Zajęcia 3

Aby otrzymać rozwiązanie szczególne dodaje się do równania warunek początkowy. Tak sformułowane zagadnienie nazywane jest wtedy problemem Cauchy'ego.

<u>Zadanie 1</u>

Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego o postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{4u_x - 3u_y = 0} \\ \mathbf{u(0, y) = y^3} \end{cases}$$

Wektor zmiennych niezależnych : $\overrightarrow{zn} = (x, y)$

Wektor współczynników: $\vec{v} = (4, -3)$

Wektor $\vec{w} \perp \vec{v}$ ma postać: $\vec{w} = (-3, -4)$

Policzmy $k = const = \vec{w} \cdot \overrightarrow{zn} = (-3, -4) \cdot (x, y) = -3x - 4y$

Wtedy rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\boldsymbol{u(x, y) = f(k) = f(-3x - 4y)}$$

Aby znaleźć konkretne rozwiązanie użyjemy warunku początkowego:

$$\boldsymbol{u(0, y) = y^3}$$

$$\boldsymbol{u(0, y) = f(-3 \cdot 0 - 4y) = y^3}$$

$$\boldsymbol{f(-4y) = y^3}$$

Dokonajmy podstawienia $\boldsymbol{z = -4y}$. Wtedy $\boldsymbol{y = -\frac{z}{4}}$.

$$\boldsymbol{f(z) = \left(-\frac{z}{4}\right)^3 = -\frac{z^3}{64}}$$

Otrzymaliśmy „przepis" na funkcję $\boldsymbol{f}$.

Zatem korzystając z tego „przepisu" możemy zapisać rozwiązanie:

$$\boldsymbol{u(x, y) = f(-3x - 4y) = -\frac{(-3x - 4y)^3}{64} = \frac{(3x + 4y)^3}{64}}$$

Sprawdźmy poprawność naszego rozwiązania:

$$\boldsymbol{u_x = 3 \cdot \frac{(3x+4y)^2}{64} \cdot 3 = 9 \cdot \frac{(3x+4y)^2}{64} = 9m}$$

gdzie $\boldsymbol{m = \frac{(3x+4y)^2}{64}}$

$$\boldsymbol{u_y = 3 \cdot \frac{(3x+4y)^2}{64} \cdot 4 = 12 \cdot \frac{(3x+4y)^2}{64} = 12m}$$

Wstawmy obliczone pochodne do równania wyjściowego

$$\boldsymbol{4u_x - 3u_y = 4 \cdot 9m - 3 \cdot 12m = 36m - 36m = 0}$$

Sprawdźmy jeszcze warunek początkowy

$$\boldsymbol{u(0,y) = \frac{(3 \cdot 0 + 4y)^3}{64} = \frac{64y^3}{64} = y^3}$$

Jak widać otrzymane rozwiązanie spełnia zarówno równanie wyjściowe, jak również dołączony warunek początkowy.

Zadanie 2

Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego o postaci:

$$\boldsymbol{\begin{cases} u_t + 5u_x = 0 \\ u(x,0) = e^x \end{cases}}$$

Wektor zmiennych niezależnych : $\overrightarrow{zn} = (x,t)$

Wektor współczynników: $\vec{v} = (5,1)$

Wektor $\overrightarrow{w} \perp \vec{v}$ ma postać: $\overrightarrow{w} = (1,-5)$

Policzmy $k = const = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{zn} = (1,-5) \cdot (x,t) = x - 5t$

Wtedy rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\boldsymbol{u(x,t) = f(k) = f(x-5t)}$$

Aby znaleźć konkretne rozwiązanie użyjemy warunku początkowego:

$$\boldsymbol{u(0,y) = e^{x}}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = f(x-5\cdot 0) = e^{x}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$$

Dokonajmy podstawienia $\boldsymbol{z = x}$. Wtedy

$$\boldsymbol{f(z) = e^{z}}$$

Otrzymaliśmy „przepis" na funkcję $\boldsymbol{f}$.

Zatem korzystając z tego „przepisu" możemy zapisać rozwiązanie:

$$\boldsymbol{u(x,y) = f(x-5t) = e^{(x-5t)}}$$

Sprawdźmy poprawność naszego rozwiązania:

$$\boldsymbol{u_x = e^{(x-5t)}} \qquad \boldsymbol{u_t = -5e^{(x-5t)}}$$

Wstawmy obliczone pochodne do równania wyjściowego

$$\boldsymbol{u_t + 5u_x = -5e^{(x-5t)} + 5e^{(x-5t)} = 0}$$

Sprawdźmy jeszcze warunek początkowy

$$\boldsymbol{u(x,0) = e^{(x-5\cdot 0)} = e^{x}}$$

Jak widać otrzymane rozwiązanie spełnia zarówno równanie wyjściowe, jak również dołączony warunek początkowy.

