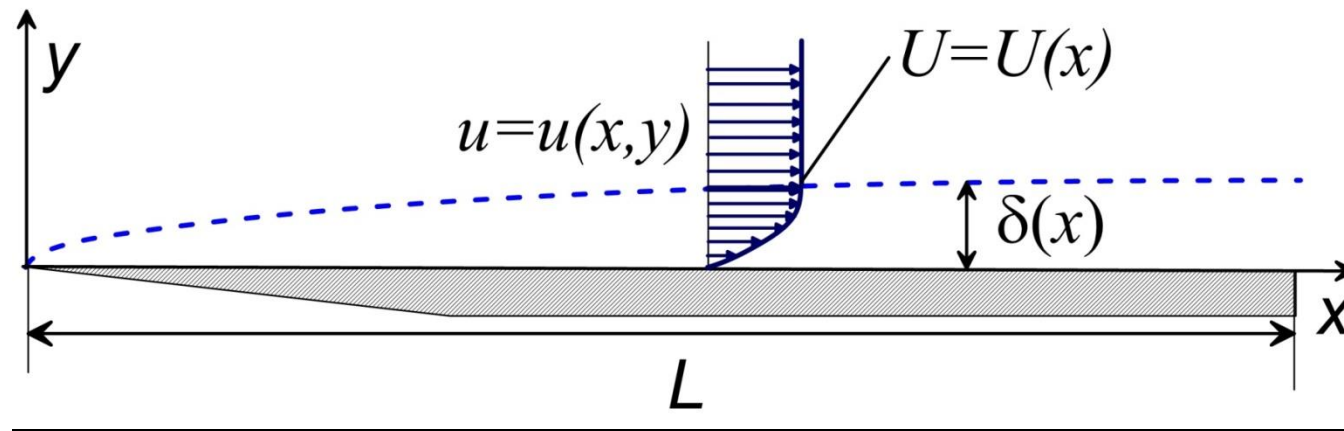


WYKŁAD 4
ELEMENTY TEORII WARSTWY
PRZYŚCIENNEJ – CZĘŚĆ 1

Pojęcie warstwy przyściennej w płynie. Równania Prandtla



Warstwa przyścienne (WP) – warstwa płynu przylegająca do powierzchni opływanego ciała, charakteryzująca się wielkimi wartościami poprzecznego gradientu prędkości. W obszarze warstwy przyściennej dynamiczne efekty związane z lepkością są tego samego rzędu do efekty bezwładności płynu.

Generalne założenie - WP jest cienka (w porównaniu z charakterystycznym rozmiarem ciała w kierunku głównego przepływu), czyli $\delta \ll L$ lub $\frac{\delta}{L} \ll 1$.

Przedstawimy teorię WP zaproponowaną na początku ubiegłego stulecia przez Prandtla. Idea opisu matematycznego w WP polega na uproszczeniu ogólnych równań dla (nieściśliwego) płynu lepkiego.

Zapiszmy równania opisujące dwuwymiarowy stacjonarny przepływ ciecchy newtonowskiej ...

$$\begin{aligned} u \partial_x u + v \partial_y u &= -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u) \\ u \partial_x v + v \partial_y v &= -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \nu (\partial_{xx} v + \partial_{yy} v) \\ \partial_x u + \partial_y v &= 0 \end{aligned}$$

Ruch z warstwie przyściennej jest |”prawie równoległy”. Generalnie, oczekujemy, że składowa prędkości równoległa do ściany jest dużo większa niż składowa normalna. Oznaczmy $U = U(x)$ przebieg prędkości równoległej do ściany na zewnętrznej granicy WP (czytaj: na tyle daleko, że można uznać U za prędkość zewnętrznego strumienia płynu). Możemy przyjąć, że w opływach powierzchni nośnych mamy typowo $U \sim U_\infty$, gdzie U_∞ to prędkość płynu w strumieniu niezaburzonym (daleko od ciała)

„Wyskalujmy” wielkości występujące w równaniu ruchu dla kierunku x ...

$$u \sim U_\infty \quad , \quad \partial_x u \sim \frac{U_\infty}{L} \quad , \quad \partial_y u \sim \frac{U_\infty}{\delta} = \frac{U_\infty}{L} \frac{L}{\delta} \gg \partial_x u$$

Z równania ciągłości mamy $\partial_x u \sim \partial_y v \Rightarrow \partial_y v \sim \frac{U_\infty}{L} \Rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty \ll U_\infty$

Wobec tego, oszacowanie wielkości różnych składników w równaniu ruchu na kierunek x przedstawia się następująco

$$u \partial_x u + v \partial_y u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u)$$

$$\sim \frac{U_\infty^2}{L} \quad \sim \frac{U_\infty \delta U_\infty}{L \delta} = \frac{U_\infty^2}{L} \quad \sim \frac{U_\infty^2}{L^2} \quad \sim \frac{U_\infty^2}{\delta^2}$$

Zauważmy, że pierwszy ze składników w członie lepki jest zanedbywalnie mały w porównaniu z drugim

$$\partial_{xx} u \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \partial_{yy} u \ll \partial_{yy} u$$

W obszarze WP, dominujący składnik lepki musi być tego samego rzędu co składniki w pochodnej konwekcyjnej (bezwładnościowe). Mamy zatem

$$\nu \partial_{yy} u \sim \frac{U_\infty^2}{L} \Rightarrow \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} \sim \frac{\nu}{U_\infty L}$$

Wynika stąd, że **względna grubość (średnia) WP** jest związana z liczbą Reynoldsa

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

Przykład: Oszacujmy (średnią) grubość WP dla $L = 0.5 \text{ m}$, $U_\infty = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\nu = 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

Otrzymujemy: $\text{Re} = \frac{50 \cdot 0.5}{10^{-5}} = 2.5 \cdot 10^6 \Rightarrow \delta \approx \frac{1}{\sqrt{2.5 \cdot 10^6}} L \approx 0.63 \text{ mm} (!)$

Jak widzimy, oczekiwana grubość WP jest naprawdę mała!

