

ROZDZIAŁ 13

OSIOWO-SYMETRYCZNY ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W CIAŁACH O KSZTAŁCIE BRYŁ OBROTOWYCH

116. Równania ogólne. Wiele praktycznie ważnych zadań analizy naprężeń dotyczy brył obrotowych odkształczanych symetrycznie względem osi obrotu. Najprostszymi przykładami są: walec poddany równomiernemu wewnętrznemu i zewnętrznemu ciśnieniu oraz kołowa tarcza wirująca (por. par. 26 i 30). Dla zagadnień tego rodzaju bardzo często wygodne jest stosowanie współrzędnych walcowych (por. równania [170] str. 270). Ponieważ odkształcenie jest symetryczne względem osi z , składowe naprężenia nie zależą od kąta θ i wszystkie pochodne względem θ znikają. Składowe naprężenia stycznego $\tau_{r\theta}$ i $\tau_{\theta z}$ również znikają z powodu symetrii. W ten sposób równania [170] sprowadzają się do następujących

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad [177]$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

Składowe odkształcenia osiowo-symetrycznego, zgodnie z wyrażeniami [169], mają postać

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad [178]$$

Tu znowu korzystne jest wprowadzenie funkcji naprężeń Φ . Możemy sprawdzić przez podstawienie, że równania [177] będą spełnione o ile przyjmiemy

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \quad [179]$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

jeśli tylko funkcja naprężeń Φ spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad [180]$$

Symbol ∇^2 oznacza operację

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad [a]$$

która odpowiada operatorowi Laplace'a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

we współrzędnych prostokątnych (por. równanie [d], str. 66). Należy zauważyć, że funkcja naprężeń Φ nie zależy od θ tak, że trzeci wyraz w [a] jest równy zeru, gdy zastosujemy go do funkcji Φ .

Przekształcimy obecnie równania ciągłości odkształceń [130] (por. str. 66) do współrzędnych walcowych. Oznaczając przez θ kąt pomiędzy r i osią x , mamy (por. wyrażenia [13])

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta \quad [b]$$

na które to wyrażenia σ_z i τ_{rz} nie mają wpływu.

Wtedy:

$$\nabla^2 \sigma_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta) - \frac{2}{r^2} \cos 2\theta (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad [c]$$

Oznaczając symbolem Θ sumę trzech normalnych składowych naprężenia oraz stosując równanie [b] ze str. 66, otrzymamy w przypadku symetrycznego rozkładu naprężeń

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad [d]$$

Podstawiając [c] i [d] do pierwszego z równań [130], dostajemy

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \right] \cos^2 \theta +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right] \sin^2 \theta = 0$$

Równanie to jest ważne dla dowolnej wartości θ , a stąd

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} = 0 \quad [e]$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0$$

Taki sam wynik otrzymamy rozważając drugie z równań [130] tak, że w przypadku odkształcenia symetrycznego równania [e] zastępują pierwsze dwa równania układu [130]. Trzecie równanie [130] zachowuje tę samą postać we współrzędnych walcowych.

Rozważmy obecnie pozostałe trzy równania układu [130], zawierające składowe naprężenia stycznego. W przypadku odkształcenia symetrycznego jedynie naprężenia τ_{rz} są różne od zera, a składowe naprężenia τ_{xz} i τ_{yz} , działające na płaszczyznę prostopadłą do osi z , otrzymamy przez rozkład τ_{rz} na dwie składowe, równoległe do osi x i y .

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \cos \theta; \quad \tau_{yz} = \tau_{rz} \sin \theta$$

Mamy również

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} \cos \theta$$

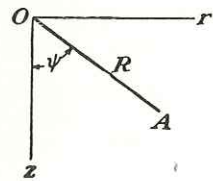
$$\nabla^2 \tau_{xz} = \nabla^2 (\tau_{rz} \cos \theta) = \left(\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} \right) \cos \theta$$

Podstawiając do piątego z równań [130], otrzymamy

$$\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} = 0 \quad [f]$$

Ten sam wynik otrzymamy rozważając czwarte z równań [130]. Ostatnie równanie układu [130] może być również przekształcone do współrzędnych walcowych przez podstawienie

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta$$



Rys. 198

W ten sposób znajdziemy

$$(1+\nu) \nabla^2 \left[\frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta \right] + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Theta = 0$$

Równanie to wynika od razu z równań [e] przez odjęcie jednego od drugiego. W ten sposób równania ciągłości [130], w przypadku odkształcenia symetrycznego względem osi, we współrzędnych walcowych przyjmują postać

$$\nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \quad [g]$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} = 0$$

Można wykazać, że wszystkie powyższe równania są spełnione przez wyrażenia dla naprężeń dane równaniami [179], gdy funkcja naprężeń spełnia równanie [180]. Widzimy więc, że rozwiązanie zagadnień, w których występują osiowo-symetryczne rozkłady naprężeń, sprowadza się do znalezienia w każdym konkretnym przypadku rozwiązania równania [180], spełniającego warunki brzegowe zadania¹⁾.

¹⁾ Ten sposób wyrażania wszystkich składowych naprężeń za pomocą jednej funkcji spełniającej równanie [180] podał szczegółowo A. E. H. Love; „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd., str. 274, 1927. Drugi sposób wyrażenia zagadnienia przy pomocy funkcji naprężeń podał J. H. Michell: „Proc. London Math. Soc.“, tom 31, str. 144, 1900. Związki pomiędzy funkcjami naprężeń w zagadnieniach dwuwymiarowych i funkcjami naprężeń podaną w tym paragrafie rozpatrzył C. Weber: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 5, 1925.

W niektórych przypadkach pożyteczne jest, aby równania [180] były podane we współrzędnych biegunowych R i ψ (rys. 198) zamiast walcowych r i z . Przekształcenie to możemy łatwo wykonać przez zastosowanie równań par. 25. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

Podstawiając do równania [180]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right) = 0 \quad [181]$$

W następnych paragrafach będziemy stosować pewne rozwiązania powyższego równania do badania konkretnych zagadnień osiowo-symetrycznych.

Drugim sposobem rozwiązywania tych zagadnień jest bezpośrednie rozważenie przemieszczeń. Przez zastosowanie związków [178] składowe naprężenia mogą być przedstawione jako funkcje przemieszczeń u i w . Podstawiając te funkcje do równań [177], dochodzimy do dwóch cząstkowych równań różniczkowych drugiego rzędu, zawierających dwie funkcje u i w . Zagadnienie sprowadza się więc do rozwiązywania takich dwóch równań.

117. Rozwiązanie za pomocą wielomianów. Rozważmy takie rozwiązania równania [181], które równocześnie są rozwiązaniami równania

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = 0 \quad [182]$$

Rozwiązanie szczególne powyższego równania może być przyjęte w postaci

$$\Phi_n = R^n \Psi_n \quad [a]$$

gdzie Ψ_n jest funkcją jedynie kąta ψ . Podstawiając [a] do równania [182] znajdziemy dla Ψ_n następujące równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \Psi_n}{\partial \psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0 \quad [b]$$

Równanie to może być uproszczone przez wprowadzenie nowej zmiennej $x = \cos \psi$. Wtedy

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \sin \psi; \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} \sin^2 \psi - x \frac{\partial \Psi_n}{\partial x}$$

Podstawiając do równania [b], otrzymamy

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} + n(n+1) \Psi_n = 0 \quad [183]$$

Będziemy rozwiązywać to równanie za pomocą szeregu¹⁾. Przyjmując, że

$$\Psi_n = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \dots \quad [c]$$

¹⁾ Jest to znane równanie Legendre'a. Wyczerpujące rozważania dot. tego równania można znaleźć w książce A. R. Forsyth'a: „A Treatise on Differential Equations“, str. 155, 1903.

i podstawiając do równania [183], otrzymamy

$$n(n+1)(a_1x^{m_1} + a_2x^{m_2} + a_3x^{m_3} + \dots) = m_1(m_1+1)a_1x^{m_1} - m_1(m_1-1)a_1x^{m_1-2} + m_2(m_2+1)a_2x^{m_2} - m_2(m_2-1)a_2x^{m_2-2} + \dots \quad [d]$$

Aby równanie to mogło być spełnione dla dowolnej wartości x , muszą zachodzić następujące związki pomiędzy wykładnikami m_1, m_2, m_3, \dots

$$m_2 = m_1 - 2; \quad m_3 = m_2 - 2, \dots$$

Stąd wynika, że szereg [c] jest utworzony według malejących potęg x . Przyrównując współczynniki przy x^{m_1} w równaniu [d], wyznaczmy teraz wielkość m_1 . W takim razie

$$n(n+1) - m_1(m_1+1) = (n - m_1)(m_1 + n + 1) = 0$$

Stąd dla wykładnika m_1 otrzymujemy rozwiązania

$$m_1 = n; \quad m_1 = -(n+1) \quad [e]$$

Dla pierwszego z tych rozwiązań:

$$m_1 = n; \quad m_2 = n - 2; \quad m_3 = n - 4, \dots$$

Współczynniki a_2, a_3, \dots w równaniu [d] znajdziemy przyrównując do zera współczynniki każdej z potęg x . Biorąc na przykład wyraz zawierający x^{m_1-2r+2} , otrzymamy dla obliczenia współczynnika a_r równanie

$$n(n+1)a_r = (m_1 - 2r + 2)(m_1 - 2r + 3)a_r - (m_1 - 2r + 4)(m_1 - 2r + 3)a_{r-1}$$

skąd, podstawiając $m_1 = n$, mamy

$$a_r = -\frac{(n - 2r + 4)(n - 2r + 3)}{2(r - 1)(2n - 2r + 3)} a_{r-1}$$

Teraz szereg [c] może być przedstawiony w postaci

$$\Psi_n = a_1 \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right] \quad [f]$$

będącej rozwiązaniem równania [183]. Podstawiając rozwiązanie to do [a] i pamiętając, że

$$x = \cos \psi; \quad Rx = z; \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

znajdziemy dla n równego 0, 1, 2, 3, ... następujące rozwiązania szczególne równania [182] w postaci wielomianów:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= A_0 \\ \Phi_1 &= A_1 z \\ \Phi_2 &= A_2 [z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2)] \\ \Phi_3 &= A_3 [z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2)] \\ \Phi_4 &= A_4 [z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2] \\ \Phi_5 &= A_5 [z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}z(r^2 + z^2)^2] \\ &\dots \end{aligned} \quad [184]$$

gdzie A_0, A_1, \dots są stałymi dowolnymi. Wielomiany te są rozwiązaniami równania [181]. Z rozwiązań tych możemy otrzymać nowe rozwiązania [181], które już nie będą rozwiązaniami

równania [182]. Jeżeli $R^n \Psi_n$ jest rozwiązaniem równania [182], to możemy wykazać, że $R^{n+2} \Psi_n$ jest rozwiązaniem równania [181]. Wykonując operacje wskazane w nawiasach równania [181], mamy

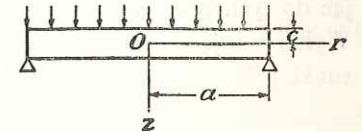
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) R^{n+2} \Psi_n = 2(2n+3)R^n \Psi_n \quad [g]$$

Powtarzając znowu tę operację, jak wskazano w równaniu [181], otrzymamy zero, ponieważ [g] jest rozwiązaniem równania [182]. Stąd $R^{n+2} \Psi_n$ jest rozwiązaniem równania [181]. Widać, że mnożąc rozwiązania [184] przez $R^2 = r^2 + z^2$, możemy otrzymać następujące rozwiązania:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= B_2(r^2 + z^2) \\ \Phi_3 &= B_3 z(r^2 + z^2) \\ \Phi_4 &= B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2) \\ \Phi_5 &= B_5(2z^3 - 3r^2 z)(r^2 + z^2) \\ &\dots \end{aligned} \quad [185]$$

118. Zginanie płyty kołowej. Za pomocą omówionych wyników rozwiązać można szereg praktycznie ważnych zagadnień. Wśród nich wymienić należy różne przypadki zginania symetrycznie obciążonej płyty kołowej (rys. 199). Przyjmując na przykład wielomiany trzeciego stopnia z [184] i [185], otrzymujemy funkcję naprężeń

$$\Phi = a_3(2z^3 - 3r^2 z) + b_3(r^2 z + z^3) \quad [a]$$



Rys. 199

Podstawiając ją do zależności [179], znajdziemy

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3; & \sigma_\theta &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3 \\ \sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3; & \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \quad [186]$$

W ten sposób składowe naprężeń w całej płycie są stałe. Przez odpowiedni dobór stałych a_3 i b_3 możemy otrzymać naprężenia w płycie spowodowane dowolnymi stałymi wartościami σ_z i σ_r , działającymi na powierzchnię płyty.

Weźmy obecnie wielomian czwartego stopnia według równań [184] i [185]; mamy wtedy

$$\Phi = a_4(8z^4 - 24r^2 z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2 z^2 - r^4) \quad [b]$$

Podstawiając do wyrażeń [179] znajdziemy

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 96a_4 z + 4b_4(14\nu - 1)z \\ \sigma_z &= -192a_4 z + 4b_4(16 - 14\nu)z \\ \tau_{rz} &= 96a_4 r - 2b_4(16 - 14\nu)r \end{aligned} \quad [187]$$

Biorąc

$$96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$$

otrzymujemy

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0; \quad \sigma_r = 28(1 + \nu)b_4 z$$

Jeżeli z jest odległością od płaszczyzny środkowej płyty, to rozwiązanie [c] przedstawia czyste zginanie płyty momentami rozłożonymi równomiernie wzdłuż brzegu płyty.

W celu otrzymania rozwiązania dla płyty kołowej obciążonej równomiernie, bierzemy funkcję naprężeń w postaci wielomianu szóstego stopnia. Postępując jak w poprzednim paragrafie, znajdziemy

$$\Phi = \frac{1}{3}a_6(16z^6 - 120z^4 r^2 + 90z^2 r^4 - 5r^6) + b_6(8z^6 - 16z^4 r^2 - 21z^2 r^4 + 3r^6)$$

Podstawiając do [179], otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma_r &= a_6(320z^3 - 720r^2z) + b_6[64(2 + 11\nu)z^3 + (504 - 48 \cdot 22\nu)r^2z] \\ \sigma_z &= a_6(-640z^3 + 960r^2z) + b_6\{-960 + 32 \cdot 22(2 - \nu)\}z^3 + [384 - 48 \cdot 22(2 - \nu)]r^2z \\ \tau_{rz} &= a_6(960rz^2 - 240r^3) + b_6\{-672 + 48 \cdot 22\nu\}rz + (432 - 12 \cdot 22\nu)r^3\end{aligned}$$

Do tych naprężeń dodajemy następujące naprężenia

$$\sigma_r = 96a_4z; \quad \sigma_z = -192a_4z; \quad \tau_{rz} = 96a_4r$$

otrzymane z wyrażen [187] przy $b_4=0$, a równomierne rozciąganie w kierunku osi z równe $\sigma_z=b$ możemy otrzymać z wyrażenia [186]. W ten sposób dochodzimy do wyrażen na składowe naprężenia, zawierających cztery stałe a_6, b_6, a_4, b . Stałe te mogą być tak dobrane, aby spełniały warunki brzegowe na górnej i dolnej powierzchni płyty (rys. 199). Warunki te mają postać

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 0 & \text{dla } z &= c \\ \sigma_z &= -q & \text{dla } z &= -c \\ \tau_{rz} &= 0 & \text{dla } z &= c \\ \tau_{rz} &= 0 & \text{dla } z &= -c\end{aligned} \quad [d]$$

Tu q oznacza intensywność obciążenia równomiernego, a $2c$ jest grubością płyty. Podstawiając do tych równań wyrażenia na składowe naprężenia, wyznaczmy cztery stałe a_6, b_6, a_4, b . Wykorzystując te wartości, otrzymujemy wyrażenia na składowe naprężenia spełniające warunki [d]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{z}{c} \right] \\ \sigma_z &= q \left(-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3}{4} \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{3qr}{8c^3} (c^2 - z^2)\end{aligned} \quad [e]$$

Stąd widać, że naprężenia σ_z i τ_{rz} są rozmieszczone dokładnie w ten sam sposób, jak w przypadku równomiernie obciążonej belki o wąskim prostokątnym przekroju (par. 21). Naprężenia promieniowe σ_r wyrażają się za pomocą nieparzystej funkcji z i na brzegu płyty dają momenty zginające rozmieszczone równomiernie wzdłuż brzegu. W celu otrzymania rozwiązania dla płyty swobodnie podpartej (rys. 199) dodamy do nich naprężenia od czystego zginania [c] i dobierzemy stałą b_4 tak, aby otrzymać na brzegu ($r=a$)

$$\int_{-c}^c \sigma_r z dz = 0$$

Wtedy ostateczne wyrażenie na σ_r przyjmie postać

$$\sigma_r = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{r^2z}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2z}{c^3} \right] \quad [188]$$

a w środku płyty mamy

$$(\sigma_r)_{r=0} = q \left[\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} + \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2z}{c^3} \right] \quad [f]$$

Elementarna teoria zginania płyt oparta na założeniu, że liniowe elementy płyty, prostopadłe do płaszczyzny środkowej ($z=0$), pozostają prostymi i normalnymi do powierzchni ugięcia

płyty¹⁾ w czasie zginania, daje nam następującą wartość naprężeń promieniowych w środku

$$\sigma_r = \frac{3(3 + \nu)}{32} \frac{a^2z}{c^3} q \quad [g]$$

Porównując ją z wyrażeniem [f] widzimy, że dodatkowe wyrazy w rozwiązaniu ścisłym są małe, jeżeli grubość płyty $2c$ jest mała w porównaniu z promieniem a .

