rury. Z [b] otrzymujemy proste wyrażenie dla obliczenia naprężeń stycznych

$$\tau = \frac{M_t}{2A\delta} \quad [166]$$

Do wyznaczenia kąta skręcenia  $\theta$  zastosujemy równanie [152]. Wtedy

$$\tau ds = \frac{M_t}{2A} \int \frac{ds}{\delta} = 2G\theta A \quad [c]$$

skąd<sup>1)</sup>

$$\theta = \frac{M_t}{4A^2 G} \int \frac{ds}{\delta} \quad [167]$$

W przypadku rury o równomiernej grubości ( $\delta$  jest stałe) z równania [167] otrzymamy

$$\theta = \frac{M_t s}{4A^2 G \delta} \quad [168]$$

gdzie  $s$  jest długością linii środkowej pierścieniowego przekroju rury.

Jeżeli rura posiada kąty wewnętrzne, jak w przypadku przedstawionym na rys. 171, to w narożach tych występuje znaczna koncentracja naprężeń. Naprężenie maksymalne jest większe od naprężenia danego równaniem [166] i zależy od promienia  $a$  zaokrąglenia wewnętrznego naroża (rys. 171b). Przy obliczaniu tego maksymalnego naprężenia stosować będziemy analogię błonową, podobnie jak to czyniliśmy dla załomów w przypadku przekrojów walcowanych (par. 98). Równanie błony dla kąta wewnętrznego może być przyjęte w postaci

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} = -\frac{q}{S}$$

<sup>1)</sup> Równania [166] i [167] dla cienkich przekrojów rurowych otrzymał R. Bredt: „V. D. I.“, tom 40, str. 815, 1896.



Zastępując  $q/S$  przez  $2G\theta$  i spostrzegając, że  $\tau = -dz/dr$  (por. rys. 170) znajdziemy

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = 2G\theta \quad [d]$$

Przyjmując, że mamy do czynienia z rurą o stałej grubości  $\delta$  oraz oznaczając przez  $\tau_0$  naprężenia na znacznej odległości od naroża, obliczone z równania [166], znajdziemy z [c]

$$2G\theta = \frac{\tau_0 s}{A}$$

Podstawiając do [d]

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{1}{r} \tau = \frac{\tau_0 s}{A} \quad [e]$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest

$$\tau = \frac{C}{r} + \frac{\tau_0 sr}{2A} \quad [f]$$

Przyjmując, że wystające kąty przekroju poprzecznego mają zaokrąglenia o promieniu  $a$ , jak to zaznaczono na rysunku, stałą całkowania  $C$  możemy wyznaczyć z równania

$$\int_a^{a+\delta} \tau dr = \tau_0 \delta \quad [g]$$

które wynika z analogii hydrodynamicznej (par. 100). A mianowicie, jeżeli idealna ciecz krąży w kanale o kształcie pierścieniowego przekroju rury, to ilość cieczy przepływająca przez każdy przekrój kanału jest stała. Podstawiając wyrażenie [f] na  $\tau$  do równania [g] i całkując, otrzymujemy, że

$$C = \tau_0 \delta \frac{1 - (s/4A)(2a + \delta)}{\log_e(1 + \delta/a)}$$

a z równania [f]

$$\tau = \frac{\tau_0 \delta}{r} \frac{1 - (s/4A)(2a + \delta)}{\log_e(1 + \delta/a)} + \frac{\tau_0 sr}{2A} \quad [h]$$

Dla cienkościenniej rury ułamki  $s(2a + \delta)/A$ ,  $sr/A$  będą małe i [h] sprowadzi się do

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{\delta}{r} \log_e \left( 1 + \frac{\delta}{a} \right) \quad [i]$$

Podstawiając  $r = a$ , otrzymamy naprężenia w wewnętrznym narożu.

Przedstawiono to graficznie (krzywa 1) na rys. 172. Drugą krzywą<sup>1)</sup> (2 na rys. 172) otrzymano sposobem różnic skończonych bez założenia, że błona w narożu ma postać powierzchni obrotowej. Potwierdza to dokładność równania [i] dla małych zaokrągleń, powiedzmy do  $a/\delta = 1/4$ . Dla większych zaokrągleń wartości dane równaniem [i] są za wysokie.

Rozważmy obecnie przypadek, gdy przekrój rurowy posiada więcej niż dwa brzegi. Weźmy np. przypadek pokazany na rys. 173 i przyjmijmy, że grubość ścianek jest bardzo

mała. Naprężenia styczne w każdej części ścianki według analogii błonowej wynoszą

$$\tau_1 = \frac{h_1}{\delta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{h_2}{\delta_2}$$

$$\tau_3 = \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1 \delta_1 - \tau_2 \delta_2}{\delta_3}$$

[k]

gdzie  $h_1$  i  $h_2$  są poziomami wewnętrznych brzegów  $CD$  i  $EF$ <sup>1)</sup>.

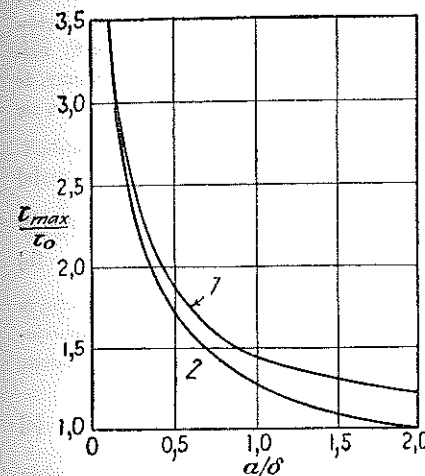
Wielkość momentu skręcającego, wyznaczonego objętością  $ACDEFB$  wynosi

$$M_t = 2(A_1 h_1 + A_2 h_2) = 2A_1 \delta_1 \tau_1 + 2A_2 \delta_2 \tau_2 \quad [l]$$

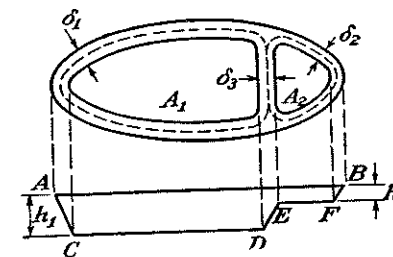
gdzie  $A_1$  i  $A_2$  są powierzchniami, zaznaczonymi na rysunku kreskowaną linią.

