<u>Zajęcia 5</u>

RRC II rzędu

Dokonuje się kwalifikacji równań RRC II rzędu na trzy wyraźne typy: hiperboliczny, paraboliczny i eliptyczny.

Rozważmy poniższe równanie drugiego rzędu, gdzie $u(x, y)$ jest poszukiwaną funkcją.

$$\boxed{a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y)}$$

Powyższe równanie nazywane jest

a. **hiperbolicznym w punkcie (x,y) jeżeli**

$$\boxed{\delta = b^2 - 4ac > 0 \quad (H)}$$

b. **parabolicznym w punkcie (x,y) jeżeli**

$$\boxed{\delta = b^2 - 4ac = 0 \quad (P)}$$

c. **eliptycznym w punkcie (x,y) jeżeli**

$$\boxed{\delta = b^2 - 4ac < 0 \quad (E)}$$

Okazuje się, że równania tego samego typu mają wiele wspólnych cech. Pokażemy też, że specjalna zamiana zmiennych każdego równania pewnego typu może być użyta do przetransformowana tego równania w jego kanoniczną formę.

Ilustracja:

Sklasyfikuj równanie:

- $$\boldsymbol{u_{xx} - 5u_{xy} = 0}$$

dla tego równania

$$a = 1, \quad b = -5, \;\; c = 0$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 25 - 0 = 25 > 0 \quad (H)$$

Zatem równanie jest **typu hiperbolicznego**.

- $$\boldsymbol{4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0}$$

dla tego równania

$$a = 4, \quad b = -12, \;\; c = 9$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0 \quad (P)$$

Zatem równanie jest **typu parabolicznego**.

- $$\boldsymbol{4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0}$$

dla tego równania

$$a = 4, \quad b = 6, \;\; c = 9$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 36 - 144 = -108 < 0 \;\; (E)$$

Zatem równanie jest **typu eliptycznego**.

Zadanie 1

Znajdź region na płaszczyźnie xy, dla którego równanie

$$\boldsymbol{y u_{xx} - 2u_{xy} + x u_{yy} = 0}$$

jest hiperboliczne, paraboliczne lub eliptyczne.

Dla tego równania

$$a = y, \quad b = -2, \quad c = x$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot y \cdot x = 4 - 4xy = 4(1 - xy)$$