Należy zauważyć, że przez dodanie czystego zginania usunęliśmy momenty zginające wzdłuż brzegu płyty, lecz naprężenia promieniowe nie są tam równe zero, ale przyjmują następującą wartość

$$(\sigma_r)_{r=a} = q \left(\frac{2 + \nu}{8} \frac{z^3}{c^3} - \frac{3}{8} \frac{2 + \nu}{5} \frac{z}{c} \right) \quad [h]$$

Jednak wypadkowa tych naprężeń odniesiona do jednostki długości brzegu oraz jej moment są równe zero. Stąd na podstawie zasady *Saint-Venanta* możemy stwierdzić, że usunięcie tych naprężeń nie wpływa na rozkład naprężeń w płycie w pewnej odległości od brzegu.

Przyjmując na funkcję naprężeń wielomiany rzędu wyższego niż szósty, możemy zbadać przypadki zginania płyty kołowej poddanej nierównomiernie rozmieszczonego obciążeniu. Biorąc zamiast rozwiązania [f] na str. 303 inne rozwiązanie równania [182], możemy również otrzymać rozwiązania dla kołowej płyty ze współśrodkowym otworem²⁾. Wszystkie te rozwiązania są zadowolające jedynie wtedy, gdy ugięcie płyty pozostaje małe w porównaniu z jej grubością. Dla większych ugięć musimy wziąć pod uwagę rozciąganie płaszczyzny środkowej płyty³⁾.

119. Tarcza wirująca jako zagadnienie trójwymiarowe. W naszych poprzednich rozważaniach (par. 30) przyjmowaliśmy, że naprężenia nie zmieniają się na grubości tarczy. Obecnie rozważymy to samo zagadnienie przyjmując jedynie, że rozkład naprężeń jest symetryczny względem osi obrotu. Równania różniczkowe równowagi otrzymamy przez włączenie do równań [177] siły odśrodkowej. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0\end{aligned} \quad [189]$$

gdzie ρ jest masą jednostki objętości, a ω — kątową prędkością tarczy.

Równania ciągłości odkształceń również muszą ulec zmianie. Zamiast układu [130] będziemy mieli trzy równania rodzaju [f] (por. str. 212) i trzy równania rodzaju [g]. Podstawiając do tych równań składowe siły masowych

$$X = \rho \omega^2 x; \quad Y = \rho \omega^2 y; \quad Z = 0 \quad [a]$$

znajdziemy, że ostatnie trzy równania, zawierające składowe naprężenia stycznych, pozostają takie same jak w układzie równań [130], a pierwsze trzy równania przyjmują postać (por. równania [e], par. 116):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= -\frac{2\rho \omega^2}{1 - \nu} \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= -\frac{2\rho \omega^2}{1 - \nu} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{2\nu \rho \omega^2}{1 - \nu}\end{aligned} \quad [b]$$

¹⁾ Założenie to jest analogiczne do hipotezy płaskich przekrojów w teorii zginania belek. Dokładną teorię zginania płyt rozwinął *J. H. Michell*: „Proc. London Math. Soc.“, tom 31, 1900, oraz *A. E. H. Love*: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 Wyd., str. 465, 1927.

²⁾ Szereg rozwiązań dla płyty kołowej obciążonej symetrycznie rozpatrzył *A. Korobov*: „Biul. Inst. Politech.“ Kijów, 1913. Podobne rozwiązania otrzymał niezależnie *A. Timpe*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 4, 1924.

³⁾ Patrz *Kelvin* i *Tait*: „Natural Philosophy“, tom 2, str. 171, 1903.

Zacniemy od rozwiązania szczególnego równań [189], spełniającego równania ciągłości. Do tego rozwiązania dodamy rozwiązania w postaci wielomianów [184] i [185] i dobierzemy stałe w tych wielomianach tak, aby spełniały warunki brzegowe naszego zagadnienia. Dla rozwiązania szczególnego bierzemy wyrażenia

$$\sigma_r = Br^2 + Dz^2; \quad \sigma_z = Ar^2; \quad \sigma_\theta = Cr^2 + Dz^2; \quad \tau_{rz} = 0 \quad [c]$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenia te spełniają drugie z równań równowagi. Spełniają one również równania ciągłości, zawierające składowe naprężenia stycznych (por. równania [f] i [g] par. 116). Pozostały do wyznaczenia stałe A, B, C, D , tak aby były spełnione pozostałe cztery równania, a mianowicie pierwsze ze [189] i równania [b]. Podstawiając [c] do tych równań, znajdziemy

$$A = \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu}; \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3}; \quad C = 0; \quad D = -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}$$

Przeto rozwiązanie szczególne ma postać

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\rho\omega^2}{3}r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}z^2 \\ \sigma_z &= \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu}r^2 \\ \sigma_\theta &= -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}z^2 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie to może być wykorzystane przy rozważaniu naprężeń w dowolnym ciele obrotowym, wirującym wokół swojej osi.

W przypadku tarczy kołowej o stałej grubości dodajemy do rozwiązania [190] rozkład naprężeń wyprowadzony z funkcji naprężeń mającej postać wielomianu piątego stopnia (por. równania [184], [185])

$$\Phi = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z) \quad [d]$$

Wtedy na podstawie równań [179] znajdziemy

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54\nu)r^2 + (1 + 18\nu)6z^2] \\ \sigma_z &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(96 - 108\nu)z^2 + (-102 + 54\nu)r^2] \\ \sigma_\theta &= a_5(-60r^2 + 240z^2) + b_5[(6 + 108\nu)z^2 + (12 - 54\nu)r^2] \\ \tau_{rz} &= 480a_5rz - b_5(96 - 108\nu)rz \end{aligned} \quad [e]$$

Dodając powyższe do naprężeń [190] oraz wyznaczając stałe a_5 i b_5 tak, aby wypadkowe naprężenia τ_{rz} i σ_z znikaly, znajdziemy

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\rho\omega^2 \left[\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 + \frac{3+\nu}{8} r^2 \right] \\ \sigma_\theta &= -\rho\omega^2 \left[\frac{(1+3\nu)}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 \right] \end{aligned} \quad [f]$$

W celu usunięcia wypadkowego promieniowego ściskania wzdłuż brzegu, tzn. przyrównania do zera całki

$$\left(\int_{-c}^c \sigma_r dz \right)_{r=a} = 0$$

dodajemy do [f] równomierne rozciąganie promieniowe o wielkości

$$\frac{\rho\omega^2}{8} (3+\nu)a^2 + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \frac{c^2}{3}$$

Wtedy ostateczne naprężenia mają postać

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} (a^2 - r^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right] \\ \sigma_\theta &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} a^2 - \frac{1+3\nu}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right] \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad [191]$$

Porównując powyższe z rozwiązaniem poprzednim [55] widzimy, że mamy tu dodatkowe wyrażenie z czynnikiem¹⁾ $(c^2 - 3z^2)$. Odpowiadające mu naprężenia są małe w przypadku cienkiej tarczy, a ich wypadkowa na grubości tarczy jest równa zeru. Jeżeli na obrzeże tarczy nie działają siły zewnętrzne, to rozwiązanie [191] przedstawia stan naprężenia w części tarczy w pewnej odległości od brzegu.

Rozkład naprężeń w wirującej tarczy o kształcie płaskiej elipsoidy obrotowej rozpatrzył C. Chree²⁾.

120. Siła skupiona w punkcie ciała nieograniczonego. Przy rozpatrywaniu tego zagadnienia znowu wykorzystamy równania [182] ze str. 303. Biorąc $m_1 = -(n+1)$ (por. równania [e] str. 304), otrzymamy drugą całkę równania [183] w postaci szeregu

$$\begin{aligned} \Psi_n &= a \left[x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots \right] \end{aligned}$$

Biorąc n równe $-1, -2, -3, \dots$ otrzymamy z powyższego następujące rozwiązania szczególne równania [182]:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1 (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \Phi_2 &= A_2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \Phi_3 &= A_3 [z^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}] \\ &\dots \end{aligned} \quad [192]$$

które są również rozwiązaniami równania [181]. Mnożąc przez $r^2 + z^2$ (patrz str. 305) wyrażenia [192], otrzymamy inny szereg rozwiązań równania [181], a mianowicie

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= B_1 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Phi_2 &= B_2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\dots \end{aligned} \quad [193]$$

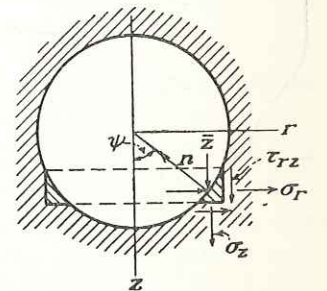
Każde z rozwiązań [192] i [193] i dowolna ich liniowa kombinacja może być przyjęta jako funkcja naprężeń i przez odpowiedni dobór stałych $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ możemy znaleźć rozwiązania różnych zagadnień.

Dla przypadku siły skupionej bierzemy pierwsze z rozwiązań [193] i przyjmujemy, że funkcją naprężeń jest

$$\Phi = B (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

gdzie B jest stałą, którą później wyznaczymy. Podstawiając do wyrażań [179], otrzymamy odpowiednie składowe naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma_r &= B[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}] \\ \sigma_\theta &= B(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \sigma_z &= -B[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}] \\ \tau_{rz} &= -B[(1-2\nu)r(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}] \end{aligned} \quad [194]$$



Rys. 200

Wszystkie te naprężenia dążą do nieskończoności, gdy przybliżamy się do początku układu współrzędnych, w którym przyłożona jest siła skupiona. W celu uniknięcia konieczności

¹⁾ Wyrazy te są tego samego rodzaju co wyrazy zawierające z^2 znalezione w par. 84. Równania [191] przedstawiają płaski stan naprężenia, ponieważ σ_z i τ_{rz} znikają. Siła masowa (tu siła odśrodkowa), pominięta w par. 84, nie zmienia ogólnych wniosków, dopóki jest niezależna od z .

²⁾ C. Chree: „Proc. Roy. Soc.” (London), tom 58, str. 39, 1895.

rozważania nieskończonych naprężeń przypuśćmy, że początek współrzędnych jest środkiem małej kulistej pustki (rys. 200) i rozważmy siły na powierzchni pustki obliczając je z wyrażeń [194]. Możemy wykazać, że wypadkowa tych sił przedstawia siłę przyłożoną w początku współrzędnych, działającą w kierunku osi z . Z warunku równowagi elementu o kształcie pierścienia, przyległego do pustki (rys. 200), składowa siły powierzchniowej w kierunku osi z wynosi

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi)$$

Stosując wyrażenia [194] i równania

$$\sin \psi = r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \cos \psi = z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

znajdujemy, że

$$\bar{Z} = B[(1-2\nu)(r^2 + z^2)^{-1} + 3z^2(r^2 + z^2)^{-2}]$$

Wypadkowa tych sił przyłożonych na powierzchni pustki wynosi

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{Z} \sqrt{r^2 + z^2} \cdot d\psi \cdot 2\pi r = 8B\pi(1-\nu)$$

Wypadkowa sił powierzchniowych w kierunku promieniowym jest z warunku symetrii równa zero. Jeżeli P jest wielkością przyłożonej siły, to otrzymujemy

$$P = 8B\pi(1-\nu)$$

Podstawiając

$$B = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \quad [195]$$

w wyrażeniach [194], otrzymujemy naprężenia spowodowane siłą P przyłożoną w początku układu współrzędnych i działającą w kierunku osi z^1 . Rozwiązanie to jest trójwymiarową analogią rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego, rozważanego w par. 38.

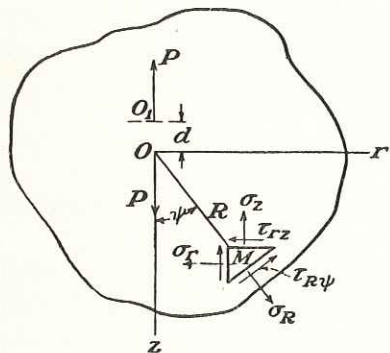
Podstawiając w wyrażeniach [194] $z = 0$, znajdziemy, że w płaszczyźnie układu współrzędnych $z = 0$ nie występują naprężenia normalne. Naprężenia styczne w tej płaszczyźnie wynoszą

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2} = -\frac{P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)r^2} \quad [a]$$

Naprężenia te są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości r od punktu przyłożenia obciążenia.

121. Zbiornik kulisty poddany wewnętrznemu lub zewnętrznemu równomiernemu ciśnieniu.

Przez superpozycję możemy otrzymać z rozwiązania poprzedniego paragrafu kilka nowych, praktycznie ważnych rozwiązań. Zacznijemy od przypadku, gdy dwie równe i przeciwnie skierowane siły, działające w małej odległości d , są przyłożone do nieograniczonego ciała sprężystego (rys. 201).



Rys. 201

¹⁾ Rozwiązanie tego zagadnienia podał Lord Kelvin: „Cambridge and Dublin Math. J.“, 1848. Patrz również jego „Mathematical and Physical Papers“, tom I, str. 37. Z jego rozwiązania wynika, że przemieszczenia odpowiadające naprężeniom [194] są jednoznaczne, co dowodzi, że [194] jest prawidłowym rozwiązaniem zagadnienia (por. par. 82).

Naprężenia wywołane w dowolnym punkcie ciała siłą P , przyłożoną w początku układu współrzędnych, zostały wyznaczone za pomocą równań [194] i [195] poprzedniego paragrafu. Stosując te same wyrażenia, możemy również obliczyć naprężenia spowodowane siłą P przyłożoną w punkcie O_1 . Pamiętając, że druga siła działa w kierunku przeciwnym i przyjmując, że odległość d jest nieskończenie mała, powinniśmy każdy człon $f(r, z)$ w wyrażeniach [194] zastąpić przez $-[f + (\partial f/\partial z)d]$. Dodając naprężenia wywołane dwiema siłami i oznaczając iloczyn Bd przez A , dostajemy

$$\sigma_r = -A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}]$$

$$\sigma_\theta = -A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}]$$

$$\sigma_z = A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}]$$

$$\tau_{rz} = A \frac{\partial}{\partial z} [(1-2\nu)r(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}]$$

Rozważmy (rys. 201) składowe naprężenia σ_R i $\tau_{R\psi}$, działające w punkcie M elementarnej powierzchni prostopadłej do promienia OM , którego długość oznaczmy przez R . Z warunku równowagi małego elementu trójkątnego, takiego jak pokazany na rysunku, znajdziemy¹⁾

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_r \sin^2 \psi + \sigma_z \cos^2 \psi + 2\tau_{rz} \sin \psi \cos \psi \\ \tau_{R\psi} &= (\sigma_r - \sigma_z) \sin \psi \cos \psi - \tau_{rz} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \end{aligned} \quad [a]$$

Wykorzystując [196] i biorąc

$$\sin \psi = r(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r}{R}; \quad \cos \psi = z(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{R}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_R &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \left[-\sin^2 \psi + \frac{2(2-\nu)}{1+\nu} \cos^2 \psi \right] \\ \tau_{R\psi} &= -\frac{2(1+\nu)A}{R^3} \sin \psi \cos \psi \end{aligned} \quad [b]$$

Rozkład tych naprężeń jest symetryczny względem osi z oraz względem płaszczyzny układu współrzędnych, prostopadłej do z .

Wyobraźmy sobie obecnie, że w początku układu współrzędnych, oprócz układu dwóch sił P działających wzdłuż osi z , mamy identyczny układ sił wzdłuż osi r oraz inny wzdłuż osi prostopadłej do płaszczyzny rz . Z powodu powyżej wymienionej symetrii otrzymujemy w ten sposób rozkład naprężeń symetryczny względem początku układu współrzędnych. Jeżeli rozważymy kulę o środku w początku współrzędnych, to na powierzchnię kuli będzie działało tylko równomiernie rozłożone naprężenie normalne. Wielkość tego naprężenia może być obliczona za pomocą pierwszego z wyrażeń [b]. Rozważając naprężenie w punktach koła na płaszczyźnie rz , pierwsze z równań [b] da nam część tego naprężenia spowodowaną podwójną siłą działającą wzdłuż osi z . Zamieniając $\sin \psi$ i $\cos \psi$ otrzymamy naprężenia normalne na tym samym kole, spowodowane podwójną siłą działającą wzdłuż osi r . Naprężenie

¹⁾ Składowe naprężenia σ_θ działające na boki elementu w południkowych przekrojach ciała dają wypadkową małą wyższego rzędu i możemy ją pominąć przy wyprowadzaniu równań równowagi.

normalne spowodowane podwójną siłą, prostopadłą do płaszczyzny rz otrzymamy podstawiając w tym samym wyrażeniu $\psi = \pi/2$. Składając działanie trzech prostopadłych podwójnych sił, znajdziemy, że na powierzchnię kuli działają następujące naprężenia normalne

$$\sigma_R = -\frac{4(1-2\nu)A}{R^3} \quad [c]$$

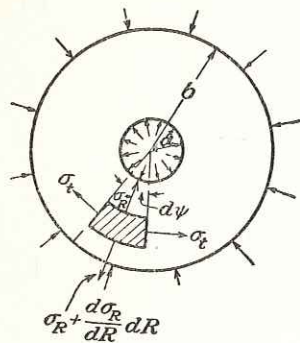
Suma tych trzech prostopadłych sił podwójnych jest nazywana *jądrem ciśnienia*. Widzimy z wyrażenia [c], że odpowiednie naprężenie ściskające w kierunku promieniowym zależy tylko od odległości od jądra ciśnienia i jest odwrotnie proporcjonalne do sześciastu tej odległości.

