Zajęcia 7

Zadanie 1

Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$\boldsymbol{yu_{xx} + 3yu_{xy} + 3u_x = 0} \quad \text{przy założeniu, że } y \neq 0$$

$$\boldsymbol{a = y}, \ \ \boldsymbol{b = 3y}, \ \ \boldsymbol{c = 0} \underset{stąd}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\delta} = (3y)^2 - 4 \cdot y \cdot 0 = \boldsymbol{9y^2 > 0} \ \ (\boldsymbol{H})$$

Zatem nasze równanie jest typu hiprebolicznego i w takim razie ma dwie charakterystyki , z których wyznaczamy zmienne $\xi \ i \ \eta$.

Rozpatrzmy pierwsze równanie:

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b - \sqrt{\delta}} \ \to \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3y - \sqrt{9y^2}} \to \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{0} \ ?$$

Nasze równanie wydaje sie niepoprawne, ale musimy pamiętać, że de facto rozwiązujemy równanie różniczkowe o postaci:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{2y} \ \underset{co\ daje\ nam}{\Longrightarrow} \int dy = \int 0dx \underset{skąd}{\Longrightarrow} \boldsymbol{y = C_1}$$

Rozpatrzmy drugie równanie charakterystyczne:

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b + \sqrt{\delta}} \ \to \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3y + \sqrt{9y^2}} \to \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{6y}$$

Możemy to ostatnie równanie przemnożyć przez $6y$ i scałkować. Dostaniemy wtedy:

$$3\int dx = \int dy \ \to 3x + C_2 = y \underset{skąd}{\Longrightarrow} \boldsymbol{C_2 = y - 3x}$$

Weźmy zatem nowe zmienne jako:

$$\boldsymbol{\xi = C_1 = y} \quad i \quad \boldsymbol{\eta = C_2 = y - 3x}$$

Policzmy Jakobian przekształcenia:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-3) \neq 0$$

Policzmy teraz pochodne w nowych zmiennych, korzystając ze wzorów i informacji, że: $\xi_x = 0$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = -3$, $\eta_y = 1$ i pochodne $\xi_{xx} = \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0.$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi\xi_{xx} + w_\eta\eta_{xx} =$$

$$w_{\xi\xi} \cdot 0^2 + 2w_{\xi\eta} \cdot 0 \cdot (-3) + w_{\eta\eta} \cdot (-3)^2 + w_\xi \cdot 0 + w_\eta \cdot 0 =$$

$$9w_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi\xi_{xy} + w_\eta\eta_{xy} =$$

$$w_{\xi\xi} \cdot 0 \cdot 1 + w_{\xi\eta} \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)) + w_{\eta\eta} \cdot (-3) \cdot 1 + w_\xi \cdot 0 + w_\eta \cdot 0 =$$

$$-3w_{\xi\eta} - 3w_{\eta\eta}$$

Nie mamy w równaniu pochodnej u_{yy}, ale musimy policzyć pochodną u_x:

$$u_x = w_\xi\xi_x + w_\eta\eta_x = w_\xi \cdot 0 + w_\eta \cdot (-3) = -3w_\eta$$

Wstawiamy obliczone pochodne do wyjściowego równania:

$$yu_{xx} + 3yu_{xy} + 3u_x = 0$$

$$y \cdot 9w_{\eta\eta} + 3y \cdot \left(-3w_{\xi\eta} - 3w_{\eta\eta}\right) + 3 \cdot \left(-3w_\eta\right) = 0 \underset{stąd}{\Longrightarrow}$$

$$9y \cdot w_{\eta\eta} - 9y \cdot w_{\xi\eta} - 9y \cdot w_{\eta\eta} - 9w_\eta = 0$$

Po zredukowaniu członów i podzieleniu stronami przez (-9) dostaniemy:

$$yw_{\xi\eta}+w_\eta=0 \underset{wiedząc, że\ y=\xi}{\Longleftrightarrow} \xi w_{\xi\eta}+w_\eta=0$$

Zapiszmy ostateczną postać kanoniczną równania:

$$\mathbf{w_{\xi\eta}=-\frac{1}{\xi}w_\eta}$$

Zauważmy, że w tym wypadku $\boldsymbol{G(\xi,\eta,w,w_\xi,w_\eta)=-\frac{1}{\xi}w_\eta\neq 0}$

Dokonajmy podstawienie: $\boldsymbol{v=w_\eta}$ wtedy powyższe równanie przyjmie postać:

$$\boldsymbol{v_\xi=-\frac{1}{\xi}v \underset{wygodniejsz\ forma}{\Longrightarrow} \xi v_\xi=-v}$$

Dostaliśmy równanie RRC I rzędu, które rozwiązujemy metodą charakterystyk dla równań liniowych i quasiliniowych. Funkcja $\boldsymbol{v}$ zależy od dwóch argumentów $\boldsymbol{\xi\ i\ \eta}$.

