Zajęcia 12

Elementy Analizy Funkcjonalnej

Przestrzenie funkcyjne to pomysł analogiczny do pomysłu zwykłych przestrzeni wektorowych (w sensie geometrycznym). Przestrzenie wektorowe mają swoją miarę wektorów (w sensie długości), odległości między wektorami i iloczyny skalarne.

Różnica między zwykłymi przestrzeniami wektorowymi a przestrzeniami funkcyjnymi polega na tym, że wektory z przestrzeni funkcyjnych pozwalają na wiele alternatywnych sposobów mierzenia długości, dystansu między wektorami i liczenia iloczynów skalarnych.

Potrzeba użycia tego typu przestrzeni wynikała z badania istnienia i jednoznaczności zagadnień brzegowych i ich aproksymacji.

Norma wektora

Niech $\boldsymbol{V}$ będzie liniową przestrzenią wektorową nad zbiorem liczb rzeczywistych R. Liniowość przestrzeni oznacza, że jest w niej określone działanie dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez liczby:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} = \alpha \cdot \boldsymbol{w} \end{cases}$$

Norma przestrzeni wektorowej V jest funkcją, która przekształca każdy element (w sensie wektora) $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ w liczbę rzeczywistą $||\boldsymbol{u}||$ taką, że $||\boldsymbol{u}||$ spełnia następujace warunki:

- $\left||\boldsymbol{u}|\right| \geq 0 \quad i \quad \left||\boldsymbol{u}|\right| = 0 \underset{tylko\, wtedy, gdy}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{u} = 0 \ - (dodatniość)$
- $\left||\alpha \cdot \boldsymbol{u}|\right| = |\alpha| \cdot \left||\boldsymbol{u}|\right|, \quad \alpha \epsilon R - (jednorodność)$
- $\left||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|\right| \leq \left||\boldsymbol{u}|\right| + \left||\boldsymbol{v}|\right|, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} - (nierówność\ trójkąta)$

Przykładem normy w przestrzeni geometrycznej, gdzie $\boldsymbol{x} \in R^n$jest zwykła długość wektora.

$$||\boldsymbol{x}|| = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

Liniowa przestrzeń ze zdefiniowaną normą nazywa się unormowaną przestrzenią liniową.

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny jest to funkcja, która każdej parze wektorów przyporządkowuje liczbę rzeczywistą.

Możemy w skrócie zapisać to następująco :

$$V \times V \rightarrow R \ \text{ dla kazdej pary wektorów } u, v \in V \times V$$

Iloczyn skalarny oznaczamy jako (u, v) lub $< u, v >$. Spełnia on następujące warunki:

- $(u, v) = (v, u) \quad (warunek\ symetrii)$
- $(\alpha u, v) = \alpha(u, v) \quad (\ warunek\ homogeniczności)$
- $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \ \ (warunek\ addytywności)$
- $(u, u) > 0 \ \ i \ \ \ (u, u) = 0 \ \leftrightarrow u = 0\ (warunek\ dodatniosci)$

Przykład

Iloczyn skalarny $(x, y) = x_i y_i$

Sprawdźmy czy spełnia postawione warunki:

- $x_i y_i = y_i x_i$

- $(\alpha x_i)y_i = \alpha(x_i y_i)$
- $(x_i + y_i)z_i = x_i z_i + y_i z_i$
- $x_i x_i \geq 0 \; zerem \; jest \; tylko \; gdy \; \boldsymbol{x} = 0$

Zatem wszystkie warunki są spełnione.

Taki iloczyn skalarny możemy przykładowo wyrazić następująco.

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g \, d\Omega$$

Można sprawdzić, że spełnia on wszystkie postawione warunki.