Dalsze zależności potrzebne do rozwiązania zagadnienia otrzymamy stosując równania [152] do krzywych zamkniętych, zaznaczonych na rysunku liniami kreskowanymi. Przyjmując, że grubości  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  są wielkościami stałymi i oznaczając przez  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  długości odpowiednich kreskowanych krzywych, znajdziemy z rys. 173

$$\begin{aligned} \tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 &= 2G\theta A_1 \\ \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 &= 2G\theta A_2 \end{aligned} \quad [m]$$



Rys. 172



Rys. 173

Stosując ostatnią z zależności [k] oraz wyrażenia [l] i [m], otrzymujemy naprężenia  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  jako funkcje momentu skręcającego:

$$\tau_1 = \frac{M_t [\delta_3 s_2 A_1 + \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)]}{2 [\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad [n]$$

$$\tau_2 = \frac{M_t [\delta_3 s_1 A_2 + \delta_1 s_3 (A_1 + A_2)]}{2 [\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad [o]$$

$$\tau_3 = \frac{M_t (\delta_1 s_2 A_1 - \delta_2 s_1 A_2)}{2 [\delta_1 \delta_3 s_2 A_1^2 + \delta_2 \delta_3 s_1 A_2^2 + \delta_1 \delta_2 s_3 (A_1 + A_2)^2]} \quad [p]$$

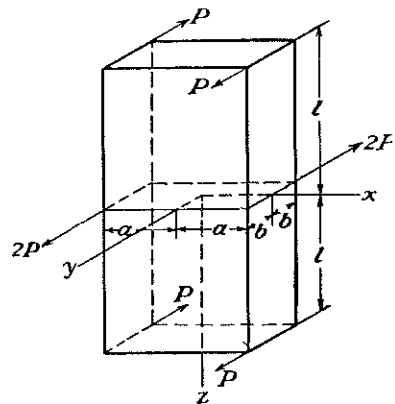
W przypadku przekroju symetrycznego  $s_1 = s_2$ ,  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $A_1 = A_2$  i  $\tau_3 = 0$ . W tym przypadku moment skręcający jest przenoszony przez ściankę zewnętrzną rury, natomiast przegroda pozostaje nienaprężona<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Przyjęto, że płytki są podtrzymywane w położeniu poziomym (por. str. 264).

<sup>2)</sup> W tym wyprowadzeniu pominięto małe naprężenia, odpowiadające zmianie kąta nachylenia błony na grubości przegrody.

W celu otrzymania kąta skręcenia dla przekroju podobnego do uwidocznionego na rys. 173 podstawiamy wartości naprężeń do jednego z równań [m]. W ten sposób otrzymujemy  $\theta$  jako funkcję momentu skręcającego  $M_t$ .

**103. Skręcanie pręta, którego jeden przekrój poprzeczny pozostaje płaski.** Przy rozważaniu zagadnień skręcania zawsze przyjmuje się, że moment skręcający jest przyłożony za pomocą naprężeń stycznych rozmieszczonych na końcach pręta w określony sposób, otrzymany z równania [142] i spełniający warunek brzegowy [144]. Jeżeli rozmieszczenie naprężeń na końcach różni się od podanego wyżej, to w rozkładzie naprężeń występują miejscowe nieregularności i rozwiązanie równań [142] i [144] może być zastosowane z wystarczającą dokładnością jedynie w obszarach będących w pewnej odległości od końców pręta<sup>1)</sup>.



Rys. 174

Podobna nieregularność występuje, gdy jeden z przekrojów skręcanego pręta nie może się wypaczyć na skutek nałożenia nań pewnych więzów. Spotykamy czasami tego rodzaju zagadnienia w technice<sup>2)</sup>. Prosty przykład pokazano na rys. 174. Z warunku symetrii możemy wywnioskować, że środkowy przekrój pręta w czasie skręcania pozostaje płaski. Stąd rozkład naprężeń w pobliżu tego przekroju musi się różnić od otrzymanego powyżej dla prętów prostokątnych (par. 95). Rozpatrując te naprężenia rozważmy najpierw przypadek bardzo wąskiego prostokąta<sup>3)</sup> i przyjmijmy, że wymiar  $a$  jest duży w porównaniu z  $b$ . Jeżeli przekroje mogą się wypaczać, to według par. 94 otrzymujemy naprężenia

$$\tau_{xz} = -2G\theta y; \quad \tau_{yz} = 0 \quad [a]$$

a odpowiadające im przemieszczenia z równań [a], [b] i [d] par. 90

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz; \quad w = -\theta xy \quad [b]$$

Aby zapobiec wypaczeniu przekroju, które przedstawione jest przemieszczeniami  $w$ , na przekroju poprzecznym należy rozmieścić naprężenia normalne  $\sigma_z$ . Przybliżone rozwiązanie otrzymamy przyjmując, że  $\sigma_z$  jest proporcjonalne do  $w$  i że zmniejsza się wraz ze wzrostem odległości  $z$  od środkowego przekroju. Założenia te są spełnione przez przyjęcie

$$\sigma_z = -mE\theta e^{-mz} xy \quad [c]$$

gdzie  $m$  jest współczynnikiem, który będzie później wyznaczony. Dzięki czynnikowi  $e^{-mz}$ , naprężenia  $\sigma_z$  maleją ze wzrostem  $z$  i można je pominać w pewnej odległości, zależnej od wielkości  $m$ .

Pozostałe składowe naprężenia muszą być dobrane w ten sposób, aby spełniały równania różniczkowe równowagi [127] oraz warunki brzegowe. Możemy łatwo udowodnić, że powyższe wymagania będą spełnione przy przyjęciu

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{1}{4} Em^3 \theta e^{-mz} (a^2 - x^2) (b^2 - y^2) \\ \tau_{xz} = \frac{1}{4} Em^2 \theta e^{-mz} (a^2 - x^2) y - 2G\theta y \\ \tau_{yz} = \frac{1}{4} Em^2 \theta e^{-mz} (b^2 - y^2) x \end{aligned} \quad [d]$$

dla dużych wartości  $z$  ten rozkład naprężeń jest bliski rozkładowi naprężeń [a] dla czystego skręcania. Składowa naprężenia  $\tau_{xy}$  będzie równa zero na brzegu  $x = \pm a$  i  $y = \pm b$ ;  $\tau_{xz}$  oraz  $\tau_{yz}$  będą odpowiednio równe zero dla  $x = \pm a$  i  $y = \pm b$ . Warunki brzegowe są spełnione i powierzchnie boczne pręta są wolne od sił.