Rozważmy r-nie ruchu w kierunku poprzecznym y . Łatwo zauważyć, że wszystkie składniki są mniejsze niż analogiczne w równaniu na kierunek x o czynnik $\delta/L \ll 1$, tj.

$$u \partial_x u + v \partial_y u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu \partial_{yy} u, \quad O\left(\frac{U_\infty^2}{L}\right)$$

$$u \partial_x v + v \partial_y v \approx -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \nu \partial_{yy} v, \quad O\left(\frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L}\right)$$

Skoro wszystkie składniki kinematyczne w równaniu dla kierunku y są małe to poprzeczny gradient ciśnienia $\partial_y p \approx 0$, tj. **ciśnienie w poprzek WP jest w zasadzie niezmiennie i równe wartości na zewnętrznej granicy WP**. Poza WP przepływ może być uznany za potencjalny (bo efekty lepkie poza WP mają pomijalne znaczenie). Wobec tego do wyznaczenia rozkładu ciśnienia wzdłuż zewnętrznej granicy WP można wykorzystać równanie Bernoulliego, a mianowicie

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p(x) + \frac{1}{2} \rho U^2(x)$$

Po zrózniczkowaniu względem x otrzymujemy

$$-\frac{1}{\rho} p'(x) = U(x)U'(x)$$

Po podstawieniu do (uproszczonego) równania ruchu w kierunku x otrzymujemy **Równanie Prandtla dla warstwy przyściennej (laminarnej)**

$$u \partial_x u + v \partial_y u = U(x)U'(x) + \nu \partial_{yy} u$$

Dołączamy do opisu również r-nie ciągłości

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

Dla powyższych równań formułujemy następujące warunki brzegowe na brzegu opływanego ciała i w „dalekim polu”

$$u, v \Big|_{\text{ściana}} \equiv u, v(x, 0) = 0 \quad , \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U(x)$$

Z matematycznego punktu widzenia, **równanie Prandtla jest równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego** (tak jak np. równanie przewodnictwa ciepła). W roli „pseudo-czasu” występuje tu współrzędna x . Wynika stąd konieczność zdefiniowania „warunku początkowego”, czyli określenia profilu prędkości w „początkowym” przekroju warstwy przyściennej, odpowiadającym pewnej wartości $x = x_0$

$$u(x_0, y) = u_0(y)$$

Rozwiązanie problemu początkowo/brzegowego dla układu złożonego z r-nia Prandtla i r-nia ciągłości – zwykle otrzymywane na drodze obliczeń numerycznych – polega zatem na wyznaczeniu rozkładu prędkości w obszarze położonym „niżej z prądem” czyli dla $x > x_0$.

Zauważmy, że numerycznej „rekonstrukcji” przepływu w WP nie można rozpocząć od faktycznego jej początku (przedni punkt spiętrzenia), bowiem początkowa grubość WP jest równa zero i profil $u_0(y)$ jest nieokreślony. Okazuje się jednak, że w bliskim otoczeniu tego punktu można posłużyć się przybliżonym rozwiązaniem analitycznym (pomijamy szczegóły).

Samopodobne rozwiązania równania Prandtla

Dla szczególnych przypadków przebiegu funkcji $U = U(x)$ równanie Prandtla posiada tzw. **rozwiązania samopodobne**. Rozwiązanie r-nia Prandtla nazywamy samopodobnym jeśli rozkład prędkości w WP może być wyrażony przez funkcję tylko jednej, specjalnie dobranej

zmiennej $\eta = \frac{y}{\delta(x)}$.

Ponieważ rozważany przepływ jest dwuwymiarowy, wygodnie jest użyć funkcji prądu. Załóżmy, że funkcja ta ma postać

$$\psi(x, y) = U(x)\delta(x) f\left[\frac{y}{\delta(x)}\right] = U(x)\delta(x) f[\eta(x, y)]$$

Obliczmy wynikające stąd składowe pola prędkości:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \partial_y \psi(x, y) = U(x)\delta(x) f'[\eta(x, y)] \partial_y \eta(x, y) = \\ &= U(x)\delta(x) f'[\eta(x, y)] \frac{1}{\delta(x)} = U(x) f'[\eta(x, y)] \end{aligned}$$

$$v(x, y) = -\partial_x \psi(x, y) = -U'(x)\delta(x)f[\eta(x, y)] - U(x)\delta'(x)f[\eta(x, y)] + \\ + U(x)\delta(x)f'[\eta(x, y)]\frac{y\delta'(x)}{\delta^2(x)}$$

Obliczmy dalej odpowiednie pochodne ...

