Zajęcia 1 RRC

Ogólna forma równania różniczkowego cząstkowego dla funkcji $u(x_1, x_2, \dots x_n)$ ma postać następującą

$$\boldsymbol{F(x_1, x_2, \dots\ x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots u_{x_n}, u_{x_{11}}, \dots) = 0}$$

gdzie

$x_1, x_2, \dots x_n$ - zmienne niezależne,

u - nieznana funkcja,

$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ - pochodna cząstkowa pierwszego rzędu,

$u_{x_{ii}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ - pochodna cząstkowa rzędu drugiego itd.

Do równania dołącza się dodatkowo

$$\begin{cases} \boldsymbol{warunki\ poczatkowe} \\ \boldsymbol{warunki\ brzegowe} \end{cases}$$

Fundamentalne pytanie: Czy problem składający się z równania i związanych z nim warunków jest dobrze postawiony?

Kryteria problemu dobrze postawionego:

- **problem ma rozwiązanie** **(kryterium istnienia)**
- **jest to rozwiązanie jedyne** **(kryterium wyjątkowości)**
- **rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych** **(kryterium stabilności)**

Termin stabilności oznacza, że mała zmiana w równaniu lub towarzyszących warunkach powoduje mała zmianę w rozwiązaniu.

Jeśli chociaż jeden z warunków jest niespełniony to mówimy, że **problem jest źle postawiony.**

Istnieją **dwa rodzaje rozwiązań – klasyczne i słabe.**

Rozwiązanie klasyczne

Funkcja niewiadoma musi być k- krotnie różniczkowalna, aby być rozwiązaniem równania rzędu k. Funkcja, która jest rozwiązaniem musi spełniać kryteria problemu dobrze postawionego.

Rozwiązanie słabe

Rezygnuje się z regularności czyli k-krotnego różniczkowania w sposób ciągły funkcji niewiadomej . Zadawalamy się jej istnieniem i jednoznacznością jak również ciągłością danych (chodzi o warunki brzegowe i początkowe).

Podstawowe równania różniczkowe cząstkowe:

- Równanie transportu

$$u_t + cu_x = 0$$

- Równanie falowe

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

- Równanie przewodnictwa cieplnego i dyfuzji

$$u_t = ku_{xx}$$

- Równanie Laplace'a

$$\Delta u = 0$$

- Równanie Poissona

$$\Delta u = f$$

Równania różniczkowe cząstkowe mają nieskończenie wiele rozwiązań. Aby otrzymać unikalne rozwiązanie trzeba uzupełnić to równanie dodatkowymi warunkami.

Warunki Początkowe

Warunek początkowy określa stan fizyczny badanego układu w pewnym szczególnym czasie.

Przykład 1

$u_t = ku_{xx}$ ⟵ równanie przewodnictwa cieplnego lub dyfuzji

warunek początkowy:

$u(x, t_0) = \phi(x)$ ⟵ niewiadoma funkcja w chwili początkowej

Jeśli dane równanie opisuje proces dyfuzji to znana funkcja $\phi(x)$ jest rozkładem gęstości (koncentracji) w chwili początkowej.
Dla równania przewodnictwa cieplnego $\phi(x)$ oznacza początkowy rozkład temperatury.

Przykład 2

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ⟵ równanie falowe

warunki początkowe:

$u(x, t_0) = \phi(x)$ gdzie $\phi(x)$ określa położenie początkowe
$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \psi(x)$ gdzie $\psi(x)$ określa początkową prędkość

Równanie różniczkowe wraz z warunkami początkowymi nosi nazwę zagadnienia początkowego. W tym wypadku zdefiniowana jest na początku funkcja i jej pochodne.

W każdym problemie fizycznym, który rozpatrujemy istotna jest domena, w której definiujemy RRC. Przykładowo, gdy interesuje nas rozchodzenie się fali w danym obszarze, muszę go zdefiniować. Może być to fala na jeziorze o konkretnej powierzchni i określonej linii brzegowej, wywołana przez wrzucony do niego kamień .
Na rozwiązanie ma niewątpliwie wpływ kształt wybranej domeny jak i warunki panujące na brzegu.