Wektor $\boldsymbol{\vec{V}=(a,b,f)=(\xi,0,-v)}$ (wektor $\vec{V}$ z dużej litery dla odróżnienia od funkcji niewiadomej v). Zatem możemy napisać tożsamość:

$$\boldsymbol{\frac{d\xi}{\xi}=\frac{d\eta}{0}=-\frac{dv}{v}}$$

Dostajemy dwa równania różniczkowe zwyczajne. Pierwsze możemy zapisać następująco:

$$\boldsymbol{\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{0}{\xi}}$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy

$$\boldsymbol{\int d\eta=\int 0\,d\xi \underset{dostajemy}{\Longrightarrow} \eta=C_1}$$

Drugie zapiszemy od razu rozdzielając zmienne:

$$\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{dv}{v}$$

Całkujemy:

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = -\int \frac{dv}{v} \;\rightarrow\; ln\, \xi = -ln\, v + ln\, C_2 \;\rightarrow\; ln\, \xi = ln\, \frac{C_2}{v}$$

Co w wyniku daje:

$$\xi = \frac{C_2}{v} \rightarrow C_2 = \xi v$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania $\xi v_\xi = -v$ dostaniemy z równania:

$$C_2 = f(C_1) \xRightarrow[z\ czego\ wynika]{} \xi v = f(\eta)$$

Zatem wyznaczyliśmy $v = \frac{1}{\xi} f(\eta)$. Możemy więc wrócić do równania wynikającego z podstawienia $v = w_\eta$ i zapisać:

$$w_\eta = \frac{1}{\xi} f(\eta) \rightarrow \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} f(\eta)$$

Scałkujmy je po $d\eta$:

$$\int \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{\xi} \int f(\eta) d\eta \xRightarrow[podstawmy\ h(\eta) = \int f(\eta) d\eta]{} w = \frac{1}{\xi} h(\eta) + g(\xi)$$

Gdzie $g(\xi)$ jest „stałą” zależną od zmiennej, po której nie całkujemy.

Pamiętając, że $\boldsymbol{\xi = y,\ \eta = y - 3x\ \ i\ \ w(\xi,\eta) = u(\xi(x,y).\eta(x,y))}$ możemy zapisać rozwiązanie ogólne w zmiennych $\boldsymbol{x, y}$:

$$\boldsymbol{u(x,y) = \frac{1}{y}h(y-3x) + g(y)}$$

Zadanie 2

Dane jest równanie o postaci:

$$\boldsymbol{x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0}$$

Udowodnij, że jest to równanie paraboliczne. Sprowadź je do formy kanonicznej a następnie znajdź rozwiązanie ogólne dla półpłaszczyzny $x > 0$.

$$\boldsymbol{a = x^2},\ \ \boldsymbol{b = -2xy},\ \ \boldsymbol{c = y^2} \underset{stąd}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\delta} = (-2xy)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot y^2 = \boldsymbol{0}\ \ (\boldsymbol{P})$$

Udowodniliśmy zatem, że mamy równanie typu parabolicznego. Ma ono jedną charakterystykę o postaci:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b}} \ \ \rightarrow\ \ \frac{dx}{2x^2} = \frac{dy}{-2xy} \ \ \rightarrow\ \ \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \ \ \rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y}$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\ln x = -\ln y + \ln C_1 \ \ \rightarrow \ln x = \ln \frac{C_1}{y} \ \underset{co\ daje}{\Longrightarrow} \ \boldsymbol{C_1 = xy}$$

Weźmy $\boldsymbol{\eta = xy}$ i załóżmy, że $\boldsymbol{\xi = x}$. Jakobian przekształcenia:

$$\boldsymbol{J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x > 0}\ (z\ warunków\ zadania)$$

Zapiszmy wyrażenia na pochodne. Zauważmy, że w równaniu pojawiają się pochodne I rzędu.