$$\partial_x u(x, y) = U'(x)f'[\eta(x, y)] - U(x)f''[\eta(x, y)]\frac{y\delta'(x)}{\delta^2(x)} \\ \partial_y u(x, y) = \frac{U(x)}{\delta(x)}f''[\eta(x, y)] \quad , \quad \partial_{yy} u(x, y) = \frac{U(x)}{\delta^2(x)}f'''[\eta(x, y)]$$

Po podstawieniu do lewej strony równania Prandtla otrzymamy

$$\mathcal{L} \equiv u\partial_x u + v\partial_y u = U(x)U'(x)f'^2[\eta(x, y)] - \\ - U(x)U'(x)f[\eta(x, y)]f''[\eta(x, y)] - U^2(x)\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}f[\eta(x, y)]f''[\eta(x, y)]$$

Prawa strona tego równania przyjmie natomiast następującą postać

$$\mathcal{P} = U(x)U'(x) - \frac{\nu U(x)}{\delta^2(x)} f'''[\eta(x, y)]$$

Przyrównując \mathcal{L} i \mathcal{P} otrzymujemy równanie

$$U(x)U'(x)f'^2[\eta(x, y)] - U(x)U'(x)f[\eta(x, y)]f''[\eta(x, y)] - \\ - U^2(x)\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}f[\eta(x, y)]f''[\eta(x, y)] = U(x)U'(x) - \frac{\nu U(x)}{\delta^2(x)}f'''[\eta(x, y)]$$

Po podzieleniu przez $\frac{\nu U(x)}{\delta^2(x)}$ i prostych przekształceniach, powyższe równanie sprowadza się

do postaci

$$\frac{\delta U'}{\nu}(f'^2 - f f'' - 1) - \frac{U \delta \delta'}{\nu} f f'' = f'''$$

W tym momencie, lewa strona równania zależy zarówno od x jak i η . Rozwiązanie samopodobne może istnieć wyłącznie wtedy, gdy pozbedziemy się jawnej zależności od zmiennej x , co jest możliwe tylko dla pewnych funkcji $U = U(x)$.

Falkner and Skan zauważyli, że rozwiązania samopodobne istnieją dla

$$U(x) = U_{\infty} \left(\frac{x}{L}\right)^m$$

przy dowolnym $m \in R$.

Wówczas

$$U'(x) = U_{\infty} m \frac{x^{m-1}}{L^m}$$

Założmy, że funkcja grubości WP ma postać $\delta(x) = C \left(\frac{x}{L}\right)^{\alpha} L$, gdzie stałe C i α należy wyznaczyć. Współczynniki przy pochodnych funkcji f są wtedy równe

$$\frac{\delta^2 U'}{\nu} = \frac{C^2 U_{\infty} L}{\nu} m \left(\frac{x}{L}\right)^{2\alpha+m-1}, \quad \frac{U \delta \delta'}{\nu} = \frac{C^2 U_{\infty} L}{\nu} \alpha \left(\frac{x}{L}\right)^{2\alpha+m-1}$$

Widzimy, że zależność tych współczynników od zmiennej x znika wtedy i tylko wtedy, gdy

$$2\alpha + m - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1-m}{2}$$

W efekcie, mamy

$$\frac{\delta^2 U'}{\nu} = m \frac{C^2 U_\infty L}{\nu}, \quad \frac{U \delta \delta'}{\nu} = \frac{C^2 U_\infty L}{\nu} \alpha = \frac{1-m}{2} \frac{C^2 U_\infty L}{\nu}$$

Po podstawieniu, **otrzymujemy dla funkcji f nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne 3-ego rzędu**

$$\frac{C^2 U_\infty L}{\nu} m (f'^2 - f f'' - 1) - \frac{C^2 U_\infty L}{\nu} \frac{1-m}{2} f f'' = f'''$$

Po przekształceniach

$$\frac{C^2 U_\infty L}{\nu} m (f'^2 - 1) - \frac{C^2 U_\infty L}{\nu} \frac{1+m}{2} f f'' = f'''$$

Stałą C dobieramy zgodnie z „warunkiem normalizacji” ...

$$\frac{C^2 U_\infty L^{1+m}}{\nu} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2 \nu}{m+1 U_\infty L}}$$

Implikowana tym wyborem formuła dla funkcji $\delta = \delta(x)$ to

$$\begin{aligned} \delta(x) &= C \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1-m}{2}} L = \sqrt{C^2 \left(\frac{x}{L}\right)^{1-m}} L = \sqrt{\frac{2 \nu}{m+1} \frac{x}{L} \frac{\nu}{U_\infty L} \left(\frac{L}{x}\right)^m} L = \\ &= \sqrt{\frac{2 \nu}{m+1} \frac{x}{L} \frac{\nu}{U_\infty L} \left(\frac{L}{x}\right)^m} L^2 = \sqrt{\frac{2 \nu x}{m+1 U_\infty}} \end{aligned}$$

Drugi współczynnik w równaniu dla funkcji f przyjmuje wartość

$$\frac{C^2 U_\infty L}{\nu} m = \frac{2m}{1+m} \equiv \beta$$

co prowadzi do ostatecznej formy **równania różniczkowego (Falknera-Skan)** ...

