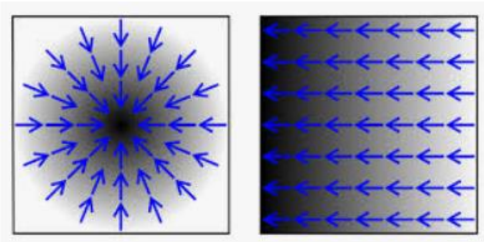
Zajęcia 2

GRADIENT FUNKCJI

Jest to operator różniczkowy przekształcający pole skalarne w pole wektorowe. Używa się go do konstrukcji wektora normalnego do krzywej lub do powierzchni.

Gradient funkcji (pola skalarnego) wskazuje kierunek najszybszych wzrostów tej funkcji.



<u>Przykład</u>

Znamy rozkład temperatury niezmienny w czasie w pewnym pomieszczeniu czyli $T(x,y,z)$. Wówczas w każdym punkcie tego pomieszczenia $grad\,T$ pokazuje kierunek i zwrot najszybszego wzrostu temperatury.

Gradient funkcji f dla dwóch wymiarów

$$grad\ f = \nabla f = (f_x, f_y) = f_x\, i + f_y\, j$$

Gradient funkcji f dla n-wymiarów

$$grad\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots.. \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Dygresja

Nie mylić gradientu z dywergencją wektora:

$$diw\ \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Dywergencja przeprowadza pole wektorowe w pole skalarne (czyli odwrotnie niż gradient). Na przykład dywergencja pola prędkości płynu może być interpretowana jako miara jego ściśliwości – mówi o zmianach objętości płynu.

Pochodna kierunkowa – pochodna w kierunku wektora $\vec{v}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Pochodna kierunkowa określa szybkość zmiany wartości funkcji f w kierunku wektora $\vec{v}$.

<u>Przykład</u>

Określ pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = 3x^2y$ w punkcie (1,2) w kierunku wektora $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Na początku znajdujemy gradient funkcji f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$\nabla f(1,2) = (12,3)$$

Następnie liczymy długość wektora $\vec{v}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Podstawiamy obliczone wartości do wzoru:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2) = \nabla f \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (12,3) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

DOM:

Dana jest funkcja $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Policz pochodną kierunkową funkcji f w punkcie o współrzędnych $(1,1)$ w kierunku wektora $\vec{u}$.

Rząd równania różniczkowego cząstkowego

Rzędem RRC nazywamy najwyższy rząd pochodnej funkcji niewiadomej występujący w danym równaniu:

Przykład

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ – jest rzędu pierwszego

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy$ – jest rzędu trzeciego

Liniowość równania różniczkowego cząstkowego

Równanie RRC o postaci $f=\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},\dots..\right)=0$ nazywamy liniowym w obszarze D, jeżeli funkcja f jest liniowa względem funkcji niewiadomej u i jej pochodnych, a współczynniki równania zależą tylko od zmiennych niezależnych.

Uogólniona postać liniowego równania RRC I rzędu ma następującą postać:

$$\boxed{a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y)}$$

Przykłady równań liniowych:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=x^3-y^2$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+yx\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Quasiliniowość równania różniczkowego cząstkowego

Równanie RRC o postaci $f\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},\dots..\right)=0$ nazywamy quasiliniowym w obszarze D, jeżeli funkcja f jest liniowa względem pochodnych funkcji niewiadomej do rzędu n-tego włącznie, a jej współczynniki zależą nie tylko od zmiennych niezależnych, lecz od funkcji niewiadomej u i jej pochodnych do rzędu (n-1)-go.

Uogólniona postać quasiliniowego równania RRC I rzędu ma następującą postać:

$$\boxed{a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = f(x,y,u)}$$

Przykłady równań quasiliniowych:

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = xy \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Nieliniowość równania różniczkowego cząstkowego

Równanie RRC o postaci $f\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},\ldots..\right) = 0$ nazywamy nieliniowym w obszarze D, jeżeli funkcja f nie jest liniowa względem funkcji niewiadomej u i jej pochodnych.

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 0 \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u^2\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^3$$

Przykład

Określ rząd równania i oceń czy równanie jest liniowe czy quasiliniowe:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ – równanie 1-szego rzędu, liniowe
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ – równanie 1-szego rzędu, quasiliniowe
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 = 0$ – równanie 2-go rzędu, quasiliniowe
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ – równanie 4-go rzędu, liniowe
5. $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ – równanie 3-go rzędu, quasiliniowe
6. $\sqrt{1+x^2}cosy\, u_x + u_{yxy} - \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)u$ =0 – równanie 3-go rzędu, liniowe
7. $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$ – równanie 4-go rzędu, quasiliniowe

Najprostsze przypadki RRC I rzędu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y)$$

Każde z tych równań rozwiązujemy drogą bezpośredniego całkowania.