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x = w_\xi + w_\eta y$$

$$u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y = w_\eta x$$

Pochodne drugiego rzędu liczymy ze wzorów podanych w poprzednich zadaniach (prośba o przeliczenie) . W wyniku dostajemy:

$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + 2yw_{\xi\eta} + y^2 w_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = xw_{\xi\eta} + xyw_{\eta\eta} + w_\eta$$

$$u_{yy} = x^2 w_{\eta\eta}$$

Wstawiamy pochodne do równania wyjściowego:

$$\boldsymbol{x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0}$$

Dostajemy:

$$\boldsymbol{x^2(w_{\xi\xi} + 2yw_{\xi\eta} + y^2 w_{\eta\eta}) - 2xy(xw_{\xi\eta} + xyw_{\eta\eta} + w_\eta) +}$$

$$\boldsymbol{y^2(x^2 w_{\eta\eta}) + x(w_\xi + w_\eta y) + y(w_\eta x) = 0}$$

$$\boldsymbol{x^2 w_{\xi\xi} + 2x^2 yw_{\xi\eta} + x^2 y^2 w_{\eta\eta} - 2x^2 yw_{\xi\eta} - 2x^2 y^2 w_{\eta\eta} - 2xyw_\eta +}$$

$$\boldsymbol{+x^2 y^2 w_{\eta\eta} + xw_\xi + xyw_\eta + xyw_\eta = 0}$$

Po uproszczeniu członów otrzymamy równanie:

$$x^2 w_{\xi\xi} + xw_\xi = 0 \xrightarrow[\text{dzielimy przez } x^2]{} w_{\xi\xi} + \frac{1}{x} w_\xi = 0$$

Pamiętając , że $\xi = x$ i przenosząc człon z pochodną w_ξ na prawą stronę, dostajemy postać kanoniczną równania wyjściowego:

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi} = -\frac{1}{\xi} w_\xi}$$

Podstawiając $\boldsymbol{v = w_\xi}$ otrzymamy równanie identyczne z równaniem analizowanym w poprzednim zadaniu:

$$\boldsymbol{v_\xi = -\frac{1}{\xi}v \xRightarrow[\text{wygodniejsza forma}]{} \xi v_\xi = -v}$$

Postępując więc analogicznie jak wcześniej dojdziemy do rozwiązania:

$$\boldsymbol{\xi v = f(\eta)}$$

Stąd $\boldsymbol{v = \frac{1}{\xi}f(\eta)}$. Możemy więc wrócić do równania wynikającego z podstawienia $\boldsymbol{v = w_\xi}$ i zapisać:

$$\boldsymbol{w_\xi = \frac{1}{\xi}f(\eta) \rightarrow \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}f(\eta)}$$

Scałkujmy je po $d\xi$:

$$\int \frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi = \int \frac{1}{\xi}f(\eta)d\,\xi \;\; \rightarrow \mathrm{w} = \mathrm{f}(\eta)\int \frac{d\xi}{\xi} \;\; \rightarrow \boldsymbol{w = f(\eta)\ln \xi + g(\eta)}$$

Gdzie $\boldsymbol{g(\eta)}$ jest funkcją („stałą”) zależną od zmiennej, po której nie całkujemy.

Możemy teraz zapisać rozwiązanie ogólne w zmiennych x, y pamiętając, że $\boldsymbol{\xi = x}$, $\boldsymbol{\eta = xy \;\; i \;\; w(\xi,\eta) = u(\xi(x,y),\eta(x,y))}$.

Ma ono postać:

$$\boldsymbol{u(x,y) = f(xy)\ln x + g(xy)}$$

Równanie falowe jednowymiarowe

$$\boldsymbol{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0} \qquad -\infty < \boldsymbol{x} < \infty$$

Równanie powyższe opisuje drgania nieskończonej struny. Stała $\boldsymbol{c \neq 0}$ w równaniu oznacza prędkość falową.

