Zajęcia 10

Przykład 1

Znajdź rozwiązanie poniższego zagadnienia

$$4u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < \pi \qquad t > 0$$
$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \qquad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

Jest to zagadnienie przewodnictwa cieplnego z warunkami brzegowymi typu Neumanna, gdyż dana jest pochodna normalna na brzegu. Tak sformułowany warunek brzegowy oznacza w tym wypadku, że przez końce pręta przepływa zerowy strumień ciepła (de facto – nie przepływa żaden strumień ciepła).

Przy rozwiązaniu tego zagadnienia postępujemy według podanego już schematu:

1. Zakładamy $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ i wstawiamy do wyjściowego równania.
2. Z równania otrzymujemy równość:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{4T} = -\lambda$$

3. Tożsamość ta prowadzi do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad 0 < x < \pi \qquad (*)$$
$$T'(t) + 4\lambda T(t) = 0 \qquad t > 0 \qquad (**)$$

4. Szukamy wartości własnych rozwiązując równanie $(*)$ wraz z dołączonymi warunkami brzegowymi

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \xRightarrow[wynika]{} X'(0) = X'(\pi) = 0 \quad (gdzie\ T(t) \neq 0)$$

Przeprowadzamy dyskusję dla trzech przypadków

dla $\lambda < 0$

$$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}} \qquad \to \qquad X'(x) = \sqrt{-\lambda}\ C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}\, C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

Stąd

$$X'(0) = \sqrt{-\lambda}\,\left(\,C_1 e^{0\sqrt{-\lambda}} - C_2 e^{-0\sqrt{-\lambda}}\,\right) = 0 \;\rightarrow\; C_1 - C_2 = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{C_1 = C_2}$$

$$X'(\pi) = \sqrt{-\lambda}C_1\left(e^{\pi\sqrt{-\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{C_1 = 0}$$

Z powyższych rozważań otrzymujemy informację, że dla $\boldsymbol{\lambda < 0}$ **otrzymujemy rozwiązanie trywialne.**

dla $\boldsymbol{\lambda = 0}$

$$X(x) = ax + b \;\rightarrow\; X'(x) = a$$

Zatem

$$X'(0) = \boldsymbol{a = 0}$$

$$X'(\pi) = a = 0 \text{ daje nam } \mathbf{b} \text{ dowolne, niezależne od } \mathbf{x}$$

To rozumowanie prowadzi do stwierdzenia, że **dla** $\boldsymbol{\lambda = 0}$**:**

$$\boldsymbol{X(x) = b}$$

dla $\boldsymbol{\lambda > 0}$

$$X(x) = C_1 cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + C_2\, sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) \;\rightarrow X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\, sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) + C_2\,\sqrt{\lambda}\, cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)$$

Stąd

$$X'(0) = -C_1\sqrt{\lambda}\, sin\left(0\cdot\sqrt{\lambda}\right) + C_2\,\sqrt{\lambda}\, cos\left(0\cdot\sqrt{\lambda}\right) = 0 \;\rightarrow\; C_2\sqrt{\lambda} = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{C_2 = 0}$$

$$X'(\pi) = -C_1\sqrt{\lambda}\, sin\left(\pi\cdot\sqrt{\lambda}\right) + 0\cdot\sqrt{\lambda}\, cos\left(\pi\cdot\sqrt{\lambda}\right) = 0 \;\rightarrow\; -C_1\sqrt{\lambda}\, sin\left(\pi\cdot\sqrt{\lambda}\right) = 0$$

Z czego wynikają **wartości własne:**

$$\boxed{sin\left(\pi\cdot\sqrt{\lambda}\right) = 0 \;\rightarrow\; \pi\cdot\sqrt{\lambda} = n\pi \;\rightarrow \boldsymbol{\lambda_n = n^2 \quad dla\; n = 1, 2, 3 \ldots}}$$

Dostajemy też wzór na **funkcje własne**, przyjmując arbitralnie $C_1 = 1$:

$$\boxed{X_n(x) = cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) = cos(nx) \quad dla \;\; n = 1, 2, 3 \ldots}$$

