Zajęcia 4 RRC

Skrót najistotniejszych informacji:

Do rozwiazywanie równań liniowych i quasiliniowych używamy metody charakterystyk.

Przedstawmy równanie RRC I rzędu w postaci:

$$\boldsymbol{a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = f(x,y,u)}$$

Zatem rozwiązanie polega na znalezieniu równania powierzchni $u = u(x,y)$.

Warunek początkowy dodany do równania oznacza krzywą l leżącą na tej powierzchni.

Zdefiniujmy wektor współczynników: $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{f})$.

Można pokazać, że szukana powierzchnia jest styczna do tego wektora.

Jeżeli „wyruszymy” z punktu na krzywej l i będziemy poruszać się w kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{v}$, to nakreślimy krzywą na powierzchni $u(x,y)$.

Krzywa ta nazywa się charakterystyką. Można udowodnić, że wektor styczny do tej krzywej jest proporcjonalny do wektora $\vec{v}$.

Stwierdzenie to prowadzi do równości:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{f}$$

Która jest równorzędna dwóm postaciom równań różniczkowych zwyczajnych.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad i \quad \frac{du}{dx} = \frac{f}{a} \qquad lub \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a}{b} \quad i \quad \frac{du}{dy} = \frac{f}{b}$$

Wybieramy jedną z nich i rozwiązujemy. Otrzymujemy w wyniku dwie całki pierwsze:

$$C_1 = \varphi_1(x,y,u) \quad i \quad C_2 = \varphi_2(x,y,u)$$

Postać rozwiązania ogólnego: $C_2 = f(C_1)$

Na podstawie danego warunku początkowego wyznaczamy nieznaną funkcję f

Zadanie 1

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego o postaci

$$u_t + u_x + 7u = 0 \xRightarrow[\text{możemy zapisać jako}]{} u_t + u_x = -7u$$

$$u(x,0) = e^x \ \textit{warunek poczatkowy}$$

Zdefiniujmy wektor współczynników $\vec{v} = (a, b, f) = (1,1,-7u)$.

Do rozwiązania powyższego zagadnienia wykorzystajmy równość:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dt}{b} = \frac{du}{f}$$

W naszym przypadku przyjmuje ona następującą postać:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{-7u}$$

De facto otrzymaliśmy dwa równania różniczkowe zwyczajne o rozdzielonych zmiennych.

Oznaczmy pierwsze numerem 1

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1}$$

i drugie numerem 2

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{-7u}$$

Rozwiązanie równania 1:

$$\int dx = \int dt \xrightarrow[dostajemy]{} x = t + C_1 \underset{stąd}{\Longrightarrow} \boldsymbol{C_1 = x - t}$$

Rozwiązanie równania 2:

$$\int dt = \int \frac{du}{-7u} \xrightarrow[dostajemy]{} -7t + \ln C_2 = \ln u$$

Wygodniej nam stałą opisać w postaci $\ln C_2$ (logarytm ze stałej jest też stałą). Ułatwi nam to następne przekształcenia. Stałą możemy dodać z dowolnej strony. Nie zmieni nam to ostatecznego rozwiązania.

Kontynuując

$$-7t = \ln u - \ln C_2 \xrightarrow[co\ daje\ nam]{} -7t = ln\frac{u}{C_2} \underset{stąd}{\Longrightarrow} e^{-7t} = \frac{u}{C_2}$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\boldsymbol{C_2 = \frac{u}{e^{-7t}} = ue^{7t}}$$

Nasze rozwiązanie ogólne będzie wynikało z przedstawienia $\boldsymbol{C_2 = f(C_1)}$ omówionego w poprzednim wykładzie.

Zatem w naszym przypadku rozwiązanie ogólne możemy zapisać jako

$$\boldsymbol{ue^{7t} = f(x - t)}$$

co pozwala nam zapisać nieznaną funkcję u w postaci

$$\boxed{\boldsymbol{u = e^{-7t} f(x - t)}}$$

Funkcja f jest dowolną funkcją argumentu $(x - t)$. Aby ją ukonkretnić skorzystamy z warunku początkowego

$$u(x,0) = e^x$$

Zatem

$$u(x,0) = e^{-7\cdot 0} f(x-0) = f(x) = e^x$$

Zróbmy podstawienie $z = x$ wtedy $\boldsymbol{f(z) = e^z}$ i to jest „przepis” na naszą poszukiwaną funkcję f.