Sprawdźmy do jakiego typu należy równanie falowe.

$$\boldsymbol{a = -c^2}, \ \ \boldsymbol{b = 0}, \ \ \boldsymbol{c = 1} \ \underset{stąd}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\delta} = (0)^2 - 4 \cdot (-c^2) \cdot 1 = 4c^2 > \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{H})$$

Zatem równanie falowe jest równaniem **hiperbolicznym.** Ma zatem dwie charakterystyki rzeczywiste o postaci:

$$(1) \qquad \frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b - \sqrt{\delta}}$$

$$(2) \qquad \frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b + \sqrt{\delta}}$$

Rozpatrzmy najpierw pierwszą z nich:

$$\frac{dx}{-2c^2} = \frac{dt}{0 - 2c} \xrightarrow[po \ przemnożeniu \ \ przez -2c^2]{} \int dx = c \int dt + C_1 \rightarrow \boldsymbol{C_1 = x - ct}$$

Nastepnie drugą:

$$\frac{dx}{-2c^2} = \frac{dt}{0 + 2c} \xrightarrow[po \ przemnożeniu \ \ przez -2c^2]{} \int dx = -c \int dt + C_2 \rightarrow \boldsymbol{C_2 = x + ct}$$

Dobierzmy zmienne $\xi \ i \ \eta$. Niech

$$\boldsymbol{\xi = x + ct} \quad i \quad \boldsymbol{\eta = x - ct}$$

Jakobian przekształcenia ma postać:

$$\boldsymbol{J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -c - c = -2c \neq 0}$$

W równaniu występują tylko drugie pochodne. Mają one po przeliczeniu postać:

$$u_{tt} = c^2\left(w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}\right)$$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$

Podstawmy te pochodne do równania falowego aby uzyskać postać kanoniczną:

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = \boldsymbol{c^2w_{\xi\xi} - 2c^2w_{\xi\eta} + c^2w_{\eta\eta}} - c^2w_{\xi\xi} \boldsymbol{- 2c^2w_{\xi\eta} - c^2w_{\eta\eta}} =$$

$$= \boldsymbol{-4c^2w_{\xi\eta} = 0 \;\; \rightarrow \;\; w_{\xi\eta} = 0 \;\; \rightarrow u_{\xi\eta} = 0}$$

Aby otrzymać postać ogólną rozwiązania wykonujemy przekształcenia:

$$\int \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi}\right) \mathrm{d}\eta = \int 0 \mathrm{d}\,\eta \quad \xRightarrow[\text{co daje nam}]{} \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi} = 0 + \mathrm{f}(\xi) = \mathrm{f}(\xi)$$

Zatem:

$$\int \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi = \int \mathrm{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \;\; \xRightarrow[\text{oznaczając } \mathrm{F}(\xi) = \int \mathrm{f}(\xi)\mathrm{d}\xi]{} \;\; \boldsymbol{u = F(\xi) + G(\eta)}$$

Postać ogólna rozwiązania równania falowego w zmiennych x, y:

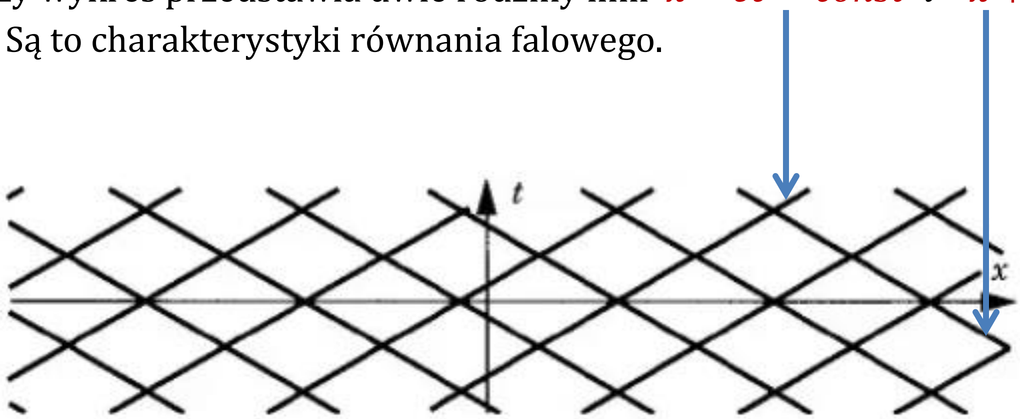
$$\boxed{\boldsymbol{u(x, y) = F(x + ct) + G(x - ct)}}$$

Funkcja $\boldsymbol{G(x - ct)}$ reprezezentuje ruch fali w prawo z prędkością $\boldsymbol{c}$ i jest nazywana falą poruszającą się do przodu lub inaczej falą przednią.