Rozwiązanie to można zastosować do obliczenia naprężeń występujących w zbiorniku kulistym, poddanym działaniu wewnętrznego lub zewnętrznego równomiernego ciśnienia. Niech a i b oznaczają wewnętrzny i zewnętrzny promień kuli (rys. 202), a p_i i p_o wewnętrzne i zewnętrzne równomierne ciśnienie. Dodając do naprężenia [c] równomierne rozciąganie lub ściskanie we wszystkich kierunkach, możemy przyjąć ogólne wyrażenie na naprężenia normalne w postaci

$$\sigma_R = \frac{C}{R^3} + D \quad [d]$$

gdzie C i D są stałymi, których wielkości wyznaczymy z warunków na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni zbiornika. Warunki te są następujące

$$\frac{C}{a^3} + D = -p_i; \quad \frac{C}{b^3} + D = -p_o$$



Wtedy

$$C = \frac{(p_i - p_o) a^3 b^3}{a^3 - b^3}$$

$$D = \frac{p_o b^3 - p_i a^3}{a^3 - b^3} \quad [197]$$

$$\sigma_R = \frac{p_o b^3 (R^3 - a^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} + \frac{p_i a^3 (b^3 - R^3)}{R^3 (a^3 - b^3)}$$

Ciśnienia p_o i p_i wywołują w kuli również naprężenia normalne σ_t w kierunku obwodowym. Wielkości ich znajdziemy z warunku równowagi elementu wyciętego z kuli dwoma współśrodkowymi powierzchniami kulistymi o promieniach R i $R + dR$ oraz kołowym stożkiem o małym kącie wierzchołkowym $d\psi$ (rys. 202). Równanie równowagi ma następującą postać

$$\sigma_t \frac{\pi R}{2} dR (d\psi)^2 = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{\pi R^2}{4} dR (d\psi)^2 + \sigma_R \frac{\pi R}{2} dR (d\psi)^2$$

skąd

$$\sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R \quad [e]$$

Wykorzystując wyrażenie [197] na σ_R , powyższe wyrażenie przedstawi się następująco

$$\sigma_t = \frac{p_o b^3 (2R^3 + a^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} - \frac{p_i a^3 (2R^3 + b^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} \quad [198]$$

Jeżeli $p_o = 0$, to

$$\sigma_t = \frac{p_i a^3}{2R^3} \frac{(2R^3 + b^3)}{b^3 - a^3}$$

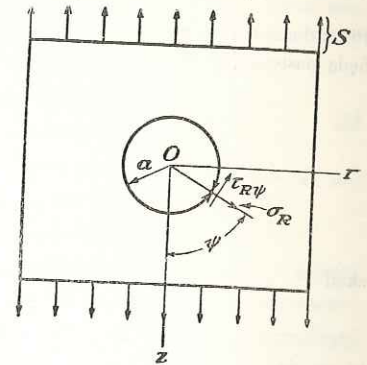
Widzimy, że największe rozciąganie w kierunku obwodowym zachodzi w tym przypadku na wewnętrznej powierzchni i wynosi

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p_i}{2} \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3}$$

Wszystkie te wyniki otrzymał *Lamé*¹⁾.

122. Naprężenia lokalne wokół pustki kulistej. Jako drugi przykład rozpatrzmy rozkład naprężenia dookoła małej kulistej pustki w przecie poddanym równomiernemu rozciąganiu²⁾ o wielkości S (rys. 203). W przypadku rozciągania pełnego pręta normalna i styczna składowe naprężenia, działające na powierzchnię kuli wynoszą:

$$\sigma_R = S \cos^2 \psi; \quad \tau_{R\psi} = -S \sin \psi \cos \psi \quad [a]$$



Rys. 203

W celu otrzymania rozwiązania w przypadku małej pustki kulistej o promieniu a musimy na stan osiowego rozciągania nałożyć układ naprężeń, który powoduje na powierzchni kulistej naprężenia równe i przeciwnie skierowane do danych wyrażeniami [a], przy czym znikają one w nieskończoności.

Biorąc z poprzedniego paragrafu naprężenia [b], spowodowane siłą podwójną w kierunku z , oraz naprężenia [c], spowodowane jądrem ciśnienia, odpowiednie naprężenia działające na powierzchnię kulistą o promieniu a mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$\sigma_{R'} = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \left(-1 + \frac{5-\nu}{1+\nu} \cos^2 \psi \right); \quad \tau_{R\psi'} = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi \quad [b]$$

$$\sigma_{R''} = \frac{B}{a^3}; \quad \tau_{R\psi''} = 0 \quad [c]$$

gdzie A i B są stałymi, które będą dobrane później. Widzimy, że przez kombinację naprężeń [b] i [c] nie można zlikwidować naprężeń [a] spowodowanych rozciąganiem i konieczny jest dodatkowy układ naprężeń.

Biorąc z rozwiązania [192] funkcję naprężeń

$$\Phi = Cz (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

odpowiednie składowe naprężenia z równania [179] są następujące:

$$\sigma_r = \frac{3C}{R^5} (1 - 5 \cos^2 \psi - 5 \sin^2 \psi + 35 \sin^2 \psi \cos^2 \psi)$$

$$\sigma_z = \frac{3C}{R^5} (3 - 30 \cos^2 \psi + 35 \cos^4 \psi)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3C}{R^5} (1 - 5 \cos^2 \psi)$$

$$\tau_{rz} = \frac{15C}{R^5} (-3 \sin \psi \cos \psi + 7 \sin \psi \cos^3 \psi)$$

[d]

Wykorzystując obecnie wyrażenia [a] poprzedniego paragrafu, otrzymujemy składowe naprężenia na kulistej powierzchni o promieniu a

$$\sigma_{R'''} = \frac{12C}{a^5} (-1 + 3 \cos^2 \psi); \quad \tau_{R\psi'''} = \frac{24C}{a^5} \sin \psi \cos \psi \quad [e]$$

¹⁾ *Lamé*: „Leçons sur la théorie ... de l'élasticité“, Paryż, 1852.

²⁾ Zadanie to rozwiązał *R. V. Southwell*: „Phil. Mag.“, 1926; również *J. N. Goodier*: „Trans. A. S. M. E.“, tom 55, str. 39, 1933. Trójosiową pustkę elipsoidalną rozpatrzyli *E. Sternberg* i *M. Sadowsky*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 16, str. 149, 1949.

Dodając układy naprężeń [b], [c] i [e], znajdziemy:

$$\sigma_R = \frac{2(1+\nu)A}{a^3} - 2(5-\nu)\frac{A}{a^3} \cos^2 \psi + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} + \frac{36C}{a^5} \cos^2 \psi$$

$$\tau_{R\psi} = -\frac{2(1+\nu)A}{a^3} \sin \psi \cos \psi + \frac{24C}{a^5} \sin \psi \cos \psi$$
[f]

Przez dodanie tych naprężeń do naprężeń [a] kulista powierzchnia pustki stanie się wolna od sił, jeżeli spełnione będą następujące warunki:

$$\frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{B}{a^3} - \frac{12C}{a^5} = 0$$

$$-2(5-\nu)\frac{A}{a^3} + \frac{36C}{a^5} = -S$$

$$-\frac{2(1+\nu)A}{a^3} + \frac{24C}{a^5} = S$$
[g]

skąd

$$\frac{A}{a^3} = \frac{5S}{2(7-5\nu)}; \quad \frac{B}{a^3} = \frac{S(1-5\nu)}{7-5\nu}; \quad \frac{C}{a^5} = \frac{S}{2(7-5\nu)}$$
[h]

Teraz całkowite naprężenie w dowolnym punkcie otrzymamy przez dodanie do osiowego rozciągania S naprężeń, danych równaniami [d], naprężeń [196] spowodowanych siłą podwójną oraz naprężeń spowodowanych jądrem ciśnienia, danych równaniami [c] i [e] poprzedniego paragrafu.

Rozważmy na przykład naprężenia działające na płaszczyznę $z=0$. Z warunku symetrii wynika, że w płaszczyźnie tej nie ma naprężeń stycznych. Z wyrażen [d], podstawiając $\psi = \pi/2$ i $R=r$, mamy

$$\sigma_z' = \frac{9C}{r^5} = \frac{9Sa^5}{2(7-5\nu)r^5}$$
[k]

Z równań [196] dla $z=0$

$$\sigma_z'' = \frac{A(1-2\nu)}{r^3} = \frac{5(1-2\nu)S}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3}$$
[l]

Z wyrażenia [e] poprzedniego paragrafu

$$\sigma_z''' = (\sigma_t)_{z=0} = -\frac{B}{2r^3} = -\frac{S(1-5\nu)}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3}$$
[m]

Całkowite naprężenie działające na płaszczyznę $z=0$ wynosi

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' + \sigma_z''' + S = S \left[1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)} \frac{a^5}{r^5} \right]$$
[n]

Dla $r=a$ otrzymujemy

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{27-15\nu}{2(7-5\nu)} S$$
[o]

Biorąc $\nu = 0,3$, mamy

$$(\sigma_z)_{\max} = \frac{45}{22} S$$

Maksymalne naprężenie jest więc około dwa razy większe od równomiernego rozciągania S przyłożonego do pręta. Ten wzrost naprężeń posiada wybitnie miejscowy charakter. Ze wzrostem r naprężenia [n] szybko osiągają wartość S . Biorąc na przykład $r=2a$, $\nu = 0,3$, znajdziemy $\sigma_z = 1,054 S$.

W ten sam sposób znajdziemy dla punktów na płaszczyźnie $z=0$

$$(\sigma_\theta)_{z=0} = \frac{3C}{r^5} - \frac{A(1-2\nu)}{r^3} - \frac{B}{2r^3}$$

Podstawiając stałe z wyrażen [h] i przyjmując, że $r=a$, otrzymamy naprężenie rozciągające wzdłuż równika ($\psi = \pi/2$) pustki

$$(\sigma_\theta)_{z=0, r=a} = \frac{15\nu-3}{2(7-5\nu)} S$$

W biegunie pustki ($\psi = 0$ lub $\psi = \pi$) mamy

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2(1-2\nu)A}{a^3} - \frac{12C}{a^5} - \frac{B}{2a^3} = -\frac{3+15\nu}{2(7-5\nu)} S$$

Tak więc podłużne rozciąganie S powoduje w tym punkcie ściskanie.

Dodając rozciąganie S w jednym kierunku do ściskania S w kierunku prostopadłym, możemy otrzymać rozwiązanie dla rozkładu naprężeń wokół pustki kulistej w przypadku czystego ścinania¹⁾. Możemy pokazać w ten sposób, że maksymalne naprężenia styczne wynoszą

$$\tau_{\max} = \frac{15(1-\nu)}{7-5\nu} S$$
[p]

Wyniki tego paragrafu mogą mieć znaczenie praktyczne przy rozważaniu wpływu małych pustek²⁾ na wytrzymałość zmęczeniową próbek, poddanych działaniu naprężeń zmiennych.

123. Siła skupiona na brzegu półprzestrzeni sprężystej. Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna $z=0$ jest brzegiem półprzestrzeni sprężystej i że siła P działa na tę płaszczyznę wzdłuż osi z (rys. 204)³⁾. Wykazaliśmy w par. 120, że rozkład naprężeń, dany równaniami [194] i [195], może być spowodowany w półprzestrzeni sprężystej siłą skupioną, przyłożoną w początku układu współrzędnych oraz siłami stycznymi na płaszczyźnie brzegowej $z=0$, danymi równaniem

$$\tau_{rz} = -\frac{B(1-2\nu)}{r^2}$$
[a]

Aby usunąć te siły i otrzymać rozwiązanie zagadnienia pokazanego na rys. 204, wykorzystamy rozkład naprężeń odpowiadający jądru ciśnienia (por. str. 312). We współrzędnych biegunowych ten rozkład naprężeń ma postać

$$\sigma_R = \frac{A}{R^3}; \quad \sigma_t = \frac{d\sigma_R}{dR} \frac{R}{2} + \sigma_R = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3}$$

gdzie A jest stałą. We współrzędnych walcowych (rys. 204), mamy następujące wyrażenie na składowe naprężenia

$$\sigma_r = \sigma_R \sin^2 \psi + \sigma_t \cos^2 \psi = A \left(r^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\sigma_z = \sigma_R \cos^2 \psi + \sigma_t \sin^2 \psi = A \left(z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} (\sigma_R - \sigma_t) \sin 2\psi = \frac{3}{2} A r z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_t = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3} = -\frac{1}{2} A (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$
[199]

Przyjmijmy obecnie, że jądra ciśnienia są równomiernie rozmieszczone wzdłuż osi z , od $z=0$ do $z=-\infty$. Wtedy, stosując zasadę superpozycji, otrzymamy składowe naprężenia

¹⁾ Zagadnienie to rozpatrzył *J. Larmor*: „Phil. Mag.“, seria 5, tom 33, 1892. Patrz również *A. E. H. Love*: „Mathematical Theory of Elasticity“, 4 wyd., str. 252, 1927.
²⁾ Pustki takie istnieją na przykład w spoinach i doświadczenia na zmęczenie wykazują, że zwykle pęknięcia zaczynają się od takich pustek.
³⁾ Rozwiązanie tego zagadnienia podał *J. Boussinesq*, patrz „Application des potentiels...“, Paryż, 1885. Rozwiązanie dla siły przyłożonej w wewnętrznym punkcie półprzestrzeni sprężystej podał *R. D. Mindlin*: „Physics“, tom 7, str. 195, 1936.

w przestrzeni nieograniczonej na podstawie równań [199]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A \int_z^\infty (r^2 - \frac{1}{2}z^2)(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - z(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ \sigma_z &= A \int_z^\infty \left(z^2 - \frac{1}{2}r^2 \right) (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = \frac{A}{2} z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \tau_{rz} &= \frac{3}{2} A \int_z^\infty rz (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = \frac{A}{2} r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{2} A \int_z^\infty (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = -\frac{A}{2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]\end{aligned}\quad [200]$$

Rozpatrując płaszczyznę $z = 0$ znajdziemy, że naprężenie normalne na tej płaszczyźnie równa się zero, a naprężenia styczne wynoszą

$$(\tau_{rz})_{z=0} = \frac{1}{2} \frac{A}{r^2} \quad [b]$$

Okazuje się obecnie, że dodając rozwiązania [194] i [200] możemy przez odpowiedni dobór stałych A i B otrzymać taki rozkład naprężeń, że płaszczyzna $z = 0$ będzie wolna od naprężeń, a siła skupiona P będzie działać w początku układu współrzędnych.

Z [a] i [b] widzimy, że siły styczne na płaszczyźnie brzegu znikną, jeżeli

$$-B(1-2\nu) + \frac{A}{2} = 0$$

skąd

$$A = 2B(1-2\nu)$$

Podstawiając tę wartość do wyrażeń [200] i dodając naprężenia [194] i [200], znajdujemy

$$\begin{aligned}\sigma_r &= B \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ \sigma_z &= -3Bz^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \sigma_\theta &= B(1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ \tau_{rz} &= -3Brz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad [c]$$

Ten rozkład naprężeń spełnia warunki brzegowe, ponieważ $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ dla $z = 0$. Pozostaje obecnie wyznaczenie stałej B tak, aby siły rozmieszczone na półkuli powierzchni o środku w początku układu współrzędnych były statycznie równoważne sile P , działającej wzdłuż osi z . Rozważamy równowagę elementu takiego, jak pokazany na rys. 200. Składowa siły działającej na półkulistą powierzchnię w kierunku osi z równa się

$$\bar{Z} = -(\tau_{rz} \sin \psi + \sigma_z \cos \psi) = 3Bz^2 (r^2 + z^2)^{-2}$$

Dla wyznaczenia stałej B otrzymujemy równanie

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{Z} r (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} d\psi = 6\pi B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \sin \psi d\psi = 2\pi B$$

skąd

$$B = \frac{P}{2\pi}$$

W końcu podstawiając tę stałą do [c], otrzymujemy następujące wyrażenia dla składowych naprężenia, spowodowanych siłą normalną P , działającą na płaszczyznę brzegu półprzestrzeni sprężystej:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} rz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad [201]$$

Rozwiązanie to jest trójwymiarową analogią rozwiązania dla półnieskończonej tarczy (por. par. 33).

Jeżeli weźmiemy elementarną powierzchnię mn prostopadłą do osi z (rys. 204), to z wyrażeń [201] otrzymamy stosunek składowych naprężenia normalnej do stycznej. Wynosi on

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{rz}} = \frac{z}{r} \quad [d]$$

Stąd widzimy, że kierunek wypadkowego naprężenia przechodzi przez początek O . Wielkość tej wypadkowej wynosi

$$S = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{(r^2 + z^2)^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \psi}{(r^2 + z^2)} \quad [202]$$

A więc naprężenie jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od punktu przyłożenia siły P . Wyobraźmy sobie powierzchnię kulistą o średnicy d , styczną do płaszczyzny $z = 0$ w początku układu współrzędnych O . Dla każdego punktu tej powierzchni

$$r^2 + z^2 = d^2 \cos^2 \psi \quad [e]$$

Podstawiając do [202], dochodzimy do wniosku, że dla punktów tej powierzchni całkowite naprężenie na poziomych płaszczyznach jest stałe i równe $3P/2\pi d^2$.

Rozważmy obecnie przemieszczenia spowodowane obciążeniem P w półprzestrzeni sprężystej. Z równań dla składowych odkształcenia [178] otrzymujemy

$$u = \epsilon_\theta r = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

Podstawiając wartości na składowe naprężenia z wyrażeń [201], otrzymujemy

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er} \left[z (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad [203]$$

W celu wyznaczenia pionowych przemieszczeń w korzystamy ze związków [178]

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)\tau_{rz}}{E} - \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}$$

Wstawiając otrzymane wyżej wartości na składowe naprężenia i na przemieszczenie u , mamy

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{2\pi E} \{3(1+\nu)r^2 z (r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - [3+\nu(1-2\nu)]z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{P(1+\nu)}{2\pi E} [2(1-\nu)r(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}]$$

skąd przez całkowanie otrzymujemy

$$w = \frac{P}{2\pi E} [(1+\nu)z^2(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 2(1-\nu^2)(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}] \quad [204]$$

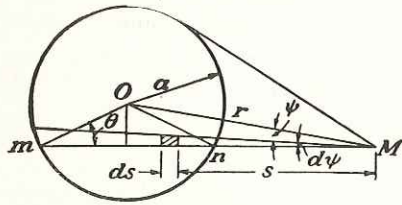
Dla płaszczyzny brzegowej ($z=0$) mamy następujące przemieszczenia

$$(u)_{z=0} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er}; \quad (w)_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er} \quad [205]$$

co wskazuje, że iloczyn wr jest stały na brzegu. Tak więc promienie wykreślone z początku układu współrzędnych, leżące na powierzchni brzegu, będą po odkształceniu hiperbolami o asymptotach Ox i Oz . W początku układu przemieszczenia i naprężenia będą nieskończenie wielkie. Dla usunięcia wynikających stąd trudności przy stosowaniu naszych równań możemy wyobrazić sobie, że materiał półprzestrzeni w początku układu został wycięty półkuliścią powierzchnią o małym promieniu, a siła skupiona P zastąpiona statycznie jej równoważnymi siłami rozmieszczonymi na tej powierzchni.

