# Zajęcia 8

## Zagadnienie Cauchy'ego dla jednorodnego równania falowego

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \quad -\infty < x < \infty$$

## Formuła d'Alamberta dla równania falowego

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz$$

## Ilustracja

Do interpretacji formuły d'Alamberta rozważmy przypadek gdy funkcja:

$$g(x) = 0$$

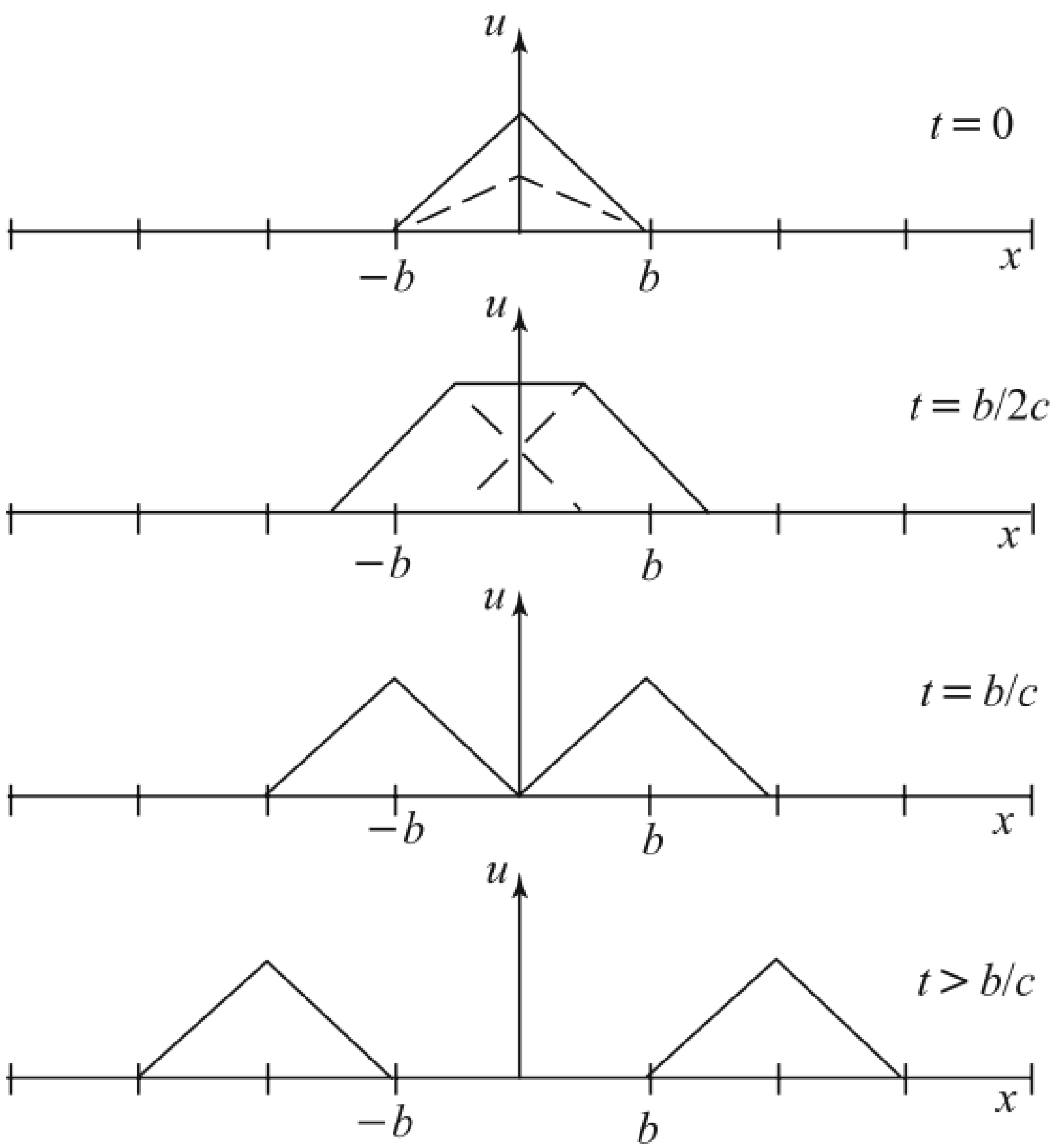
Wtedy rozwiązanie d'Alamberta przyjmuje formę:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$

Zakładamy, że początkowe przemieszczenie zdefiniowane przez funkcję $f$ dla $t = 0$ jest różne od zera w przedziale $(-b, b)$.