5. Dla otrzymanych wartości własnych $\lambda \geq 0$ poszukujemy rozwiązania równania $(**)$:

$$T'(t) + 4\lambda T(t) = 0$$

Dla $\lambda = 0$, równanie przyjmuje następującą postać:

$$T'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad T(t) = const = C$$

Stąd

$$\boxed{u(x,t) = X(x)T(t) = b \cdot C = B_0}$$

Dla $\lambda > 0$ mamy

$$T'(t) = -4\lambda T \underset{stad}{\Longrightarrow} \int \frac{dT}{T} = -4\lambda \int dt \quad \rightarrow \ln T = -4\lambda t + \ln B$$

z czego wynika

$$ln\frac{T}{B} = -4\lambda t \quad \rightarrow T = Be^{-4\lambda t}$$

Wstawiając $\lambda_n = n^2 \quad dla\, n = 1, 2, 3 \ldots$

$$T_n(t) = B_n e^{-4n^2 t}$$

i dostajemy wyrażenie

$$\boxed{u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = B_n\, cos(nx) e^{-4n^2 t}}$$

Dokonujemy superpozycji rozwiązań dla $\lambda = 0$ i $\lambda > 0$. Możemy to zrobić, bo równania różniczkowe zwyczajne były liniowe.

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\boxed{\boldsymbol{u(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx) e^{-4n^2 t}}}$$

6. Realizacja warunku początkowego pozwala znaleźć nieznane współczynniki B_n $dla\ n = 0,1,2, \dots$

$$u(x,0) = f(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx)$$

Wyjściowe równanie opisuje zmiany temperatury w jednorodnym, izolowanym i skończonym pręcie, zatem stałą B_0 można interpretować jako średnią początkową temperaturę.

Współczynniki B_0 i B_n $dla\ n = 1,2,3, \dots$ otrzymujemy ze wzorów:

$$\mathbf{B_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{f(x)dx}$$

$$\mathbf{B_n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{f(x)\cos(nx)\,dx}$$

Przykład 2

Rozważmy przypadek, gdy temperatura na jednym końcu pręta jest stała i różna od zera (mamy niejednorodny warunek brzegowy).

$$u(l,t) = u_0 \qquad t \geq 0$$

Nasze zagadnienie wygląda wtedy następująco:

$$\boxed{\begin{array}{c} u_t = ku_{xx} \qquad 0 < x < l \qquad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = u_0 \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad\qquad 0 \leq x \leq l \end{array}}$$

Niech

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{u_0 x}{l}$$

Podstawmy $u(x,t)$ w tej postaci do wyjściowego równania. Dostaniemy wtedy:

$$v_t = kv_{xx} \qquad 0 < x < l \qquad t > 0$$

$$v(0,t) = u(0,t) - \frac{u_0 \cdot 0}{l} = 0 \qquad\qquad t > 0$$

$$v(l,t) = u(l,t) - \frac{u_0 \cdot l}{l} = u_0 - u_0 = 0 \quad t > 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{u_0 x}{l} = f(x) - \frac{u_0 x}{l} \quad dla \quad 0 < x < l$$

Zatem zagadnienie, w którym pojawia się niejednorodny warunek brzegowy przekształcamy do postaci, w której obydwa warunki brzegowe są jednorodne. Następnie postępujemy według przedstawionego w poprzednich przykładach schematu.

W wyniku postępowania powinniśmy otrzymać rozwiązanie w postaci:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l}\int_0^l \left(f(\tau) - \frac{u_0 \tau}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\tau}{l}\right)\right] d\tau \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{u_0 x}{l}$$

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

$$\boldsymbol{u_{tt} = 25 \cdot u_{xx} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \qquad t > 0}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = 2sin(2x) - 4sin(6x) \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$\boldsymbol{u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$\boldsymbol{u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0 \qquad t > 0}$$

Równanie Laplace'a

$$\Delta \boldsymbol{u}(\mathbb{x}) = \mathbf{0} \quad \text{gdzie } \mathbb{x} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ lub } \mathbb{x} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \ldots$$

$$\Delta \boldsymbol{u}(\mathbb{x}) = \lim_{V \to \{x_0\}} \frac{\int_V \Delta u \, dV}{|V|} \overset{GGO}{\Longleftrightarrow} \frac{\int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS}{|V|}$$

Wyrażenie w liczniku po prawej stronie oznacza sumaryczny przepływ wielkości u przez powierzchnię zamkniętą ∂V. Wielkość ta podzielona przez miarę zbioru V oznacza źródłowość u w zbiorze V.

Tym samym $\Delta \boldsymbol{u}(\mathbb{x}) = \mathbf{0}$ dla $x \epsilon V$ oznacza, że w obszarze V nie ma żadnych źródeł wielkości $\boldsymbol{u}$.

Przykładowe Interpretacje fizyczne:

- Stacjonarny rozkład temperatury w obszarze V, gdzie nie ma wewnętrznych źródeł ciepła.

- Rozkład potencjału w obszarze *V,* w którym nie ma rozmieszczonych żadnych źródeł ładunku.
- Przepływ ustalony płynu nieściśliwego bez występowania źródeł i upustów.