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

gdzie

$$f = f(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{\nu x}{U(x)}}}$$

Wprowadzony wyżej parametr β może być wyrażony przez liczbę m , a mianowicie

$$\beta = \frac{2m}{1+m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\beta}{2-\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{m+1} = 2 - \beta$$

Wobec tego, „samopodobna” współrzędna η może być przedstawiona wzorem

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{(2-\beta) \frac{\nu x}{U(x)}}}$$

Warunki brzegowe stawiane dla równania Falknera-Skan mają następującą postać

$$\begin{cases} u|_{sciana} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 & , & v|_{sciana} = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ u \xrightarrow{y \rightarrow \infty} U(x) \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 \end{cases}$$

Interpretacja rozwiązań samopodobnych Falknera-Skan

Objaśnimy fizykalne znaczenie rozwiązań samopodobnych FS. W tym celu zapiszmy równanie Laplace'a dla funkcji prądu we współrzędnych biegunowych, a mianowicie

$$\Delta \psi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

Szczególnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja postaci

$$\psi(r, \theta) = K r^{m+1} \sin[(m+1)\theta].$$

Istotnie, mamy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= K(m+1)r^m \sin[(m+1)\theta] \\ r \frac{\partial \psi}{\partial r} &= K(m+1)r^{m+1} \sin[(m+1)\theta] \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= K(m+1)^2 r^m \sin[(m+1)\theta] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= K(m+1)^2 r^{m-1} \sin[(m+1)\theta] \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= -K(m+1)^2 r^{m-1} \sin[(m+1)\theta] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \psi = 0$$

Odpowiadające tej funkcji prądu biegunowe składowe pola prędkości wyrażają się wzorami

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi = K(m+1)r^m \cos[(m+1)\theta] \\ v_\theta = -\frac{\partial}{\partial r} \psi = -K(m+1)r^m \sin[(m+1)\theta] \end{cases}$$

Które linie o równaniu $\theta = const$ są liniami prądu? To oczywiście te linie, wzdłuż których składowa obwodowa $v_\theta(r, \theta) \equiv 0$, czyli linie $\theta = \theta_*$ takie, że

$$\sin[(m+1)\theta_*] = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{*,1} = 0 \quad , \quad \theta_{*,2} = \frac{\pi}{m+1}$$

Założmy, że $m \geq 0$. Wówczas $\beta \in [0, 2)$. Zachodzą związki

$$\frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{2}\beta \quad \Rightarrow \quad \theta_{*,2} = \pi - \frac{1}{2}\beta\pi$$

Promieniowa składowa pola prędkości wzdłuż linii $\theta_{*,1} = 0$ jest równa

$$v_r(r, \theta = 0) = \underbrace{K(m+1)}_{\frac{U_\infty}{L^m}} r^m = U_\infty (x/L)^m \quad , \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}$$

Otrzymaliśmy przepływ zewnętrzny odpowiadający samopodobnej warstwie przyściennej Falknera-Skan, czyli

$$U(x) \equiv v_r(x, 0) = U_\infty (x/L)^m$$

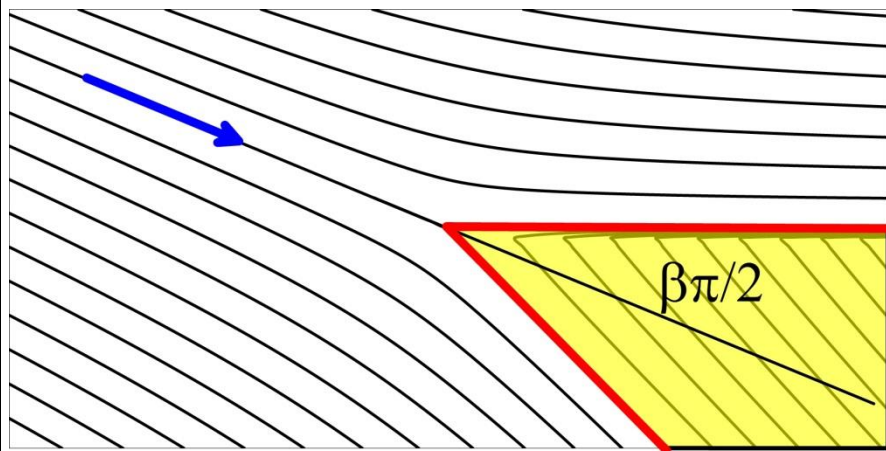
Jest to przepływ potencjalny w pobliżu ściany płaskiej załamanej pod kątem równym $\beta \frac{\pi}{2}$, jak na rysunku.

Przypadek $\beta = 0$ odpowiada warstwie przyściennej na płaskiej płytce ustawionej równolegle do kierunku strumienia w nieskończoności (czyli pod zerowym kątem natarcia).

Wówczas $m = 0$ i $U(x) \equiv U_\infty$ (zerowy gradient ciśnienia wzdłuż WP). Równanie Falknera-Skan redukuje się do **równania Blasiusa**