124. Obciążenie rozmieszczone na części brzegu półprzestrzeni sprężystej.

Mając rozwiązanie dla siły skupionej działającej na brzegu półprzestrzeni sprężystej, możemy, stosując zasadę superpozycji, znaleźć przemieszczenia i naprężenia wywołane obciążeniem ciągłym. Weźmy, jako prosty przykład, przypadek obciążenia równomiernego, rozmieszczonego na powierzchni koła o promieniu a (rys. 205) i rozważmy ugięcie, w kierunku działania obciążenia, punktu M na powierzchni ciała w odległości r od środka koła.



Rys 205

Biorąc mały element obciążonej powierzchni, zakreskowany na rysunku, ograniczony dwoma promieniami tworzącymi kąt $d\psi$ i dwoma łukami koła o promieniach s i $s+ds$ (wszystkie koła posiadają środek

w M), otrzymujemy obciążenie działające na ten element równe $qs\,d\psi\,ds$, a odpowiednie ugięcie w punkcie M , z wyrażen [205], wynosi

$$\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \cdot \frac{s\,d\psi\,ds}{s} = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} d\psi\,ds$$

Całkowite ugięcie otrzymamy teraz przez podwójne całkowanie

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint d\psi\,ds$$

Całkując względem s i biorąc pod uwagę, że długość cięciwy mn jest równa $2\sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi}$, znajdziemy

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\psi_1} \sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi} d\psi \quad [a]$$

gdzie ψ_1 jest maksymalną wartością ψ , tzn. kątem pomiędzy r i styczną do koła. Obliczenie

całki [a] upraszcza się przez wprowadzenie zamiast zmiennej ψ , zmiennego kąta θ . Z rysunku mamy

$$a \sin \theta = r \sin \psi$$

skąd

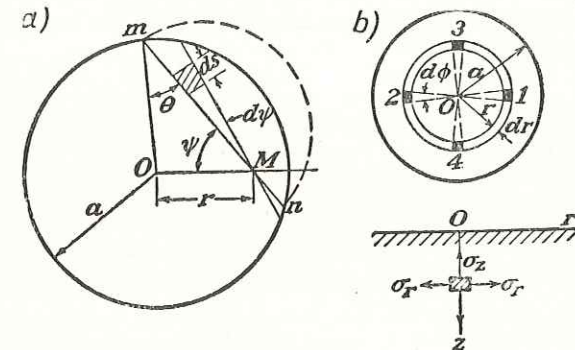
$$d\psi = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \cos \psi} = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}}$$

Podstawiając do wyrażenia [a] i pamiętając, że θ zmienia się od 0 do $\pi/2$, gdy ψ zmienia się od 0 do ψ_1 , znajdziemy

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{r \sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}} = \frac{4(1-\nu^2)qr}{\pi E} \quad [206]$$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta} d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (a^2/r^2) \sin^2 \theta}} \right]$$

Całki w tym wyrażeniu są znane jako *całki eliptyczne*, a ich wartości dla dowolnej wartości a/r można wziąć z tablic¹⁾.



Rys. 206

Aby otrzymać ugięcie na brzegu obciążonego koła, przyjmujemy w wyrażeniu [206] $r=a$ i dostajemy

$$(w)_{r=a} = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \quad [207]$$

Jeżeli punkt M leży wewnątrz obciążonej powierzchni (rys. 206a), to znowu rozważamy ugięcie wywołane obciążeniem $qs\,ds\,d\psi$, które działa na zakreskowany element. Całkowite ugięcie wynosi wtedy

$$w = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint ds\,d\psi$$

Długość cięciwy mn wynosi $2a \cos \theta$, a ψ zmienia się od 0 do $\pi/2$, a więc

$$w = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta d\psi$$

¹⁾ Por. np. E. Jahnke i F. Emde: „Funktionentafeln“, Berlin, 1909 (istnieje tłumaczenie rosyjskie Fiz.-mat. Izdat. Moskwa 1959) lub Peirce: „Short Table of Integrals“, 1910.

lub, ponieważ $a \sin \theta = r \sin \psi$, mamy

$$w = \frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \psi} d\psi \quad [208]$$

W ten sposób za pomocą tablic całek eliptycznych możemy łatwo obliczyć ugięcie dla dowolnej wartości stosunku r/a . Maksymalne ugięcie występuje oczywiście w środku koła. Podstawiając $r=0$ w wyrażeniu [208], otrzymamy

$$(w)_{\max} = \frac{2(1-\nu^2)qa}{E} \quad [209]$$

Porównując powyższe wyrażenie z ugięciem na brzegu koła, znajdziemy że to ostatnie stanowi $2/\pi$ -krotność ugięcia maksymalnego¹⁾. Warto zauważyć, że dla danej intensywności obciążenia q maksymalne ugięcie nie jest stałe, lecz wzrasta w tym samym stosunku co promień obciążonego koła.

Stosując zasadę superpozycji, możemy również obliczyć naprężenia. Rozważmy np. naprężenia w punkcie na osi z (rys. 206b). Naprężenie σ_z w takim punkcie, wywołane obciążeniem rozmieszczonym na powierzchni pierścieniowej o promieniu r i szerokości dr , otrzymujemy przez podstawienie w drugim wyrażeniu [201] $2\pi r dr q$ zamiast P . Wtedy naprężenie σ_z , wywołane równomiernym obciążeniem rozmieszczonym na całej kołowej powierzchni o promieniu a , wynosi

$$\sigma_z = - \int_0^a 3qr dr z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = qz^3 \left[(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]_0^a = q \left[-1 + \frac{z^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad [b]$$

Naprężenie to jest równe $-q$ na powierzchni ciała i stopniowo zmniejsza się wraz ze wzrostem odległości z . Przy obliczaniu naprężeń σ_r i σ_θ w tym samym punkcie rozważmy dwa elementy 1 i 2 obciążonej powierzchni (rys. 206b) z obciążeniem $qr d\Phi dr$. Naprężenia wywołane tymi dwoma elementarnymi obciążeniami w punkcie na osi z , na podstawie pierwszego i trzeciego wyrażenia [201], wynoszą:

$$\begin{aligned} d\sigma'_r &= \frac{qr d\Phi dr}{\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ d\sigma'_\theta &= \frac{qr d\Phi dr}{\pi} (1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \end{aligned} \quad [c]$$

Naprężenia normalne, wywołane na tych samych płaszczyznach elementarnymi obciążeniami w punktach 3 i 4, wynoszą

$$\begin{aligned} d\sigma''_r &= \frac{qr d\Phi dr}{\pi} (1-2\nu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ d\sigma''_\theta &= \frac{qr d\Phi dr}{\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned} \quad [d]$$

Przez sumowanie c i d znajdziemy, że cztery elementarne obciążenia pokazane na rysunku

¹⁾ Rozwiązanie tego zagadnienia podał Boussinesq, loc. cit., Por. również H. Lamb: „Proc. London Math. Soc.“, tom 34, str. 276, 1902; K. Terezaawa: J. Coll. Sci. Univ. Tokyo, tom 37, 1916; F. Schleicher: „Bauingenieur“, tom 7, 1926 i „Bauingenieur“, tom 14, str. 242, 1933. Pełne badanie tego zagadnienia, również w przypadku, gdy obciążenie jest rozmieszczone na prostokącie, zostało przeprowadzone w pracy A. E. H. Love'a: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 228, 1929. Specjalne własności odkształcenia i naprężenia w przypadku ogólnym wskazał S. Wray: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 7, str. A-147, 1940.

wywołują następujące naprężenia:

$$\begin{aligned} d\sigma_r &= d\sigma_\theta = \frac{qr d\Phi dr}{\pi} [(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}] = \\ &= \frac{qr d\Phi dr}{\pi} [-2(1+\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}] \end{aligned} \quad [e]$$

Aby otrzymać naprężenia wywołane obciążeniem równomiernie rozmieszczonym na całej powierzchni koła o promieniu a , musimy scałkować wyrażenie [e] względem Φ w granicach od 0 do $\pi/2$ oraz względem r od 0 do a . Wtedy

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{q}{2} \int_0^a [-2(1+\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}] r dr = \\ &= \frac{q}{2} \left[-(1+2\nu) + \frac{2(1+\nu)z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad [f]$$

Dla punktu O , środka obciążonego koła, znajdziemy z wyrażen [b] i [f]

$$\sigma_z = -q; \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{q(1+2\nu)}{2}$$

Biorąc $\nu=0,3$ mamy $\sigma_r = \sigma_\theta = -0,8q$. Maksymalne naprężenie styczne w punkcie O w płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° do osi z jest równe $0,1q$. Przyjmując, że uplastycznienie materiału zależy od maksymalnego naprężenia stycznego, możemy wykazać, że rozważony powyżej punkt O nie jest najbardziej niekorzystnym punktem osi z . Maksymalne naprężenie styczne w dowolnym punkcie osi z (rys. 206b) z wyrażen [b] i [f] wynosi

$$\frac{1}{2} (\sigma'_\theta - \sigma'_z) = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\nu}{2} + (1+\nu) \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right] \quad [g]$$

Wyrażenie to osiąga maksimum, gdy

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{2(1+\nu)}$$

skąd

$$z = a \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{7-2\nu}} \quad [h]$$

Podstawiając z do wyrażenia [g], mamy

$$\tau_{\max} = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\nu}{2} + \frac{2}{9} (1+\nu) \sqrt{2(1+\nu)} \right] \quad [k]$$

Przyjmując $\nu=0,3$, z wyrażen [h] i [k] znajdziemy

$$z = 0,638a; \quad \tau_{\max} = 0,33q$$

Wskazuje to, że maksymalne naprężenie styczne dla punktów na osi z leży na pewnej głębokości, równej w przybliżeniu dwum trzecim promienia obciążonego koła, a wielkość tego maksimum wynosi około jednej trzeciej przyłożonego równomiernego ciśnienia q .

W przypadku równomiernego ciśnienia rozmieszczonego na powierzchni kwadratu o bokach $2a$, maksymalne ugięcie w środku równa się

$$w_{\max} = \frac{8}{\pi} \log_n (\sqrt{2}+1) \frac{qa(1-\nu^2)}{E} = 2,24 \frac{qa(1-\nu^2)}{E} \quad [210]$$

Ugięcie w rogach kwadratu ma wartość tylko połowy ugięcia w środku, a ugięcie średnie wynosi

$$w_{\text{śred}} = 1,90 \frac{qa(1-\nu^2)}{E} \quad [211]$$

Analogiczne obliczenia przeprowadzono dla równomiernego ciśnienia rozmieszczonego na prostokątach o różnych stosunkach boków $\alpha = a/b$. Wszystkie te wyniki¹⁾ można przedstawić w postaci

$$w_{\text{śred}} = m \frac{P(1-\nu^2)}{E\sqrt{A}} \quad [212]$$

gdzie m jest współczynnikiem liczbowym, zależnym od α , A jest wielkością powierzchni, a P jest całkowitym obciążeniem.

TABLICA WSPÓŁCZYNNIKÓW m W RÓWNANIU [212]

	Koło	Kwadrat	Prostokąty o różnych stosunkach $\alpha = \frac{a}{b}$					
			1,5	2	3	5	10	100
$m =$	0,96	0,95	0,94	0,92	0,88	0,82	0,71	0,37

Poszczególne wartości współczynników podane są w powyższej tabeli. Widzimy, że dla danego obciążenia P i powierzchni A ugięcia wzrastają, gdy stosunek obwodu obciążonej powierzchni do powierzchni całkowitej maleje. Równanie [212] jest czasami wykorzystywane przy rozważaniu osiadania fundamentów²⁾ w konstrukcjach inżynierskich. W celu otrzymania równego ugięcia różnych części konstrukcji średnie ciśnienie na fundament musi pozostawać w pewnym stosunku do kształtu i wielkości obciążonej powierzchni.

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że dane jest obciążenie, a znajdowaliśmy wywołwane nim przemieszczenia. Rozważmy obecnie przypadek, gdy dane są przemieszczenia, a musimy znaleźć odpowiadający im rozkład ciśnienia na powierzchni brzegu. Weźmy np. przypadek idealnie sztywnego stempla, w postaci kołowego walca, wciskanego w płaski brzeg półprzestrzeni sprężystej. W takim przypadku przemieszczenia w pod kołową podstawą stempla są stałe. Rozkład ciśnienia³⁾ nie jest stały, a jego intensywność dana jest równaniem

$$q = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad [213]$$

gdzie P jest całkowitym obciążeniem stempla, a jest promieniem stempla, a r — odległością od początku koła, na które działa ciśnienie. Taki rozkład ciśnienia nie jest oczywiście równomierny, a jego najmniejsza wartość występuje w środku ($r = 0$), gdzie

$$q_{\text{min}} = \frac{P}{2\pi a^2}$$

tnz. jest równa połowie średniego ciśnienia, działającego na kołową powierzchnię styku. Na brzegu tej powierzchni ($r = a$) ciśnienie równa się nieskończoności. W rzeczywistości wzdłuż brzegu będzie występować płynięcie materiału. Płynięcie to jednak ma charakter miejscowy

i nie wpływa istotnie na rozkład ciśnienia [213] w punktach, znajdujących się w pewnej odległości od brzegu koła.

Przemieszczenia stempla dane są wyrażeniem

$$w = \frac{P(1-\nu^2)}{2aE} \quad [214]$$

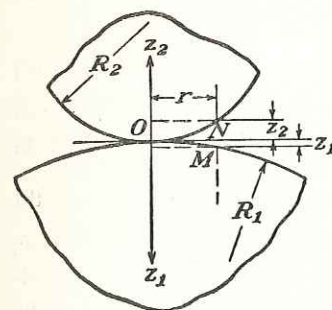
Widzimy, że dla danej wartości średniego ciśnienia działającego na płaszczyznę brzegową ugięcie nie jest stałe, lecz wzrasta w tym samym stosunku co promień stempla.

Dla porównania podamy również średnie ugięcie dla przypadku równomiernego rozkładu ciśnienia (równanie [208]):

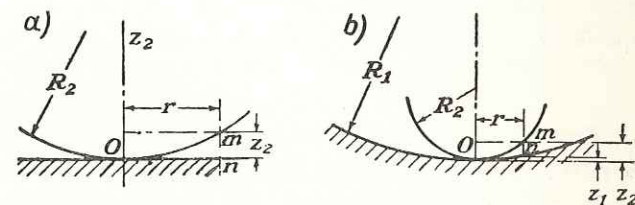
$$w_{\text{śred}} = \frac{\int_0^a w 2\pi r dr}{\pi a^2} = \frac{16}{3\pi^2} \frac{P(1-\nu^2)}{aE} = 0,54 \frac{P(1-\nu^2)}{aE} \quad [215]$$

To ugięcie średnie niewiele różni się od przemieszczenia [214] doskonale sztywnego stempla.

125. Ciśnienie pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami kulistymi. Wyniki poprzedniego paragrafu mogą być wykorzystane przy rozpatrywaniu rozkładu ciśnienia pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami¹⁾. Przypuśćmy, że w punkcie styku ciała te mają



Rys. 207



Rys. 208

powierzchnie kuliste o promieniach R_1 i R_2 (rys. 207). Jeżeli pomiędzy tymi ciałami nie działa ciśnienie, to styk występuje w jednym punkcie O . Odległości od płaszczyzny stycznej w punkcie O do takich punktów jak M i N , leżących na przekroju równoleżnikowym kuli w bardzo małej odległości²⁾ r od osi z_1 i z_2 , mogą być przedstawione z dostateczną dokładnością równaniami

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}; \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2} \quad [a]$$

a wzajemna odległość pomiędzy tymi punktami wynosi

$$z_1 + z_2 = r^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} \quad [b]$$

W przypadku szczególnym styku pomiędzy kulą i płaszczyzną (rys. 208a), $R_1 = \infty$; a wyrażenie [b] na odległość MN ma postać

$$\frac{r^2}{2R_2} \quad [c]$$

¹⁾ Zagadnienie to rozwiązał *H. Hertz*: „J. Math.“ (Crelle's J.), tom 92, 1881. Por. również *H. Hertz*: „Gesammelte Werke“, tom 1, str. 155, Lipsk, 1895.

²⁾ r jest małe w porównaniu z R_1 i R_2 .