Równanie **jest hiperboliczne** gdy $\delta > 0$

Zatem

$$1 - xy > 0 \underset{stąd}{\Longrightarrow} \quad xy < 1$$

$$\boldsymbol{dla\ x > 0 \quad i \quad y < \frac{1}{x}}$$

$$\boldsymbol{dla\ x < 0 \quad i \quad y > \frac{1}{x}}$$

Równanie **jest paraboliczne** gdy $\delta = 0$

Zatem

$$1 - xy = 0 \underset{stąd}{\Longrightarrow} \quad xy = 1$$

$$\boldsymbol{na\ krzywej\ y = \frac{1}{x}}$$

Równanie **jest eliptyczne** gdy $\delta < 0$

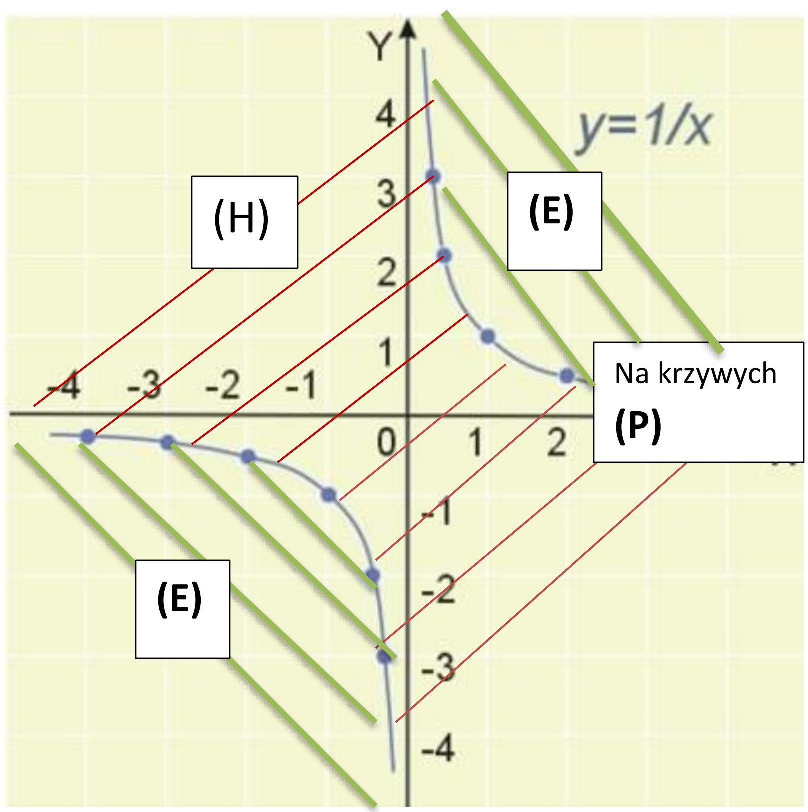
Zatem

$$1 - xy < 0 \underset{stąd}{\Longrightarrow} \quad xy > 1$$

$$\boldsymbol{dla\ x > 0 \quad i \quad y > \frac{1}{x}}$$

$$\boldsymbol{dla\ x < 0 \quad i \quad y < \frac{1}{x}}$$

Przedstawmy to na wykresie



Zadanie 2

Określ typ równania:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)^2\frac{\partial z}{\partial x}\right]-\frac{1}{k^2}(1-x)^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0$$

Musimy zróżniczkować pierwszy człon równania po $\frac{\partial}{\partial x}$. Liczymy zatem pochodną iloczynu. Drugi człon przepisujemy bez zmian.

$$-2(1-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-x)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{k^2}(1-x)^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\mathbf{0}$$

Gdzie k to wartość stala. Wtedy

$$a=(1-x)^2 \quad b=0 \quad c=-\frac{1}{k^2}(1-x)^2$$

Liczymy δ

$$\delta=b^2-4ac=0-4(1-x)^2\cdot\left(-\frac{1}{k^2}(1-x)^2\right)=\frac{4}{k^2}(1-x)^4\geq 0$$

Czyli

$$\boldsymbol{dla\ x=1-\text{równanie paraboliczne}}$$

Ale jest to tylko przypadek teoretyczny, gdyż dla x=1 zamiast równania mielibyśmy tożsamość 0=0

$$\boldsymbol{dla\ x\neq 1-\text{równanie hiperboliczne}}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 3

Znajdź region na płaszczyźnie xy, dla którego równanie

$$(1-x^2)\boldsymbol{u_{xx}}-2xy\boldsymbol{u_{xy}}+(1-y^2)\boldsymbol{u_{yy}}+\boldsymbol{u_x}-4xy\boldsymbol{u_x}-2\boldsymbol{u}=0$$

Jest hiperboliczne, paraboliczne lub eliptyczne.

Wskazówka: Dostajemy równanie okręgu o promieniu 1 . Na zewnątrz równanie jest hiperboliczne, na okręgu paraboliczne i wewnątrz eliptyczne.

Zadanie 4

Określ typ równania

$$e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0$$

Odp. Typ paraboliczny

$$u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + 4u = 0$$

Odp. Typ hiperboliczny

Sprowadzanie równań do postaci kanonicznej

Twierdzenie: Istnieje przekształcenie nieosobliwe obszaru D, za pomocą którego równanie

$$\boxed{\boldsymbol{a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f\left(x,y,u,u_x,u_y\right)}(*)}$$

Można sprowadzić do postaci kanonicznej.

Definicja: Przekształcenie: $\xi = \xi(\mathrm{x},\mathrm{y}), \eta = \eta(\mathrm{x},\mathrm{y})$ nazywamy przekształceniem nieosobliwym obszaru D wtedy i tylko wtedy, gdy w tym obszarze spełnione są warunki:

- funkcje $\xi(x,y)$, $\eta(\mathrm{x},\mathrm{y})$ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, co jet równoznaczne z tym, że

$$\boldsymbol{\xi,\eta \in C^2(D)}$$

- Jakobian przekształcenia

$$\boldsymbol{J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \; w \; obszarze \; D}$$

- Weźmy

$$w(\xi,\eta)=\mathrm{u}(\xi(x,y),\eta(x,y)) = u(x,y)$$

- Twierdzimy, że funkcja $\mathbf{w}$ jest rozwiązaniem równania drugiego rzędu tego samego typu co równanie (*)

Definicje:

- ***Kanoniczna forma równania hiperbolicznego ma postać:***

$$\boxed{w_{\xi\eta} = G(\xi,\eta,w,w_\xi,w_\eta)}$$

- ***Kanoniczna forma równania parabolicznego ma postać:***

$$\boxed{w_{\xi\xi} = G(\xi,\eta,w,w_\xi,w_\eta)\ lub\ \ w_{\eta\eta} = G(\xi,\eta,w,w_\xi,w_\eta)}$$

- ***Kanoniczna forma równania eliptycznego ma postać:***

$$\boxed{w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = G(\xi,\eta,w,w_\xi,w_\eta)}$$

PODSUMOWANIE:

Równanie RRC II rzędu możemy sprowadzić do formy kanonicznej. Aby ją otrzymać musimy dokonać zamiany zmiennych. Do naszego równania (*) podstawiamy $\mathbf{w(\xi,\eta)}$ i dokonując szczegółowej analizy dochodzimy do równania różniczkowego zwyczajnego. Jego postać jest zależna od typu wyjściowego równania. W wyniku rozwiązania dostajemy tkz krzywą charakterystyczną lub charakterystykę równania (*).

Sprowadzanie do postaci kanonicznej równania typu hiperbolicznego

Chcemy równanie RRC II rzędu o typie hiperbolicznym sprowadzić do postaci:

$$w_{\xi\eta} = G(\xi, \eta, w, w_{\xi}, w_{\eta})$$

Wiemy, że aby ją otrzymać musimy dokonać zamiany zmiennych $(x, y) \to (\xi, \eta)$. **Wyznaczamy je właśnie z równań charakterystyk.**

Równanie typu hiperbolicznego ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych o postaci:

1.

$$\boxed{\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{\delta}\right)} \to C_1 = \phi_1(x, y)}$$

2.

$$\boxed{\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{\delta}\right)} \to C_2 = \phi_2(x, y)}$$

Przyjmujemy, że

$$\xi = \phi_1(x, y) = C_1 \quad i \quad \eta = \phi_2(x, y) = C_2$$

i sprawdzamy, czy spełniony jest warunek:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Przykład ilustrujący

Sprowadź poniższe równanie do postaci kanonicznej

$$\mathbf{12}\boldsymbol{u_{xx}} - \mathbf{7}\boldsymbol{u_{xy}} + \boldsymbol{u_{yy}} = \mathbf{0}$$

- Sprawdzamy jaki to typ równania

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{12}, \qquad \boldsymbol{b} = \mathbf{-7}, \quad \boldsymbol{c} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{b}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{ac} = (\mathbf{-7})^2 - \mathbf{4} \cdot \mathbf{12} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{49} - \mathbf{48} = \mathbf{1} > \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{H})$$

Zatem nasze równanie jest typu hiperbolicznego

- Szukamy z równań charakterystyk zmiennych $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$

Pierwsze równanie charakterystyk ma postać:

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{b} + \sqrt{\boldsymbol{\delta}}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{12} = \frac{dy}{\frac{1}{2}\left(-7 + \sqrt{1}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{12} = \frac{dy}{-3}$$

Całkujemy

$$-3\int dx = 12\int dy \xRightarrow[\text{po skróceniu}]{} -\int dx = 4\int dy \xRightarrow[\text{stąd}]{} -x + C_1 = 4y$$

Dostajemy

$$\boxed{\boldsymbol{C_1} = \boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{y}}$$

Drugie równanie charakterystyk ma postać:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{\delta}\right)}\quad\rightarrow\quad\frac{dx}{12}=\frac{dy}{\frac{1}{2}\left(-7-\sqrt{1}\right)}\quad\rightarrow\quad\frac{dx}{12}=\frac{dy}{-4}$$

Całkujemy

$$-4\int dx=12\int dy\ \xRightarrow[po\ skróceniu]{}\ -\int dx=3\int dy\ \xRightarrow[stąd]{}\ -x+C_2=3y$$

