Zajęcia 6

Sprowadzanie do postaci kanonicznej równania typu parabolicznego

Chcemy równanie RRC II rzędu o typie parabolicznym sprowadzić do postaci:

$$w_{\xi\xi} = G(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta) \;\; lub \;\; w_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta)$$

Wiemy, że aby ją otrzymać musimy dokonać zamiany zmiennych $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. **Wyznaczamy je z równań charakterystyk.**

Równanie typu parabolicznego ma jedną rodzinę charakterystyk rzeczywistych o postaci:

$$\boxed{\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b} \rightarrow C_1 = \phi(x, y)}$$

Przyjmujemy, że

$$\xi = \phi(x, y) = C_1$$

Natomiast $\eta = \eta(x, y)$ dobieramy tak, aby był spełniony warunek:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Przykład ilustrujący

Sprowadź poniższe równanie do postaci kanonicznej

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Jak zwykle sprawdzamy jaki to typ równania.

$$a = 1, \qquad b = -2, \qquad c = 1$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Zatem nasze równanie jest typu **parabolicznego.**

Korzystając z równania krzywej charakterystycznej poszukajmy zmiennej ξ.

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{2 \cdot 1} = \frac{dy}{-2}$$

Całkujemy

$$\int dx = -\int dy \underset{stąd}{\Longrightarrow} \; x = C - y$$

Dostajemy

$$\boxed{C = x + y}$$

Zgodnie z „przepisem" przyjmujemy $\xi = C = x + y$ i dobieramy przykładowo drugą zmienną $\eta = x$. Jest to wybór arbitralny i najprostszy z możliwych.

(Moglibyśmy zrobić tak, że przyjmujemy $\eta = x + y$ i dobieramy drugą zmienną przykładowo jako $\xi = x$.)

Sprawdźmy, czy Jakobian przekształcenia jest różny od zera.

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 \neq 0$$

Policzmy teraz pochodne w nowych zmiennych. W równaniu wyjściowym są tylko pochodne drugiego rzędu. Policzmy je, korzystają ze wzorów i informacji, że: $\xi_x = 1$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 1$, $\eta_y = 0$ i pochodne $\xi_{xx} = \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0$.

$$\boldsymbol{u_{xx}} = w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi\xi_{xx} + w_\eta\eta_{xx} =$$

$$w_{\xi\xi}\cdot 1^2 + 2w_{\xi\eta}\cdot 1\cdot 1 + w_{\eta\eta}\cdot 1^2 + w_\xi\cdot 0 + w_\eta\cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}}$$

$$\boldsymbol{u_{xy}} = w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi\xi_{xy} + w_\eta\eta_{xy} =$$

$$w_{\xi\xi}\cdot 1\cdot 1 + w_{\xi\eta}\cdot(1\cdot 0 + 1\cdot 1) + w_{\eta\eta}\cdot 1\cdot 0 + w_\xi\cdot 0 + w_\eta\cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta}}$$

$$\boldsymbol{u_{yy}} = w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi\xi_{yy} + w_\eta\eta_{yy} =$$

$$w_{\xi\xi}\cdot 1^2 + 2w_{\xi\eta}\cdot 1\cdot 0 + w_{\eta\eta}\cdot 0^2 + w_\xi\cdot 0 + w_\eta\cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi}}$$

Wstawmy pochodne do równania wyjściowego :

$$\boldsymbol{u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0}$$

Wtedy otrzymujemy:

$$\boldsymbol{(w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}) - 2(w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta}) + w_{\xi\xi} =}$$

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta} - 2w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\xi\xi} = 0}$$

Po dodaniu do siebie odpowiednich członów dojdziemy do postaci:

$$\boldsymbol{w_{\eta\eta} = 0 \xLeftrightarrow[w(\xi,\eta)=u(\xi(x,y),\eta(x,y))\ zatem]{} u_{\eta\eta} = 0}$$

Przedstawmy to równanie w formie dogodniejszej do całkowania

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad \xRightarrow[co\ zapisujemy]{} \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0}$$

Scałkujmy powyższe wyrażenie stronami po $d\eta$:

$$\int \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) d\eta = \int 0 d\,\eta \xRightarrow[dostajemy]{} \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 + f(\xi)$$

Gdzie $f(\xi)$ jest funkcją („stałą”) zależną od zmiennej, po której nie całkuję.