Wektory ortogonalne

Dwa wektory sa ortogonalne, jeżeli ich iloczyn skalarny jest zerowy.

$$(u, v) = 0$$

Ortonormalność

Zbiór wektorów $\{u_n\}$ nazywamy ortonormalnym jeżeli

$$\left(u_i, u_j\right) = \delta_{ij} \quad gdzie \;\; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Przestrzeń unitarna

Zbiór V iloczynów skalarnych nazywamy przestrzenią unitarną, jeżeli

- V jest przestrzenią liniową
- Posiada określony iloczyn skalarny (u, v)
- W przestrzeni V zdefiniowana jest norma

$$\left|\left|u\right|\right| = \sqrt{(u, u)}$$

Unitarność oznacza zatem przestrzeń z określonym iloczynem skalarnym i normą.

Twierdzenie

Niech $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}$ będzie ciągiem elementów $\{\boldsymbol{u_n}\}$. Jeżeli zachodzi

$$\lim_{m,n\to\infty} ||\boldsymbol{u_m} - \boldsymbol{u_n}|| = 0$$

Jest to ciąg Cauchy'ego.

Jeżeli dla każdego ciagu $\{\boldsymbol{u_n}\}$ istnieje element $\boldsymbol{u_0} \in \boldsymbol{V}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_0}|| = 0$$

to przestrzeń, w której ten warunek jest spełniony nazywamy zupełną.

Przestrzeń Banacha

Jest to unormowana, zupełna przestrzeń liniowa.

Przestrzeń Hilberta

Jest to przestrzeń unitarna zupełna. Można też znaleźć definicję, że jest to nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha z określonym iloczynem skalarnym.

Przestrzeń funkcyjna $L^2(\Omega)$

Mówimy, że $u \in L^2(\Omega)$ czyli do przestrzeni wektorowej funkcji całkowalnych w kwadracie gdy spełniony jest warunek

$$(u, u) = \int_\Omega u^2(x) d\Omega < \infty$$

Oznacza to, że $L^2(\Omega)$ jest ograniczoną przestrzenią z określoną normą i iloczynem skalarnym.

Funkcje próbne

Funkcjami próbnymi (testowymi) $\phi: R^n \to R$ nazywamy funkcje nieskończenie różniczkowalne (tkz funkcje gładkie), czyli takie, których wszytkie pochodne istnieją i są ciagłe.

Funkcje te są różne od zera na ograniczonym obszarze. Zbiór takich funkcji oznacza się symbolem C_0^∞. Dolny indeks – 0 oznacza, że funkcja $\phi \epsilon C_0^\infty(\Omega)$znika blisko brzegu Ω.

Pochodna dystrybucyjna lub tkz pochodna uogólniona

Funkcja $u \epsilon C^m(\Omega)$ ma pochodną dystrybucyjną (uogólnioną) jeżeli spełniona jest następujaca równość:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Du(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)D\phi(x)dx$$

gdzie $Du(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$ i $D\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

Dla pochodnych dystrybucyjnych rzędu α równość wygląda analogicznie:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)D^\alpha\phi(x)dx$$

Definicja przestrzeni Sobolewa

Przestrzenią Sobolewa $H^m(\Omega)$ nazywamy przestrzeń funkcji całkowalnych w kwadracie, których pochodne cząstkowe w sensie dystrybucyjnym do rzędu m włącznie też należą do $L^2(\Omega)$.

Definicje tę możemy w skrócie zapisać następująco:

$$H^m(\Omega) \coloneqq \{u \epsilon L^2(\Omega):\ D^\alpha u \epsilon L^2(\Omega)\ dla\ 0 < |\alpha| < m\}$$

Przestrzeń ta ma określoną normę i iloczyn skalarny.

Przestrzeń Sobolewa 1 rzędu zdefiniowana jest następująco:

$$H^1(\Omega) \coloneqq \{u \in L^2(\Omega) \colon \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

Przestrzeń ta ma normę i iloczyn skalarny przedstawione odpowiednio poniższymi wzorami –

norma

$$||u||_1 = \left[\int_\Omega |u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}$$

iloczyn skalarny

$$(u, v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega$$

Sformułowanie słabe

Rozważmy zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = 0 \; na \; brzegu \; \Gamma \end{cases}$$