Metoda Charakterystyk dla równań Quasiliniowych (w tym oczywiście zawierają się wszystkie zagadnienia liniowe) I rzędu.

$$\boldsymbol{a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = f(x,y,u)}$$

Mogę to zapisać jako:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y - f(x,y,u) = 0$$

a, b, f – są funkcjami klasy C na obszarze $\Omega \epsilon R^3$.

$$\vec{v} = (a,b,f) \qquad \vec{n} = (u_x, u_y, -1)$$

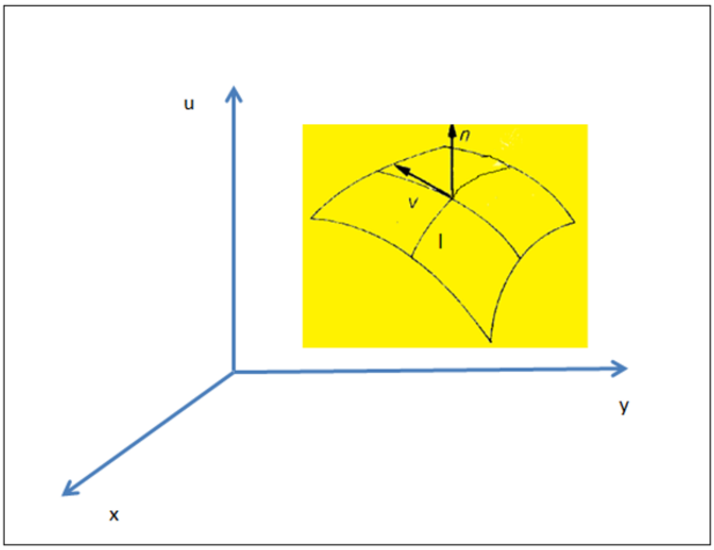
Nasze rozwiązanie możemy przedstawić jako iloczyn skalarny:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (a,b,f) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$$

Interpretacja geometryczna:

Szukamy równania powierzchni $u(x,y)$. Wiemy, że wektor $\vec{n} = (u_x, u_y, -1)$ jest do niej prostopadły. Natomiast z równania $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ możemy wyciągnąć wniosek, że wektor $\vec{v} = (a,b,f)$ leży w płaszczyźnie stycznej do tej powierzchni.

Warunek początkowy dodany do równania określa krzywą l leżącą na szukanej powierzchni $u(x,y)$.



Zatem zagadnienie Cauchy'ego polega na znalezieniu powierzchni stycznej w każdym swym punkcie do zadanego pola wektorowego $\vec{v}$ i przechodzącej przez zadaną krzywą l

Jeżeli wystartujemy z jakiegoś punktu określonego przez warunek początkowy i będziemy poruszać się w kierunku wektora $\vec{v}$, to poruszamy się wtedy wzdłuż krzywej, która leży całkowicie wewnątrz powierzchni $u(x,y)$. Ta krzywa nazywa się krzywą charakterystyczną.

Punkty krzywej charakterystycznej są opisane równaniem sparametryzowanym:

$$\vec{p}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + u(t)\vec{k}$$

Jeżeli zróżniczkujemy $\vec{p}(t)$ po zmiennej t wtedy otrzymamy wektor styczny do krzywej:

$$\vec{p}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + u'(t)\vec{k}$$

Oczywiście $x' = \frac{dx}{dt}$ $y' = \frac{dy}{dt}$ $u' = \frac{du}{dt}$

Ponieważ krzywą charakterystyczną otrzymujemy przez poruszanie się po powierzchni w kierunku wektora $\vec{v}$ zatem wektory $\vec{p}'$ i $\vec{v}$ muszą być proporcjonalne.

Przypomnijmy: $\vec{v} = (a, b, f)$ i $\vec{p}'(t) = (x'(t), y'(t), u'(t))$

Zatem

$$\vec{p}' = \lambda\vec{v}$$

gdzie λ – pewna stała. Możemy więc napisać

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{a} \cdot \lambda \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{b} \cdot \lambda \qquad \frac{du}{dt} = \mathrm{f} \cdot \lambda$$

Widać, że dla pewnego λ zachodzi:

$$\frac{dx/dt}{a} = \lambda \qquad \frac{dy/dt}{b} = \lambda \qquad \frac{du/dt}{f} = \lambda$$

Z czego wynika, że

$$\boxed{\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{f}}$$

Dostajemy z tej równości dwie postacie równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad i \quad \frac{du}{dx} = \frac{f}{a} \qquad lub \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{a}{b} \quad i \quad \frac{du}{dy} = \frac{f}{b}}$$

Są to postacie równorzędne i rozwiązując jedną lub drugą dochodzimy do tego samego rozwiązania.