W przypadku styku kuli z wydrążeniem kulistym (rys. 208b) R_1 w wyrażeniu [b] jest ujemne i otrzymujemy

$$z_2 - z_1 = \frac{r^2 (R_1 - R_2)}{2R_1 R_2} \quad [c']$$

Jeżeli ciała są ściskane siłą P wzdłuż normalnej w punkcie O , to w pobliżu punktu styku powstaną miejscowe odkształcenia, powodujące kontakt na małej powierzchni o brzegu kołowym, nazywanej *polem zetknięcia*. Przyjmując, że promienie krzywizny R_1 i R_2 są bardzo duże w porównaniu z promieniem brzegu pola zetknięcia, możemy zastosować przy rozważaniu odkształceń lokalnych wyniki otrzymane poprzednio dla półprzestrzeni sprężystej. Niech w_1 oznacza przemieszczenie, wywołane odkształceniem lokalnym w kierunku z_1 punktu takiego jak M , leżącego na powierzchni kuli dolnej (rys. 207), a w_2 niech oznacza odpowiednie przemieszczenie w kierunku z_2 punktu takiego jak N kuli górnej. Przyjmując, że płaszczyna styczna w O pozostanie nieruchoma podczas miejscowego ściskania, otrzymamy, że przy ściskaniu dowolne dwa punkty ciał leżące na osiach z_1 i z_2 w dużych odległościach¹⁾ od O przybliżą się wzajemnie o pewną wielkość α , a odległość pomiędzy dwoma punktami M i N (rys. 207) zmniejszy się o wielkość $\alpha - (w_1 + w_2)$. Jeżeli w końcu, na skutek miejscowego ściskania, punkty M i N znajdują się wewnątrz pola zetknięcia, mamy

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \beta r^2 \quad [d]$$

gdzie β jest stałą, zależną od promieni R_1 i R_2 i określoną równaniami [b], [c] lub [c']. W ten sposób z rozważań geometrycznych znajdujemy dla dowolnego punktu pola zetknięcia

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta r^2 \quad [e]$$

Rozważmy obecnie odkształcenia lokalne. Z warunku symetrii możemy wywnioskować, że intensywność ciśnienia q pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami i odpowiednie odkształcenia są rozłożone symetrycznie względem środka O pola zetknięcia. Załóżmy, że rys. 206a przedstawia pole zetknięcia, a M jest punktem na polu zetknięcia dolnej kuli, wtedy przemieszczenie w_1 tego punktu na podstawie poprzedniego paragrafu wynosi

$$w_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \iint q \, ds \, d\psi \quad [f]$$

gdzie ν_1 i E_1 są stałymi sprężystości dolnej kuli, a całkowanie jest rozciągnięte na całą powierzchnię zetknięcia. Analogiczne równanie otrzymujemy dla górnej kuli. Wtedy

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \iint q \, ds \, d\psi \quad [g]$$

gdzie

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad [216]$$

Z równań [e] i [g] otrzymujemy

$$(k_1 + k_2) \iint q \, ds \, d\psi = \alpha - \beta r^2 \quad [h]$$

Musimy więc znaleźć takie wyrażenie na q , aby spełniało ono równanie [h]. Obecnie pokażemy, że wymaganie to będzie spełnione, gdy przyjmiemy, że rozkład ciśnień q na polu zetknięcia

jest przedstawiony rzędnymi półkuli o promieniu a , skonstruowanej na polu zetknięcia. Jeżeli q_0 jest ciśnieniem w środku O pola zetknięcia, wtedy

$$q_0 = ka$$

gdzie $k = q_0/a$ jest stałym czynnikiem, przedstawiającym skalę naszego przedstawienia rozkładu ciśnień. Zmiennosc ciśnienia q wzdłuż cięciwy mn zaznaczono na rys. 206 kreskowanym półkolem. Wykonując całkowanie wzdłuż łuku, znajdziemy

$$\int q \, ds = \frac{q_0}{a} A$$

gdzie A jest powierzchnią półkola zaznaczonego kreskowaną linią i równa się $\frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$.

Podstawiając do równania [h], dostajemy

$$\frac{\pi (k_1 + k_2) q_0}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) \, d\psi = \alpha - \beta r^2$$

lub

$$(k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2$$

Równanie to będzie spełnione dla dowolnej wartości r i stąd przyjęty rozkład ciśnienia jest prawidłowy, jeżeli tylko istnieją następujące związki dla przemieszczenia α i promienia a pola zetknięcia:

$$\alpha = (k_1 + k_2) q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \quad [217]$$

$$a = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\beta}$$

Wartość maksymalnego ciśnienia q_0 otrzymamy przez przyrównanie sumy ciśnień działających na powierzchni zetknięcia do siły ściskającej P . Wtedy dla półkulistego rozkładu ciśnień otrzymujemy

$$\frac{q_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = P$$

skąd

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad [218]$$

tn. maksymalne ciśnienie jest 1½ raza większe od średniego ciśnienia na polu zetknięcia. Podstawiając do równań [217] i przyjmując zgodnie z wyrażeniem [b]

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}$$

znajdziemy przy zetknięciu się dwóch kul

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P (k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad [219]$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{P^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}$$

¹⁾ Tj. takich, aby można było pominąć w tych punktach odkształcenia spowodowane ściskaniem.

Przyjmując, że obie kule posiadają te same własności sprężyste i biorąc $\nu = 0,3$, otrzymamy

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad [220]$$

$$\alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

Odpowiednie ciśnienie maksymalne jest równe

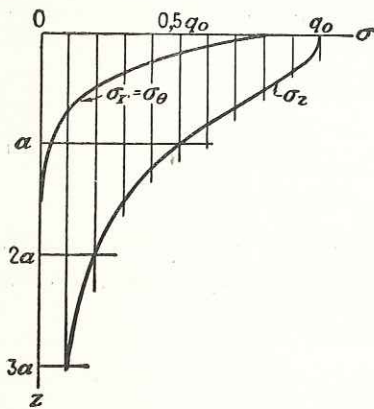
$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} = 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}} \quad [221]$$

W przypadku wciskania kuli w płaską powierzchnię, zakładając te same własności sprężyste materiałów obu ciał, znajdziemy przez podstawienie $R_1 = \infty$ w obu wyrażeniach [220] i [221]:

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{PR_2}{E}}; \quad \alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 R_2}}; \quad q_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_2^2}} \quad [222]$$

Biorąc R_1 ujemne, możemy również napisać równania dla kuli w kulistym wyźłobieniu (rys. 208b).

Znając wielkość pola zetknięcia oraz działające nań ciśnienia, możemy obliczyć naprężenia stosując metodę podaną w poprzednim paragrafie¹⁾. Wyniki tych obliczeń dla punktów le-



Rys. 209

żących na osiach Oz_1 i Oz_2 pokazane są na rys. 209. Maksymalne ciśnienie q_0 w polu zetknięcia przyjęto za jednostkę naprężenia. W pomiarach odległości wzdłuż osi z jako jednostkę przyjęto promień a pola zetknięcia. Największym naprężeniem jest naprężenie ściskające σ_z w środku pola zetknięcia, lecz pozostałe dwa naprężenia główne σ_r i σ_θ w tym samym punkcie są równe $\frac{1+2\nu}{2} \sigma_z$. Stąd maksymalne naprężenia styczne,

od których zależy uplastycznienie takich materiałów jak stal, jest w tym punkcie stosunkowo małe. Punkt maksymalnego naprężenia stycznego na osi z leży na głębokości równej około połowie promienia pola zetknięcia. Punkt ten musimy uznać za najslabszy punkt w takim materiale jak stal. Maksymalne naprężenie styczne w tym punkcie (dla $\nu = 0,3$) wynosi około $0,31 q_0$.

W przypadku materiałów kruchych, takich jak szkło, zniszczenie jest spowodowane maksymalnym naprężeniem rozciągającym. Naprężenie to występuje na kołowym brzegu pola zetknięcia. Działa ono w kierunku promieniowym i ma wielkość

$$\sigma_r = \frac{(1-2\nu)}{3} q_0$$

Drugie naprężenie główne działające w kierunku obwodowym jest równe co do wartości bezwzględnej powyższemu naprężeniu promieniowemu, lecz posiada przeciwny znak. Stąd

¹⁾ Obliczenia takie wykonał *A. N. Dinnik*: „Biul. Inst. Politech.“, Kijów, 1909. Por. również *M. T. Huber*: „Ann. Physik“, tom 14, 1904, str. 153; *S. Fuchs*: „Physik. Z.“, tom 14, str. 1282, 1913; *M. T. Huber* i *S. Fuchs*: „Physik. Z.“, tom 15, str. 298, 1914; *W. B. Morton* i *L. J. Close*: „Phil. Mag.“, tom 43, str. 320, 1922.

wzdłuż brzegu pola zetknięcia, gdzie normalne ciśnienie na powierzchni jest równe zeru, występuje czyste ścinanie o wielkości $q_0(1-2\nu)/3$. Przy $\nu = 0,3$ naprężenie styczne przybiera wartość $0,133 q_0$. Naprężenie to jest o wiele mniejsze od powyżej obliczonego maksymalnego naprężenia stycznego, lecz jest większe od naprężenia stycznego w środku pola zetknięcia, gdzie normalne ciśnienie jest największe.

Wiele doświadczeń przeprowadzono w celu zweryfikowania teoretycznych wyników *Hertza* dla materiałów, które podlegają prawu *Hooke'a* i dla naprężeń w zakresie granicy sprężystości¹⁾.

126. Ciśnienie pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami. Przypadek ogólniejszy²⁾. Ogólny przypadek ściskania stykających się ciał sprężystych może być potraktowany w ten sam sposób jak przypadek ciał kulistych rozważony w poprzednim paragrafie. Załóżmy, że powierzchnią styczną w punkcie zetknięcia O jest płaszczyzna xy (rys. 207). Powierzchnie ciał w pobliżu punktu zetknięcia, przy pominięciu małych wielkości wyższego rzędu, mogą być przedstawione za pomocą następujących równań³⁾.

$$z_1 = A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2$$

$$z_2 = B_1 x^2 + B_2 xy + B_3 y^2 \quad [a]$$

Wtedy odległość pomiędzy dwoma takimi punktami jak M i N jest równa

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1) x^2 + (A_2 + B_2) xy + (A_3 + B_3) y^2 \quad [b]$$

Możemy zawsze dobrać kierunki x i y w ten sposób, żeby człon zawierający iloczyn xy zniknął. Wtedy

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad [c]$$

gdzie A i B są stałymi, zależnymi od wielkości głównych krzywizn stykających się powierzchni i od kąta zawartego pomiędzy płaszczyznami głównych krzywizn obu powierzchni. Jeżeli R_1 i R_1' oznaczają główne promienie krzywizny w punkcie zetknięcia jednego z ciał, a R_2 i R_2' — odpowiednio drugiego z ciał⁴⁾, zaś ψ — kąt pomiędzy normalnymi płaszczyznami zawierającymi krzywizny $1/R_1$ i $1/R_2$, to stałe A i B mogą być wyznaczone z równań:

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\psi \right]^{\frac{1}{2}} \quad [d]$$

Możemy wykazać, że obie stałe A i B w równaniu [c] mają ten sam znak i dlatego możemy wywnioskować, że wszystkie punkty o tej samej odległości wzajemnej $z_1 + z_2$ leżą na jednej elipsie. Jeżeli więc ściskamy ciała w kierunku normalnej do płaszczyzny stycznej w punkcie O , to pole zetknięcia będzie posiadać brzeg eliptyczny.

¹⁾ Odnośniki do odpowiedniej literatury można znaleźć w pracy *G. Berndta*: „Z. Tech. Physik“, tom 3, str. 14, 1922. Por. również „Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik“, tom 3, str. 120.

²⁾ Teorię tę podał *Hertz*, loc. cit. Siły styczne i momenty skręcające przy zetknięciu się ciał rozpatrzył *R. D. Mindlin*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 16, str. 259, 1949.

³⁾ Przyjęto, że punkt O nie jest punktem osobliwym na powierzchniach ciał, lecz powierzchnia przylegająca do punktu zetknięcia jest zaokrąglona i może być uważana za powierzchnię drugiego stopnia.

⁴⁾ Przyjęto, że krzywizna ciała jest dodatnia i odpowiedni środek krzywizny leży wewnątrz ciała. Na rys. 207 krzywizny ciała są dodatnie. Na rys. 208b wydrążenie kuliste ma krzywiznę ujemną.

Niech α , w_1 , w_2 mają to samo znaczenie co w poprzednim paragrafie. Wtedy dla punktów w polu zetknięcia mamy

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = \alpha \quad [e]$$

lub

$$w_1 + w_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$$

Wniosek ten otrzymaliśmy z rozważań geometrycznych. Rozważmy obecnie miejscowe odkształcenie na polu zetknięcia. Przyjmując, że jego powierzchnia jest bardzo mała i stosując związki [205] otrzymane dla półprzestrzeni, uzyskamy wyrażenie określające sumę przemieszczeń w_1 i w_2 dla punktów pola zetknięcia

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{q dA}{r} \quad [f]$$

gdzie $q dA$ jest ciśnieniem działającym na nieskończenie mały element pola zetknięcia, a r odległością tego elementu od rozważanego punktu. Całkowanie musi być rozpostarte na całą powierzchnię zetknięcia. Stosując oznaczenia [216], otrzymamy z równań [e] i [f]

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{q dA}{r} = \alpha - Ax^2 - By^2 \quad [g]$$

Obecnie naszym zadaniem jest znalezienie rozkładu ciśnień q takiego, aby równanie [g] było spełnione. *H. Hertz* pokazał, że wymaganie to jest spełnione przez przyjęcie, że intensywność ciśnienia q na powierzchni zetknięcia jest przedstawiona rzędnymi półelipsoidy skonstruowanej na polu zetknięcia. Ciśnienie maksymalne występuje oczywiście w środku pola zetknięcia. Oznaczając je przez q_0 , a półosi eliptycznego brzegu pola zetknięcia przez a i b , wielkość maksymalnego ciśnienia otrzymamy z równania

$$P = \iint q dA = \frac{3}{2} \pi ab q_0$$

skąd

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad [223]$$

Widzimy, że to maksymalne ciśnienie jest 1,5 raza większe od ciśnienia średniego na polu zetknięcia. Aby obliczyć to ciśnienie, musimy znać wielkość półosi a i b . Z analizy podobnej do tej, którą zastosowano do ciał kulistych, znajdziemy

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)}{(A+B)}} \quad [224]$$

$$b = n \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)}{(A+B)}}$$

gdzie $A+B$ jest wyznaczone z równania [d], a współczynniki m i n są liczbami zależnymi od stosunku $(B-A):(A+B)$. Stosując oznaczenie

$$\cos \theta = \frac{B-A}{A+B} \quad [h]$$

otrzymujemy z tablicy¹⁾ na str. 329 wartości m i n dla różnych wartości θ .

¹⁾ Tablica ta pochodzi z pracy *H. L. Whittemore* i *S. N. Petrenko*: „U. S. Bur. Standards“, Tech. Paper 201 1921.

$\theta =$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$m =$	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,000
$n =$	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1,000

Rozważmy np. zetknięcie się koła o walcowym wieńcu o promieniu $R_1 = 40$ cm z szyną o promieniu główki $R_2 = 30$ cm. Po podstawieniu $R'_1 = R'_2 = \infty$ i $\psi = \pi/2$ do równania [d] znajdziemy

$$A = B = \frac{7}{240}; \quad B - A = \frac{1}{240}; \quad \cos \theta = \frac{1}{7}; \quad \theta = 81^\circ 47'$$

Następnie drogą interpolacji znajdziemy z powyższej tablicy

$$m = 1,104; \quad n = 0,911$$

Podstawiając do związków [224] i biorąc $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm² oraz $\nu = 0,25$, otrzymamy¹⁾

$$a = 0,0314 \sqrt[3]{P}; \quad b = 0,0259 \sqrt[3]{P}$$

Dla obciążenia $P = 450$ kG mamy

$a = 0,241$ cm, $b = 0,198$ cm, a powierzchnia zetknięcia $\pi ab = 0,150$ cm² oraz maksymalne ciśnienie w środku

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = 4500 \text{ kG/cm}^2$$

Znając rozkład ciśnienia, możemy obliczyć naprężenia w każdym punkcie²⁾. Pokazaliśmy w ten sposób, że punkt maksymalnego naprężenia stycznego leży na osi z na pewnej małej głębokości z_1 , zależnej od wielkości półosi a i b . Np.:

$z_1 = 0,47a$, gdy $b/a = 1$, a $z_1 = 0,24a$, gdy $b/a = 0,34$. Wartości maksymalnego naprężenia stycznego (dla $\nu = 0,3$) wynoszą odpowiednio $\tau_{\max} = 0,31 q_0$ i $\tau_{\max} = 0,32 q_0$.

Rozważając punkty eliptycznej powierzchni zetknięcia i przyjmując osie x i y odpowiednio w kierunku półosi a i b , otrzymujemy naprężenia główne w środku pola zetknięcia

$$\sigma_x = -2\nu q_0 - (1 - 2\nu) q_0 \frac{b}{a+b}$$

$$\sigma_y = -2\nu q_0 - (1 - 2\nu) q_0 \frac{a}{a+b} \quad [k]$$

$$\sigma_z = -q_0$$

Na końcach osi elipsy znajdujemy $\sigma_x = -\sigma_y$ oraz $\tau_{xy} = 0$. Naprężenie rozciągające w kierunku promieniowym jest równe naprężeniu ściskającemu w kierunku obwodowym. A więc w punktach tych istnieje czyste ścinanie. Wielkość tego ścinania na końcach wielkiej osi ($x = \pm a$,

¹⁾ Jeżeli ν wzrasta od 0,25 do 0,30, to półosi [224] maleją o około 1%, a maksymalne ciśnienie q_0 wzrasta o około 2%.

²⁾ Badanie takie przeprowadził prof. *N. M. Bielajew*, patrz „Biul. Inst. Inż. Dróg i Komunikacji Petersburg, i „Memoirs on Theory of Structures“, 1924; również *H. R. Thomas* i *V. A. Hoersch*: Univ. Illinois Eng. Expt. Sta., Bull. 212, 1930, i *G. Lundberg* i *F. K. G. Odqvist*: „Proc. Ingeniörs Vetenskaps Akad.“, nr 116, Sztokholm, 1932.