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int f(x,y)dx \qquad \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int g(x,y)dy$$

$$u = F(x,y) + \psi(y) \qquad u = G(x,y) + \phi(x)$$

gdzie $\psi(y)$, $\phi(x)$ są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami jednej zmiennej.

<u>Przykład</u>

Znajdź całkę ogólną równania $\frac{\partial u}{\partial y} = sinx \cdot cosy$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = sinx \int cosydy$$

$$u = -sinx \cdot siny + \phi(x)$$

gdzie $\phi(x)$ jest dowolną funkcją zmiennej x.

Metoda charakterystyk

Równanie RRC o stałych współczynnikach

$$\boxed{\boldsymbol{au_x + bu_y = 0 \quad a,b \neq 0, \quad a,b = const}}$$

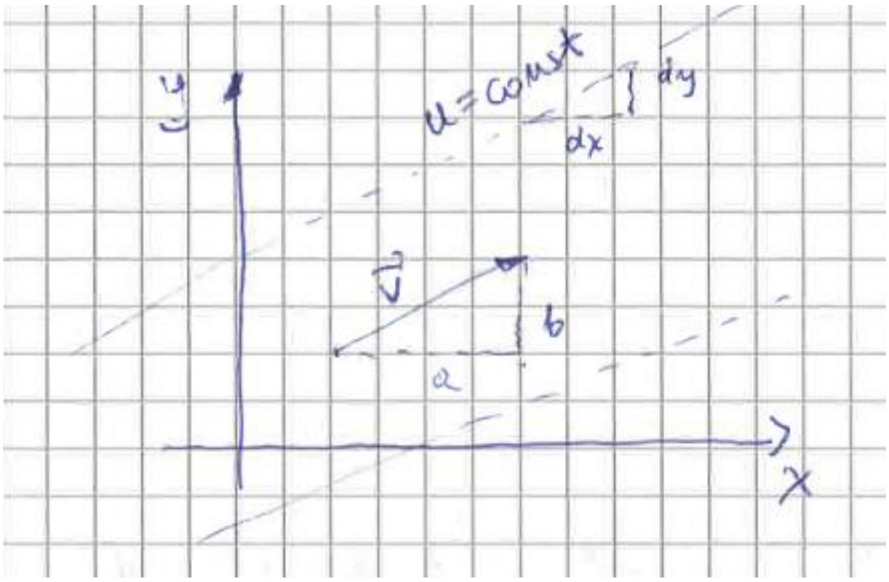
$$au_x + bu_y = (a,b) \cdot (u_x, u_y) = (a,b) \cdot \nabla u = 0$$

Otrzymujemy iloczyn skalarny wektora współczynników oraz gradientu u.

Zauważmy, że iloczyn ten możemy interpretować jako pochodną kierunkową w kierunku wektora $\vec{v} = (a, b)$.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b) \cdot \nabla u = 0 \rightarrow (a, b) \cdot \nabla u = 0$$

Zatem szybkość zmian funkcji w kierunku wektora $\vec{v}$ równa jest 0. To oznacza, że funkcja $u(x, y)$ musi być stała w kierunku wektora $\vec{v}$.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

$$b \int dx = a \int dy \quad \rightarrow \quad bx = ay + const$$

Stąd $bx - ay = const$. Równanie odpowiada liniom równoległym do wektora $\vec{v}$. Wzdłuż tych linii rozwiązanie jest stałe.

Rozwiązanie ogólne równania wyjściowego $\boldsymbol{au_x + bu_y = 0}$ ma postać:

$$\boldsymbol{u(x, y) = f(const) = f(bx - ay)}$$

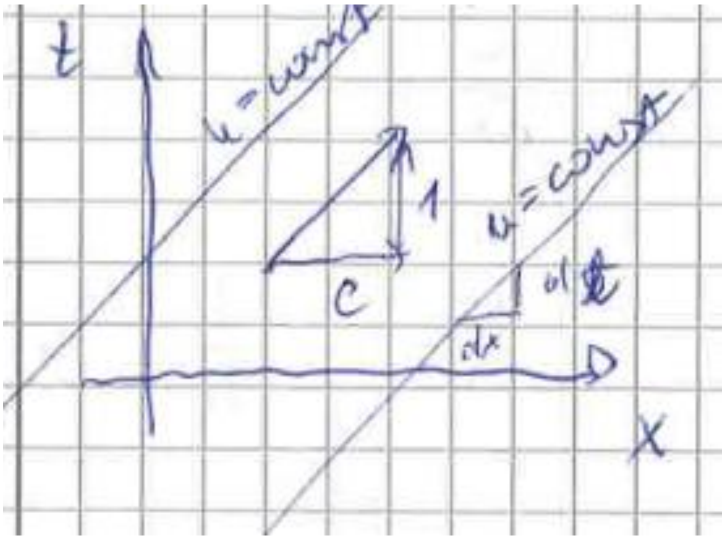
Przykład 1

Znajdź rozwiązanie ogólne równania transportu $u_t + cu_x = 0$, gdzie c to dowolna stała.

Nasze równanie można zapisać w postaci:

$$(c, 1)(u_x , u_y) = 0$$

Zatem wektor $\vec{v} = (c, 1)$, a funkcja niewiadoma u jest stała wzdłuż linii do niego równoległych.



Stąd

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \quad \rightarrow \quad \int dx = c \int dt \quad \rightarrow \quad x = ct + k$$

Równanie o postaci $\boldsymbol{k = x - ct}$ opisuje nieskończoną ilość linii równoległych do wektora $\vec{v} = (c, 1)$. Rozwiązanie ogólne wygląda następująco:

$$\boldsymbol{u = f(k) = f(x - ct)}$$

Jeśli mamy dany warunek początkowy możemy je ukonkretnić.

Inny sposób rozwiązywania równań o stałych współczynnikach (tylko !)

Rozważmy ponownie równanie $u_t + cu_x = 0$. Możemy zdefiniować wektor zmiennych niezależnych dla tego równania jako: $\overrightarrow{zn} = (x, t)$. Wektor współczynników stojących przy pochodnych $\vec{v} = (c, 1)$.

Możemy znaleźć wektor $\overrightarrow{w} \perp \vec{v}$. Jest to wektor o współrzędnych $\overrightarrow{w} = (1, -c)$. Możemy to sprawdzić licząc iloczyn skalarny obydwu wektorów:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{w} = (c, 1) \cdot (1, -c) = c - c = 0$$

Zdefiniujmy stałą k.

$$k = const = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{zn} = (1, -c) \cdot (x, t) = x - ct$$

Rozwiązanie ogólne ma zatem postać:

$$\boldsymbol{u(x, y) = f(k) = f(x - ct)}$$

Zadanie 1

Znajdź rozwiązania ogólne niżej podanych równań:

a) $\boldsymbol{2u_x + 3u_y = 0}$
b) $\boldsymbol{u_t + 2u_x = 0}$
c) $\boldsymbol{2u_t - u_x = 0}$

a) $\boldsymbol{2u_x + 3u_y = 0}$

Wektor zmiennych niezależnych : $\overrightarrow{zn} = (x, y)$

Wektor współczynników: $\vec{v} = (2,3)$

Wektor $\overrightarrow{w} \perp \vec{v}$ ma postać: $\overrightarrow{w} = (3, -2)$

Policzmy $k = const = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{zn} = (3, -2) \cdot (x, y) = 3x - 2y$

Wtedy $\boldsymbol{u(x, y) = f(k) = f(3x - 2y)}$

b) $\boldsymbol{u_t + 2u_x = 0}$

Wektor zmiennych niezależnych : $\overrightarrow{zn} = (x, t)$

Wektor współczynników: $\vec{v} = (2,1)$

Wektor $\overrightarrow{w} \perp \vec{v}$ ma postać: $\overrightarrow{w} = (1, -2)$

Policzmy $k = const = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{zn} = (1, -2) \cdot (x, t) = x - 2t$

Wtedy $\boldsymbol{u(x, y) = f(k1) = f(x - 2t)}$

c) $\boldsymbol{2u_t - u_x = 0}$

Zdefiniujmy w tym przypadku wektor zmiennych niezależnych jako : $\overrightarrow{zn} = (t, x)$

Wtedy wektor współczynników: $\vec{v} = (2, -1)$

Wektor $\overrightarrow{w} \perp \vec{v}$ ma postać: $\overrightarrow{w} = (-1, -2)$

Policzmy $k = const = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{zn} = (-1, -2) \cdot (t, x) = -t - 2x$

Weźmy $k1 = -k = t + 2x$

Wtedy $\boldsymbol{u(x, y) = f(k1) = f(2x + t)}$