Jeszcze raz całkujemy po $d\eta$**:**

$$u = \int f(\xi) d\eta \xRightarrow[f(\xi) traktujemy\ jak\ stałą]{} f(\xi) \cdot \eta + g(\xi)$$

Gdzie $g(\xi)$ jest funkcją („stałą”) wynikającą z całkowania, zależną od zmiennej, po której nie całkuję.

Dostałam zatem rozwiązanie ogólne w zmiennych ξ, η**.** Zapiszmy je jeszcze raz:

$$\boxed{u(\xi,\eta) = f(\xi) \cdot \eta + g(\xi)}$$

Zapiszmy rozwiązanie ogólne w zmiennych x, y, pamiętając, że :

$$\xi = x + y \;\; i \;\; \eta = x$$

$$\boxed{u(x,y) = f(x+y) \cdot x + g(x+y)}$$

Przykłady funkcji, które spełniają wyjściowe równanie:

$$u(x,y) = (x+y)^2 \cdot x + (x+y)^3$$

$$u(x,y) = x\cos(x+y) + \frac{1}{x+y}$$

$$u(x,y) = (x+y)x + (x+y) \quad itp \ldots$$

Sprowadzanie do postaci kanonicznej równania typu eliptycznego

Chcemy równanie RRC II rzędu o typie eliptycznym sprowadzić do postaci:

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, w, w_{\xi}, w_{\eta})$$

Wiemy, że aby ją otrzymać musimy dokonać zamiany zmiennych $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$. **Wyznaczamy je właśnie z równań charakterystyk.**

Równanie typu eliptycznego ma dwie rodziny charakterystyk zespolonych o postaci:

1.

$$\boxed{\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{\left(b + i\sqrt{-\delta}\right)} \rightarrow C_1 = \phi = \phi_1(x, y) + i\phi_2(x, y)}$$

2.

$$\boxed{\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{\left(b - i\sqrt{-\delta}\right)} \rightarrow C_2 = \phi = \phi_1(x, y) - i\phi_2(x, y)}$$

Przyjmujemy, że

$$\xi = \phi_1(x, y) = Re\phi \quad i \quad \eta = \phi_2(x, y) = Im\phi$$

i sprawdzamy, czy spełniony jest warunek:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Przykład ilustrujący

Sprowadź poniższe równanie do postaci kanonicznej

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0$$

- Sprawdzamy jaki to typ równania

$$a = 1, \qquad b = -4, \quad c = 5$$

$$\delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0 \qquad (E)$$

Zatem nasze równanie jest typu eliptycznego

- Szukamy z równań charakterystyk zmiennych ξ, η

Piersze równanie charakterystyk ma postać:

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{\left(b + i\sqrt{-\delta}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{2 \cdot 1} = \frac{dy}{\left(-4 + i\sqrt{-(-4)}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{2} = \frac{dy}{-4 + 2i}$$

Całkujemy

$$(-4 + 2i) \int dx = 2 \int dy \xRightarrow[po\ skróceniu]{} (-2 + i) \int dx = \int dy$$

Stąd

$$-2x + ix + C_1 = y \xRightarrow[wynika\ z\ tego]{} C_1 = 2x + y - ix$$

Zatem

$$\phi_1(x, y) = 2x + y, \quad \phi_2(x, y) = -x$$

Drugie równanie charakterystyk ma postać:

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{2a}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{i}\sqrt{-\boldsymbol{\delta}}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{2\cdot 1} = \frac{dy}{\left(-4 - i\sqrt{-(-4)}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{2} = \frac{dy}{-4-2i}$$

Całkujemy

$$(-4-2i)\int dx = 2\int dy \xrightarrow[\text{po skróceniu}]{} (-2-i)\int dx = \int dy$$

Stąd

$$-2x - ix + C_2 = y \xrightarrow[\text{wynika z tego}]{} \boldsymbol{C_2 = 2x + y + ix}$$

$$\boldsymbol{\phi_1(x,y) = 2x + y, \quad \phi_2(x,y) = x}$$

Wybieramy jedną z opcji i przyjmujemy, że:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi = \phi_1 = 2x + y \quad i \quad \eta = \phi_2 = x}}$$

(Przyjęcie, że $\xi = \phi_1 = 2x + y \quad i \quad \eta = \phi_2 = -x$ też jest prawidłowe. Może też być alternatywą gdy przy pierwszym wyborze Jakobian przekształcenia J=0)

Sprawdzamy warunek:

$$\boldsymbol{J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0}$$

Liczymy pochodne w nowych zmiennych. W równaniu wyjściowym są tylko pochodne drugiego rzędu. Skorzystajmy ze wzorów i informacji, że: $\boldsymbol{\xi_x = 2}$, $\boldsymbol{\xi_y = 1}$, $\boldsymbol{\eta_x = 1}$, $\boldsymbol{\eta_y = 0}$ i pochodne $\boldsymbol{\xi_{xx} = \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0}$.

$$\boldsymbol{u_{xx}} = w_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_x^2 + w_\xi\xi_{xx} + w_\eta\eta_{xx} =$$

$$w_{\xi\xi}\cdot 2^2 + 2w_{\xi\eta}\cdot 2\cdot 1 + w_{\eta\eta}\cdot 1^2 + w_\xi\cdot 0 + w_\eta\cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{4w_{\xi\xi} + 4w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}}$$

$$\boldsymbol{u_{xy}} = w_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + w_\xi\xi_{xy} + w_\eta\eta_{xy} =$$

$$w_{\xi\xi}\cdot 2\cdot 1 + w_{\xi\eta}\cdot(2\cdot 0 + 1\cdot 1) + w_{\eta\eta}\cdot 1\cdot 0 + w_\xi\cdot 0 + w_\eta\cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{2w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta}}$$

$$\boldsymbol{u_{yy}} = w_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\eta_y^2 + w_\xi\xi_{yy} + w_\eta\eta_{yy} =$$

$$w_{\xi\xi}\cdot 1^2 + 2w_{\xi\eta}\cdot 1\cdot 0 + w_{\eta\eta}\cdot 0^2 + w_\xi\cdot 0 + w_\eta\cdot 0 =$$

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi}}$$

Wstawmy policzone pochodne do naszego wyjściowego równania. Przypomnijmy je:

$$\boldsymbol{u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0}$$

Zatem dostaniemy:

$$\boldsymbol{(4w_{\xi\xi} + 4w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}) - 4\cdot(2w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta}) + 5(w_{\xi\xi})} =$$

$$\boldsymbol{4w_{\xi\xi} + 4w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta} - 8w_{\xi\xi} - 4w_{\xi\eta} + 5w_{\xi\xi} = 0}$$

Po dodaniu do siebie odpowiednich członów dojdziemy do postaci:

$$\boldsymbol{w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = 0}$$

Wiedząc, że $\boldsymbol{w(\xi,\eta)=}$ $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ możemy wrócić do funkcji poszukiwanej i napisać:

$$\boxed{\boldsymbol{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0}}$$

Rozwiązaniem tego typu równania jest tkz funkcja harmoniczna – czyli funkcja klasy $C^2(D)$spełniająca równanie Laplace'a.

