Zajęcia 11

Przykład 1

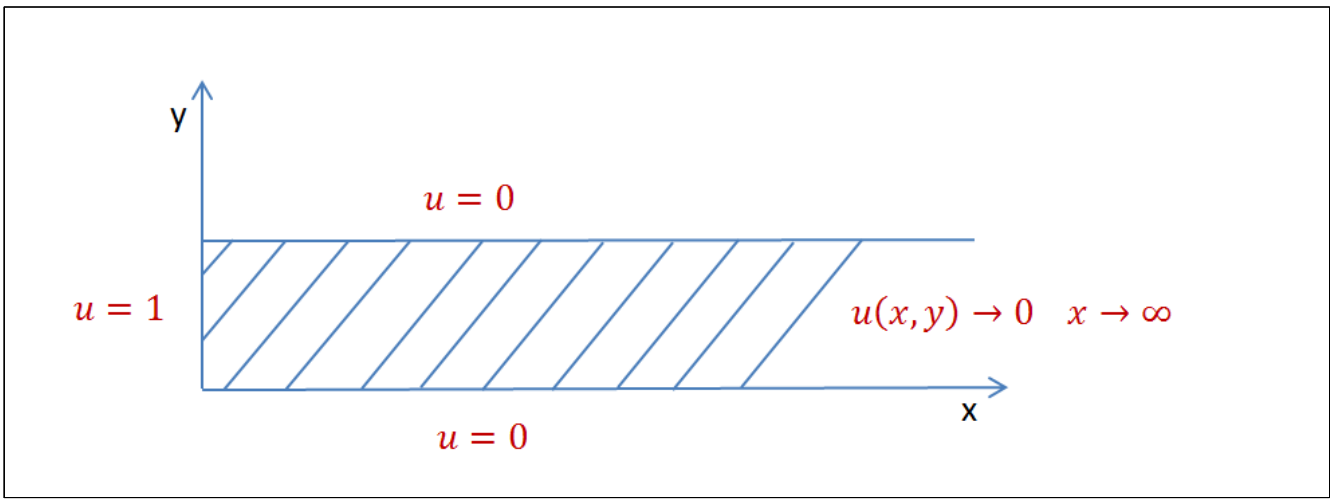
Równanie Laplace'a w obszarze prostokątnym półograniczonym (zagadnienie Dirichleta)

$$\boldsymbol{u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad x > 0 \quad 0 < y < h}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = 0 \qquad u(x,h) = 0 \qquad x > 0}$$

$$\boldsymbol{u(x,y) \to 0 \quad gdy\; x \to \infty \quad 0 < y < h}$$

$$\boldsymbol{u(0,y) = 1 \qquad\qquad 0 < y < h}$$



Zauważmy, że warunki brzegowe dla zmiennej y są jednorodne a dla zmiennej x nie.

Tak jak w poprzednich przykładach nasze rozwiązanie przedstawmy w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których każda zależy od jednej zmienej niezależnej

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Biorąc pod uwagę, że $u_{xx} = X''(x) \cdot Y(y)$ i $u_{yy} = X(x) \cdot Y''(y)$ możemy przedstawić równanie Laplace'a w postaci:

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

skąd wynika następująca równość

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \xRightarrow[dostajemy]{} \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & (1) \\ Y'' + \lambda Y = 0 & (2) \end{cases}$$

Wiemy, że

$$u(x,0) = X(x) \cdot Y(0) = 0 \ \rightarrow \ Y(0) = 0$$

$$u(x,h) = X(x) \cdot Y(h) = 0 \ \rightarrow \ Y(h) = 0$$

Mamy jednorodne warunki brzegowe dla funkcji Y, więc do wyznaczenia wartości własnych λ skorzystamy z równania (2).