Warunki brzegowe

Istnieją trzy rodzaje warunków brzegowych:

- Warunek Dirichleta (D)

Funkcja niewiadoma u jest określona na brzegu

Dla zagadnienia jednowymiarowego gdzie $0 < x < l$ warunek ma następującą formę:

$$u(0,t) = g(t) \qquad u(l,t) = h(t) \qquad t > 0$$

- Warunek Neumanna (N)

Na brzegu określona jest pochodna normalna $\frac{\partial u}{\partial n}$

Dla zagadnienia jednowymiarowego gdzie $0 < x < l$ warunek ma następującą formę:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = h(t) \quad t > 0$$

- Warunek Robina (R)
-

Na brzegu określone jest wyrażenie $\frac{\partial u}{\partial n} + au$, gdzie a jest daną funkcją.

Dla zagadnienia jednowymiarowego gdzie $0 < x < l$ warunek ma następującą formę:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + a(t)\cdot u(0,t) = g(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + a(t)\cdot u(l,t) = h(t) \quad t > 0$$

Zagadnienia, w których funkcja niewiadoma zdefiniowana jest w chwili początkowej i na brzegu obszaru nazywane są zagadnieniami brzegowo – początkowymi

Przykład

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad 0 < x < l \qquad t > 0 \quad -\ równane \\ u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0 \quad t > 0 \qquad -\ w.b. \\ u(x,0) = f(x) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \ \ 0 < x < l \ -\ w.p. \end{cases}$$

(gdzie *w.b.* – warunki brzegowe, *w.p.* – warunki początkowe)

Dla problemów stacjonarnych (czyli niezmiennych w czasie) definiuje się tylko zagadnienia brzegowe. Przykładem może być równanie Laplace'a wraz ze zdefiniowanymi warunkami na brzegu.

Przykład

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < a \quad 0 < y < b \\ u(x,0) = 0 \quad u(x,b) = f(x) \quad 0 < x < a \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(a,y) = 0 \quad 0 < y < b \end{cases}$$

ZADANIA ĆWICZENIOWE (przypomnienie dotyczące pochodnych pierwszego i drugiego rzędu

Dana jest funkcja $f(x,y)$. Jej pochodne cząstkowe są zdefiniowane następująco:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Drugie pochodne zapisujemy jako:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Można pokazać, że zachodzi: $f_{xy} = f_{yx}$

Przykład 1

Znajdź pierwsze i drugie pochodne funkcji $f(x,y) = 2x^3y^2 + y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12xy^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^3 + 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 12x^2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 12x^2y$$

Całkowita różniczka funkcji $f(x, y)$ ma formę:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

<u>Przykład 2</u>

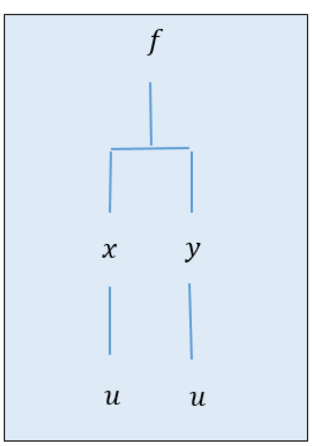
Znajdź całkowitą różniczkę funkcji $f(x, y) = y \cdot e^{(x+y)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^{(x+y)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{(x+y)} + y \cdot e^{(x+y)} = e^{(x+y)}(1+y)$$

$$df = y \cdot e^{(x+y)} dx + e^{(x+y)}(1+y) dy$$

Reguła łańcuchowa

Dana jest funkcja $f(x, y)$ gdzie $x(u), y(u)$. Szukamy $\frac{df}{du} = ?$



$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}$$

Przykład 3

Dane jest $x(u) = 1 + a \cdot u \qquad y(u) = bu^3$

Znajdź $\frac{df}{du}$ jeśli $f(x,y) = x \cdot e^{-y}$

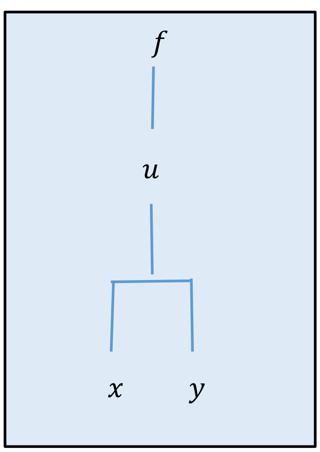
$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-y} \qquad \frac{dx}{du} = a \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{-y} \qquad \frac{dy}{du} = 3bu^2$$

$$\frac{df}{du} = e^{-y} \cdot a + (-xe^{-y}) \cdot 3bu^2 = e^{-y}(a - 3xbu^2)$$

Podstawiając za x i y odpowiednie funkcje zależne od u dostajemy:

$$\frac{df}{du} = e^{-bu^3}(a - 3(1 + au) \cdot bu^2)$$

Dana jest funkcja $\boldsymbol{f(u(x,y))}$. Znajdź pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Przykład 4