Dla $f \in C(\Omega)$ klasyczne rozwiązanie należy do $C^2(\Omega)$ i znika na brzegu Γ. Przemnóżmy równanie Poissona przez dowolną funkcję $\phi(x) \epsilon C_0^\infty(\Omega)$ (czyli przez funkcję gładką, znikającą na brzegu). Scałkujmy rezultat. W wyniku dostaniemy:

$$-\int_\Omega \phi \cdot \Delta u \, d\Omega = \int_\Omega \phi \cdot f \, d\Omega$$

$$-\int_\Omega \phi \cdot \Delta u \, d\Omega = -\int_{\partial\Omega} \phi \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega + \int_\Omega \nabla\phi \nabla u \, d\Omega$$

Zauważmy, że całka po brzegu $\partial\Omega$ znika, bo funkcja ϕ na brzegu jest równa zeru.

Zatem prawdziwa jest równość:

$$\int_{\Omega} \nabla\phi\nabla u\, d\Omega = \int_{\Omega} \phi \cdot f\, d\Omega \underset{co\ jest\ równoważne}{\Longleftrightarrow} \int_{\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\Omega} \phi \cdot f\, d\Omega$$

Tożsamość powyższa ma sens nawet wtedy, gdy wyjściowe równanie nie ma rozwiązań klasycznych należących do $C^2(\Omega)$ i nawet wtedy gdy funkcja $f \epsilon L^2(\Omega)$ nie jest funkcją ciągłą.

Definicja słabego rozwiązania

Niech $u \epsilon H^1(\Omega)$ (należy do przestrzeni Sobolewa 1-rzędu) i $f \epsilon L^2(\Omega)$ (do przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie).

Jeżeli dla każdej funkcji $\phi \epsilon C_0^{\infty}(\Omega)$ (gładkiej i znikającej na brzegu) zachodzi tożsamość:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\Omega} \phi \cdot f\, d\Omega$$

to mówimy, że u jest słabym (uogólnionym) rozwiązaniem równania wyjściowego (w tym wypadku równania Poissona).

Nasze zadanie jest równorzędne znalezieniu $u \epsilon H_0^1(\Omega)$ takiego, że

$$(\boldsymbol{\nabla u}, \boldsymbol{\nabla \phi})_{\mathbf{0}} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi})_{\mathbf{0}}$$

dla wszystkich $\phi \epsilon H_0^1(\Omega)$ (gdzie $C_0^\infty(\Omega)$ jest podprzestrzenią $H_0^1(\Omega)$).

Uwaga

Do sformułowania słabego możemy dojść również poszukując minimum funkcjonału tkz całki Dirichleta

$$G(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega$$

Zatem tkz pochodna Gateaux (pochodna kierunkowa) musi być równa 0.

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(u + \varepsilon\psi)_{\varepsilon=0} = 0$$

Poszukiwanie rozwiązania

Weźmy

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i \, \phi_i$$

gdzie α_i to nieznane współczynniki, a ϕ_i to funkcje próbne (preferowane są ortonormalne). Dokonujemy aproksymacji a własciwie obcięcia (jeśli ciag $\{u_n\}$ jest zbieżny to współczynniki znikają w nieskończoności). Funkcje próbne należy dobrać z odpowiednich przestrzeni Hilberta.

$$u \approx \sum_{n=1}^{k} \alpha_i \, \phi_i$$

Gdy u w takiej postaci podstawimy do równania:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \int_\Omega f\phi \, d\Omega \xRightarrow[dostaniemy]{} \int_\Omega \nabla(\alpha_i \phi_i) \nabla \phi_j \, d\Omega \; = \int_\Omega f_i \phi_i$$

Możemy zapisać powyższą równość w postaci

$$\alpha_i K_{ij} = d_i$$

Gdzie

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\phi_i \nabla\phi_j \, d\Omega$$

jest nazywana macierzą sztywności (od zagadnień związanych z wytrzymałością konstrukcji) a

$$d_i = \int_{\Omega} f_i \phi_i$$

to tak zwany wektor sił.

Dostajemy zatem układ równań z nieznanymi wartościami α_i, który należy rozwiązać znanymi metodami numerycznymi.