Dostajemy

$$\boxed{C_2=x+3y}$$

Przyjmujemy $\xi=C_1=x+4y\quad i\quad \eta=C_2=x+3y$

Sprawdzamy warunek

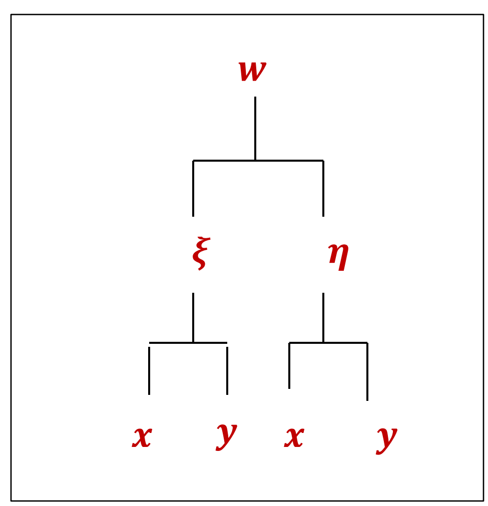
$$J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

Zatem znaleźliśmy zmienne ξ,η, które pozwolą nam sprowadzić wyjściowe równanie do postaci kanonicznej.

Zatem mamy w tej chwili sytuację:

$u(x,y)=w(\xi,\eta)$

Ale wiemy, że ξ,η są funkcjami zmiennych x,y.



Musimy policzyć pochodne w nowych zmiennych. W równaniu wyjściowym są tylko pochodne drugiego rzedu. Policzmy je, korzystają ze wzorów i informacji, że: $\boldsymbol{\xi_x = 1}$, $\boldsymbol{\xi_y = 4}$, $\boldsymbol{\eta_x = 1}$, $\boldsymbol{\eta_y = 3}$ i pochodne $\boldsymbol{\xi_{xx} = \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0}$.

$$\boldsymbol{u_{xx}} = w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi\xi_{xx} + w_\eta\eta_{xx} =$$

$$w_{\xi\xi} \cdot 1^2 + 2w_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + w_{\eta\eta} \cdot 1^2 + w_\xi \cdot 0 + w_\eta \cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}}$$

$$\boldsymbol{u_{xy}} = w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi\xi_{xy} + w_\eta\eta_{xy} =$$

$$w_{\xi\xi} \cdot 1 \cdot 4 + w_{\xi\eta} \cdot (1 \cdot 3 + 4 \cdot 1) + w_{\eta\eta} \cdot 1 \cdot 3 + w_\xi \cdot 0 + w_\eta \cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{4w_{\xi\xi} + 7w_{\xi\eta} + 3w_{\eta\eta}}$$

$$\boldsymbol{u_{yy}} = w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi\xi_{yy} + w_\eta\eta_{yy} =$$

$$w_{\xi\xi} \cdot 4^2 + 2w_{\xi\eta} \cdot 4 \cdot 3 + w_{\eta\eta} \cdot 3^2 + w_\xi \cdot 0 + w_\eta \cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{16w_{\xi\xi} + 24w_{\xi\eta} + 9w_{\eta\eta}}$$

Wstawmy policzone pochodne do naszego wyjściowego równania. Przypomnijmy je:

$$\boldsymbol{12u_{xx} - 7u_{xy} + u_{yy} = 0}$$

Zatem dostaniemy:

$$\boldsymbol{12 \cdot (w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}) - 7 \cdot (4w_{\xi\xi} + 7w_{\xi\eta} + 3w_{\eta\eta}) + (16w_{\xi\xi} + 24w_{\xi\eta} + 9w_{\eta\eta}) =}$$

$$\boldsymbol{12w_{\xi\xi} + 24w_{\xi\eta} + 12w_{\eta\eta} - 28w_{\xi\xi} - 49w_{\xi\eta} - 21w_{\eta\eta} + 16w_{\xi\xi} + 24w_{\xi\eta} + 9w_{\eta\eta} = 0}$$

Po dodaniu do siebie odpowiednich członów dojdziemy do postaci:

$$-w_{\xi\eta} = 0$$

Wiedząc, że $w(\xi,\eta) = u(\xi(x,y),\eta(x,y))$ możemy wrócić do funkcji poszukiwanej i napisać:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Jest to postać kanoniczna naszego wyjściowego równania. Aby znaleźć rozwiązanie musimy dokonać całkowania. Aby lepiej zrozumieć cały proces zapiszmy nasze równanie w postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$$

Najpierw całkujemy stronami po $d\eta$

$$\int \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) d\eta = \int 0 d\,\eta \quad \xRightarrow[\text{co daje nam}]{} \quad \frac{\partial u}{\partial\xi} = 0 + C(\xi) = C(\xi)$$

Gdzie C(ξ) jest funkcją zależną od zmiennej, po której nie całkuję.