<sup>1)</sup> Miejscowe nieregularności na końcach przekroju kołowego rozpatrzył F. Purser: „Proc. Roy. Irish Acad.“, Dublin, tom 26, seria A str. 54, 1906, patrz również K. Wolf: „Sitzber. Akad. Wiss.“, Wiedeń, tom 125, str. 1149, 1916 oraz A. Timpe: „Math. Annalen“, tom 71, str. 480, 1912.

<sup>2)</sup> Skręcanie belek dwuteowych poddanych takim warunkom rozważył S. Timoshenko: „Z. Math. Physik“, tom 58, str. 361, 1910. Por. również C. Weber: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 6, str. 85, 1926.

<sup>3)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Proc. London Math. Soc.“, seria 2, tom 20, str. 389, 1921.

W celu wyznaczenia współczynnika  $m$  rozważmy energię odkształcenia pręta i obliczymy  $m$  z warunku minimum tej energii. Stosując wyrażenia [84] na str. 141 otrzymamy

$$V = \frac{1}{2G} \int_{-l}^l \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \sigma_z^2 \right] dx dy dz$$

Podstawiając tu naprężenia [d] i biorąc pod uwagę, że dla długiego pręta możemy przyjąć z dostateczną dokładnością

$$\int_0^l e^{-mz} dz = \frac{1}{m}$$

otrzymujemy

$$V = \frac{1}{9} E\theta^2 a^3 b^3 \left\{ -3m + (1+\nu) \left[ \frac{2}{25} a^2 b^2 m^5 + \frac{1}{5} (a^2 + b^2) m^3 + \frac{12}{(1+\nu)^2} \frac{l}{a^2} \right] \right\} \quad [e]$$

Warunek minimum daje nam następujące równanie, z którego wyznaczmy  $m$

$$(1+\nu) \left[ \frac{2}{5} a^2 b^2 m^4 + \frac{3}{5} (a^2 + b^2) m^2 \right] = 3$$

Dla wąskich prostokątów mamy w przybliżeniu

$$m^2 = \frac{5}{(1+\nu) a^2} \quad [f]$$

Podstawiając wartość  $m$  do [c] i [d], otrzymamy rozkład naprężeń w przypadku, gdy środkowy przekrój poprzeczny pręta pozostaje płaski.

W celu obliczenia kąta skręcenia  $\psi$  przyrównujemy energię potencjalną [e] do pracy, którą wykonuje moment skręcający  $M_t$

$$\frac{M_t \psi}{2} = V$$

Stąd dostajemy kąt skręcania

$$\psi = \frac{3M_t}{16G a b^3} \left[ l - \frac{\sqrt{5(1+\nu)}}{6} a \right] \quad [g]$$

Porównując wynik ten z równaniem [155] na str. 245, dochodzimy do wniosku, że zapobiegając paczaniu się środkowego przekroju, zwiększamy sztywność skręcania pręta. Wpływ miejscowej nieregularności rozkładu naprężeń na wartość  $\psi$  jest taki sam, jak wpływ skrócenia długości  $l$  o wartość

$$\frac{a \sqrt{5(1+\nu)}}{6}$$

Przyjmując  $\nu = 0,30$  otrzymujemy skrócenie  $l$  równe  $0,425 a$ . Widzimy stąd, że wpływ ustalenia przekroju środkowego na kąt skręcania jest mały, jeśli  $a$  jest małe w porównaniu z  $l$ .

W podobny sposób rozpatrzeć można kąt skręcania pręta o przekroju eliptycznym<sup>1)</sup>. Większy wpływ ma ustalenie przekroju środkowego w przypadku skręcania pręta o przekroju dwuteowym. W tym przypadku przybliżony sposób obliczenia kąta skręcenia polega na uwzględnieniu zginania półek podczas skręcania<sup>2)</sup>.

**104. Skręcanie wałów kołowych o zmiennej średnicy.** Rozważmy wał w postaci bryły obrotowej skręcany parami sił przyłożonymi na końcach (rys. 175). Przyjmijmy, że oś wału jest osią  $z$  i zastosujmy współrzędne biegunowe  $r$  i  $\theta$ , które określą nam położenie elementu płaszczyzny przekroju poprzecznego. W takim przypadku stosujemy następujące oznaczenia na składowe naprężenia  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$ . Składowe przemieszczeń w kierunku promieniowym i obwodowym oznaczamy przez  $u$  i  $v$ , a składową w kierunku  $z$  przez  $w$ .

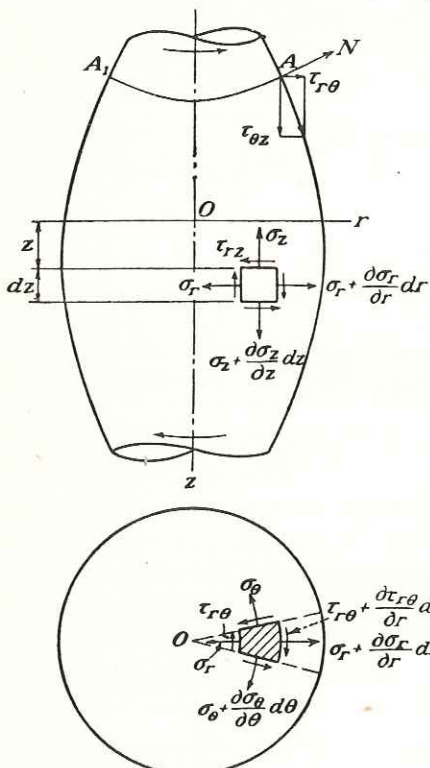
<sup>1)</sup> A. Föppl: „Sitzber. Bayer. Akad. Wiss., Math-phys. Klasse“, Monachium, 1920, str. 261.

<sup>2)</sup> Patrz S. Timoshenko: „Z. Math., Physik“, tom 58, str. 361, 1910; lub „Strength of Materials“, tom 2, str. 287, 1941.