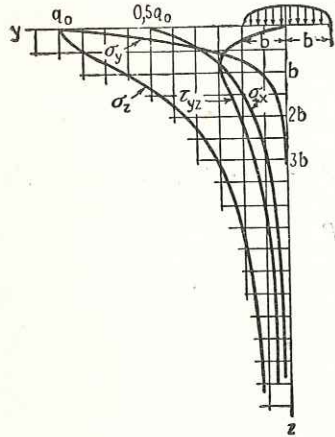
$y = 0$) wynosi

$$\tau = (1 - 2\nu) q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{e} \operatorname{arctgh} e - 1 \right) \quad [l]$$

a na końcach małej osi ($x = 0, y = \pm b$) równa się

$$\tau = (1 - 2\nu) q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta} \right) \quad [m]$$

gdzie $\beta = b/a, e = (1/a) \sqrt{a^2 - b^2}$. Gdy wartość b zbliża się do a , a brzeg pola zetknięcia do kształtu kołowego, naprężenia dane związkami [k], [l] i [m] zbliżają się do naprężeń podanych w poprzednim paragrafie dla przypadku ściskania kul.



Rys. 210

Bardziej szczegółowe badania naprężeń we wszystkich punktach pola zetknięcia wskazują¹⁾, że dla $e < 0,89$ maksymalne naprężenie styczne dane jest wyrażeniem [l]. Dla $e > 0,89$ maksymalne naprężenie styczne znajduje się w środku elipsy i może być obliczone z wyrażenia [k].

Przy wzroście stosunku a/b otrzymujemy coraz to węższe elipsy zetknięcia i w granicy $a/b = \infty$ dochodzimy do przypadku zetknięcia się dwóch walców o równoległych osiach²⁾. Polem zetknięcia jest obecnie wąski prostokąt. Rozkład ciśnienia q wzdłuż szerokości pola zetknięcia (rys. 210) jest przedstawiony za pomocą półelipsy. Jeżeli oś x jest prostopadła do płaszczyzny rysunku, b jest równe pół szerokości pola zetknięcia, a P' jest obciążeniem na jednostkę długości pola zetknięcia, otrzymujemy z półeliptycznego rozkładu ciśnienia

$$P' = \frac{1}{2} \pi b q_0$$

skąd

$$q_0 = \frac{2P'}{\pi b} \quad [225]$$

Badanie miejscowego odkształcenia daje nam

$$b = \sqrt{\frac{4P'(k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad [226]$$

gdzie R_1 i R_2 są promieniami walców, a k_1 i k_2 są stałymi określonymi związkami [216]. Jeżeli oba walce są wykonane z tego samego materiału, a $\nu = 0,3$, to

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P' R_1 R_2}{E(R_1 + R_2)}} \quad [227]$$

w przypadku dwóch równych promieni, $R_1 = R_2 = R$

$$b = 1,08 \sqrt{\frac{P' R}{E}} \quad [228]$$

W przypadku zetknięcia walca z płaską powierzchnią

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P' R}{E}} \quad [229]$$

Podstawiając b z równań [226] do [225], otrzymamy

$$q_0 = \sqrt{\frac{P'(R_1 + R_2)}{\pi^2 (k_1 + k_2) R_1 R_2}} \quad [230]$$

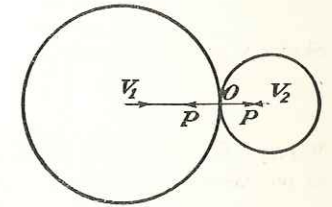
Jeżeli oba walce wykonane są z tego samego materiału, a $\nu = 0,3$, to

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P' E (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}} \quad [231]$$

W przypadku zetknięcia walca z powierzchnią płaską

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P' E}{R}} \quad [232]$$

Znając q_0 i b , możemy obliczyć naprężenia w dowolnym punkcie. Obliczenia te wskazują¹⁾, że punkt maksymalnego naprężenia stycznego leży na pewnej głębokości na osi z . Zmianę składowych naprężenia wraz z głębokością przy $\nu = 0,3$ pokazano na rys. 210. Maksymalne naprężenie styczne występuje na głębokości $z_1 = 0,78b$, a jego wielkość wynosi $0,304 q_0$.



Rys. 211

127. Zderzenie kul. Wyniki ostatnich dwóch paragrafów mogą być wykorzystane przy badaniu zderzenia ciał sprężystych. Rozważmy na przykład zderzenie dwóch kul (rys. 211). Skoro tylko kule, poruszające się naprzeciw, zetkną się²⁾ w punkcie O , to zaczną działać siły ściskające P , zmieniając prędkości kul. Jeśli v_1 i v_2 są wartościami tych prędkości, to prędkość ich zmiany w czasie uderzenia dana jest równaniami:

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -P; \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = -P \quad [a]$$

gdzie m_1 i m_2 oznaczają masy kul. Niech α będzie odległością, na którą zbliżają się dwie kule na skutek miejscowego ściskania w punkcie O . Wtedy prędkości tego zbliżenia są równe

$$\dot{\alpha} = v_1 + v_2$$

i znajdujemy z równań [a], że

$$\dot{\alpha} = -P \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad [b]$$

Badania wskazują, że czas trwania zderzenia, tzn. czas, w którym kule pozostają zetknięte, jest bardzo długi w porównaniu z najmniejszym okresem drgań kul³⁾. A więc drgania mogą być pominięte i możemy przyjąć, że wyrażenia [219], wyprowadzone w warunkach obciążenia statycznych, zachowują ważność podczas uderzenia. Stosując oznaczenia

$$n = \sqrt{\frac{16}{9\pi^2} \frac{R_1 R_2}{(k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}}; \quad n_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad [c]$$

znajdziemy z [219]

$$P = n \alpha^{\frac{3}{2}} \quad [d]$$

¹⁾ Patrz *Bielajew*, loc. cit.

²⁾ Bezpośrednie wyprowadzenie tego przypadku wraz z rozpatrzeniem sił stycznych w miejscu zetknięcia podał *H. Poritsky*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 17, str. 191, 1950.

¹⁾ Por. *Bielajew*, loc. cit.

²⁾ Zakładamy, że ruch odbywa się wzdłuż linii łączącej środki kul.

³⁾ Lord *Rayleigh*: „Phil. Mag.“, seria 6, tom 11, str. 283, 1906.

a równanie [b] przyjmie postać

$$\ddot{\alpha} = -nn_1\alpha^{\frac{3}{2}} \quad [e]$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $\dot{\alpha}$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha})^2 = -nn_1\alpha^{\frac{3}{2}} d\alpha$$

skąd po scałkowaniu

$$\frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 - v^2) = -\frac{2}{5} nn_1 \alpha^{\frac{5}{2}} \quad [f]$$

Tutaj v jest prędkością zbliżenia dwu kul na początku uderzenia. Jeżeli podstawimy w tym równaniu $\dot{\alpha} = 0$, otrzymamy wartość zbliżenia w chwili maksymalnego ściskania

$$\alpha_1 = \left(\frac{5}{4} \frac{v^2}{nn_1} \right)^{\frac{2}{5}} \quad [g]$$

Znając tę wartość, możemy obliczyć ze związku [219] wartość maksymalnej siły ściskającej P , działającej pomiędzy kulami w czasie uderzenia oraz odpowiedni promień pola zetknięcia a .

W celu obliczenia czasu trwania zderzenia zapiszemy równanie [f] w następującej postaci

$$dt = \frac{d\alpha}{\sqrt{v^2 - \frac{2}{5} nn_1 \alpha^{\frac{5}{2}}}}$$

lub pisząc $\alpha/\alpha_1 = x$ oraz wykorzystując wyrażenie [g] otrzymamy:

$$dt = \frac{\alpha_1}{v} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x)^{\frac{5}{2}}}}$$

Skąd czas trwania zderzenia

$$t = \frac{2\alpha_1}{v} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x)^{\frac{5}{2}}}} = 2,94 \frac{\alpha_1}{v} \quad [233]$$

W przypadku szczególnym dwóch równych kul o promieniach R , wykonanych z tego samego materiału, mamy na podstawie równania [g]:

$$\alpha_1 = \left(\frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-v^2}{E} v^2 \right)^{\frac{2}{5}} R \quad [234]$$

$$t = 2,94 \left(\frac{5\sqrt{2}\pi\rho}{4} \frac{1-v^2}{E} \right)^{\frac{2}{5}} \frac{R}{(v)^{\frac{1}{2}}}$$

gdzie ρ oznacza masę jednostki objętości kul.

Widzimy, że czas trwania zderzenia jest proporcjonalny do promienia kul i odwrotnie proporcjonalny do $(v)^{\frac{1}{2}}$. Wynik ten został potwierdzony doświadczalnie¹⁾. W przypadku długich prętów o kulistych końcach okres podstawowych drgań może być tego samego rzędu co czas trwania uderzenia i drgania te należy wziąć pod uwagę przy rozpatrywaniu miejscowego ściskania w punkcie zetknięcia²⁾.

128. Symetryczne odkształcenie walca kołowego. W przypadku walca kołowego, poddanego działaniu sił przyłożonych do powierzchni bocznej i rozmieszczonych symetrycznie względem osi walca, wprowadzimy we współrzędnych walcowych funkcję naprężeń Φ oraz zastosujemy równanie [180]³⁾. Równanie to będzie spełnione, jeśli weźmiemy na funkcję naprężeń Φ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [a]$$

¹⁾ M. Hamburger: „Wied. Ann.“, tom 28, str. 653, 1886; A. Dinnik: „J. Russ. Phys.-Chem. Soc.“, tom 38, str. 242, 1906 i tom 41, str. 57, 1909. Dalszą literaturę przedmiotu podano w „Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik“, tom 3, str. 448, 1927.

²⁾ Por. str. 387. Wzdłużne zderzenie prętów posiadających kuliste powierzchnie na końcach rozpatrywał J. E. Sears: „Proc. Cambridge Phil. Soc.“, tom 14, str. 257, 1908, oraz „Trans. Cambridge Phil. Soc.“, tom 21, str. 49, 1912. Boczne uderzenie prętów z uwzględnieniem miejscowego ściskania rozważył S. Timoshenko: „Z. Math. Physik“, tom 62, str. 198, 1914.

³⁾ Zagadnienie odkształcenia walca kołowego pod działaniem sił przyłożonych na powierzchni rozpatrzył pierwszy L. Pochhammer: „Crelle's J.“, tom 81, 1876. Problemy dotyczące symetrycznego odkształcenia walców rozważali C. Chree: „Trans. Cambridge Phil. Soc.“, tom 14, str. 250, 1889. Por. również praca L. N. Filona: „Trans. Roy. Soc.“ (London), seria A, tom 198, 1902; praca ta zawiera rozwiązania zadań o znaczeniu praktycznym, odnoszących się do symetrycznego odkształcenia walca.

Rozwiązanie to możemy przyjąć w postaci

$$\Phi = f(r) \sin kz \quad [b]$$

gdzie f jest funkcją tylko zmiennej r . Podstawiając [b] do równania [a], dochodzimy do następującego równania różniczkowego zwyczajnego, z którego wyznaczmy funkcję $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = 0 \quad [c]$$

Całkę tego równania przyjmujemy w postaci szeregu

$$f(r) = a_0 + a_1 r^2 + a_2 r^4 + a_3 r^6 + \dots \quad [d]$$

Podstawiając szereg ten do równania [c], otrzymamy następujące związki pomiędzy kolejnymi współczynnikami

$$(2n)^2 a_n - k^2 a_{n-1} = 0$$

skąd

$$a_1 = \frac{k^2}{2^2} a_0; \quad a_2 = \frac{k^2}{4^2} a_1 = \frac{k^4}{2^2 \cdot 4^2} a_0 \dots$$

Podstawiając powyższe do szeregu [d], mamy

$$f(r) = a_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2^2} + \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{k^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \quad [e]$$

Drugą całkę równania [c] również możemy otrzymać w postaci szeregu i możemy wykazać, że zmierza ona do nieskończoności przy $r = 0$; dlatego nie należy jej uwzględniać przy rozpatrywaniu odkształcenia walca pełnego. Szereg w nawiasach w wyrażeniu [e] jest funkcją Bessela zerowego rzędu i urojonego argumentu ikr ¹⁾. W dalszym ciągu będziemy zapisywać tę funkcję jako $I_0(ikr)$, a funkcję naprężeń [b] w postaci

$$\Phi_1 = a_0 I_0(ikr) \sin kz \quad [f]$$

Równanie [180] posiada również rozwiązania różne od rozwiązań równania [a]. Jedno z tych rozwiązań możemy wyprowadzić z powyższej funkcji $I_0(ikr)$. Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{dI_0(ikr)}{d(ikr)} = -\frac{ikr}{2} \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{k^6 r^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right) \quad [g]$$

Pochodna ta ze znakiem ujemnym jest nazywana funkcją Bessela pierwszego rzędu i jest oznaczana $J_1(ikr)$. Rozpatrzmy obecnie funkcję

$$f_1(r) = r \frac{d}{dr} I_0(ikr) = -ikr I_1(ikr) = \frac{k^2 r^2}{2} \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2 \cdot 4} + \frac{k^4 r^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right) \quad [h]$$

Różniczkując możemy wykazać, że

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) f_1(r) = 2k^2 I_0(ikr)$$

Wtedy pamiętając, że $I_0(ikr)$ jest rozwiązaniem równania [c], otrzymujemy jako wynik, że $f_1(r)$ jest rozwiązaniem równania

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 \right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} - k^2 f_1 \right) = 0$$

Stąd możemy przyjąć rozwiązanie równania [180] w postaci

$$\Phi_2 = a_1 \sin kz (ikr) I_1(ikr) \quad [i]$$

Łącząc rozwiązania [f] i [i] możemy przyjąć funkcję naprężeń w postaci

$$\Phi = \sin kz [a_0 I_0(ikr) + a_1 (ikr) I_1(ikr)] \quad [j]$$

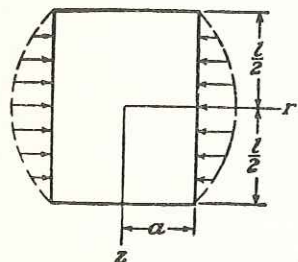
¹⁾ Dyskusję równania różniczkowego [c] i funkcję Bessela możemy znaleźć w następujących książkach: A. R. Forsyth: „A Treatise on Differential Equations“ i A. Gray i G. B. Mathews: „A Treatise on Bessel Functions“. Tablice funkcji Bessela można znaleźć w książce E. Jahnke i F. Emde: „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven“, Berlin, 1909. (lub tłumaczenie rosyjskie Fiz. mat. Izdat. Moskwa 1959)

Podstawiając tę funkcję naprężeń do równań [179] znajdziemy następujące wyrażenia na składowe naprężenia:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \cos kz [a_0 F_1(r) + a_1 F_2(r)] \\ \tau_{rz} &= \sin kz [a_0 F_3(r) + a_1 F_4(r)]\end{aligned}\quad [k]$$

gdzie $F_1(r), \dots, F_4(r)$ są pewnymi funkcjami r , zawierającymi $I_0(ikr)$ oraz $I_1(ikr)$. Wykorzystując tablice funkcji Bessela, możemy łatwo obliczyć wartości $F_1(r), \dots, F_4(r)$ dla dowolnej wartości r .

Oznaczając przez a zewnętrzną promień walca, otrzymujemy ze związków [k] siły przyłożone na powierzchni walca wyrażone następującymi wartościami składowych naprężenia:



Rys. 212

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \cos kz [a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a)] \\ \tau_{rz} &= \sin kz [a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a)]\end{aligned}\quad [l]$$

Przez odpowiedni dobór stałych k, a_0, a_1 możemy rozpatrywać różne przypadki symetrycznego obciążenia walca. Oznaczając długość walca przez l i biorąc

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

$$a_0 F_1(a) + a_1 F_2(a) = -A_n$$

$$a_0 F_3(a) + a_1 F_4(a) = 0$$

otrzymujemy wartości stałych a_0 i a_1 w przypadku, gdy normalne ciśnienie $A_n \cos(n\pi z/l)$ działa na powierzchnię boczną walca. Przypadek gdy $n=1$ przedstawiony jest na rys. 212. W analogiczny sposób możemy otrzymać rozwiązanie dla przypadku, gdy na powierzchnię walca działają siły styczne o intensywności $B_n \sin(n\pi z/l)$.

Biorąc $n=1, 2, 3, \dots$ i stosując zasadę superpozycji, dochodzimy do rozwiązania zagadnień, w których ciśnienie normalne na powierzchni walca może być przedstawione za pomocą szeregu

$$A_1 \cos \frac{\pi z}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad [m]$$

a siły styczne za pomocą szeregu

$$B_1 \sin \frac{\pi z}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \quad [n]$$

Jeżeli przyjmiemy zamiast [b] funkcję Φ w postaci

$$\Phi = f(r) \cos kz$$

i będziemy postępowali jak poprzednio, to zamiast [j] znajdziemy następującą funkcję naprężeń

$$\Phi = \cos kz [b_0 I_0(ikr) + b_1(ikr) I_1(ikr)] \quad [o]$$

Dobierając odpowiednio stałe k, b_0 i b_1 , otrzymamy rozwiązanie w przypadku, w którym ciśnienia normalne działające na walec są przedstawione za pomocą szeregu sinusowego, a siły styczne za pomocą szeregu cosinusowego. Stąd, składając rozwiązania [j] i [o], możemy otrzymać dowolny osiowo-symetryczny rozkład sił normalnych i stycznych, działających na powierzchni walca. Równocześnie będą istniały pewne siły rozmieszczone na powierzchniach czołowych walca. Przez superpozycję osiowego rozciągania lub ściskania, możemy zawsze spowodować, aby wypadkowa wszystkich sił na powierzchniach czołowych równała się zeru, a wpływ ich na naprężenia w pewnej odległości od końców można było pominąć na podstawie zasady *Saint-Venanta*. Szereg przykładów symetrycznego obciążenia walców rozpatrzył *L. N. G. Filon* w wymienionej już pracy¹⁾. Podamy tutaj ostateczne wyniki z jego rozwiązania w przypadku pokazanym na rys. 213. Walec o długości równej πa , poddany jest rozciągającemu działaniu sił stycznych, równomiernie rozłożonych na zakresowanej części powierzchni walca pokazanego na rysunku. Rozmieszczenie naprężeń normalnych σ_z na przekroju poprzecznym walca przedstawia wartość praktyczną i tablica na str. 355 podaje stosunek tych naprężeń do średniego naprężenia rozciągającego, otrzymanego przez podzielenie całkowitej siły rozciągającej przez powierzchnię przekroju poprzecznego walca. Widzimy, że lokalne

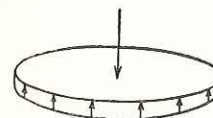
¹⁾ Loc. cit. Również *G. Pickett*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E., tom 11), str. 176, 1944.

naprężenia rozciągające, występujące w pobliżu obciążonych części powierzchni, szybko maleją wraz ze wzrostem odległości od tych części, zmierzając do wartości średniej.