A następnie otrzymane równanie całkujemy stronami po $d\xi$

$$\int \frac{\partial u}{\partial\xi} d\xi = \int C(\xi) d\xi \xRightarrow[\text{oznaczając } f(\xi) = \int C(\xi) d\xi]{} u = f(\xi) + g(\eta)$$

Gdzie g(η) jest funkcją zależną od zmiennej, po której nie całkuję.

Dostałam zatem rozwiązanie ogólne w zmiennych ξ, η

$$\boxed{u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)}$$

A podstawiając $\xi = x + 4y \quad i \quad \eta = x + 3y$ dostajemy:

$$\boxed{u(x,y) = f(x + 4y) + g(x + 3y)}$$

Jest to poszukiwane rozwiązanie ogólne w zmiennych x, y

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne musimy mieć dane warunki początkowe.

Dodajmy do naszego równania wyjściowego dwa warunki:

$$12u_{xx} - 7u_{xy} + u_{yy} = 0 \xRightarrow[o\ rozwiązaniu]{} u(x,y) = f(x + 4y) + g(x + 3y)$$

$$I\ \ warunek \quad u(x,0) = e^x$$

$$II\ warunek \quad u_y(x,0) = 20x$$

Warunek I możemy bezpośrednio wstawić do rozwiązania , drugi wymaga policzenia pochodnej u_y. Policzmy ją zatem korzystając z rozwiązania ogólnego.

$$u_y = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{dg}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = f' \cdot 4 + g' \cdot 3 = 4f' + 3g'$$

Zastosujmy zatem warunki początkowe do naszego rozwiązania i policzenia pochodnej aby wyznaczyć nieznane funkcje f i g.

Dostajemy układ równań

$$\begin{cases} f(x+4\cdot 0)+g(x+3\cdot 0)=e^x \\ 4f'(x+4\cdot 0)+3g'(x+3\cdot 0)=20x \end{cases}$$

Po uproszczeniu

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=e^x \\ 4f'(x)+3g'(x)=20x \end{cases}$$

Zróżniczkujmy pierwsze równanie i przemnóżmy przez (-4):

$$\begin{cases} -4f'(x)-4g'(x)=-4e^x \\ \quad 4f'(x)+3g'(x)=20x \end{cases}$$

Dodajmy teraz równania stronami. Otrzymamy:

$$-g'(x)=20x-4e^x \xRightarrow[\text{po przemnożeniu przez } (-1)]{} g'(x)=4e^x-20x$$

I całkujemy

$$g(x)=\int(4e^x-20x)dx=4e^x-20\frac{x^2}{2}+C=4e^x-10x^2+C$$

Mamy prawie gotowy „przepis" na funkcję $\boldsymbol{g}$. Biorąc $z=x$ dokonujemy uogólnienia. Zatem nasza funkcja g ma następującą postać:

$$\boldsymbol{g(z)=-10z^2+4e^z+C \leftarrow przepis\ na\ funkcję\ g}$$

Znając funkcję $\boldsymbol{g}$ możemy wyznaczyć funkcję $\boldsymbol{f}$ korzystając z równania

$$f(x)+g(x)=e^x \xRightarrow[wtedy]{} f(x)=e^x-g(x)=e^x-(-10x^2+4e^x+C)$$

$$f(x)=-3e^x+10x^2-C$$

Uogólnijmy to i weźmy $z=x$ wtedy:

$$\boldsymbol{f(z)=10z^2-3e^z-C \leftarrow przepis\ na\ funkcję\ f}$$

Znając obydwie funkcję możemy wyznaczyć ostateczne rozwiązanie- czyli znaleźć rozwiązanie szczególne:

$$u(x,y) = f(x+4y) + g(x+3y)$$

Zatem, po redukcji stałej C (stała C występuje w obu funkcjach w funkcji g ze znakiem „+”, w funkcji f ze znakiem „−") otrzymujemy:

$$u(x,y) = 10(x+4y)^2 - 3e^{x+4y} - 10(x+3y)^2 + 4e^{x+3y}$$

Co po uproszczeniu daje ostateczne rozwiązanie:

$$u(x,y) = 70y^2 + 20xy + e^{x+3y}(4 - 3e^y) \leftarrow \textit{rozwiązanie szczególne}$$