Zagadnienie do rozwiązania ma nastepującą postać:

$$\boxed{\begin{gathered} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \quad Y(h) = 0 \end{gathered}}$$

Wiemy z poprzednich przykładów, że jest to zagadnienie Sturma – Liouvielle'a
Korzystając z metody przewidywań, możemy rozwiązanie przedstawić jako:

$$\begin{cases} Y(y) = C_1 e^{y\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-y\sqrt{-\lambda}} & dla \quad \lambda < 0 \\ ay + b & dla \quad \lambda = 0 \\ Y(y) = C_1 cos\left(y\sqrt{\lambda}\right) + C_2 \, sin\left(y\sqrt{\lambda}\right) & dla \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

Powtarzając rozumowanie przedstawione w poprzednich przykładach (Zajęcia 8 – Metoda separacji zmiennych) dochodzimy do wniosku, że dla $\lambda \leq 0$ otrzymujemy rozwiązania trywialne, a interesujący jest tylko przypadek, gdy $\lambda > 0$. Wtedy dostajemy

$$h\sqrt{\lambda} = n\pi \xRightarrow[\text{skąd wynika}]{} \boldsymbol{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} \quad dla\; n = 1,2,3 \ldots$$

Z wartościami własnymi związane są funkcje własne:

$$\boldsymbol{Y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)}$$

Rozważmy teraz równanie (1)

$$X'' - \lambda X = 0$$

Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wiemy, że rozwiązanie takiego równania możemy przewidywać w postaci:

$$X(x) = \begin{cases} A_1 cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + C_2\, sin\left(x\sqrt{-\lambda}\right) & dla \quad \lambda < 0 \\ ax + b & dla \quad \lambda = 0 \\ A_1 e^{-x\sqrt{\lambda}} + A_2 e^{x\sqrt{\lambda}} & dla \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

Ze względu na wynik rozwiąznia równania (2) wybieramy postać rozwiązania dla $\lambda > 0$. Podstawiając do niego $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \; dla\; n = 1,2,3 \ldots$

otrzymujemy:

$$X_n(x) = A_{1n}e^{-\frac{n\pi x}{h}} + A_{2n}e^{\frac{n\pi x}{h}} \qquad dla\; n = 1,2,3 \ldots$$

Wtedy

$$u_n(x,y) = X_n(x) \cdot Y_n(y) = \left[A_{1n}e^{-\frac{n\pi x}{h}} + A_{2n}e^{\frac{n\pi x}{h}}\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \; dla\; n = 1,2,3 \ldots$$

I ostatecznie możemy napisać rozwiązanie ogólne

$$\boldsymbol{u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \left[A_{1n} e^{-\frac{n\pi x}{h}} + A_{2n} e^{\frac{n\pi x}{h}}\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{h} y\right)}$$

Do obliczenia nieznanych współczynników wykorzystujemy pozostałe dwa warunki brzegowe - $u(x,y) \to 0 \;\; gdy \;\; x \to \infty$ oraz $u(0,y) = 1.$

Wykorzystajmy pierwszy z nich. Zauważmy, że gdy $x \to \infty \;\; \underset{wtedy}{\Longrightarrow} \; e^{-\frac{n\pi x}{h}} \to 0,$

natomiast $e^{\frac{n\pi x}{h}} \to \infty$. Zatem, aby równanie

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} e^{\frac{n\pi x}{h}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{h} y\right) = 0$$

wynikające z powyższej analizy było spełnione wszystkie współczynniki $\boldsymbol{A_{2n} = 0}$.

Do obliczenia współczynników $\boldsymbol{A_{1n}}$ wykorzystamy drugi warunek.

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} e^{-\frac{n\cdot\pi\cdot 0}{h}} \cdot sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \cdot sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) = 1$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy szereg Fouriera dla sinusów i musimy go użyć, aby przedstawić funkcję stałą, równą 1. Zatem

$$A_{1n} = \frac{2}{h}\int_0^h 1 \cdot sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) dy = -\frac{2}{h} \cdot \left[\frac{h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\right]_0^h =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}[\cos n\pi - 1] = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & dla\; n = 2k \quad k = 1,2,3,\ldots \\ \dfrac{4}{n\pi} & dla\; n = 2k-1 \quad k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Znając współczynniki A_{1n} możemy zapisać ostateczne rozwiązanie:

$$u(x,y) = \sum_{n-nieparzyste}^{\infty} \frac{4}{n\pi} e^{-\frac{n\pi x}{h}} sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$$

Wyrażając n nieparzyste w postaci $n = 2k - 1$ możemy rozwiązanie zapisać następująco:

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k - 1} e^{-\frac{(2k-1)\pi x}{h}} sin\left(\frac{(2k - 1)\pi y}{h}\right)$$

Sposób rozwiązania zagadnienia Dirichleta na prostokącie gdy warunki brzegowe ze wszystkich czterech stron są niejednorodne