Wtedy, stosując zależności otrzymane poprzednio w przypadku zagadnień dwuwymiarowych (par. 28), otrzymujemy następujące wyrażenia na składowe odkształcenia:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; & \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad [169]$$

Wypisując równania równowagi elementu (rys. 175), tak jak czyniliśmy poprzednio w przypadku zagadnień dwuwymiarowych (par. 25), oraz pomijając siły masowe, dochodzimy do następujących równań różniczkowych równowagi<sup>1)</sup>



Rys. 175

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad [170]$$

Stosując te równania do zagadnienia skręcania użyjemy sposobu półdwrotnego (por. str. 234) i przyjmiemy, że \$u\$ i \$w\$ są równe zeru, tzn. że w czasie skręcania cząstki wału poruszają się tylko w kierunku obwodowym. Założenie to różni się od założenia dla wału kołowego o stałej średnicy tym, że przemieszczenia obwodowe nie są już proporcjonalne do odległości od osi; oznacza to, że promień przekroju poprzecznego zakrzywia się na skutek skręcania. Poniżej pokażemy, że rozwiązanie otrzymane na podstawie takiego założenia spełnia wszystkie równania sprężystości i dlatego przedstawia prawdziwe rozwiązanie zagadnienia.

Podstawiając do [169] \$u = w = 0\$ i uwzględniając, że z powodu symetrii przemieszczenie \$v\$ nie zależy od kąta \$\theta\$, znajdziemy

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{rz} = 0; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad [a]$$

Stąd ze wszystkich składowych naprężeń jedynie \$\tau\_{r\theta}\$ i \$\tau\_{\theta z}\$ są różne od zera. Pierwsze dwa równania [170] są spełnione tożsamościowo, a z trzeciego otrzymujemy

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Równania te otrzymał Lame i Clapeyron: „Crelle's J.", tom 7, 1831.

Równanie to możemy napisać w postaci

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \quad [c]$$

Równanie to będzie spełnione, o ile weźmiemy funkcję naprężeń \$\Phi\$ współrzędnych \$r\$ i \$z\$ w następującej postaci

$$r^2 \tau_{r\theta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad r^2 \tau_{\theta z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad [d]$$

Aby spełnić równania ciągłości odkształceń, musimy wziąć pod uwagę fakt, że \$\tau\_{r\theta}\$ i \$\tau\_{\theta z}\$ są funkcjami przemieszczenia \$v\$. Ze związków [a] i [d] otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \tau_{\theta z} &= G\gamma_{\theta z} = G \frac{\partial v}{\partial z} = Gr \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{aligned} \quad [e]$$

Z równań tych wynika, że

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad [f]$$

lub

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [g]$$

Rozważmy obecnie warunki brzegowe dla funkcji \$\Phi\$. Z warunku, że na bocznej powierzchni wału nie działają żadne siły zewnętrzne, dochodzimy do wniosku, że w dowolnym punkcie \$A\$ brzegu przekroju osiowego (rys. 175) całkowite naprężenie styczne musi być skierowane stycznie do brzegu, a jego rzut na normalną \$N\$ do brzegu musi być równy zeru. Stąd

$$\tau_{r\theta} \frac{dz}{ds} - \tau_{\theta z} \frac{dr}{ds} = 0$$

gdzie \$ds\$ jest elementem brzegu. Podstawiając naprężenia z [d], otrzymujemy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0 \quad [h]$$

skąd dochodzimy do wniosku, że \$\Phi\$ jest stałe wzdłuż brzegu przekroju osiowego wału.

Równanie [g] łącznie z warunkiem brzegowym [h] wyznacza w zupełności funkcję naprężeń \$\Phi\$, z której możemy otrzymać naprężenia spełniające równania równowagi, równania ciągłości odkształceń oraz warunki na powierzchni bocznej wału<sup>1)</sup>.

Wartość momentu skręcającego otrzymamy obliczając moment, jaki dają naprężenia styczne \$\tau\_{\theta z}\$ na przekroju wału. Wtedy

$$M_t = \int_0^a 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr = 2\pi \int_0^a \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = 2\pi \left[ \Phi \right]_0^a \quad [k]$$

<sup>1)</sup> To ogólne rozwiązanie należy do J. H. Michella: „Proc. London Math. Soc.", tom 31, str. 141, 1899. Patrz również A. Föppl: „Sitzber Bayer. Akad. Wiss.", Monachium, tom 35, str. 249, 504, 1905. Patrz również książka H. Neuberger Kerbspannungslehre, w której podano rozwiązania dla hiperboloidy obrotowej oraz dla wydrążenia w postaci elipsoidy obrotowej, stosując inną metodę. Przegląd literatury dotyczącej tego tematu podał T. Pöschl: „Z. angew. Math. Mech.", tom 2, str. 137, 1922 i T. J. Higgins: „Experimental Stress Analysis", tom 3, nr 1, str. 94, 1945.

gdzie  $a$  jest zewnętrznym promieniem przekroju poprzecznego. W ten sposób otrzymamy łatwo moment skręcający, jeżeli znamy różnicę pomiędzy wartościami funkcji naprężeń na brzegu zewnętrznym i w środku przekroju.

Przy rozważaniu przemieszczenia podczas skręcenia wału przyjmijmy oznaczenie  $\psi = v/r$  dla kąta obrotu elementarnego pierścienia o promieniu  $r$  przekroju poprzecznego wału. Taki pierścień może być rozpatrzony jako przekrój jednej z elementarnych rur, na które podzieliśmy wał. Wtedy  $\psi$  jest kątem skręcenia takiej rury. Z faktu, że promień przekroju poprzecznego zakrzywi się, wynika, że  $\psi$  zmienia się wraz z promieniem  $r$  i kąty skręcenia elementarnych rur dla tego samego przekroju poprzecznego wału nie są sobie równe. Obecnie równania [e] napiszemy w następującej postaci

