Zajęcia 9

Przykład 1

Niech $f(x) = 1$ w przedziale $(0, l)$. Znajdź współczynniki dla szeregu Fouriera sinusów i przedstaw funkcję w postaci tego szeregu.

Szereg Fouriera sinusów:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)}$$

Zatem współczynniki liczymy ze wzoru:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \underset{stąd}{\Longrightarrow} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l 1 \cdot sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx =$$

$$-\frac{2}{l} \cdot \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l}\bigg]_0^l = -\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

Z wyliczenia otrzymamy $A_n = \frac{4}{n\pi}$ dla n nieparzystych i $A_n = 0$ dla n parzystych.

Zapiszmy funkcję $f(x) = 1$ za pomocą szeregu Fouriera:

$$1 = A_1 sin \frac{\pi x}{l} + A_3 sin \frac{3\pi x}{l} + A_5 sin \frac{5\pi x}{l} + \cdots$$

$$\boldsymbol{1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} sin \frac{5\pi x}{l} + \cdots\right)}$$

Wzór na całkowanie przez części:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int v \cdot u' \, dx$$

Przykład 2

Policzmy całkę:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot sin\,(nx) dx}$$

Funkcje $x \; i \sin x$ są funkcjami nieparzystymi zatem ich iloczyn da funkcję parzystą. Stąd powyższa całka jest równa

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cdot sin\ (nx) dx$$

Niech $u = x \;\rightarrow\; u' = 1$ oraz $v' = \sin(nx) \;\rightarrow\; v = \int \sin(nx) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

Wtedy:

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cdot sin\ (nx) dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\right)\Big]_{0}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\cdot 1 dx =$$

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2}\sin(nx)]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2}(0-0) = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) =$$

$$\boldsymbol{= -\frac{2}{n}(-1)^n \quad dla\; n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Przykład 3

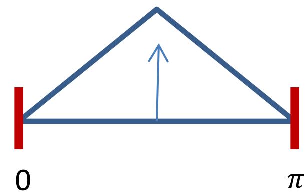
Dane jest zagadnienie

$$9u_{xx} = u_{tt} \quad 0 < x < \pi \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0 \;\; u(\pi,t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \;\; u_t(x,0) = 0 \quad 0 \le x \le \pi$$

Gdzie funkcja $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$



Interpretacja fizyczna

Jest to równanie drgającej struny o zamocowanych końcach (warunki brzegowe są jednorodne). Początkowy kształt struny miał postać trójkąta, nie nadano żadnej prędkości początkowej. Prędkość falowa c jest równa 3.

Sposób rozwiązania

Nasze rozwiązanie przedstawmy za pomocą wzoru $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.
Wprowadźmy go do naszego równania

$$9X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T''(t) \;/ : 9XT \to \frac{X''}{X} = \frac{T''}{9T} = -\lambda$$

Z ostatniego równania otrzymujemy

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (*) \\ T''(t) + 9\lambda T(t) = 0 & (**) \end{cases}$$

Z metody przewidywań wiemy, że rozwiązanie $(*)$ ma postać:

$$\begin{cases} X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}} & dla \quad \lambda < 0 \\ ax + b & dla \quad \lambda = 0 \\ X(x) = C_1 cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + C_2 \, sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) & dla \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

Z poprzednich rozważań wiemy, że interesujący jest tylko przypadek gdy $\lambda > 0$,

gdyż dla dwóch pozostałych otrzymujemy rozwiązania trywialne.

Dostajemy zatem:

$$X(x) = C_1 cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + C_2\, sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)$$

$$X(0) = 0 \quad i \quad X(\pi) = 0$$

Z pierwszego warunku wynika $C_1 = 0$.