W chwili początkowej fale przednia i tylna nakładają się na siebie a w następnych chwilach czasu dzielą się i podróżują w dwóch przeciwnych kierunkach .

Niech $f(x)$ w chwili początkowej ma postać trójkąta, a zaburzenie porusza się z prędkością **c.** Wtedy fale w kolejnych chwilach zachowują się jak na kolejnych ilustracjach:



Zadanie 1

Rozwiąż następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{tt} - u_{xx} = 0} \\ \boldsymbol{u(x,0) = \sin x} \\ \boldsymbol{u_t(x,0) = x} \end{cases}$$

Zauważmy, że jest to równanie falowe jednowymiarowe, w którym prędkość falowa $c = 1$. Do rozwiązania tego problemu korzystamy z formuły d'Alamberta:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz =}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} zdz =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\left(\frac{(x+t)^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + 2xt + t^2 - x^2 + 2xt - t^2}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\left(\frac{4tx}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + xt}$$

(Korzystając z zależności trygonometrycznej - $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ możemy pierwszy człon przedstawić jako $\sin(x)\cos(t)$. Zatem rozwiązanie ma postać $\mathrm{u(x,t)} = \sin(x)\cos(t) + xt.$ )

## Zadanie do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1

Rozwiąż poniżej podane zagadnienia korzystając najpierw z rozwiązania ogólnego dla równania falowego w postaci $\boldsymbol{u(x,y) = F(x+ct) + G(x-ct)}$ i podanych warunków początkowych, a następnie korzystając bezpośrednio ze wzoru d'Almberta. Porównaj wyniki.

a) $u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \qquad u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = 1$
b) $u_{tt} - 16u_{xx} = 0 \qquad u(x,0) = cosx \qquad u_t(x,0) = x^2$
c) $u_{tt} - 2u_{xx} = 0 \qquad u(x,0) = x^3 \qquad u_t(x,0) = x$

### Zadanie2

a) Zapisz wzór d'Alamberta dla poniższego zagadnienia (używając w nim ogólnie oznaczeń $f$ $i$ $g$ dla funkcji wystepujących w warunkach początkowych), a następnie korzystając z definicji tych funkcji policz $u\left(0,\frac{1}{6}\right)$.

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

Odp.: $u\left(0,\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$.

b) Oblicz $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$

Wskazówka: Policz $\lim\limits_{t\to\infty} f(x+ct)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(x-ct)$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$ dla prędkości falowej $c$ wynikającej z równania wyjściowego.

Odp.: $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{2}{3}$

## Zagadnienie Cauchy'ego dla niejednorodnego równania falowego

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \quad -\infty < x < \infty$$

To zagadnienie opisuje np. drgania nieskończonej struny przy działaniu zewnętrznej siły h. Funkcje $f$ $i$ $g$ opisują odpowiednio kształt początkowy struny oraz prędkość prostopadłą do struny w chwili $t = 0$.

Można udowodnić, że rozwiązanie ma następującą postać:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} h(z,\tau)dzd\tau$$

## Ilustracja

Podaj rozwiązanie zagadnienia:

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = e^x \qquad -\infty < x < \infty$$

Dla naszego zagadnienia prędkość falowa $c = 1$, $f(x) = 0$, $g(x) = e^x$, a $h(x,t) = 1$

$$u(x,t) = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^z dz + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} 1dzd\tau =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x+t} - e^{x-t}) + \frac{1}{2}\int_0^t (x + t - \tau - (x - t + \tau))d\tau =$$

$$= \frac{(e^{x+t} - e^{x-t})}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t (x + t - \tau - x + t - \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{(e^{x+t} - e^{x-t})}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t (2t - 2\tau)\, d\tau = \frac{(e^{x+t} - e^{x-t})}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2t \int_0^t d\tau - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^t \tau d\tau =$$

$$= \frac{(e^{x+t} - e^{x-t})}{2} + t^2 - \frac{t^2}{2} = \boldsymbol{\frac{(e^{x+t} - e^{x-t})}{2} + \frac{t^2}{2}}$$