Funkcja $\boldsymbol{F(x + ct)}$ jest falą podróżującą w lewo z prędkością $\boldsymbol{c}$ i jest nazywana falą poruszającą się do tyłu lub inaczej falą tylną.

Każde rozwiązanie równania falowego jest sumą w ten sposób poruszających się fal.

Poniższy wykres przedstawia dwie rodziny linii $\boldsymbol{x - ct} = const$ i $\boldsymbol{x + ct} = \boldsymbol{const}$. Są to charakterystyki równania falowego.



.

Zaburzenie przenosi się tylko wzdłuż charakterystyk, nie wychodzi na zewnątrz i porusza się ze skończoną prędkością.

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego

$$\boldsymbol{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \quad -\infty < x < \infty}$$

$f(x)$ - określa pozycję początkową struny, lub pozycję wprowadzenia zaburzenia

$g(x)$ - określa prędkość poczatkową

Rozwiązanie powyższego zadania może być interpretowane jako propagacja (rozchodzenie się) fali dźwiękowej w bardzo długiej i wąskiej rurze albo drgania nieskończonej, idealnej struny.

Znając postać ogólną rozwiązania $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ oraz warunki początkowe poszukujemy nieznanych funkcji F i G. Policzmy najpierw pochodną $u_t(x,t)$:

$$u_t(x,t) = \frac{dF}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{dG}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$$

A następnie weźmy warunki początkowe:

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x)$$

Zapiszmy otrzymany układ równań w skrócie pamiętając, że wszytkie funkcje zależą od x.

$$\begin{cases} F + G = f \\ cF' - cG' = g \end{cases}$$

Zróżniczkujmy pierwsze równanie a drugie przekształćmy

$$\begin{cases} f' = F' + G' \\ \dfrac{g}{c} = F' - G' \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ najpierw dodając a potem odejmując stronami. W wyniku dostajemy:

$$\begin{cases} F' = \dfrac{1}{2}\left(f' + \dfrac{g}{c}\right) \\ G' = \dfrac{1}{2}\left(f' - \dfrac{g}{c}\right) \end{cases}$$

Scałkujmy powyższe równania po zmiennej x.

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x)dx + A$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(x)dx + B$$

Wiemy, że $f(x) = F(x) + G(x)$ wtedy $f(x) = f(x) + A + B \underset{stąd}{\Longrightarrow} A + B = 0$

Uogólnijmy nasze rozwiązanie. Niech $z = x$. Wtedy otrzymujemy „przepisy" na funkcje $F\ i\ G$.

$$F(z) = \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2c}\int_{z_0}^{z} g(z)dz + A$$

$$G(z) = \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2c}\int_{z_0}^{z} g(z)dz + B$$

Zauważmy, że z_0 to dowolna stała. A z warunku $F + G = f$ wynika, że $A + B = 0$. Znając przepisy na funkcje $F\ i\ G$ możemy znaleźć rozwiązanie ogólne:

$$\boldsymbol{u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) =}$$

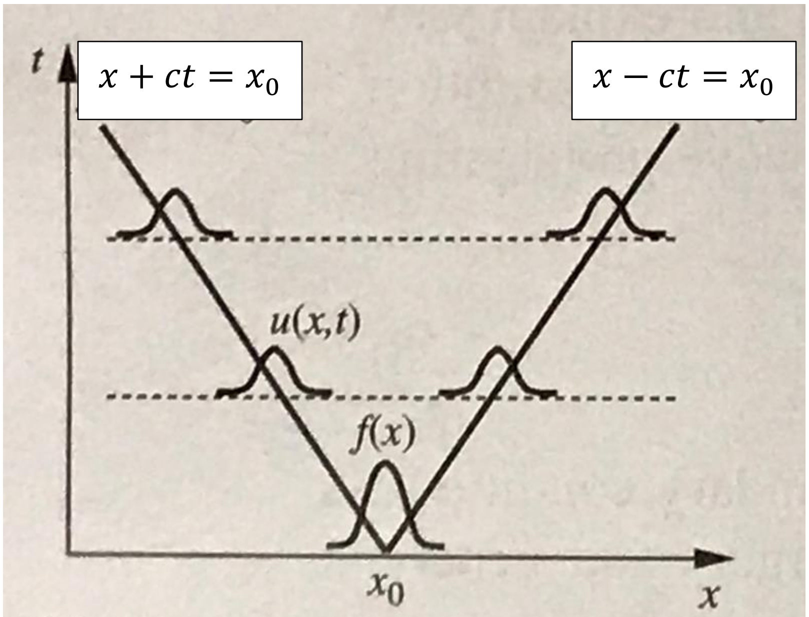
$$\frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(z)dz + A + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(z)dz + B =$$