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad a < x < b \qquad c < y < d$$

$$u(a, y) = f(y) \qquad u(b, y) = g(y) \qquad c < y < d$$

$$u(x, c) = h(x) \qquad u(x, d) = k(x) \qquad a < x < b$$

Nie rozwiązujemy tego zagadnienia bezpośrednio, ale rozkładamy go na dwa zagadnienia:

Zagadnienie 1

$$u1_{xx} + u1_{yy} = 0 \qquad a < x < b \qquad c < y < d$$

$$u1(a, y) = 0 \qquad u1(b, y) = 0 \qquad c < y < d$$

$$u1(x, c) = h(x) \qquad u1(x, d) = k(x) \qquad a < x < b$$

Zagadnienie 2

$$u2_{xx} + u2_{yy} = 0 \qquad a < x < b \qquad c < y < d$$

$$u2(a, y) = f(y) \qquad u2(b, y) = g(y) \qquad c < y < d$$

$$u2(x, c) = 0 \qquad u2(x, d) = 0 \qquad a < x < b$$

Przypuśćmy, że $u1$ i $u2$ są odpowiednio rozwiązaniami zagadnień 1 i 2 to można pokazać, że

$$u(x,y) = u1(x,y) + u2(x,y)$$

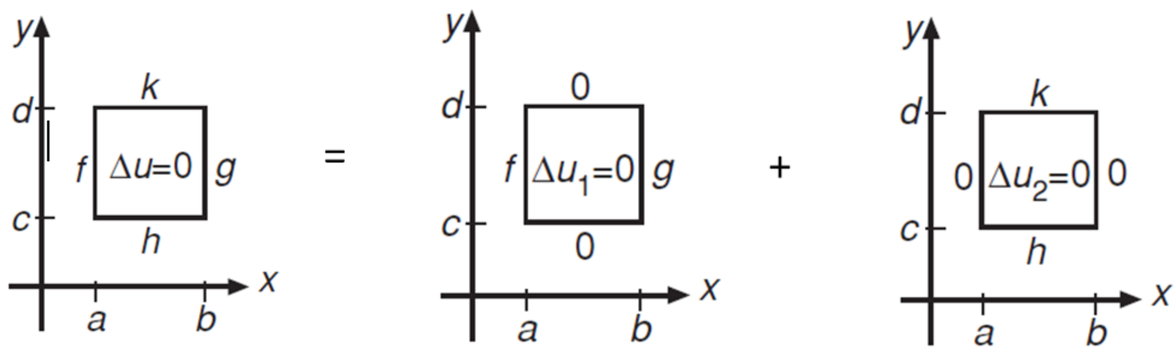
spełnia wszystkie warunki zagadnienia wyjściowego. Przykładowo rozpatrzmy:

$$u(a,y) = u1(a,y) + u2(a,y) = 0 + f(y) = f(y)$$

lub

$$u(x,d) = u1(x,d) + u2(x,d) = k(x) + 0 = k(x) \;\; itd \dots$$

Zatem rozwiązując Zagadnienie 1 i Zagadnienie 2 i dodając do siebie ich rozwiązania otrzymujemy rozwiązanie problemu wyjściowego. Można to schematycznie przedstawić na następującej ilustracji.



Rozwiązanie:

$$u = u1(zagadnienia1) + u2(zagadnienia2)$$

<u>Inne metody stosowane do rozwiązywania RRC</u>

- Metoda przekształceń całkowych bazująca na przekształceniach Laplace'a i Fouriera (tkz. transformaty Laplace'a i Fouriera)

Wykorzystywana je głównie w zakresie teorii obwodów elektrycznych i teorii automatycznej regulacji. Służy do rozwiązania równań różniczkowych liniowych. Polega na całkowitej lub częściowej „algebraizacji” rozwiązywanego zagadnienia.

- Metoda funkcji Greena

  Stosowana głównie do rozwiązywania problemów brzegowych, czyli równań typu Laplace’a i Poissona.

  Formalizm funkcji Greena pozwala sprowadzić problem rozwiązania równania różniczkowego do analogicznego problemu rozwiązania równania całkowego.