Z warunku $X(\pi) = C_2\, sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0 \xRightarrow[dostajemy]{} \pi\sqrt{\lambda} = n\pi \quad dla\; n = 1,2,3, \dots$

Stąd wynikają **wartości własne** $\boldsymbol{\lambda_n = n^2\; dla\; n = 1, 2, 3, \dots}$ i **funkcje własne**:

$$\boldsymbol{X_n(x)} = \sin\left(x\sqrt{\lambda}\right) = \boldsymbol{\sin(nx) \quad dla\; n = 1, 2, 3, \dots}$$

Z rozważań w poprzedniej prezentacji otrzymaliśmy rozwiązanie równania $(**)$.
Wyrażone było ono wzorem:

$$\boldsymbol{T_n = A_n\, cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + B_n sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \quad dla\; n = 1, 2, 3 \dots}$$

W naszym przypadku $c = 3 \;\; i \;\; l = \pi$. Zatem po wprowadzeniu tych danych otrzymamy:

$$\boldsymbol{T_n = A_n\, cos(3nt) + B_n sin(3nt) \quad dla\; n = 1, 2, 3}$$

Wtedy

$$\boldsymbol{u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \sin nx \cdot \left(A_n\, cos(3nt) + B_n sin(3nt)\right)\; dla\; n = 1, 2, 3 \dots}$$

i ostateczne rozwiązanie ma postać, w której nieznane są współczynniki $\boldsymbol{A_n}$ i $\boldsymbol{B_n}$.

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\,(nx) cos\,(3nt) + B_n sin(nx) sin(3nt)}$$

Współczynniki $\mathrm{A_n}$ i $\mathrm{B_n}$ wyznaczamy z warunków początkowych.

Użyjmy najpierw pierwszego warunku:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\cos(3n\cdot 0) + B_n \sin(nx)\sin(3n\cdot 0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$$

Stąd

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\sin(nx)dx}$$

Natomiast z drugiego warunku wynikają następujące fakty:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -3nA_n \sin(nx)\sin(3nt) + 3nB_n \sin(nx)\cos(3nt)$$

Zatem

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} -3nA_n \sin(nx)\sin(3n\cdot 0) + 3nB_n \sin(nx)\cos(3n\cdot 0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 3nB_n \sin(nx) = 0$$

Jest to szereg Fouriera dla zerowej funkcji. Aby szereg był zerowy

$$3nB_n = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{B_n = 0}$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych dostajemy postać rozwiązania:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\,(nx) cos\,(3nt)}$$

Nieznane są jeszcze współczynniki A_n. Wyznaczamy je korzystając z informacji, że

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx}$$

Z powyższych wzorów wynika:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{x \cdot sin(nx)\; dx} + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \boldsymbol{(\pi - x)\cdot sin(nx) dx}$$

$$\textbf{CAŁKA 1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin\,(nx)dx = \left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\,dx =$$

$$-\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{-\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\,\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$\mathbf{CAŁKA\ 2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)dx = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin(nx)dx =$$

$$= -\pi\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{n}\cos(n\pi) - \frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) +$$

$$-\frac{1}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Mamy obliczone dwie całki, możemy więc ostatecznie policzyć współczynniki A_n.

$$\boldsymbol{A_n} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{4}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Możemy zapisać ostateczne rozwiązanie wiedząc, że

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\,(nx) cos\,(3nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) sin\,(nx) cos\,(3nt) =}$$

Zauważmy, że

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & dla\ n = 2k, \quad k = 1,2,3 \ldots \\ (-1)^{k+1} & dla\ n = 2k-1, \quad k = 1,2,3, \ldots \end{cases}$$