Dana jest funkcja $F(x,y) = f(u(x,y)) = f(2x + y^2)$. Pokaż, że F spełnia RRC o postaci: $y \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

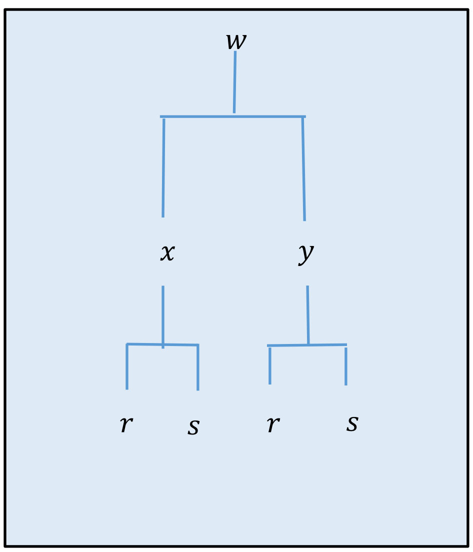
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f' \cdot 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = f' \cdot 2y$$

Zatem

$$y \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = y \cdot f' \cdot 2 - f' \cdot 2y = 0 \qquad c.n.d.$$

Dana jest funkcja $\boldsymbol{w(x,y)}$ gdzie $\boldsymbol{x = g(r,s)}$, $\boldsymbol{y = h(r,s)}$. Znajdź pochodne $\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial r}}$, $\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial s}}$.



$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}$$

<u>Przykład 5</u>

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe. Pokaż, że $f = f(x,y)$ gdzie

$x = u - v$, $y = v - u$ spełnia równanie $f_u + f_v = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_x \cdot 1 + f_y \cdot (-1) = f_x - f_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = f_x \cdot (-1) + f_y \cdot 1 = f_y - f_x$$

Stąd

$$f_u + f_v = f_x - f_y + f_y - f_x = 0 \quad c.n.d$$

<u>Przykład 6</u>

Rozpatrzmy równanie (falowe) $\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$

gdzie c jest stałą. Pokaż, że równanie to może być spełnione przez funkcję:

$$w(t,x) = \cos(2x + 2ct) = w(u(x,t))$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(cos(2x + 2ct)\big) = -2c \cdot sin(2x + 2ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\big(-2c \cdot sin(2x + 2ct)\big) = -4c^2 cos(2x + 2ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(cos(2x + 2ct)\big) = -2 \cdot sin(2x + 2ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(-2 \cdot sin(2x + 2ct)\big) = -4cos(2x + 2ct)$$

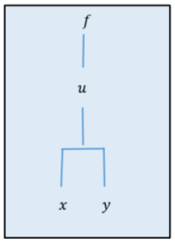
$$L = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -4c^2 cos(2x + 2ct)$$

$$P = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -4c^2 cos(2x + 2ct)$$

$$\Longrightarrow \quad L = P$$

Przykład 7

Dana jest funkcja $w(x,t) = f(x+ct) = f(u(x,t))$. Pokaż, że ta funkcja jest rozwiązaniem równania falowego.



$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = f'(u)\cdot c = f'(x+ct)\cdot c$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{d}{du}(f'(u)\cdot c)\frac{\partial u}{\partial t} = f''(u)\cdot c\cdot c = c^2 f''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot 1 = f'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d}{du}\big(f'(u)\big)\frac{\partial u}{\partial x} = f''(u) = f''(x+ct)$$

$$L = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x+ct)$$

$$\Longrightarrow \qquad L = P$$

$$P = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c^2 f''(x+ct)$$

Zadanie domowe:

Udowodnij, że funkcja $\ln(3x+3ct)$ jest rozwiązaniem równania falowego.