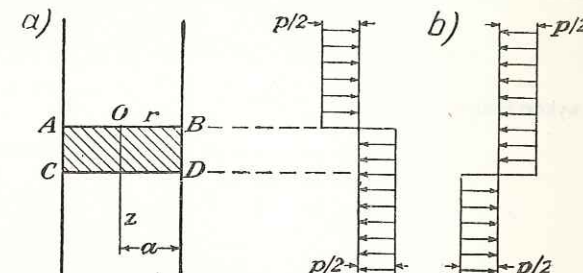
z	$r=0$	$r=0,2a$	$r=0,4a$	$r=0,6a$	$r=a$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,05l	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,10l	0,631	0,652	0,720	0,859	1,344
0,15l	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,20l	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

Inny przykład ogólnego rozwiązania zagadnienia w postaci funkcji Bessela podał *A. Nádai* przy rozpatrywaniu zginania płyt kołowych siłą skupioną w środku¹⁾ (rys. 214).

129. Walec kołowy ściskany na części poboczniczy²⁾. Jeśli na długi wał nasadzamy znacznie krótszy pierścien, to proste wyrażenia słuszne w przypadku określenia naprężeń, powstających przy pasowaniu skurczo-



Rys. 214



Rys. 215

wym wału i pierścienia o jednakowej długości, przestają być ścisłe. O wiele lepsze przybliżenie uzyskamy rozpatrując zadanie pokazane na rys. 215a, a dotyczące długiego walca, poddanego działaniu równomiernego ciśnienia³⁾ normalnego p przyłożonego na pasie $ABCD$ powierzchni.

Poszukiwane rozwiązanie możemy oczywiście otrzymać przez superpozycję dwóch rozkładów ciśnień pokazanych na rys. 215b. Dlatego podstawowym zadaniem w naszym zagadnieniu będzie walec o długości nieskończonej, poddany ciśnieniu $p/2$ na dolnej części powierzchni walcowej, oraz $-p/2$ na górnej części. Podamy teraz rozwiązanie tego zagadnienia.

Rozpocznijmy od funkcji naprężeń, danej równaniem [o] par. 128, pisząc $I_0(kr)$ zamiast $J_0(ikr)$ oraz $iI_1(kr)$ zamiast $J_1(kr)$; oznaczmy również $b_0 = \rho b_1$. Wtedy

$$\Phi = [\rho I_0(kr) - kr I_1(kr)] b_1 \cos kz \quad [a]$$

Funkcja ta spełnia równanie [180] niezależnie od wartości k . Jeżeli przyjmiemy, że k przybiera pewien zakres wartości, to możemy uzależnić b_1 od k i przyrostu dk pisząc

$$b_1 = f(k) dk$$

Wstawiając powyższe do [a] i sumując wszystkie tego rodzaju funkcje naprężeń, otrzymamy ogólniejszą funkcję naprężeń w postaci

$$\Phi = \int_0^\infty [\rho I_0(kr) - kr I_1(kr)] f(k) \cos kz dk \quad [b]$$

¹⁾ *A. Nádai*: „Elastische Platten“, str. 315, 1925.

²⁾ *M. V. Barton*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 8 str. A-97, 1941. *A. W. Rankin*, tamże, tom 11, str. A-77, 1944.

³⁾ Ciśnienie pasowania skurczowego nie jest równomierne w kierunku osiowym.

Zobaczmy obecnie, w jaki sposób możemy dobrać funkcję $f(k)$ tak, by funkcja naprężeń była rozwiązaniem naszego zagadnienia. Z zależności [179] znajdziemy, że naprężenia styczne mają postać

$$\tau_{rz} = \int_0^{\infty} [\varrho k I_0'(kr) - k^2 r I_1'(kr) - k I_1(kr) - 2k(1-\nu) I_0'(kr)] k^2 f(k) \cos kz \, dk \quad [c]$$

gdzie przecinki oznaczają różniczkowanie względem kr . Powyższe naprężenia muszą zniknąć na powierzchni $r=a$. Podstawiając $r=a$ w wyrażeniu w nawiasie kwadratowym i przyrównując go do zera, otrzymujemy równanie dla ϱ , skąd

$$\varrho = 2(1-\nu) + ka \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \quad [d]$$

Pozostałe warunki brzegowe będą następujące

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} & \text{dla } r=a; z>0 \\ \sigma_r &= -\frac{p}{2} & \text{dla } r=a; z<0 \end{aligned} \quad [e]$$

σ_r po podstawieniu wyrażenia [b] do [179] przyjmie postać

$$\sigma_r = -\int_0^{\infty} \left[(1-2\nu-\varrho) I_0(kr) + \left(kr + \frac{\varrho}{kr} \right) I_1(kr) \right] k^3 f(k) \sin kz \, dk \quad [f]$$

Obecnie wykorzystamy zależności¹⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{k} \, dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } z>0 \\ 0 & \text{dla } z=0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dla } z<0 \end{cases} \quad [g]$$

Jeżeli pomnożymy powyższe przez p/π , otrzymamy

$$\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{k} \, dk = \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{dla } z>0 \\ 0 & \text{dla } z=0 \\ -\frac{p}{2} & \text{dla } z<0 \end{cases} \quad [h]$$

gdzie wartości prawej strony odpowiadają wartościom brzegowym σ_r danym równaniami [e]. Warunki brzegowe [e] będą więc spełnione, gdy dla $r=a$ prawa strona wyrażenia [f] jest identyczna z lewą stroną wyrażenia [h]. Wymaga to spełnienia równości

$$-\left[(1-2\nu-\varrho) I_0(ka) + \left(ka + \frac{\varrho}{ka} \right) I_1(ka) \right] k^3 f(k) = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \quad [i]$$

Powyższe równanie określa $f(k)$. A więc z funkcji naprężeń [b] za pomocą związków [179] znaleźliśmy składowe naprężenia; będą one całkami o tym samym ogólnym charakterze co wyrażenie [f] na σ_r . Rankin w pracy cytowanej na str. 335 podał ich wartości, otrzymane za pomocą całkowania numerycznego. Krzywe na rys. 216 podają zmienność naprężeń w kierunku osiowym dla różnych odległości promieniowych, jak również przemieszczenia powierzchni.

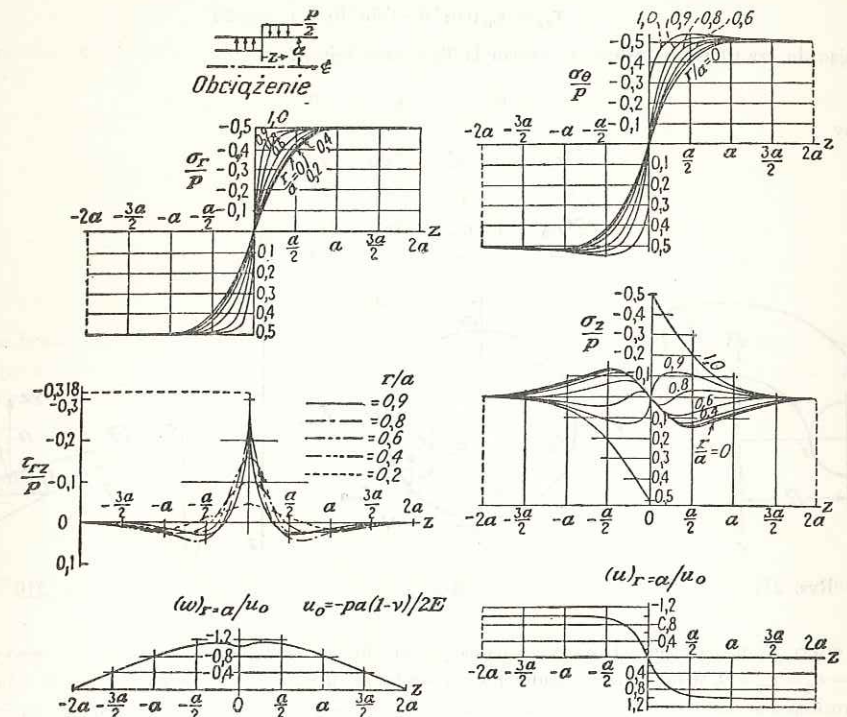
Krzywe te, reprodukowane z pracy Bartona (por. str. 335), zostały otrzymane przez zastosowanie różnych metod za pomocą szeregów Fouriera. Z tych krzywych możemy otrzymać przez superpozycję wyniki zagadnienia, przedstawionego na rys. 215, zgodnie z objaśnieniem na początku paragrafu. W cytowanych pracach podano krzywe naprężeń i przemieszczeń dla ciśnienia działającego na pasach o poszczególnych szerokościach. Gdy szerokość taka jest równa promieniowi walca, naprężenie obwodowe σ_θ na powierzchni w środku pasa ciśnienia osiąga wartość około 10% wyższą od przyłożonego ciśnienia i jest oczywiście ściskające. Naprężenie osiowe σ_z na powierzchni tuż poza pasem ciśnienia jest rozciągające i osiąga wartość około 45% przyłożonego ciśnienia. Naprężenie

¹⁾ Por. np. I. S. Sokolnikoff: „Advanced Calculus“ 1 wyd., str. 362.

styczne τ_{rz} osiąga największą wartość, równą 31,8% przyłożonego ciśnienia, na brzegach pasa ciśnienia AB i CD (rys. 215) oraz tuż poniżej powierzchni.

Gdy ciśnienie jest przyłożone na całej zakrzywionej powierzchni walca o dowolnej długości, mamy do czynienia z prostym ściskaniem; σ_r i σ_θ równe są przyłożeniu ciśnienia, a σ_z i τ_{rz} równają się zeru.

W podobny sposób otrzymano rozwiązania dla pasa ciśnienia, działającego w otworze wykonanym w ciele nieskończonym¹⁾, oraz dla pasa ciśnienia w pobliżu końca pełnego walca²⁾.



Rys. 216

130. Skręcanie wycinka kołowego pierścienia. Zagadnienie to posiada znaczenie praktyczne w związku z obliczeniem naprężeń w gestozwojowych sprężynach spiralnych. Rozważmy wycinek pierścieniowy, poddany działaniu dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił P , skierowanych wzdłuż osi przechodzącej przez środek pierścienia i prostopadłych do płaszczyzny pierścienia (rys. 217). Siły te powodują jednakowy we wszystkich przekrojach poprzecznych pierścienia moment skręcający $M_t = PR$. Jeżeli wymiary przekroju poprzecznego pierścienia są małe w porównaniu z promieniem R , to możemy z wystarczającą dokładnością przy obliczaniu naprężeń stosować zależności wyprowadzone dla skręcania prętów pryzmatycznych. W przypadku silnych sprężyn spiralnych wymiary przekroju poprzecznego nie są już małe i musimy wziąć pod uwagę różnicę długości zewnętrznych i wewnętrznych włókien obwodowych. W ten sposób można wykazać, że w punktach wewnętrznych, takich jak i , naprężenie styczne jest znacznie większe niż to wynika z teorii skręcania prostych prętów³⁾. W celu dokładniejszego rozwiązania zagadnienia stosujemy ogólne równania teorii sprężystości we współrzędnych walcowych⁴⁾ (równania [170], str. 270). Przyjmując, że w tym przypadku skręcania jedynie składowe naprężenia styczne

¹⁾ C. J. Tranter: „Quart. Applied Math.“, tom 4, str. 298, 1946; O. L. Bowie, tamże, tom 5, str. 100, 1947.

²⁾ C. J. Tranter i J. W. Craggs: „Phil. Mag.“, tom 38, str. 214, 1947.

³⁾ Elementarną teorię skręcania wycinka pierścieniowego podał V. Roever: „V. D. I.“, tom 57, 1913. Również M. Pilgram: „Artill. Monatshefte“, 1913. Doświadczalny sposób wyznaczania maksymalnego naprężenia drogą pomiaru odkształcenia na powierzchni zwoju podał A. M. Wahl: „Trans. A. S. M. E.“, 1928.

⁴⁾ Rozwiązanie to należy do O. Göhnera: „Ingenieur-Archiv“, tom 1, str. 619, 1930; tom 2, str. 1 i 381, 1931; tom 9, str. 355, 1938.

nych $\tau_{\theta z}$ i $\tau_{r\theta}$ są różne od zera (rys. 218), otrzymamy z równań [170]

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad [a]$$

Rozpatrzymy obecnie równania ciągłości [130]. Z rys. 219 znajdziemy

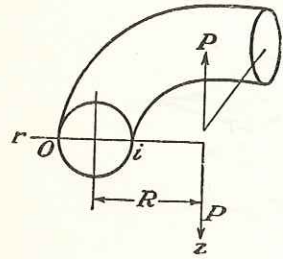
$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{\theta z} \cos \theta \\ \tau_{xy} &= \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tau_{r\theta} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Podstawiając do czwartego i szóstego z równań [130] i pamiętając, że

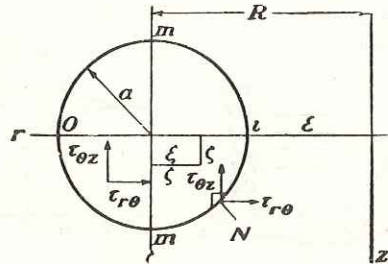
$$\Theta = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = 0$$

dostaniemy

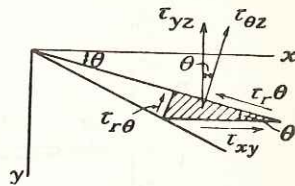
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial z^2} - \frac{\tau_{\theta z}}{r^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{4\tau_{r\theta}}{r^2} &= 0 \end{aligned} \quad [b]$$



Rys. 217



Rys. 218



Rys. 219

Pozostałe cztery równania ciągłości (patrz równania [g] str. 302) są spełnione na podstawie naszego założenia, że $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$. W ten sposób zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równań [a] i [b]. W celu otrzymania tego rozwiązania zastosujemy funkcję naprężeń Φ . Równanie [a] będzie spełnione, gdy przyjmiemy

$$\tau_{r\theta} = \frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\theta z} = -\frac{GR^2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad [c]$$

gdzie G jest modułem odkształcenia postaciowego, a R — promieniem pierścienia. Podstawiając [c] do równań [b] znajdziemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

skąd dochodzimy do wniosku, że wyrażenie w nawiasach musi być stałą. Oznaczamy ją przez $-2c$. Równanie, z którego wyznaczamy funkcję naprężeń Φ przyjmuje wówczas postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2c = 0 \quad [d]$$

Wprowadźmy obecnie zamiast współrzędnych r i z (rys. 218) nowe współrzędne

$$\xi = R - r; \quad \zeta = z$$

Wtedy równanie [d] przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + 2c = 0 \quad [e]$$

Uznając ξ/R za wielkość małą i stosując rozwinięcie

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{R}} = 1 + \frac{\xi}{R} + \frac{\xi^2}{R^2} \dots \quad [f]$$

rozwiążemy obecnie równanie [e] metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmijmy

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots \quad [g]$$

oraz wyznaczmy $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ w taki sposób, aby spełniały następujące równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \zeta^2} + 2c &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{3\xi}{R^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad [h]$$

Jeśli teraz liczba wyrazów szeregu [g] wzrasta, to suma równań [h] przybliża się coraz bardziej do równania [e], a szereg [g] dąży do rozwiązania ścisłego funkcji naprężeń Φ . Rozważmy obecnie warunki brzegowe. Wypadkowe naprężenie styczne na brzegu (rys. 218) musi działać w kierunku stycznym do brzegu, a stąd

$$\tau_{r\theta} \cos(N\xi) - \tau_{\theta z} \cos(N\zeta) = 0$$

lub stosując związki [c]

$$\frac{GR^2}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} \right) = 0$$

Powyższe równanie wskazuje, że funkcja Φ musi być stała na brzegu. Spełnimy ten warunek przyjmując, że rozwiązania równań [h], $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$, są równe zero na brzegu.