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Rozwiązanie tego równania da nam kąt skręcenia jako funkcję  $r$  i  $z$ . Jeżeli założymy w tym rozwiązaniu

$$\psi = \text{const} \quad [m]$$

otrzymamy powierzchnię, której punkty mają ten sam kąt skręcenia. Na rys. 175  $AA_1$  przedstawia przecięcie takiej powierzchni z płaszczyzną osiowego przekroju wału. Z warunku symetrii wynika, że powierzchnie dane równaniem [m] są powierzchniami obrotowymi, a  $AA_1$  jest południkiem powierzchni przechodzącym przez punkt  $A$ . Podczas skręcania powierzchnie te obracają się wokół osi  $z$  bez jakiegokolwiek zniekształcenia, dokładnie tak, jak płaskie przekroje w przypadku walców kołowych. Stąd całkowite odkształcenie w dowolnym punkcie południka  $AA_1$  jest czystym odkształceniem postaciowym w płaszczyźnie prostopadłej do południka, a odpowiadające mu naprężenie styczne w przekroju osiowym wału ma kierunek normalny do południka. Na brzegu naprężenie to jest styczne do brzegu i południki są normalne do brzegu przekroju osiowego. Jeżeli poruszamy się od powierzchni  $\psi = \text{const}$  do sąsiedniej powierzchni, to przyrost  $\psi$  wzdłuż brzegu przekroju osiowego wału wynosi  $d\psi/ds$  i tak samo, jak dla walca kołowego o przekroju kołowym (par. 87), mamy

$$\tau = Gr \frac{d\psi}{ds} \quad [n]$$

gdzie

$$\tau = \tau_{r\theta} \frac{dr}{ds} + \tau_{\theta z} \frac{dz}{ds}$$

jest wypadkowym naprężeniem stycznym działającym na brzegu. Oczywiście możemy łatwo

otrzymać wartość tego naprężenia stycznego, o ile wyznaczymy na drodze doświadczalnej wartości  $d\psi/ds$ <sup>1)</sup>.

Rozważmy obecnie przypadek szczególny wału stożkowego<sup>2)</sup> (rys. 176). W tym przypadku stosunek

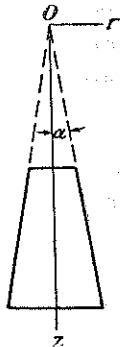
$$\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

jest stały na brzegu przekroju osiowego i równy  $\cos \alpha$ . Dowolna funkcja tego stosunku będzie spełniać warunek brzegowy [h]. Aby spełnić również równanie [g], weźmiemy

$$\Phi = c \left\{ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} \left[ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^3 \right\} \quad [o]$$

gdzie  $c$  jest stałą. Wtedy różniczkując znajdziemy

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{crz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [p]$$



Rys. 176

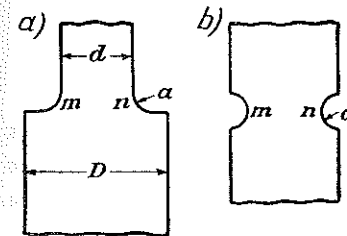
Stałą  $c$  otrzymamy z wyrażenia [k]. Podstawiając [o] do tego wyrażenia otrzymamy

$$c = - \frac{M_t}{2\pi \left( \frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)}$$

W celu obliczenia kąta skręcenia wykorzystujemy wyrażenia [e], skąd dostajemy wyrażenia na  $\psi$ , spełniające równanie [l], oraz warunek brzegowy:

$$\psi = \frac{c}{3G(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [q]$$

Widać stąd, że powierzchnie równego kąta skręcania są powierzchniami kulistymi o środku w początku współrzędnych  $O$ .



Rys. 177

Przypadki wałów o postaci elipsoidy, hiperboloidy lub paraboloidy obrotowej mogą być rozpatrzone w analogiczny sposób<sup>3)</sup>.

Zagadnienia, które spotykamy w praktyce, są bardziej skomplikowane. Średnica wału zwykle zmienia się gwałtownie, jak uwidoczniło na rys. 177a. Pierwsze badania takich zagadnień wykonał *A. Föppl*, a *C. Runge* zaproponował numeryczny sposób przybliżonego rozwiązania takich zadań<sup>4)</sup>. Udowodniono, że w punktach takich jak  $m$  i  $n$  występuje znaczna koncentracja naprężeń oraz że wielkość największego naprężenia dla wału o dwu różnych średnicach  $d$  i  $D$  (rys. 177a) zależy od stosunku promienia  $a$  zaokrąglenia do średnicy wału  $d$  i od stosunku  $d/D$ .

<sup>1)</sup> Doświadczenia takie przeprowadził *R. Sonntag*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 9, str. 1, 1929.

<sup>2)</sup> Patrz *Föppl*, loc. cit.

<sup>3)</sup> Por. prace *E. Melana*: „Tech. Blätter“, Praga, 1920; *A. N. Dinnik*: „Bull. Don Politech. Inst.“, Nowoczerkask, 1912; *W. Arndt*: „Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen“, dysertacja, Getynga 1916; *A. Timpe*: „Math. Annalen“, 1911, str. 480. Dalszą literaturę można znaleźć w przeglądzie *Higginsa* loc. cit.

<sup>4)</sup> Por. *F. A. Willers*: „Z. Math. Physik“, tom 55, str. 225, 1907. Inne metody przybliżone zostały rozwinięte przez *L. Föppla*: „Sitzber. Bayer. Akad. Wiss.“, Monachium, tom 51, str. 61, 1921 oraz przez *R. Sonntaga*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 9 str. 1, 1929.

W przypadku półkolistego rowka o bardzo małym promieniu  $a$  maksymalne naprężenie na dnie rowka (rys. 177b) jest dwa razy większe od naprężenia na powierzchni wału kołowego bez rowka.

W rozważaniach dotyczących koncentracji naprężeń w miejscach zaokrążeń i rowków skręcanych wałów kołowych bardzo użyteczną okazała się analogia elektryczna<sup>1)</sup>. Ogólne równania dla prądu elektrycznego w cienkiej jednorodnej płytce o zmiennej grubości posiada następującą postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad [r]$$

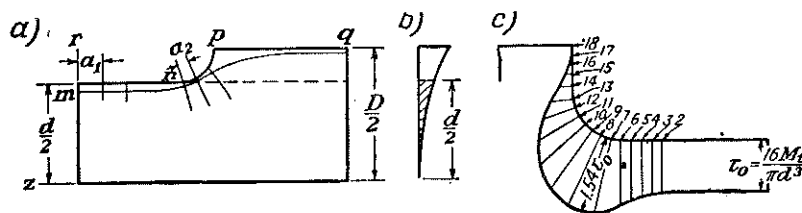
gdzie  $h$  jest zmienną grubością płytki, a  $\psi$  jest funkcją potencjału.

Przypuśćmy, że płytka ma ten sam brzeg co osiowy przekrój wału (rys. 178) tak, że  $x$  i  $y$  pokrywają się z osiami  $z$  i  $r$  oraz że grubość płytki jest proporcjonalna do sześciangu odległości promieniowej  $r$  tak, że  $h = ar^3$ . Wtedy równanie [r] przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0$$

Równanie to pokrywa się z równaniem [l] i dochodzimy do wniosku, że linie stałego potencjału płytki są określone tym samym równaniem co linie równych kątów skręcenia w przypadku wału o zmiennej średnicy.