Wszelkie stacjonarne (niezależne od czasu) procesy falowe, dyfuzyjne lub związane z przewodnictwem cieplnym występujące w przestrzeni 2 lub 3 wymiarowej redukują się do postaci równania Laplace'a.

Weźmy przykładowo równanie falowe dwuwymiarowe:

$$\boldsymbol{u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \xRightarrow{dla\ u_{tt}=0} u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow \Delta u = 0}$$

Konkretny przykład fizyczny:

Rozpatrzmy przepływ ustalony. Załóżmy, że płyn jest bezwirowy, zatem $rot\ \vec{v} = 0$ (gdzie $\vec{v}$ pole prędkości niezależne od czasu). Załóżmy dodatkowo , że płyn jest nieściśliwy i nie ma żadnych źródeł.
Wtedy $div\ \vec{v} = 0$.
Z faktu, że

$$\boldsymbol{rot\ \vec{v}\ = 0 \xRightarrow[wynika]{} \vec{v} = grad\ \phi}$$

gdzie ϕ oznacza potencjał prędkości.

$$\boldsymbol{div\ \vec{v} = div\ grad\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta\phi = 0}$$

Równanie Poissona

$$\Delta \boldsymbol{u}(\mathbb{x}) = -\boldsymbol{f}(\mathbb{x})$$

Jest to równanie reprezentujące rozkład funkcji u w obszarze V, znajdującym się w równowadze, gdy występują wewnętrzne źródła, wyrażone w równaniu przez jego prawą stronę w postaci $-f(\mathbb{x})$.

Równania Laplace'a i Poissona są równaniami typu eliptycznego. Dla takich równań stawia się tylko zagadnienia brzegowe.

Zagadnienia brzegowe dla równania Laplace'a

Zagadnienie brzegowe I rodzaju – tak zwane zagadnienie Dirichleta

$$\Delta \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \ \ \textbf{w obszarze} \ \ \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\partial V} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Przykładowa interpretacja fizyczna:

Jest to zagadnienie poszukiwania stacjonarnego rozkładu temperatury w ośrodku *V*, jeżeli znane są wartości tej temperatury na powierzchni ograniczającej obszar *V*.

Zagadnienie brzegowe II rodzaju – tak zwane zagadnienie Neumanna

$$\Delta \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \ \ \textbf{w obszarze} \ \ \boldsymbol{V}$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial V} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$$

Przykładowa interpretacja fizyczna:

Jest to zagadnienie poszukiwania stacjonarnego rozkładu temperatury w ośrodku V, pod warunkiem, że znane jest natężenie strumienia cieplnego na powierzchni ∂V ograniczającej obszar V.

Może być też zadany warunek III rodzaju nazywany zagadnieniem Robina.

$$\boldsymbol{\Delta u = 0 \ \ \text{w obszarze} \ \ V}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial n} + h(x) \cdot u = f(x) \ \ na\ brzegu\ \partial V}$$

Warunek ten może nam przykładowo przekazywać informację na temat wymiany ciepła z otaczającym obszar V ośrodkiem.

Rozwiązanie równania Laplace'a nazywane jest funkcją harmoniczną.

Słaba zasada maksimum

Niech V będzie ograniczonym obszarem, a funkcja $u(x, y) \epsilon C^2$ w obszarze V i do C^1 na jego brzegu. Ponadto niech $u(x, y)$ będzie funkcją harmoniczną. Wtedy maksimum czy minimum tej funkcji jest osiągane na brzegu ∂V.

Mocna zasada maksimum

Niech $u(x, y)$ będzie funkcją harmoniczną w obszarze V i na jego brzegu. Jeżeli u osiaga ekstremum (minimum lub maksimum) w wewnętrznym punkcie V, wtedy u jest stałe.

Inaczej można wyrazić to w następujący sposób:

Wartości maksymalne i minimalne są osiągane na brzegu V, nigdy wewnątrz, chyba, że funkcja $u \equiv const$.

Przykład z OPEN AGH E-PODRĘCZNIKI

PRZYKŁAD

Przykład 2:

Rozważmy równanie

$$\Delta u = 0,$$

gdzie $u = u(x, y)$, (x, y) należy do koła jednostkowego.
Przyjmujemy współrzędne biegunowe $x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$
Zakładamy, że rozwiązanie spełnia warunek brzegowy

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta,$$

dla $0 \le \theta < 2\pi.$
Zgodnie z zasadą maksimum rozwiązanie naszego problemu przyjmuje wartość maksymalną na brzegu okręgu. Wynika stąd, że $-1 \le u(x, y) \le 1$.