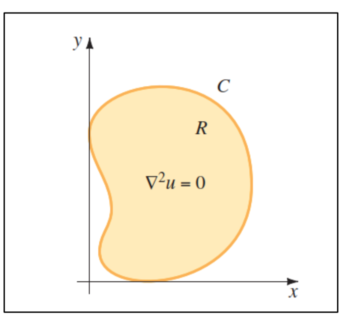
- Metody numeryczne

  Stosowane szeroko do rozwiązywania zarówno równań różniczkowych zwyczajnych jak i równań różniczkowych cząstkowych. Do najbardziej znanych należą – metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych i metoda objętości skończonych. Wszytkie te metody prowadzą do algebraizacji równań.

Metoda różnic skończonych dla równania Laplace’a

(źródło ☺ D. G. Zill, M.R. Cullen Differential Equations with Boundary-Value Problems)

Przypuśćmy, że poszukujemy rozwiązania równania Laplace’a



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

w płaskim obszarze R otoczonym przez pewną krzywą C.

Przedstawmy pochodne za pomocą wzorów na różnice centralne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)].$$

Dodając do siebie te równania otrzymujemy pięciopunktową aproksymację Laplasjanu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y)].$$

Stąd możemy zastąpić równanie Laplace'a równaniem na różnice skończone:

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0.$$

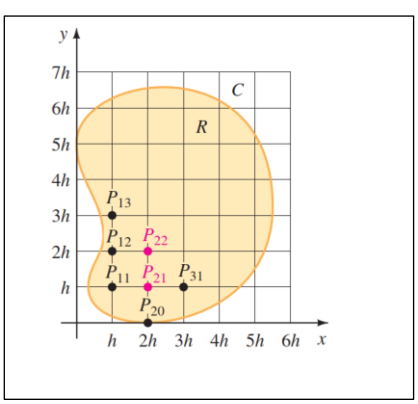
Jeśli zastosujemy notację

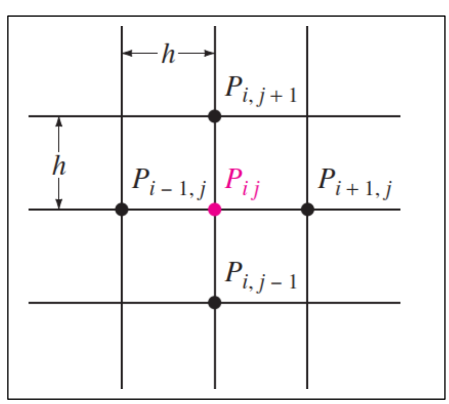
$$u(x, y) = u_{ij}$$

$$u(x+h, y) = u_{i+1, j}, \quad u(x, y+h) = u_{i, j+1}$$
$$u(x-h, y) = u_{i-1, j}, \quad u(x, y-h) = u_{i, j-1},$$

Wtedy nasze równanie można zapisać jako:

$$u_{i+1, j} + u_{i, j+1} + u_{i-1, j} + u_{i, j-1} - 4u_{ij} = 0. \qquad (*)$$



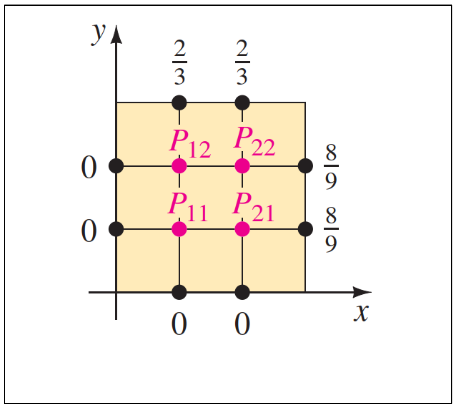


Ze wzoru (*) wynika:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}\right]$$

Zatem widać, że u_{ij} w wewnętrznej części obszaru R jest średnią wartością u w czterech sąsiednich punktach siatki.

Przykład



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

Dzielimy obszar na 9 kwadratów. Wtedy rozmiar siatki $h = \frac{2}{3}$. Mamy 4 wewnętrzne punkty i 8 istotnych punktów brzegowych. Punkty narożne nie mają znaczenia, gdyż wartości w tych punktach nie zostaną wykorzystane w obliczeniach.

Wiemy, że

$$u(0,y) = 0 \underset{skąd}{\Longrightarrow} u(0,h) = u\left(0,\frac{2}{3}\right) = 0 \quad i \quad u(0{,}2h) = u\left(0,\frac{4}{3}\right) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \underset{skąd}{\Longrightarrow} u(h,0) = u\left(\frac{2}{3},0\right) = 0 \quad i \quad u(2h,0) = u\left(\frac{4}{3},0\right) = 0$$

W pozostałych punktach brzegowych wartości musimy obliczyć.