Jeżeli przyjmiemy, że końce płytki odpowiadające końcom wału są utrzymywane w pewnej różnicy potencjału tak, że prąd przepływa wzdłuż osi  $z$ , to linie równego potencjału będą



Rys. 178

normalne do powierzchni bocznych płyt; mamy tu więc takie same warunki brzegowe jak dla linii stałego kąta skręcania. Jeżeli równania różniczkowe oraz warunki brzegowe są takie same dla tych dwóch rodzajów linii, to linie są identyczne. Stąd, badając rozkład potencjału w płytce, otrzymamy cenne informacje dotyczące rozmieszczenia naprężeń w skręcanym wale.

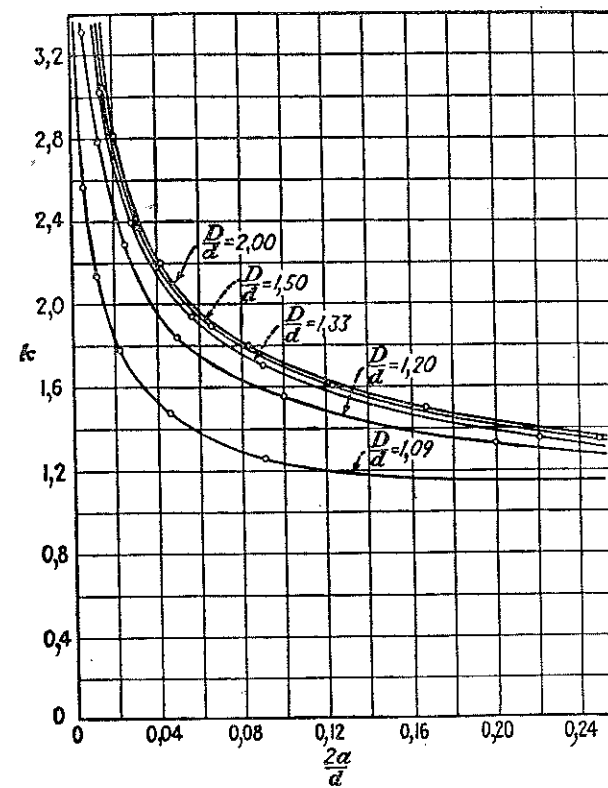
Maksymalne naprężenia występują na powierzchni wału i otrzymujemy je z równania [n]. Z równania tego i z analogii elektrycznej wynika, że naprężenie jest proporcjonalne do wielkości spadku potencjału wzdłuż brzegów płytki.

Pomiary wykonano na próbce stalowej (rys. 178) o długości 24 cale (60,96 cm) i szerokości 6 cali (15,24 cm) na szerszym końcu oraz o grubości maksymalnej 1 cal (2,54 cm). Spadek potencjału wzdłuż brzegu  $mnpq$  modelu badany był za pomocą czułego galwanometru, którego końcówki były połączone z dwiema ostrymi igłami, umocowanymi w obsadce w odle-

głości 2 mm. Przy dotykaniu płytki igłami galwanometr wskazywał spadek potencjału na odcinku pomiędzy końcami igieł. Przesuwając igły wzdłuż zaokrąglenia, możemy znaleźć miejsce największego spadku napięcia i zmierzyć wielkość spadku. Stosunek tego maksimum do spadku napięcia w oddalonym punkcie  $m$  (rys. 178a) daje nam wielkość współczynnika koncentracji  $k^1$  w wyrażeniu

$$\tau_{\max} = k \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

Wyniki takich badań w pewnym szczególnym przypadku przedstawiono na rys. 178c. Tutaj spadek potencjału zmierzony w każdym punkcie oznaczony jest długością normalnej do



Rys. 179

brzegu płytki w tym punkcie. Z wykresu znajdujemy współczynnik koncentracji naprężeń równy 1,54. Wielkości tego współczynnika dla różnych stosunków średnic wału podano na wykresie 179, gdzie odcięte przedstawiają stosunek  $2a/d$  promienia zaokrąglenia do mniejszego promienia wału, a rzędne przedstawiają współczynnik koncentracji naprężeń  $k$  dla różnych wartości stosunku  $D/d$  (por. rys. 177). Za pomocą interpolacji z krzywych tych możemy znaleźć z dostateczną dokładnością współczynnik koncentracji naprężeń dla dowolnego przypadku szczególnego.

<sup>1)</sup> W tym przypadku możemy pominąć małą zmianę promienia  $r$  (wyrażenie [n]).

<sup>1)</sup> Por. prace: L. S. Jacobsen: „Trans. A. S. M. E.“, tom 47, str. 619, 1925 i przegląd podany przez T. J. Higgins, loc. cit. Ostatnia praca omawia różnice pomiary otrzymanymi za pomocą różnych metod. Dalsze porównania i pomiary odcztałceń aż do  $2a/d=0,50$ ; A. Weigand: „Luftfahrt-Forsch.“, tom 20, str. 217, 1943, tłumacz. na angielski w N.A.C.A. Tech. Mem. 1179, wrzesień, 1947.

ZADANIA

1. Udowodnić przez rozważenie równowagi całego pręta, że gdy wszystkie składowe naprężenia z wyjątkiem  $\tau_{xz}$   $\tau_{yz}$  znikają, to jedynym obciążeniem pręta są momenty skręcające (por. [h] par. 90).

2. Udowodnić, że funkcja  $\Phi = A(r^2 - a^2)$  rozwiązuje zagadnienie skręcania dla pełnego lub wydrążonego wału kołowego. Wyznaczyć  $A$  w zależności od  $G\theta$ . Wykorzystując równania [141] i [145] obliczyć maksymalne naprężenia styczne i sztywność na skręcanie dla wału pełnego w zależności od  $M_t$ . Sprawdzić, że wyniki te są zgodne z wynikami podanymi w podręcznikach wytrzymałości materiałów.

3. Udowodnić, że przy tym samym kącie skręcania w eliptycznym przekroju występują większe naprężenia styczne niż we wpisanym przekroju kołowym (promień koła równa się mniejszej osi elipsy  $b$ ). Który z przekrojów przynosi większy moment skręcający przy tym samym dopuszczalnym naprężeniu?