Równanie przewodnictwa cieplnego

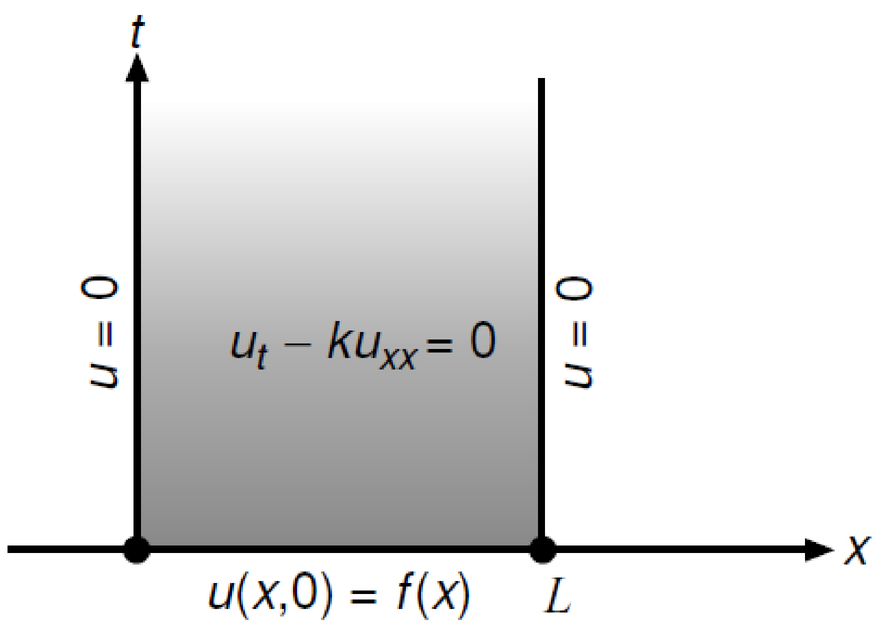
$$\boldsymbol{u_t - k u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < l \qquad t > 0}$$

$$\boldsymbol{u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad\qquad t \geq 0}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq l \qquad t = 0}$$

f – jest daną funkcją, k – stałą większą od zera. Zakładamy też, że

$f(0) = f(l) = 0$, czyli zgodność z warunkami początkowymi



Zagadnienie powyższe opisuje zmiany temperatury $u(x,t)$ w jednorodnym, jednowymiarowym pręcie o długości l, przewodzącym ciepło.

Pręt jest wąski i poprzecznie izolowany. Znany jest rozkład temperatury początkowej, wyrażony funkcją $f(x)$, a dwa końce są utrzymywane w temperaturze 0^0C. Zakładamy, że nie ma wewnętrznych źródeł ciepła lub chłodzenia układu (prawa strona równania = 0).

Z punktu widzenia matematycznego nasz problem to zagadnienie brzegowo-początkowe, liniowe i jednorodne. Dołączone warunki brzegowe są warunkami typu Dirichleta.

Nasze rozwiązanie przedstawmy za pomocą wzoru $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ i wstawmy je do wyjściowego równania. Otrzymamy wtedy:

$$XT_t - kX_{xx}T = 0 \rightarrow XT_t = kX_{xx}T \rightarrow \frac{T_t}{kT} = \frac{X_{xx}}{X}$$

Ponieważ X zależy tylko od x, a T od t możemy w zapisie użyć pochodnych po jednej zmiennej. Ponadto ponieważ równość ta zachodzić musi dla wszystkich x i t z rozważanego zakresu, więc obie strony tej równości muszą być stałe. Oznaczając tę stałą przez $-\lambda$ dostajemy równość:

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Prowadzi ona do układu równań:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X''(x) + \lambda X(x) = 0} \quad \boldsymbol{0 < x < l} \quad (*) \\ \boldsymbol{T'(t) + \lambda k T(t) = 0} \qquad\quad \boldsymbol{t > 0} \quad (**) \end{cases}$$

Równania są sprzężone przez stałą λ. Funkcja u spełnia warunki brzegowe wtedy i tylko wtedy gdy:

$$u(0,t) = X(0)T(t) \;\; i \;\; u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

Wiemy z poprzedniego wykładu, że dla $\lambda \leq 0$ otrzymamy rozwiązanie trywialne. Rozpatrujemy tylko przypadek gdy $\lambda > 0$. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla $\lambda > 0$ rozwiązanie równania $(*)$ ma postać:

$$\boldsymbol{X(x) = C_1 cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + C_2\, sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)}$$