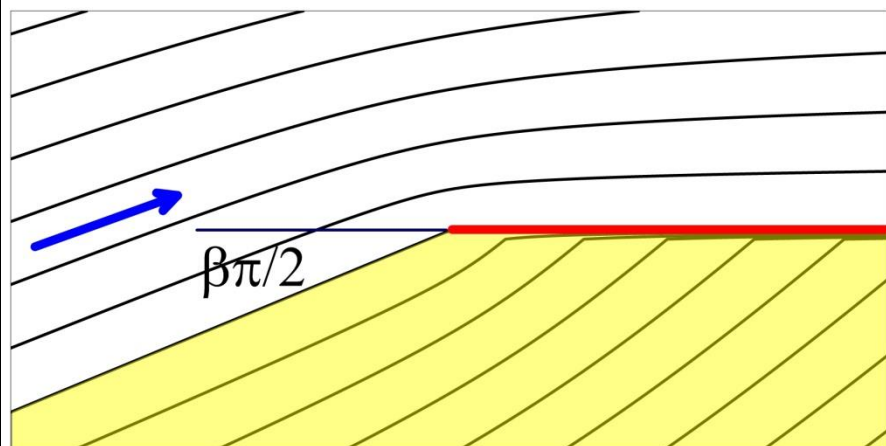
$$f''' + f f'' = 0$$

Bezwymiarowa „samopodobna” współrzędna w poprzek warstwy ma postać $\eta = \frac{y}{\sqrt{2 \frac{v x}{U_\infty}}}$.

Podsumowanie

Opływ płaskiej płytki pod ujemnym kątem natarcia

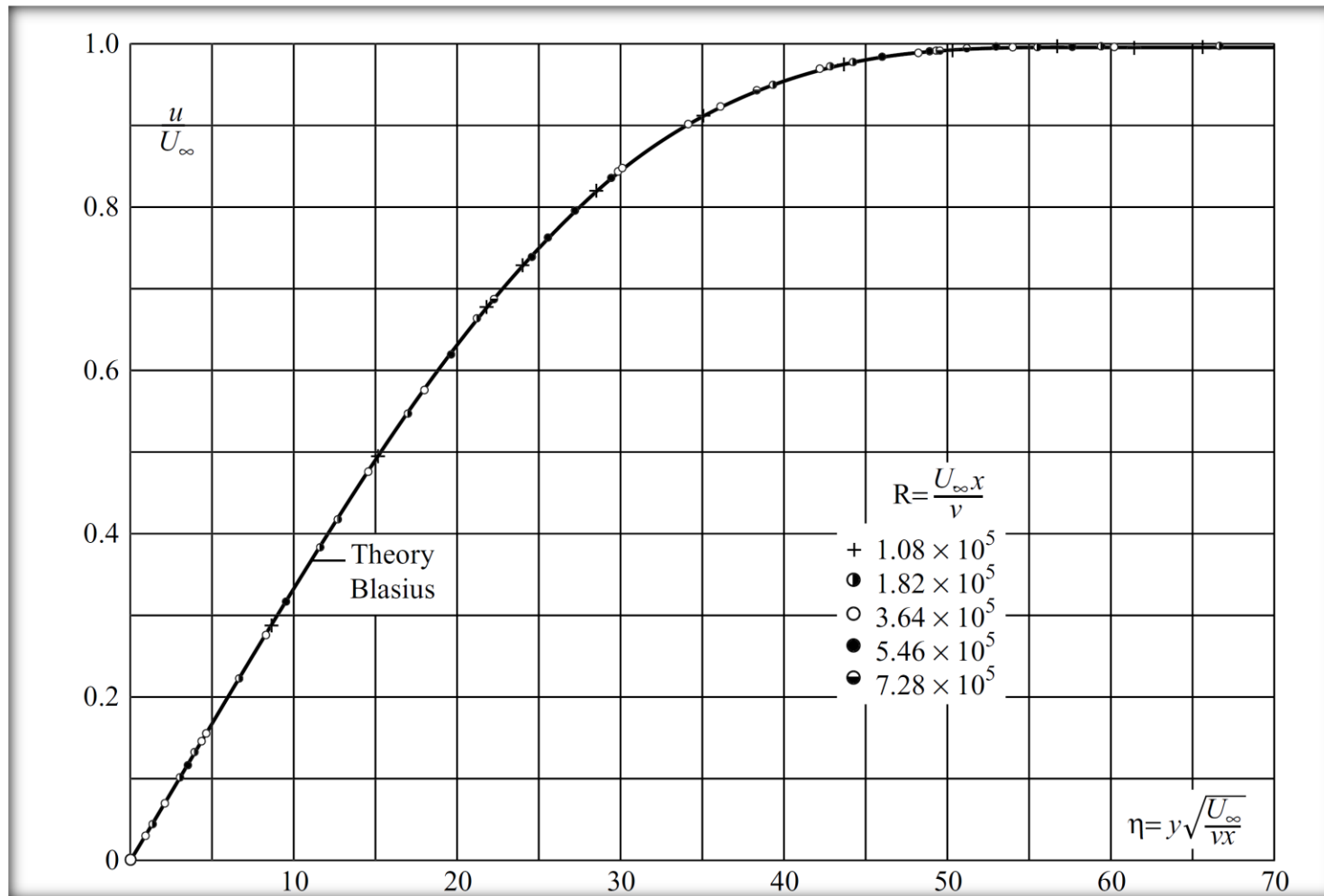
$$(A) \quad \begin{cases} m > 0, \beta \in (0, 2), U(x) = U_{\infty} \left(\frac{x}{L}\right)^m \\ U'(x) > 0 \text{ i } p'(x) < 0 \end{cases}$$