4. Zastosować równania [g] par. 92 i [145] do obliczenia sztywności na skręcanie trójkąta równobocznego i sprawdzić w ten sposób równanie [l] par. 92.

5. Wykorzystując funkcję naprężeń [m] par. 92, wyrażoną we współrzędnych prostokątnych, znaleźć wyrażenie na  $\tau_{xz}$  wzdłuż środkowej linii  $Ax$  (rys. 153) i sprawdzić, że największa wartość na tej linii dana jest równaniem [p].

6. Obliczyć sztywność na skręcanie przekroju podanego na rys. 153. Czy różni się ona znacznie od wartości sztywności na skręcanie przekroju kołowego, gdy rowek jest mały?

7. Udowodnić, że wyrażenie na funkcję naprężeń  $\Phi$  z par. 94, odpowiadające parabolicznej błonie, równa się

$$\Phi = -G\theta \left( x^2 - \frac{c^2}{4} \right)$$

Przybliżone rozwiązanie dla wąskiego przekroju zbieżnego, takiego jak trójkąt pokazany na rys. 180, możemy otrzymać przyjmując, że w dowolnym poziomie  $y$  błona ma postać paraboli dostosowanej do szerokości na tym poziomie. Udowodnić, że dla przekroju trójkątnego o wysokości  $b$  jest w przybliżeniu

$$M_t = \frac{1}{12} G\theta b c^3$$

8. Stosując sposób podany w zadaniu 7, znaleźć przybliżone wyrażenie dla sztywności skręcania cienkiego przekroju symetrycznego ograniczonego dwiema parabolami pokazanymi na rys. 181, dla którego szerokość  $c$  na głębokości  $y$  poniżej środka dana jest za pomocą wyrażenia

$$c = c_0 \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

9. Wykazać, że sposób wskazany w zadaniu 7 daje nam dla smukłego przekroju eliptycznego przybliżone wyrażenie na funkcję naprężeń

$$\Phi = -G\theta b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

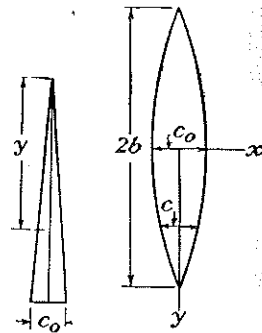
Elipsę pokazano na rys. 149, przy czym  $b/a$  jest małe. Wykazać, że rozwiązanie ściśle par. 91 zmierza do powyższego, gdy  $b/a$  jest małe.

Wyprowadzić równanie przybliżone

$$M_t = \pi a b^3 G\theta; \quad \tau_{\max} = 2G\theta b = \frac{2M_t}{\pi a b^2}$$

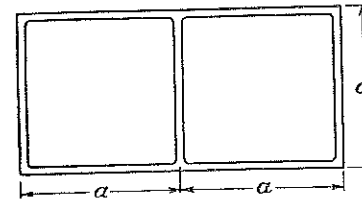
dla smukłego przekroju eliptycznego i porównać je z odpowiednimi równaniami dla cienkiego przekroju prostokątnego o długości  $2a$  i grubości  $2b$ .

10. Zastosować metodę podaną na końcu par. 97 do znalezienia przybliżonego wyrażenia na sztywność skręcania przekroju opisanego w zadaniu 8.

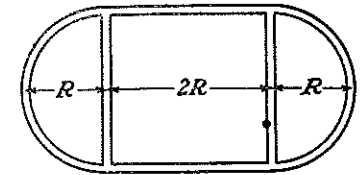


Rys. 180 Rys. 181

11. Przekrój posiada pojedynczy otwór, a funkcja naprężeń  $\Phi$  jest wyznaczona w ten sposób, że znika na brzegu zewnętrznym i ma stałą wartość  $\Phi_H$  na brzegu otworu. Przez przystosowanie obliczeń, wskazanych na str. 236 dla wyrażenia [145], udowodnić, że całkowity moment skręcający dany jest podwójną objętością pod powierzchnią  $\Phi$  plus podwójna objętość pod płaskim dachem  $\Phi_H$ , zakrywającym otwór (por. str. 264).



Rys. 182



Rys. 183

12. Zamknięta rura cienkościenna ma obwód  $l$  i stałą grubość ścianki  $\delta$ . Rura otwarta powstaje przez wykonanie wzdłużnego przecięcia. Udowodnić, że gdy maksymalne naprężenie styczne w obu przypadkach rury otwartej i zamkniętej jest takie same, to

$$\frac{M_t \text{ otw}}{M_t \text{ zamk}} = \frac{l\delta}{6A}, \quad \frac{\theta_{\text{otw}}}{\theta_{\text{zank}}} = \frac{2A}{l\delta}$$

oraz że stosunek sztywności skręcania wynosi  $l^2\delta^2/12A^2$ , gdzie  $A$  jest powierzchnią „otworu“  $k$ .

Obliczyć powyższe stosunki dla rury kołowej o średnicy 25 mm i grubości ścianki 2,5 mm.

13. Cienkościenna rura o przekroju pokazanym na rys. 182 ma stałą grubość ścianki  $\delta$ . Wykazać, że podczas skręcania rury w przegrodzie nie występują naprężenia.

Znaleźć wyrażenia na: a) naprężenie w ściankach w oddaleniu od naroży, b) jednostkowy kąt skręcenia  $\theta$  jako funkcję momentu skręcającego.

14. Podać wyrażenia na naprężenia styczne w rurze o stałej grubości ścianki  $\delta$  i przekroju pokazanym na rys. 183.

15. Przy rozpatrywaniu cienkościennych przekrojów zamkniętych przyjmowaliśmy, że naprężenia styczne są stałe na grubości ścianki, odpowiednio do stałego kąta nachylenia błony w poprzek grubości. Udowodnić, że nie może to być ściśle dla prostej części ścianki (np. rys. 171a) i że w ogólności poprawka do tego naprężenia stycznego składa się z naprężenia stycznego w rurze „otwartej“ podłużnym cięciem (por. zadanie 12).

16. Teoria podana w par. 104 zawiera jako przypadek szczególny wał kołowy o stałym przekroju. Jakie są odpowiednie postacie funkcji  $\Phi$  i  $\psi$ ? Wykazać, że funkcje te dają prawidłowy stosunek pomiędzy momentem skręcającym i jednostkowym kątem skręcenia.