Prowadząc identyczną analizę jak dla zagadnienia struny dostaniemy:

$$l\sqrt{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad dla\, n = 1,2,3\, \ldots$$

Otrzymujemy nieskończoną sekwencję funkcji własnych

$$\boldsymbol{X_n(x) = sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad n = 1, 2, 3\, \ldots}$$

Każda związana jest z dodatnią wartością własną $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

Rozwiążmy teraz równanie $(**)$

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \;\rightarrow\; \frac{dT}{dt} = -\lambda k T$$

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\lambda k dt \;\rightarrow\; lnT = -\lambda kt + lnC \;\;\rightarrow ln\frac{T}{C} = -\lambda kt$$

$$\boldsymbol{T = Ce^{-\lambda kt}}$$

Wstawiając $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ otrzymujemy:

$$\boldsymbol{T_n(t) = C_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \qquad dla\, n = 1, 2, 3\, \ldots}$$

Wtedy

$$\boldsymbol{u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \qquad dla\, n = 1, 2, 3\, \ldots}$$

Co ostatecznie daje:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-kt\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}}$$

Zostało nam jeszcze znalezienie nieznanych współczynników C_n.

Rozpatrzmy zatem warunek początkowy $u(x,0) = f(x)$. Wiemy, że:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ten warunek pozwala nam wyznaczyć współczynniki:

$$\boldsymbol{C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad dla\; n = 1, 2, 3 \ldots}$$

Zasada maksimum dla równania przewodnictwa cieplnego

Jeśli funkcja $u(x,t)$ określona i ciągła w obszarze $0 \le t \le t_k$, $\;0 \le x \le l$ spełnia jednorodne równanie przewodnictwa w punktach obszaru poza chwilą 0 i punktami brzegowymi, to osiąga ona swoje kresy w chwili początkowej $t = 0$ lub dla $x = 0$, lub dla $x = l$.

Sens fizyczny

Jeśli temperatura na brzegach pręta nie przekroczy pewnej wartości **M** i początkowa temperatura także nie przekroczy M, to wewnątrz pręta, przy braku źródeł ciepła (chłodzenia) nie może pojawić się temperatura wyższa (niższa) niż **M**.

Zadanie 1

Znajdź rozwiązanie poniższego zagadnienia

$$\boldsymbol{4u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < \pi \qquad t > 0}$$

$$\boldsymbol{u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad\qquad t \ge 0}$$

$$\boldsymbol{u(x,0) = f(x) = \sin x - 2\sin 3x \quad 0 < x < \pi}$$

Zagadnienie rozwiązuje się dokładnie według schematu podanego dla zagadnienia przewodnictwa cieplnego (proszę przeprowadzić dokładną analizy samodzielnie). Uwzględniając, że $l = \pi\ i\ k = 4$, w wyniku dostajemy:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) e^{-4t\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx)\, e^{-4tn^2}$$

Do wyznaczenia współczynników korzystamy z warunku początkowego:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx)\, e^{-4\cdot 0\cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx) = sin\, x - 2\, sin\, 3x$$

Zauważmy zatem, że z powyższego wzoru wynika

$$C_1\, sin\, x + C_2\, sin\, 2x + C_3\, sin\, 3x + C_4\, sin\, 4x + \cdots = sin\, x - 2\, sin\, 3x$$

Stąd

$$\boldsymbol{C_1 = 1}, \qquad \boldsymbol{C_2 = 0}, \qquad \boldsymbol{C_3 = -2}$$

i wszystkie pozostałe współczynniki są zerami.

Zatem nasze rozwiązanie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx)\, e^{-4tn^2}$$

upraszcza się do postaci:

$$\boldsymbol{u(x,t)} = e^{-4\cdot 1^2\cdot t} \sin x - 2e^{-4\cdot 3^2\cdot t} \sin 3x = \boldsymbol{e^{-4t} \sin x - 2e^{-36t} \sin 3x}$$