Wiemy, że

$$u(x,2) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Stąd wynika:

$$u(h,3h) = u\left(\frac{2}{3},2\right) = \frac{2}{3}$$

$$u(2h,3h) = u\left(\frac{4}{3},2\right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

Ponadto z faktu, że

$$u(2,y) = y(2-y) \qquad 0 < y < 2$$

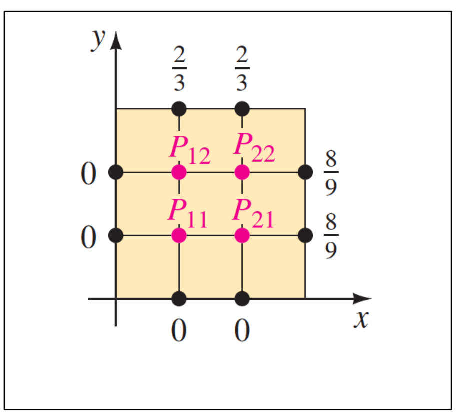
Wynika

$$u(3h,h) = u\left(2,\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

$$u(3h,2h) = u\left(2,\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\left(2-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

Mamy już wartości we wszystkich punktach brzegowych, możemy więc zapisać równania pozwalające wyznaczyć wartości w punktach wewnętrznych. Zastosujemy do każdego z punktów wewnętrznych wzór

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0.$$



Zastosujmy ten wzór do punktu P_{11} wtedy

$i = 1$ i $j = 1$

$$u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} = 0$$

$$u_{21} + u_{12} + 0 + 0 - 4u_{11} = 0$$

Uporządkujmy to równanie -

$$-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0$$

Dla punktu P_{21} $i = 2$ i $j = 1$ otrzymamy:

$$u_{31} + u_{22} + u_{11} + u_{20} - 4u_{21} = 0$$

$$\frac{8}{9} + u_{22} + u_{11} + 0 - 4u_{21} = 0$$

Po uporządkowaniu

$$u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = -\frac{8}{9}$$

Dla punktu P_{12} $i = 1$ i $j = 2$ dostajemy:

$$u_{22} + u_{13} + u_{02} + u_{11} - 4u_{12} = 0$$

$$u_{22} + \frac{2}{3} + 0 + u_{11} - 4u_{12} = 0$$

Po uporządkowaniu

$$u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = -\frac{2}{3}$$

Dla punktu P_{12} $i = 2$ i $j = 2$ dostajemy:

$$u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} = 0$$

$$\frac{8}{9} + \frac{2}{3} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} = 0$$

Po uporządkowaniu

$$u_{21} + u_{12} - 4u_{22} = -\frac{14}{9}$$

Dostajemy układ 4-ech równań z czterema niewiadomymi.

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} \quad &= 0 \\
u_{11} - 4u_{21} + \quad u_{22} &= -\tfrac{8}{9} \\
u_{11} \quad - 4u_{12} + u_{22} &= -\tfrac{2}{3} \\
u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -\tfrac{14}{9}.
\end{aligned}$$

Rozwiązujemy ten układ analitycznie. Możemy też skorzystać z metod numerycznych np metody eliminacji Gaussa lub metody Gaussa- Seidla. W wyniku otrzymamy:

$$u_{11} = \frac{7}{36} \quad u_{21} = \frac{5}{12} \quad u_{12} = \frac{13}{36} \quad u_{22} = \frac{7}{12}$$

W metodzie różnic skończonych spodziewamy się, że im mniejsza jest wartość h tym będzie lepsza dokładność rozwiązania. Ale musimy też pamiętać, że gdy h małe a obszar duży, tym mamy więcej punktów wewnętrznych i większy układ równań do rozwiązania. Przykładowo – dla obszaru kwadratowego o długości boku L, dla którego rozmiar siatki $h = \frac{L}{n}$, całkowita ilość punktów wewnętrznych wynosi $(n-1)^2$. Czyli dla naszego przykładu, gdybyśmy wzięli $n = 8$, to rozmiar siatki wynosiłby $h = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, a ilość punktów wewnętrznych równa by była $(8-1)^2 = 49$!

Uwaga!

Jeżeli punkty siatki na brzegu nie pokrywają się z rzeczywistym brzegiem, wtedy trzeba wartości w tych punktach otrzymać z interpolacji.