**********************************************************************

Do tej pory rozwiązywaliśmy zagadnienia początkowe czyli takie, w których mieliśmy równanie i warunki początkowe. Dla równań II rzędu schemat rozwiązania polegał na sprawdzeniu typu równania, sprowadzenia go do odpowiedniej formy kanonicznej, znalezienia rozwiązania ogólnego i w końcowym etapie wykorzystania warunków początkowych do znalezienia rozwiązania szczególnego.

W innym sposób rozwiązuje się tkz zagadnienia brzegowo-początkowe. Metodę rozwiązania odkrył i wprowadził matematyk Jean B.S. Fourier. Służy ona do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych cząstkowych . Bazuje ona na technice rozdzielenia zmiennych i nazywana jest popularnie metodą separacji zmiennych. Metoda ta wymaga twierdzenia o tym, że każda rzeczywista funkcja zdefiniowana na zamkniętym przedziale może być przedstawiona w postaci szeregu funkcji trygonometrycznych.

## Metoda separacji zmiennych

Rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego przedstawia się w następującej formie:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Równanie to powinno spełniać dodane warunki np. warunki brzegowe.

Zastosujmy tę metodę do następującego zagadnienia.

$$\boldsymbol{u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < L \qquad t > 0}$$

$$\boldsymbol{u(0,t) \; = \; u(l,t) = 0 \quad t > 0 - warunki\ typu\ Dirichleta}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \;\; 0 < x < L \;\; - war.początkowe}$$

Zagadnienie opisuje ruch drgającej struny, bez działania sił zewnętrznych wymuszających ruch. Struna jest zamocowana na swoich końcach (spełnione są jednorodne warunki brzegowe).

Przedstawmy rozwiązanie $u(x,t)$ w postaci $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ i wstawmy je do naszego równania. Dostaniemy:

$$XT_{tt} - c^2 X_{xx} T = 0 \quad \rightarrow \quad XT_{tt} = c^2 X_{xx} T$$

Po rozseparowaniu zmiennych dostaniemy:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} \xRightarrow[\textit{można zapisać}]{} \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

Ponieważ równość ta zachodzić musi dla wszystkich $x \; i \; t$ z rozważanego zakresu, więc obie strony tej równości muszą być stałe. Oznaczając tę stałą przez – $\lambda$ dostajemy równość

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda\,,$$

która prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \boldsymbol{X''(x) + \lambda X(x) = 0} & (*) \\ \boldsymbol{T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0} & (**) \end{cases}$$

Rozważmy pierwsze równanie $(*)$

Dla funkcji $X(x)$ otrzymaliśmy tzw. zagadnienie Sturma – Liouvielle'a polegające na wyznaczeniu takich wartości $\lambda$, zwanych wartościami własnymi, przy których istnieją niezerowe rozwiązania zwane funkcjami własnymi, spełniające warunki

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \rightarrow \boldsymbol{X(0) = 0}$$

$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \rightarrow \boldsymbol{X(l) = 0}$$

W celu wyznaczenia wartości własnych zagadnienia trzeba rozważyć trzy następujące przypadki.

1. $\boldsymbol{\lambda < 0}$ – wówczas rozwiązaniem równania $(*)$ jest funkcja postaci:

$$\boldsymbol{X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}}$$

Równanie to wynika z teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Z zastosowania warunków brzegowych $X(0) = X(l) = 0$ wnioskujemy:

$$\boldsymbol{X(0) = C_1 e^{0 \cdot \sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-0 \cdot \sqrt{-\lambda}} = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -C_2}$$

$$\boldsymbol{X(l) = C_1 e^{l\sqrt{-\lambda}} - C_1 e^{-l\sqrt{-\lambda}} = C_1 \left(e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}}\right) = 0}$$

To drugie równanie spełnione jest tylko wtedy gdy $\boldsymbol{C_1 = 0 \underset{skąd}{\Longrightarrow} C_2 = 0}$ .