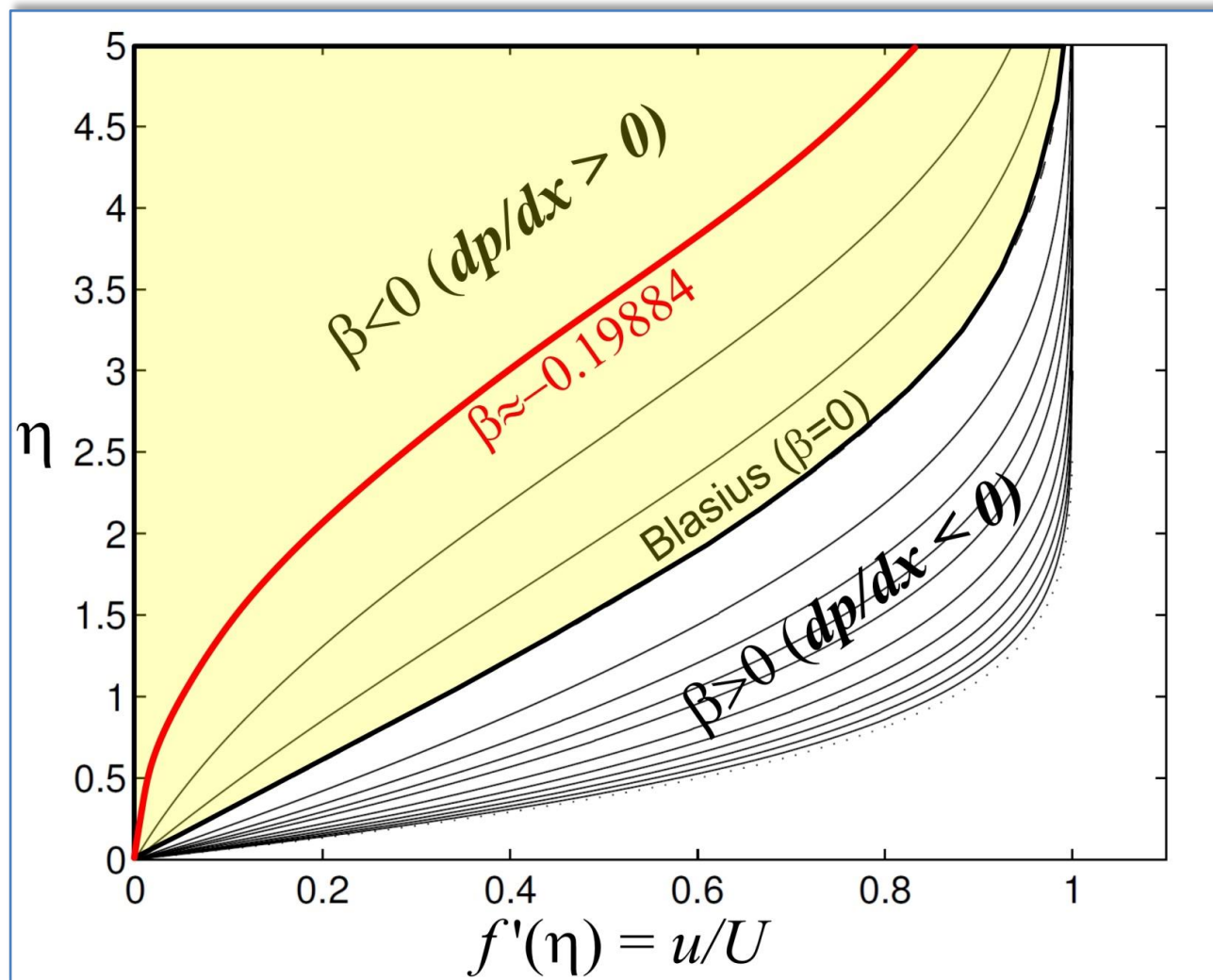
Opływ płaskiej płytki pod dodatnim kątem natarcia

$$(B) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m < 0, \beta \in [-2, 0), U(x) = U_{\infty} \left(\frac{x}{L}\right)^m \\ U'(x) < 0 \text{ i } p'(x) > 0 \end{cases}$$

Profile prędkości w samopodobnej warstwie Falknera-Skan



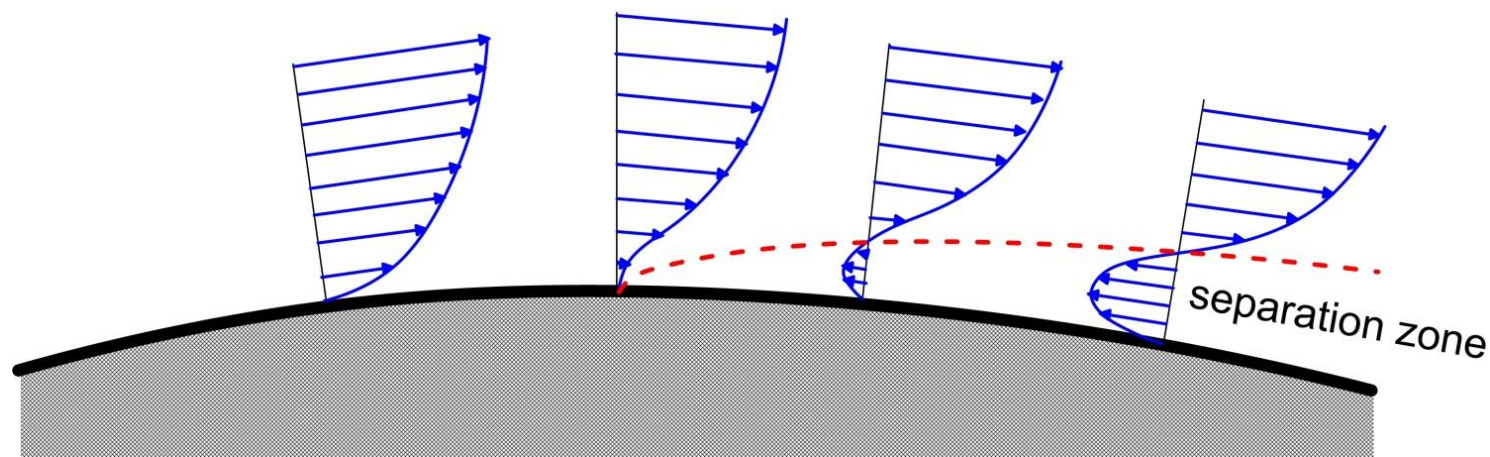
Profil prędkości w warstwie laminarnej w warstwie przyściennej Blasiusa ($\beta = 0$) – porównanie teorii z eksperymentem (Schlichting, 2003)