Przykładem rozwiązania powyższego równania jest wielomian:

$$\boldsymbol{u(\xi,\eta) = \xi^2 - \eta^2}$$

W zmiennych x, y przykładowe rozwiązanie naszego równania wyglądałoby następująco:

$$\boldsymbol{u(x,y) = (2x + y)^2 - x^2}$$

Prośba o sprawdzenie, że faktycznie podane $\boldsymbol{u(x,y)}$ spełnia równie wyjściowe !!!

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie 1

Dane jest równanie :

$$\boldsymbol{u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0}$$

- Sprowadź to równanie do postaci kanonicznej.
- Znajdź postać ogólną rozwiązania.
- Na jej podstawie zaproponuj konkretne rozwiązanie i sprawdź czy spełnia ono równanie wyjściowe.

ODP: Równanie typu hiperbolicznego.

Postać ogólna rozwiązania $\mathrm{u(x,y) = f(2x + y) + g(y - 8x)}$

Zadanie 2

Dane jest równanie:

$$\boldsymbol{u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0}$$

- Sprawdź jaki to typ równania.
- Sprowadź je do postaci kanonicznej i wyprowadź z niej postać ogólną rozwiązania.

WSKAZÓWKI: Równanie typu parabolicznego. Z równania charakterystyk wyliczamy $\xi = 2x + y$ a zmienną η przyjmujemy równą x.

Postać ogólna rozwiązania: $\mathbf{u(x, y) = x \cdot f(2x + y) + g(2x + y)}$

****

Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego dla podanego powyżej równania. Warunki początkowe mają następującą postać:

$$\boldsymbol{u(0, y) = y^2}$$

$$\boldsymbol{u_x(0, y) = 4y + 2}$$

Wstawmy warunki początkowe do naszego rozwiązania ogólnego.

$$u(0, y) = 0 \cdot f(0 + y) + g(0 + y) = y^2 \xRightarrow[dostajemy]{} g(y) = y^2$$

Zanim wstawimy drugi warunek do rozwiązania, policzmy pochodną u_x.

$$u_x(x, y) = 1 \cdot f(2x + y) + x \cdot f'(2x + y) \cdot 2 + 2 \cdot g'(2x + y)$$

Wtedy

$$u_x(0, y) = f(2 \cdot 0 + y) + 0 \cdot f'(2 \cdot 0 + y) \cdot 2 + 2g'(2 \cdot 0 + y) =$$

$$= f(y) + 2g'(y) = 4y + 2$$

Dostajemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} g(y) = y^2 \\ f(y) + 2g'(y) = 4y + 2 \end{cases}$$

Zróżniczkujmy pierwsze równanie i przemnóżmy przez 2.

$$\begin{cases} 2g'(y) = 4y \\ f(y) + 2g'(y) = 4y + 2 \end{cases}$$

A następnie odejmijmy pierwsze równanie stronami od drugiego. Dostaniemy:

$$f(y) = 2 \leftarrow jest\ to\ funkcja\ stała$$

$$g(y) = y^2 \leftarrow dane\ jest\ bezpośrednio\ z\ war.początkowego$$

Mamy zatem gotowe przepisy na funkcje f i g. Uogólnijmy je robiąc podstawienie $z = y$. Zapiszmy ostateczną postać tych funkcji

$$f(z) = 2\ \ i\ \ \ g(z) = z^2$$

i wprowadźmy je do naszego rozwiązania ogólnego:

$$\boldsymbol{u(x,y)} = x \cdot f(2x + y) + g(2x + y) = \mathbf{x \cdot 2 + (2x + y)^2}$$

Zatem ostateczna postać rozwiązania dana jest wzorem

$$\boxed{\boldsymbol{u(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x}}$$

Zadanie 3

Dane jest równanie:

$$\boldsymbol{sin^2y \cdot u_{xx} - 2cosy \cdot u_{xy} - u_{yy} + siny \cdot u_x = 0}$$