**Dostajemy tak zwane rozwiązanie trywialne bo gdy**

$$\boldsymbol{X(x) = 0 \underset{wtedy}{\Longrightarrow} u(x,t) = X(x)T(t) \equiv 0}$$

**To rozwiązanie jako mało interesujące odrzucamy.**

2. $\boldsymbol{\lambda = 0}$ – wówczas rozwiązaniem równania $(*)$ jest funkcja postaci:

$$\boldsymbol{X(x) = ax + b}$$

Stąd

$$X(0)=a\cdot 0+b=0\ \xrightarrow[z\ czego\ wynika]{}\ b=0$$

$$X(l)=a\cdot l=0\ \xrightarrow[zatem]{}\ a=0$$

**Znów dostajemy rozwiązanie trywialne bo** $X(x)=0\ \xrightarrow[co\ daje]{}\ u(x,t)=0.$

3. $\lambda>0$ **-** wówczas rozwiązaniem równania $(*)$ jest funkcja postaci:

$$X(x)=C_1cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)+C_2\,sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)$$

Z zastosowania warunków brzegowych $X(0)=X(l)=0$ wnioskujemy:

$$X(0)=C_1\,cos\left(0\cdot\sqrt{\lambda}\right)+C_2sin\left(0\cdot\sqrt{\lambda}\right)=0\ \xrightarrow[oytzymujemy]{}\ C_1=0$$

$$X(l)=C_2\,si\,n\left(l\cdot\sqrt{\lambda}\right)=0\ \xrightarrow[z\ czego\ wynika]{}\ si\,n\left(l\cdot\sqrt{\lambda}\right)=0$$

Zatem $l\cdot\sqrt{\lambda}=n\pi$, gdzie $n$ oznacza kolejne liczby naturalne. Możemy zapisać:

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\quad dla\ \ n=1,2,3\ldots$$

Liczby $\lambda_n$ nazywane są **wartościami własnymi** rozważanego zagadnienia. Zatem istnieją niezerowe funkcje zwane **funkcjami własnymi** o postaci

$$X_n(x)=sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

będące rozwiązaniami równania $(*)$ z warunkami $X(0)=X(l)=0$.

Rozważmy teraz równanie $(**)$. Przypomnijmy jego postać:

$$T''(t)+c^2\lambda T(t)=0$$

Z poprzednich rozważań wiemy, że interesuje nas tylko przypadek, gdy $\lambda>0$ (bo w pozostałych otrzymaliśmy rozwiązania zerowe) i

Rozwiązanie jest analogiczne jak dla punktu 3. w poprzedniej dyskusji.

$$\boldsymbol{T(t) = A\cos\left(t\sqrt{c^2\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{c^2\lambda}\right)}$$

Z poprzednich rozważań wiemy, że $\boldsymbol{\lambda_n} = \left(\frac{\boldsymbol{n\pi}}{\boldsymbol{l}}\right)^{\boldsymbol{2}}$ $n = 1,2,3\ldots$ Wstawiając to do powyższego równania dostaniemy:

$$\boldsymbol{T_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)}$$

Mamy już prawie wszystkie dane aby skonstruować rozwiązanie zagadnienia wyjściowego. Możemy napisać:

$$u_n = X_n(x) \cdot T_n(t) \qquad n = 1,2,3 \ldots.$$

Z czego po podstawieniu wynika:

$$\boldsymbol{u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, 3 \ldots}$$

Aby skonstruować **ostateczne rozwiązanie** spełniające warunki początkowe tworzymy szereg:

$$\boxed{\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}}$$

Współczynniki $\boldsymbol{A_n}$ i $\boldsymbol{B_n}$ zależą od dołączonych warunków początkowych i zgodnie z teorią szeregów Fouriera określone są następującymi wzorami:

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}$$

$$\boldsymbol{B_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}$$

## Krótkie uzupełnienie – szeregi Fouriera

Szereg Fouriera to taki szereg nieskończony, w którym pojawiają się funkcje $\sin(\dots)$ i $\cos(\dots)$.