Mając Φ_0, Φ_1, \dots , ze związków [c] otrzymamy obecnie kolejne przybliżenia dla wartości składowych naprężeń. Wprowadzając nowe zmienne ξ i ζ , związki te przedstawimy w postaci

$$\tau_{r\theta} = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \quad \tau_{\theta z} = \frac{G}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad [i]$$

Stosując rozwinięcie

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2} = 1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2} + \dots$$

oraz szereg [g], znajdziemy jako pierwsze przybliżenie

$$(\tau_{r\theta})_0 = G \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}; \quad (\tau_{\theta z})_0 = G \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \quad [j]$$

Dla drugiego przybliżenia znajdziemy ze związków [i]

$$\begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right] \\ (\tau_{\theta z})_1 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad [k]$$

Dla trzeciego przybliżenia

$$\begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta} \right] \\ (\tau_{\theta z})_2 &= G \left[\left(1 + \frac{2\xi}{R} + \frac{3\xi^2}{R^2}\right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad [l]$$

Zastosujemy tu ogólne rozważania do przypadku szczególnego pierścienia o przekroju kołowym i promieniu a . Równanie brzegu (rys. 218) jest następujące

$$\xi^2 + \zeta^2 - a^2 = 0 \quad [m]$$

a rozwiązanie pierwszego z równań [h], spełniające warunek brzegowy, ma postać

$$\Phi_0 = -\frac{c}{2} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2)$$

Z wyrażeń [j] otrzymujemy pierwsze przybliżenie dla składowych naprężenia

$$(\tau_{r\theta})_0 = -cG\xi; \quad (\tau_{z\theta})_0 = -cG\xi \quad [n]$$

Jest to ten sam rozkład naprężeń co i dla wału kołowego. Odpowiednia wartość momentu skręcającego wynosi

$$M_t = -\iint (\tau_{r\theta}\xi + \tau_{z\theta}\zeta) d\xi d\zeta \quad [o]$$

Podstawiając naprężenia z równań n, otrzymujemy

$$(M_t)_0 = \frac{cG\pi a^4}{2}; \quad c = \frac{2(M_t)_0}{G\pi a^4}$$

W celu otrzymania drugiego przybliżenia zastosujemy drugie z równań [h]. Podstawiając zamiast Φ_0 znalezione powyżej wyrażenie, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} - \frac{3c\xi}{R} = 0$$

Rozwiązanie tego równania spełniające warunek, że Φ_1 znika na brzegu, ma postać

$$\Phi_1 = \frac{3}{8} \frac{c\xi}{R} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2)$$

Podstawiając to wyrażenie do związków [k], znajdujemy drugie przybliżenie wartości składowych naprężenia

$$\begin{aligned} (\tau_{r\theta})_1 &= -cG \left(\zeta + \frac{5}{4} \frac{\xi\zeta}{R} \right) \\ (\tau_{z\theta})_1 &= -cG \left[\xi + \frac{7}{8} \frac{\xi^2}{R} - \frac{3}{8R} (\zeta^2 - a^2) \right] \end{aligned} \quad [p]$$

Podstawiając Φ_0 i Φ_1 do trzeciego z równań [h], otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{3}{8} \frac{c}{R^2} (\xi^2 + 3\zeta^2 - 3a^2) = 0$$

Rozwiązanie tego równania, spełniające warunek brzegowy, ma postać

$$\Phi_2 = -\frac{c}{64R^2} (\xi^2 + 5\zeta^2 - 15a^2) (\xi^2 + \zeta^2 - a^2)$$

Za pomocą [l] znajdujemy trzecie przybliżenie składowych naprężenia

$$\begin{aligned} (\tau_{r\theta})_2 &= -cG \left[\zeta + \frac{5}{4} \frac{\xi\zeta}{R} + \frac{\zeta}{16R^2} (27\xi^2 + 5\zeta^2 - 10a^2) \right] \\ (\tau_{z\theta})_2 &= -cG \left[\xi + \frac{7\xi^2}{8R} - \frac{3}{8R} (\zeta^2 - a^2) + \frac{13}{16} \frac{\xi^3}{R^2} - \frac{9}{16} \frac{\xi\zeta^2}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{a^2\xi}{R^2} \right] \end{aligned} \quad [q]$$

Podstawiając te wyrażenia na składowe naprężenia do związku [o], otrzymujemy odpowiadający im moment skręcający

$$(M_t)_2 = \frac{cG\pi a^4}{2} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{R^2} \right) \quad [r]$$

Przez wyznaczenie stąd stałej c i podstawienie jej wartości do wyrażeń q możemy znaleźć składowe naprężenia jako funkcje momentu skręcającego $(M_t)_2$. Wzdłuż poziomej średnicy przekroju poprzecznego pierścienia (rys. 218) $\zeta = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$ i z drugiego z wyrażeń q znajdziemy

$$(\tau_{z\theta})_2 = -cG \left(\xi + \frac{7}{8} \frac{\xi^2}{R} + \frac{13}{16} \frac{\xi^3}{R^2} + \frac{3a^2}{8R} + \frac{a^2\xi}{4R^2} \right)$$

Dla wewnętrznego punktu i , $\xi = a$ i stąd mamy

$$(\tau_{z\theta})_i = -cGa \left(1 + \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{17}{16} \frac{a^2}{R^2} \right)$$

Dla zewnętrznego punktu O , $\xi = -a$ i mamy

$$(\tau_{z\theta})_o = cGa \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{17}{16} \frac{a^2}{R^2} \right)$$

Stosując związek [r], otrzymamy wartości tych naprężeń w postaci

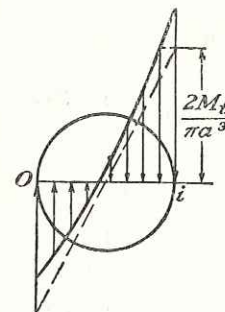
$$(\tau_{z\theta})_i = \frac{-2M_t}{\pi a^3} \frac{1 + \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{17}{16} \frac{a^2}{R^2}}{1 + \frac{3}{16} \frac{a^2}{R^2}} = -\frac{2M_t}{\pi a^3} \left(1 + \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{7}{8} \frac{a^2}{R^2} \right)$$

$$(\tau_{z\theta})_o = \frac{2M_t}{\pi a^3} \left(1 - \frac{5}{4} \frac{a}{R} + \frac{7}{8} \frac{a^2}{R^2} \right)$$

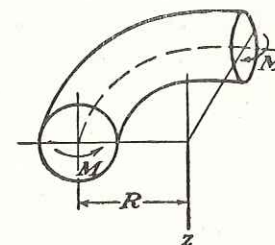
Obliczenia dalszych przybliżeń wskazują, że ostateczne wyrażenie dla największej wartości naprężenia stycznego można przyjąć w postaci¹⁾

$$(\tau_{z\theta})_i = -\frac{2PR}{\pi a^3} \cdot \frac{1 - (a/R) + \frac{1}{4} \frac{a}{R} + \frac{1}{16} \left(\frac{a}{R} \right)^2}{1 - \frac{3}{16} \frac{(a/R)^2}{1 - (a/R)^2}} \quad [235]$$

Rozkład naprężeń stycznych wzdłuż poziomej średnicy w przypadku $a/R = 1/5$ pokazany jest na rys. 220. Dla porównania linią kreskowaną zaznaczono pierwsze przybliżenie, które otrzymaliśmy przez zastosowanie równania dla wału kołowego²⁾.



Rys. 220



Rys. 221

Opisana metoda została także zastosowana do zagadnienia skręcania wycinków pierścienia o eliptycznych i prostokątnych przekrojach poprzecznych³⁾. Dla przekroju kwadratowego o bokach $2a$, trzecie przybliżenie daje nam następujące naprężenia w punkcie wewnętrznym

$$(\tau_{z\theta})_i = -\frac{0,6PR}{a^3} \left(1 + 1,20 \frac{a}{R} + 0,56 \frac{a^2}{R^2} \right) \quad [236]$$

131. Czyste zginanie wycinka kołowego pierścienia. Zastosowany w poprzednim paragrafie sposób kolejnych przybliżeń może być również wykorzystany przy rozważaniu czystego zginania wycinka kołowego pierścienia⁴⁾. Jeżeli dwie równe i przeciwnie skierowane pary sił M są przyłożone na końcach wycinka kołowego pierścienia w płaszczyźnie linii środkowej pierścienia (rys. 221), to powodują one odkształcenie symetryczne względem

¹⁾ Związek ten podał *O. Göhner* w liście do *S. Timoshenki*.

²⁾ Wspomniane poprzednio rozwiązania elementarne (por. str. 337) dają dla $(\tau_{z\theta})_i$ wartości pozostające w dobrej zgodności z wynikami, obliczonymi ze związku [235].

³⁾ *Göhner*, loc. cit.

⁴⁾ *Göhner*, loc. cit.

osi z , a naprężenia styczne $\tau_{r\theta}$ i $\tau_{\theta z}$ w południkowych przekrojach pierścienia są równe zero. Pozostałe cztery składowe naprężenia muszą spełniać równania równowagi dla przypadku symetrycznego odkształcenia (por. par. 116):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad [a]$$

oraz odpowiednie równania ciągłości odkształceń (patrz równania [g] par. 116)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0 \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} &= 0 \end{aligned} \quad [b]$$

Biorąc na przykład pierścień o stałym kołowym przekroju poprzecznym i wprowadzając zamiast r i z nowe współrzędne (rys. 218)

$$\xi = R - r; \quad \zeta = z \quad [c]$$

sprowadzimy równania [a] i [b] do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} - \frac{\sigma_\xi - \sigma_\theta}{R - \xi} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} - \frac{\tau_{\xi\zeta}}{R - \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} - \frac{2}{(R - \xi)^2} (\sigma_\xi - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \xi} + \frac{2}{(R - \xi)^2} (\sigma_\xi - \sigma_\theta) - \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \xi} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{\xi\zeta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tau_{\xi\zeta}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{R - \xi} \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial \xi} - \frac{1}{(R - \xi)^2} \tau_{\xi\zeta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi \partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad [d]$$

Jako pierwsze przybliżenie weźmiemy ten sam rozkład naprężeń, który występuje przy czystym zginaniu belek pryzmatycznych. Wtedy

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi)_0 = (\sigma_\zeta)_0 = (\tau_{\xi\zeta})_0 &= 0 \\ (\sigma_\theta)_0 &= -cE\xi \end{aligned} \quad [f]$$

gdzie

$$c = \frac{4M}{\pi a^4 E}$$

Aby otrzymać drugie przybliżenie, przyjmijmy, że ξ jest małe w porównaniu z R ; pominiemy iloczyny ξ/R oraz małe poprawki naprężeń jako wielkości małe wyższego rzędu. Wtedy równania [d] i [e] przyjmą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_\xi)_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (\tau_{\xi\zeta})_1}{\partial \zeta} - \frac{cE\xi}{R} &= 0 \\ \frac{\partial (\tau_{\xi\zeta})_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (\sigma_z)_1}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad [d']$$

$$\Delta (\sigma_\xi)_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\Theta)_1}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\Delta (\sigma_\theta)_1 + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{1+\nu} \right) cE = 0 \quad [e']$$

$$\Delta (\sigma_z)_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\Theta)_1}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$\Delta (\tau_{\xi\zeta})_1 + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\Theta)_1}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

gdzie Δ oznacza $\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \zeta^2$. Wprowadzimy obecnie funkcję naprężeń Φ_1 . Przez przyjęcie

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi)_1 &= \frac{cE}{2R} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2) + \frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} \\ (\sigma_\zeta)_1 &= \frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} \\ (\tau_{\xi\zeta})_1 &= -\frac{cE}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi \partial \zeta} \end{aligned} \quad [g]$$

spełnimy równania [d']. Podstawiając [g] do równań [e'], otrzymamy, że funkcja naprężeń Φ_1 powinna spełniać równanie

$$\Delta \Delta \Phi_1 = -\frac{1+2\nu}{1+\nu} \quad [h]$$

Warunki brzegowe dla funkcji Φ_1 otrzymamy z równań [12]. Ponieważ pierwszy człon w wyrażeniu na $(\sigma_\xi)_1$ jest równy zero na kołowym brzegu i jest

$$l = \frac{d\zeta}{ds}; \quad m = -\frac{d\xi}{ds}$$

znajdziemy, że

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) = 0; \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) = 0$$

W ten sposób $\partial \Phi_1/\partial \zeta$ i $\partial \Phi_1/\partial \xi$ są stałe na brzegu i możemy przyjąć, że Φ_1 i $d\Phi_1/dn$ są na brzegu równe zero. Równanie [h] wraz z tymi warunkami brzegowymi wyznacza w zupełności funkcję naprężeń Φ_1 . Warto zauważyć, że równanie [h] i powyższe warunki brzegowe są identyczne z równaniami płyty utwierdzonej na brzegu i równomiernej obciążonej. W przypadku płyty kołowej znamy powierzchnię ugięcia. Ugięcie to daje nam wyrażenie na funkcję naprężeń

$$\Phi_1 = -\frac{1+2\nu}{64(1+\nu)} (\xi^2 + \zeta^2 - a^2)^2 \quad [k]$$

Podstawiając ją do związków [g], dostaniemy składowe naprężenia

$$\begin{aligned} (\sigma_\xi)_1 &= \frac{cE}{16R(1+\nu)} [(7+6\nu)(\xi^2 - a^2) + (5+2\nu)\zeta^2] \\ (\sigma_\zeta)_1 &= -\frac{cE(1+2\nu)}{16R(1+\nu)} (3\xi^2 + \zeta^2 - a^2) \\ (\tau_{\xi\zeta})_1 &= \frac{cE}{8R} \frac{1+2\nu}{1+\nu} \xi\zeta \end{aligned} \quad [l]$$

Podstawiając te wyrażenia do równań [e'], znajdziemy

$$\frac{\partial^2 (\sigma_\theta)_1}{\partial \xi^2} = -\frac{cE(4+5\nu+2\nu^2)}{2R(1+\nu)}$$

$$\frac{\partial^2 (\sigma_\theta)_1}{\partial \zeta^2} = \frac{cE(3\nu+2\nu^2)}{2R(1+\nu)}$$

$$\frac{\partial^2 (\sigma_\theta)_1}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

Całkując te równania oraz dobierając stałe całkowania tak, aby rozkład naprężeń normalnych na przekroju poprzecznym pierścienia był statycznie równoważny momentowi zginającemu M , dostaniemy

$$(\sigma_\theta)_1 = -\frac{4M}{\pi a^4} \left[\xi + \frac{(8 + 10\nu + 4\nu^2)\xi^2 - (6\nu + 4\nu^2)\zeta^2 - (2 + \nu)a^2}{8(1 + \nu)R} \right] \quad [m]$$

Biorąc $\zeta = 0$ i $\xi = a$, otrzymamy naprężenie w wewnętrznym punkcie i (rys. 218)

$$(\sigma_\theta)_1 = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[1 + \frac{6 + 9\nu + 4\nu^2}{8(1 + \nu)} \frac{a}{R} \right]$$

Dla $\nu = 0,3$ powyższe równanie przyjmuje postać następującą

$$(\sigma_\theta)_1 = -\frac{4M}{\pi a^3} \left(1 + 0,87 \frac{a}{R} \right) \quad [n]$$

Obliczenia dalszych przybliżeń dają w wyniku następujące wyrażenie na naprężenia w punkcie wewnętrznym¹⁾ $\xi = a$:

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[1 + 0,87 \frac{a}{R} + \frac{0,64(a/R)^2}{1 - (a/R)} \right] \quad [p]$$

Elementarna teoria zginania prętów zakrzywionych oparta na założeniu, że przekrój poprzeczny pozostaje płaski, oraz pomijająca naprężenia σ_r , daje nam w tym przypadku²⁾

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{\pi a^3} \left[1 + 0,75 \frac{a}{R} + 0,50 \frac{a^2}{R^2} + \dots \right]$$

¹⁾ Wzór ten podał *O. Göhner* w liście do *S. Timoshenko*.

²⁾ Por. *S. Timoshenko*: „Strength of Materials“, 2 wyd. tom 2, str. 73.

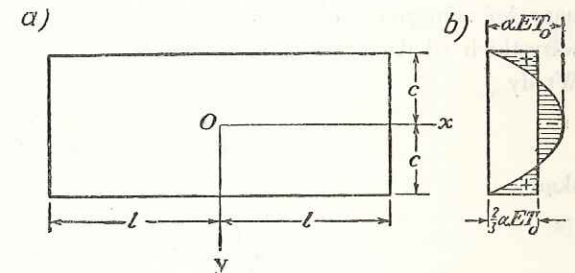
ROZDZIAŁ 14

NAPRĘŻENIA CIEPLNE

132. Najprostsze przypadki rozkładu naprężeń cieplnych. Jedną z przyczyn powstawania naprężeń wstępnych w ciele jest nierównomierne ogrzanie. Ze wzrostem temperatury elementy ciała rozszerzają się. Takie rozszerzanie w ogólności nie może następować swobodnie w ośrodku ciągłym i powoduje pojawienie się w nim naprężeń wywołanych ogrzaniem. W wielu przypadkach obliczeń konstrukcji maszynowych, takich jak turbiny parowe lub silniki Diesla, naprężenia cieplne posiadają duże znaczenie praktyczne i muszą być rozważone bardziej szczegółowo.

Prostsze zagadnienia naprężeń cieplnych można z łatwością sprowadzić do rozpatrywanych już poprzednio zagadnień, w których obciążenie przyłożone jest wyłącznie na brzegu. Jako pierwszy przykład rozpatrzmy cienką płytę prostokątną o stałej grubości, w której temperatura T jest parzystą funkcją y (rys. 222) i nie zależy od x i z . Rozszerzenie cieplne T w kierunku podłużnym może być usunięte przez przyłożenie do każdego elementu płyty podłużnego naprężenia ściskającego

$$\sigma'_x = -\alpha TE \quad [a]$$



Rys. 222

Ponieważ płyta może rozszerzać się swobodnie w kierunku poprzecznym, przyłożenie naprężeń [a] nie wywoła żadnych naprężeń w tym kierunku i dla utrzymania naprężeń [a] w całej płycie należy rozłożyć siły ściskające o wielkości [a] wyłącznie na krawędziach płyty. Te siły ściskające uniemożliwiają rozszerzanie się płyty w kierunku osi x pod wpływem przyrostu temperatury T . Aby otrzymać naprężenia cieplne w płycie swobodnej od obciążeń zewnętrznych, musimy na naprężenia [a] nałożyć naprężenia wywołane w płycie przez siły rozciągające o wielkości αTE , rozłożone na jej końcach. Siły te mają wypadkową

$$\int_{-c}^{+c} \alpha TE dy$$

i w dostatecznej odległości od końców wywołają rozłożone w przybliżeniu równomiernie naprężenie o wielkości

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy$$

tak, że naprężenie cieplne w płycie o brzegach swobodnych wyniesie w odpowiedniej odle-