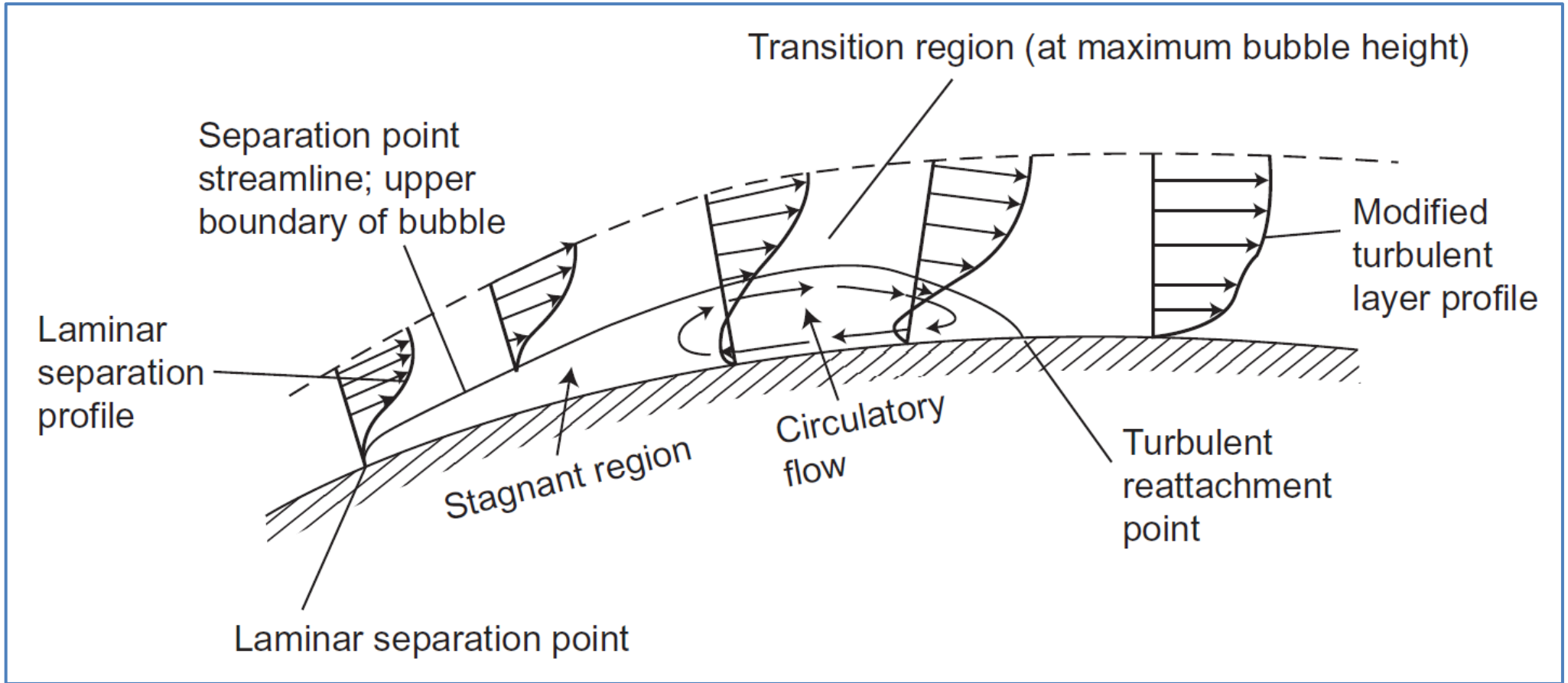
Profile prędkości w samopodobnej warstwie Falknera-Skan

Graniczny kąt natarcia – ok. 18° . Powyżej – oderwanie laminarnej WP na całej płycie!

Zjawisko oderwania WP

W pewnych warunkach WP może ulec oderwaniu od powierzchni ciała (profilu). „Oderwanie” oznacza tyle, że poza pewnym punktem (w 3D – linią) pojawia się przy ścianie rejon przepływu wstecznego (recyrkulacji). Rejon oderwania może rozciągać się do krawędzi spływu powiększając systematycznie swoją grubość, lub może mieć ograniczony zasięg, tj. poza pewnym miejscem położonym dalej „z prądem” następuje powtórne „przyklepienie” WP (ang. re-attachment). W tym ostatnim przypadku mówimy o oderwaniu lokalnym (powstaje tzw. bąbel oderwania WP). Z aerodynamicznego punktu widzenia oderwanie laminarnej WP jest niekorzystne, powoduje bowiem gwałtowną zwykle utratę znacznej części siły nośnej i jednoczesny wzrost oporu aerodynamicznego.