$$\boxed{= \boldsymbol{\frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz}}$$

Powyższy wzór nosi nazwę **formuły d'Alemberta dla równania falowego.** Jest to unikalne rozwiązanie równanie falowego jednowymiarowego, przy czym funkcja $f\epsilon C^2$ a funkcja $g\epsilon C^1$.

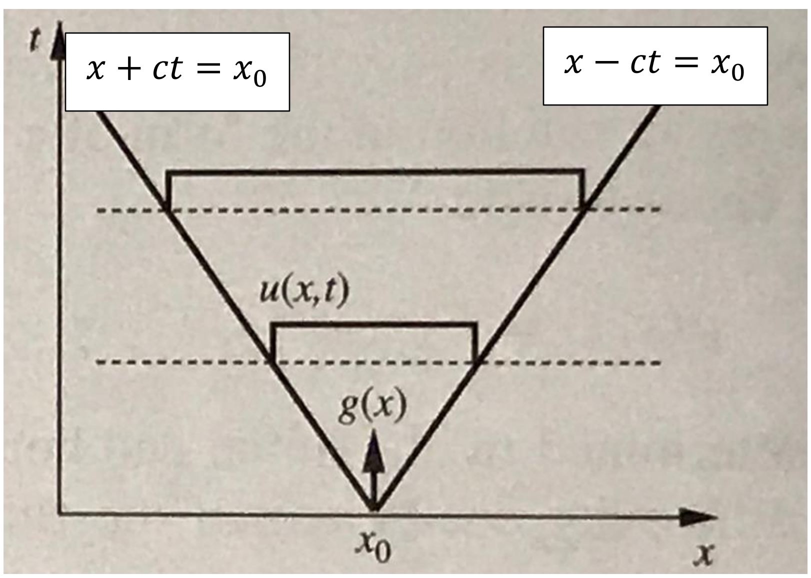
Ważne jest aby zauważyć, że rozwiązanie $u(x,t)$ zależy tylko od początkowych wartości funkcji $\boldsymbol{f}$ w punktach $\boldsymbol{x-ct}$ i $\boldsymbol{x+ct}$ oraz wartości funkcji $\boldsymbol{g}$ między tymi dwoma punktami. Innymi słowy wcale nie zależy od wartości początkowych poza przedziałem $\boldsymbol{x-ct \le x \le x+ct}$. Przedział ten nazywany jest domeną zależności zmiennych (x,t).

Pierwsza część rozwiązania może być zilustrowana następująco:



Początkowe zaburzenie $u(x, 0) = f(x)$ powstałe w otoczeniu punktu x_0 (np pociągnięcie struny) dzieli się na dwie połowy i rozprzestrzenia się bez zmiany kształtu wzdłuż charakterystyk : $x + ct = x_0$ *i* $x - ct = x_0$ z prędkością c.

Druga część tego równania reprezentuje odpowiedź na zaburzenie prędkości. Jeżeli dla przykładu początkowa prędkość jest funkcją $g(x) = \delta(x - x_0)$, to rozwiązanie rozwija się jak na rysunku.



$u(x,t)$ jest wtedy stałą równą $\frac{1}{2c}$ w obrębie trójkąta pomiędzy charakterystykami i ma wartość 0 na zewnątrz trójkąta. Zaburzenie wynikające z prędkości początkowej rozprzestrzenia się z prędkością nie przekraczającą wartości c.

Rozwiązanie postawionego zagadnienia zależy w sposób ciągły od początkowych danych czyli jest stabilne, gdyż niewielka zmiana funkcji f i g skutkuje odpowiednio małą zmianą rozwiązania $u(x,t)$.