Wykorzystując powyższy „przepis” możemy przedstawić **rozwiązanie szczególne** wyjściowego równania:

$$\boxed{\boldsymbol{u(x,t)} = e^{-7t} e^{(x-t)} = e^{-7t} e^x e^{-t} = e^x e^{-8t} = \boldsymbol{e^{x-8t}}}$$

Do samodzielnej pracy:

1. Sprawdzić, czy rozwiązanie spełnia równanie wyjściowe
2. Udowodnić, że dostaniemy to samo rozwiązanie gdy wybierzemy alternatywnie dwa równania różniczkowe zwyczajne o postaci:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1} \quad i \quad \frac{dx}{1} = \frac{du}{-7u}$$

3. Znajdź rozwiązanie zagadnienia:

$$yu_x - xu_y = 3x$$
$$u(x,0) = x^2$$

Odpowiedź: $u(x,y) = -3y + x^2 + y^2$

Zadanie 2

Dane jest zagadnienie Cauchy'ego o postaci:

$$\boldsymbol{u_x + x u_y = y}$$

$$\boldsymbol{u(0, y) = \cos\ y}$$

Znajdź rozwiązanie.

Zdefiniujmy wektor współczynników $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

Do rozwiązania powyższego zagadnienia wykorzystajmy równość:

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{f}}$$

W naszym przypadku przyjmuje ona następującą postać:

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{y}}$$

Wytypujmy z tej równości dwa równania. Wybór pierwszego wydaje się oczywisty:

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{x}}$$

Wybór drugiego jest jednak niełatwy. Czy zdecydować się na

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{y}} \quad czy\ może\ na \quad \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{y}} \quad ?$$

Jak rozdzielić zmienne, żeby miało to sens? Pierwsza opcja wydaje się prostsza. Zdecydujmy się zatem na nią. Jednak warto zaznaczyć, że wybór jest arbitralny.

Rozwiążmy najpierw pierwsze z równań:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} \underset{wtedy}{\Longrightarrow} \int x dx = \int dy \underset{dostajemy}{\Longrightarrow} \boldsymbol{C_1 + \frac{x^2}{2} = y}$$

i oczywiście stała $\boldsymbol{C_1}$

$$\boldsymbol{C_1 = y - \frac{x^2}{2}}$$

Zajmiemy się teraz drugim równaniem:

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{y}$$

Podstawmy za y wyrażenie otrzymane przy rozwiązywaniu pierwszego równania czyli $y = C_1 + \frac{x^2}{2}$.

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{C_1 + \frac{x^2}{2}} \underset{Całkujemy}{\Longrightarrow} \int (C_1 + \frac{x^2}{2})dx = \int du \underset{stąd}{\Longrightarrow} u = C_1 x + \frac{x^3}{6} + C_2$$

Zapiszemy teraz wyrażenie na C_2:

$$C_2 = u - C_1 x - \frac{x^3}{6}$$

i podstawmy do niego wyznaczone wcześniej C_1

$$\boldsymbol{C_2 = u - (y - \frac{x^2}{2}) \cdot x - \frac{x^3}{6}}$$

Równanie ogólne otrzymamy, gdy skorzystamy ze wzoru $\boldsymbol{C_2 = f(C_1)}$.

Zatem:

$$u - \left(y - \frac{x^2}{2}\right) \cdot x - \frac{x^3}{6} = f\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

Co pozwala zapisać nam nieznaną funkcję $\boldsymbol{u}$ w postaci:

$$\boxed{\boldsymbol{u = \left(y - \frac{x^2}{2}\right) \cdot x + \frac{x^3}{6} + f\left(y - \frac{x^2}{2}\right)}}$$

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne korzystamy z warunku początkowego:

$$u(0, y) = \cos y$$

Zatem

$$u(0, y) = (y - 0) \cdot 0 + \frac{0}{6} + f(y - 0) = \cos y \xRightarrow[dostajemy]{} f(y) = \cos y$$

Zróbmy podstawienie $z = y$ wtedy $\boldsymbol{f(z) = cos\, z}$ i to jest „przepis" na naszą poszukiwaną funkcję f.