- Sprawdź jaki to typ równania
- Znajdź zmienne $\boldsymbol{\xi, \eta}$, które mogą sprowadzić równanie do formy kanonicznej (Nie przeprowadzaj całego rachunku sprowadzającego równanie do tej formy. Przypomnij sobie jak wygląda forma kanoniczna równania dla typu równania, który otrzymałeś z analizy)
- Wiedząc, że $\boldsymbol{G\left(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta\right) = 0}$ w równaniu kanonicznym równania wyjściowego, znajdź rozwiązanie ogólne

  WSKAZÓWKI: Równanie typu hiperbolicznego. Wiemy, że:

$$G\left(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta\right) = 0 \rightarrow w_{\xi\eta} = 0$$

Rozwiązanie ogólne:

$$u(x,y) = f(-x + siny + y) + g(x + y - \sin y)$$

****

Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego dla podanego równania wyjściowego. Warunki początkowe mają następującą postać:

$$\boldsymbol{u(x,0) = x}$$

$$\boldsymbol{u_y(x,0) = 1}$$

Wstawmy warunki początkowe do naszego rozwiązania ogólnego.

$$u(x,0) = f(-x + \sin 0 + 0) + g(x + 0 - \sin 0) = x \xrightarrow[dostajemy]{}$$

$$u(x,0) = f(-x) + g(x) = x$$

Zanim wstawimy drugi warunek do rozwiązania, policzmy pochodną u_y.

$$u_y = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{dg}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = f'(-x + \sin y + y) \cdot (1 + \cos y) + g'(x + y - \sin y) \cdot (1 - \cos y)$$

Wtedy:

$$u_y(x,0) = f'(-x + \sin 0 + 0) \cdot (1 + \cos 0) + g'(x + 0 - \sin 0) \cdot (1 - \cos 0) =$$

$$= 2f'(-x) + g'(x) \cdot 0 = 1 \xrightarrow[co\ daje]{} 2f'(-x) = 1$$

Dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} f(-x) + g(x) = x \\ 2f'(-x) = 1 \end{cases}$$

Zróżniczkujmy pierwsze równanie po x, a drugie podzielmy stronami przez 2.

$$\begin{cases} -f'(-x) + g'(x) = 1 \\ f'(-x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + g'(x) = 1 \\ f'(-x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zajmijmy się pierwszym z równań. Po przekształceniu otrzymamy:

$$g'(x) = \frac{3}{2} \xrightarrow[Całkujemy]{} g(x) = \frac{3}{2}\int dx \underset{stąd}{\Longrightarrow} g(x) = \frac{3}{2}x + C$$

Aby otrzymać $f(-x)$ wrócimy do równania:

$$f(-x) + g(x) = x \underset{stąd}{\Longrightarrow} f(-x) + \frac{3}{2}x + C = x \xrightarrow[i\ ostatecznie]{} f(-x) = -\frac{1}{2}x - C$$

Mamy zatem prawie gotowe przepisy na funkcje f i $g.$ Uogólnijmy je robiąc podstawienie $z = x.$ Funkcja g bezpośrednio wynika z podstawienia:

$$\boldsymbol{g(z) = \frac{3}{2}z + C}$$

Natomiast funkcję f otrzymujemy następująco

$$z = -x\ to\ x = -z \underset{stąd}{\Longrightarrow} f(z) = -\frac{1}{2}(-z) - C$$

Więc ostatecznie

$$\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{2}z - C}$$

Wprowadźmy funkcje do rozwiązania ogólnego

$$\boldsymbol{u(x,y)} = f(-x + \sin y + y) + g(x + y - \sin y) =$$

$$= \frac{1}{2}(-x + \sin y + y) - C + \frac{3}{2}(x + y - \sin y) + C =$$

$$\boldsymbol{x - \sin y + 2y}$$

Czyli ostateczne rozwiązanie ma postać $\boldsymbol{u(x,y) = x - sin\, y + 2y}$