Zatem szukamy dwóch nieoznaczonych całek pierwszych powyższych układów:

$$\boxed{\phi_1(x,y,u) = C_1\,, \quad \phi_2(x,y,u) = C_2}$$

Rozwiązanie ogólne można przedstawić w dwóch postaciach:

$$\begin{array}{ll} I & F\big(\phi_1(x,y,u), \phi_2(x,y,u)\big) = F(C_1, C_2) = 0 \\ II & \phi_2(x,y,u) = f\big(\phi_1(x,y,u)\big) \Rightarrow C_2 = f(C_1) \end{array}$$

gdzie f jest dowolną funkcją ciągłą.

Druga postać rozwiązania ogólnego jest bardziej użyteczna od pierwszej gdy poszukiwane jest rozwiązanie szczególne.

<u>Zadanie 3</u>

Znajdź ogólną postać rozwiązania dla równania:

$$u_x + yu_y = 0$$

Zdefiniujmy wektor współczynników $\vec{v} = (a, b, f) = (1, y, 0)$ i zapiszmy równość:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{f} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0}$$

Dostajemy z tej równości następującą postać równań:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1} \quad \text{oraz} \quad \frac{du}{dy} = \frac{0}{y}$$

Zajmijmy się pierwszym z podanych dwóch równań i rozdzielmy zmienne. Wtedy otrzymamy:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y}$$

i scałkujmy

$$\int dx = \int \frac{dy}{y} \quad \rightarrow x + C = lny \quad \rightarrow \quad y = e^{x+C} = e^C \cdot e^x = C_1 e^x$$

Stąd

$$\boldsymbol{C_1 = e^{-x} \cdot y}$$

Z drugiego równania wynika bezpośrednio, że $\frac{du}{dy} = 0$ co daje po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu

$$\boldsymbol{u = const = \ C_2}$$

Znając stałe C_1 i C_2 możemy zapisać:

$$\boldsymbol{\phi_1(x,y,u) = C_1 = e^{-x} \cdot y}$$

$$\boldsymbol{\phi_2(x,y,u) = C_2 = u}$$

Zatem rozwiązanie ogólne możemy przedstawić następująco:

$$\boxed{\boldsymbol{F\big(\phi_1(x,y,u), \phi_2(x,y,u)\big) = F(C_1, C_2) = F(e^{-x} \cdot y, u) = 0}}$$

Można też skorzystać z drugiej postaci rozwiązania

$$\boldsymbol{\phi_2(x,y,u) = f\big(\phi_1(x,y,u)\big) \ \Rightarrow \ C_2 = f(C_1)}$$

skąd wynika

$$\boxed{\boldsymbol{u = f(e^{-x} \cdot y)}}$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy de facto nieskończoną ilość rozwiązań bo funkcja f w ogólnej postaci rozwiązania nie jest określona.

Zadanie 4

Znajdź ogólną postać rozwiązania dla równania:

$$yu_x - xu_y = 0$$

Zdefiniujmy wektor współczynników $\vec{v} = (a, b, f) = (y, -x, 0)$ i zapiszmy równość:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{f} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{0}$$

Układ równań, który wybieramy (pomijając przedstawienie bezpośredniej postaci równań różniczkowych zwyczajnych) ma postać

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \text{i} \quad \frac{dy}{-x} = \frac{du}{0}$$

Zajmijmy się pierwszym z podanych dwóch równań, rozdzielmy zmienne i scałkujmy. Wtedy otrzymamy:

$$-\int xdx = \int ydy \quad \rightarrow \frac{C_1}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} \quad \rightarrow \quad C_1 = x^2 + y^2$$

Stąd

$$\boldsymbol{\phi_1(x,y,u) = C_1 = x^2 + y^2}$$

Z drugiego równania wynika bezpośrednio, że $\frac{du}{dy} = 0$ co daje po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu

$$\boldsymbol{u = const = C_2}$$

Zatem

$$\boldsymbol{\phi_2(x,y,u) = C_2 = u}$$

Jeśli wyrazimy postać rozwiązania następująco:

$$\boldsymbol{F\big(\phi_1(x,y,u), \phi_2(x,y,u)\big) = F(C_1, C_2) = 0}$$

Otrzymamy

$$\boxed{\boldsymbol{F(x^2 + y^2, u) = 0}}$$

Jeśli natomiast skorzystamy z postaci

$$\boldsymbol{\phi_2(x,y,u) = f\big(\phi_1(x,y,u)\big) \Rightarrow C_2 = f(C_1)}$$

dostaniemy

$$\boxed{\boldsymbol{u = f(x^2 + y^2)}}$$