Zastosujmy go w wyrażeniu na niewiadomą u:

$$u = \left(y - \frac{x^2}{2}\right) \cdot x + \frac{x^3}{6} + cos\left(y - \frac{x^2}{2}\right) = yx - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + cos\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$$

Co w ostatecznym wyniku daje nam:

$$\boxed{\boldsymbol{u = yx - \frac{x^3}{3} + cos\left(y - \frac{x^2}{2}\right)}}$$

ISTOTNE TOŻSAMOŚCI

Zanim przystąpimy do rozwiązywania następnego równania, przyjrzyjmy się następującym proporcjom. Jeśli zachodzi:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda \xRightarrow[wtedy]{} a_1 = b_1\lambda \;\; i \;\; a_2 = b_2\lambda$$

to prawdziwe są następujące proporcje:

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \lambda \;\; bo \;\; \frac{b_1\lambda + b_2\lambda}{b_1 + b_2} = \frac{\lambda(b_1 + b_2)}{b_1 + b_2} = \lambda$$

$$\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \lambda \ \ bo \ \ \frac{b_1\lambda - b_2\lambda}{b_1 - b_2} = \frac{\lambda(b_1 - b_2)}{b_1 - b_2} = \lambda$$

<u>Zadanie 3</u>

Rozwiążmy następujące równanie quasiliniowe korzystając z powyższych proporcji

$$\boldsymbol{uu_x + yu_y = x}$$

$$\boldsymbol{u(x, 1) = 2x}$$

Zdefiniujmy wektor współczynników $\vec{v} = (a, b, f) = (u, y, x)$.

Do rozwiązania powyższego zagadnienia wykorzystajmy równość:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{f}}$$

W naszym przypadku przyjmuje ona następującą postać:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x}}$$

Aby ułatwić rozwiązanie, zamiast bezpośrednich równań weźmy następujące:

Pierwsze -

$$\boldsymbol{\frac{dx + du}{u + x} = \frac{dy}{y}}$$

Drugie –

$$\boldsymbol{\frac{dx - du}{u - x} = \frac{dy}{y}}$$

Scałkujmy pierwsze odpowiednio zapisując licznik i mianownik:

$$\int \frac{d(x+u)}{x+u} = \int \frac{dy}{y} \xRightarrow[dostajemy]{} \ln(x+u) = \ln y + \ln C_1 = \ln C_1 y$$

Dostajemy w wyniku

$$x + u = C_1 y$$

co pozwala nam wyznaczyć stałą C_1

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{x+u}{y}}$$

Do wyznaczenia stałej C_2 wykorzystajmy drugie równanie. Scałkujmy je zatem zapisując odpowiednio licznik i mianownik

$$\int \frac{d(x-u)}{-(x-u)} = \int \frac{dy}{y} \xRightarrow[dostajemy]{} -\ln(x-u) = \ln y + \ln C_2 = \ln\ C_2 y$$

Stąd

$$\ln(x-u)^{-1} = \ln\ C_2 y \xRightarrow[otrzymujemy]{} \frac{1}{x-u} = \ C_2 y$$

Zatem

$$\boldsymbol{C_2 = \frac{1}{y(x-u)}}$$

Znając stałe $C_1\ i\ C_2$ możemy zapisać rozwiązanie ogólne.

$$\boldsymbol{C_2 = f(C_1)} \xRightarrow[dostajemy]{} \boldsymbol{\frac{1}{y(x-u)} = f\left(\frac{x+u}{y}\right)}$$

Już na tym etapie skorzystamy z warunku początkowego, żeby znaleźć funkcję $\boldsymbol{f}$.

Wiemy że $\boldsymbol{u(x,1) = 2x}$, otrzymujemy zatem:

$$\frac{1}{1\cdot(x-2x)} = f\left(\frac{x+2x}{1}\right) \xRightarrow[z\ czego\ wynika]{} f(3x) = -\frac{1}{x}$$

Niech

$$z = 3x \quad \underset{stąd}{\Longrightarrow} \quad x = \frac{z}{3}$$

Zatem postać poszukiwanej funkcji f jest następująca:

$$f(z) = -\frac{1}{z/3} = -\frac{3}{z}$$

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne naszego wyjściowego równania musimy wrócić do rozwiązania ogólnego o postaci uwikłanej i wykorzystać informację na temat funkcji f.

$$\frac{1}{y(x-u)} = f\left(\frac{x+u}{y}\right) \quad \xRightarrow[stosujemy\ f]{} \quad \frac{1}{y(x-u)} = -\frac{3}{\frac{x+u}{y}} = -\frac{3y}{x+u}$$

Mnożymy obustronnie przez $y(x-u)(x+u)$ i przekształcamy nasze równanie.

Dostajemy:

$$x + u = -3y \cdot y \cdot (x-u)$$

$$u - 3y^2u = -3y^2x - x$$

$$u(1-3y^2) = -x(3y^2+1)$$

Dochodzimy do rozwiązania szczególnego:

$$\boxed{\boldsymbol{u = -\frac{x(3y^2+1)}{(1-3y^2)} = \frac{x(3y^2+1)}{(3y^2-1)}}}$$