17. Udowodnić, że

$$\Phi = \frac{z}{R} + \frac{Az^3}{R^3} \quad \text{gdzie} \quad R = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

spełnia równanie [g] par. 104 jedynie wtedy, gdy stała  $A = -1/3$  (por. wyrażenie [o]).

18. W dowolnym punkcie przekroju osiowego wału o zmiennej średnicy wybrano dowolnie elementy liniowe  $ds$  i  $dn$  (prostopadłe), jak to pokazano na rys. 184. Naprężenie styczne wyraża się składowymi  $\tau_s$ ,  $\tau_n$  w tych kierunkach. Udowodnić, że

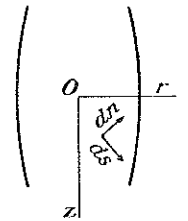
$$\tau_s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad \tau_n = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial s}; \quad \tau_s = Gr \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \tau_n = Gr \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

i wyprowadzić warunek brzegowy spełniony przez  $\psi$ .

Pokazać bez obliczania, że funkcja dana równaniem [q] par. 104 spełnia ten warunek brzegowy dla brzegu stożkowego o dowolnym kącie wierzchołkowym.

19. Sprawdzić, że równanie [q] par. 104 daje prawidłową postać funkcji  $\psi$ , odpowiadającą funkcji  $\Phi$  w wyrażeniu [o].

20. Jeżeli zmodyfikować teorię par. 104 przez pominięcie warunku brzegowego  $\Phi = \text{const}$ , to naprężenia będą spowodowane pewnymi „pierzścieniami ścinania“ na brzegu, jak również momentami skręcającymi na końcach.



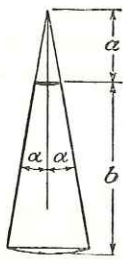
Rys. 184

Rozpatrując wał kołowy o stałym przekroju, opisać zadanie rozwiązane za pomocą funkcji  $\Phi = Czr^4$ , gdzie  $C$  jest stałą dla  $0 < z < l$ .

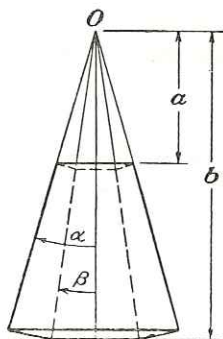
21. Udowodnić, że względny obrót końców (stożkowego) wału zbieżnego, pokazanego na rys. 185, wywołany momentem skręcającym  $M_t$ , wynosi

$$\frac{M}{2\pi \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha\right)} \cdot \frac{1}{3G} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

Jeżeli  $a$  i  $b$  są duże przy  $b - a = l$ , a  $\alpha$  jest małe, to powyższy obrót powinien być bliski względnemu obrotowi końców skręcanego momentem  $M_t$  wału, o stałym przekroju, długości  $l$  i promieniu  $\alpha$ . Udowodnić, że tak jest w istocie.



Rys. 185



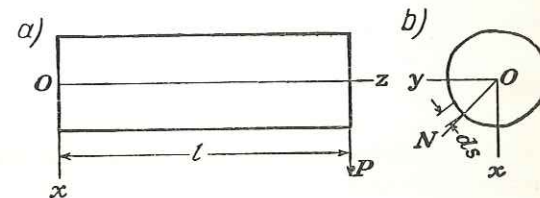
Rys. 186

22. Stosując funkcje, dane równaniami [o] i [q] par. 104 wyrazić względny obrót końców wydrążonego wału stożkowego, pokazanego na rys. 186, przez wielkość  $M_t$ . Końce wału ograniczone są powierzchniami kul o promieniach  $a$  i  $b$  i środku  $O$ .

## ROZDZIAŁ 12

### ZGINANIE PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH

**105. Zginanie belek wspornikowych.** Rozpatrując czyste zginanie (par. 88) pokazaliśmy, że jeżeli belka pryzmatyczna jest zginana w jednej z jej głównych płaszczyzn dwoma równymi i przeciwnie skierowanymi parami sił przyłożonymi na końcach, to jej linia ugięcia leży w tej samej płaszczyźnie, a z sześciu składowych naprężeń jedynie naprężenia normalne, równoległe do osi belki, są różne od zera. Naprężenia te są proporcjonalne do odległości od osi obojętnej. W ten sposób rozwiązanie ściśle pokrywa się w tym przypadku z elementarną teorią zginania. Rozpatrując zginanie siłą przyłożoną na końcu belek wspornikowych o wąskim przekroju prostokątnym (par. 20) pokazaliśmy, że oprócz naprężeń normalnych, proporcjonalnych w każdym przekroju do momentu zginającego, będą również występować naprężenia styczne proporcjonalne do siły poprzecznej.



Rys. 187

Rozpatrzmy obecnie przypadek ogólniejszy zginania belki wspornikowej dowolnego kształtu o stałym przekroju, siłą  $P$  przyłożoną na końcu i równoległą do jednej z głównych osi przekroju<sup>1)</sup> (rys. 187). Przyjmijmy początek układu współrzędnych w środku ciężkości utwierdzonego końca. Oś  $z$  pokrywa się z linią środkową belki, a osie  $x$  i  $y$  pokrywają się z głównymi osiami przekroju. Przy rozwiązywaniu zagadnienia zastosujemy metodę półodwrotną *Saint-Venanta* i na samym początku poczynimy pewne założenia, dotyczące naprężeń. Przyjmujemy, że naprężenia normalne, działające w przekroju poprzecznym w odległości  $z$  od utwierdzonego końca są rozmieszczone w ten sam sposób, co w przypadku czystego zginania:

$$\sigma_z = -\frac{P(l-z)x}{I} \quad [a]$$

Przyjmujemy również, że na te same przekroje poprzeczne działają naprężenia styczne, które rozkładamy w każdym punkcie na składowe  $\tau_{xz}$  oraz  $\tau_{yz}$ . Przyjmujemy, że pozostałe trzy składowe naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  są równe zeru. Pokażemy obecnie, że stosując te założenia dołączymy do rozwiązania, które spełnia wszystkie równania teorii sprężystości i dlatego jest ściśłym rozwiązaniem zagadnienia.

<sup>1)</sup> Zagadnienie to rozwiązał *Saint-Venant*: „J. mathémat“. (Liouville), seria 2, tom 1, 1856.