**Szereg Fouriera sinusów:**

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Wtedy wzór na wyznaczenie współczynników ma postać:

$$\boxed{A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}$$

Wzór ten jest często związany z warunkami brzegowymi typu Dirichleta na przedziale $(0,l)$.

**Szereg Fouriera cosinusów:**

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Wtedy wzór na wyznaczenie współczynników ma postać:

$$\boxed{A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}$$

Wzór ten jest związany z warunkami brzegowymi typu Neumanna na przedziale $(0,l)$.

## Pomocne definicje i twierdzenia

1. Funkcja $f(x)$ jest funkcją parzystą gdy $f(-x)=f(x)$. Przykładem takiej funkcji jest $\cos(x)$.

2. Funkcja $f(x)$ jest funkcją nieparzystą gdy $f(-x) = -f(x)$. Przykladem takiej funkcji jest $\sin(x)$.

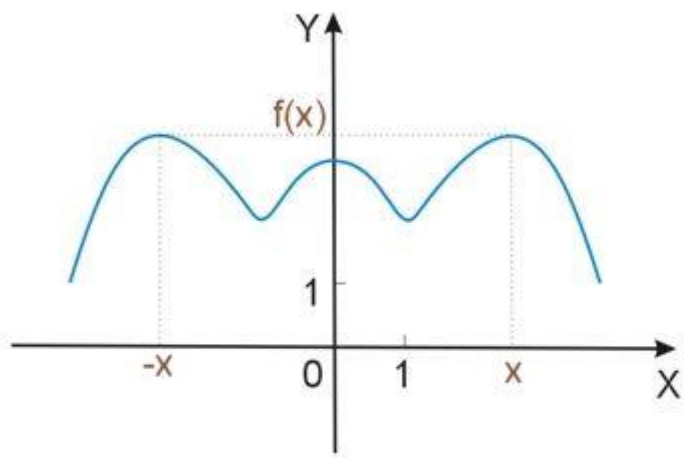
Twierdzenie

Niech funkcja $f(x)$ będzie kawałkami ciągłą funkcją na symetrycznym przedziale $(-a, a)$.

**Jeżeli $f(x)$ jest funkcją parzystą wtedy:**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

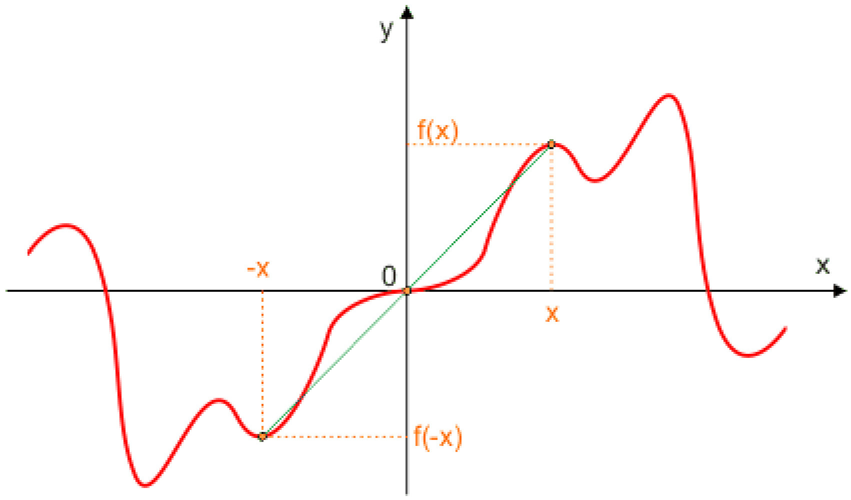
Przykład graficzny funkcji parzystej




**Jeżeli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą wtedy:**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Przykład graficzny funkcji nieparzystej:




**Szereg Fouriera sinusów może być traktowany jako rozwinięcie dowolnej funkcji nieparzystej o okresie $2l$ zdefiniowanej w całym przedziale $-\infty < x < +\infty$.**

**Szereg Fouriera cosinusów może być traktowany jako rozwinięcie dowolnej funkcji parzystej o okresie $2l$ zdefiniowanej w całym przedziale $-\infty < x < +\infty$.**