Schemat oderwania lokalnego z bąblem laminarnym (źródło E.L. Houghton at al., *Aerodynamics for Engineering Students*, 6E, Elsevier 2013)

Posługując się teorią Prandtla można pokazać, że oderwanie WP może zachodzić jedynie w obszarze wzrostu ciśnienia wzdłuż WP (czyli tam gdzie $dp/dx > 0$).

Pokażemy, że $dp/dx > 0$ (czyli – równoważnie - $U'(x) < 0$) jest warunkiem koniecznym pojawienia się oderwania WP (zakładamy poniżej, że $y = 0$ odpowiada ścianie). Ponieważ na ścianie prędkość przepływu jest równa zero to r-nie Prandtla zapisane w granicy $y \rightarrow 0$ redukuje się do równości

$$0 = U_0(x)U'_0(x) + \underbrace{\nu \partial_{yy} u(x, y=0)}_{\text{na ścianie}}$$

Zauważmy, że w otoczeniu punktu oderwania WP druga pochodna $\partial_{yy} u$ na ścianie jest dodatnia. Z powyższego równania wynika, że wówczas $U'(x) < 0$, czyli ma miejsce nierówność $p'(x) > 0$. Do oderwania na gładkiej ścianie nie może dojść w obszarze, gdzie warstwa przyścienna przyspiesza, a ciśnienie wzdłuż ściany maleje.

Powyższy fakt ma wielkie konsekwencje dla projektowania powierzchni nośnych, profili aerodynamicznych w szczególności. O tym ... przy innej okazji.

Całkowe charakterystyki przepływu w WP. Równanie Karmana

Jednym z głównych zagadnień teorii WP jest zdefiniowanie „obiektywnych” miar jej grubości, a następnie określenie związków pomiędzy tymi wielkościami implikowanymi przez podstawowe zasady zachowania.

Jak wynika z postaci poznanych wcześniej rozwiązań samopodobnych, odległość od ściany w jakiej prędkość w warstwie zrównuje się z prędkością przepływu zewnętrznego jest nieograniczona (grubość warstwy jest nieskończona). Z praktycznego punktu widzenia można posłużyć się umowną grubością δ_{99} zdefiniowana jako taki dystans od ściany na którym składowa prędkości równoległa do ściany osiąga 99% wartości prędkości na „brzegu” warstwy (czyli $U(x)$). Mamy zatem

$$u(x, y = \delta_{99}) := 0.99 \cdot U(x)$$

W szczególności, dla laminarnej WP Blasiusa (płaska płytką, zerowy gradient ciśnienia wzdłuż WP) otrzymamy wynik

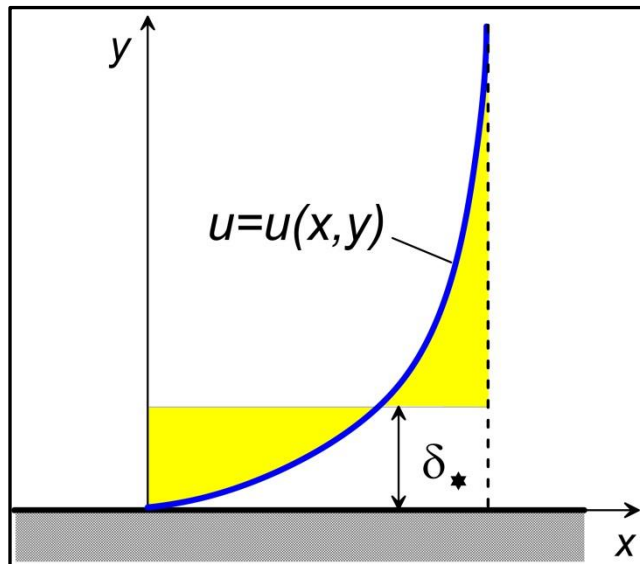
$$\delta_{99}(x) \approx 4.91 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \Rightarrow \frac{\delta_{99}(x)}{x} \approx 4.91 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{4.91}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Przykład: Oblicz przybliżoną grubość laminarnej WP na płaskiej płytce opływanej równoległym do niej strumieniem powietrza (lepkość kinematyczna $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ przy temperaturze ok. 20^0 C) z prędkością $U = 50 \frac{m}{s}$.

$$\delta_{99}(x) \approx 4.91 \sqrt{\frac{\nu}{U}} \sqrt{x} \approx 0.0027 \sqrt{x}$$

Wniosek: w odległości 1 m od początku WP jej grubość wynosi ok. 2.7 mm.

Grubość straty wydatku (ang. displacement thickness)



Inną, bardziej adekwatną miarą grubość warstwy można określić w następujący sposób. Rozważmy profil prędkości stycznej do ściany w wybranym przekroju (wsp. x jest ustalona). Obliczmy wielkość całkową zdefiniowaną następująco (Δ - duża liczba)

$$\Delta Q(x) = \int_0^{\Delta} [U(x) - u(x, y)] dy$$

Formalnie, jest to różnica dwóch wydatków objętościowych – przepływu płynu idealnego ze stałą prędkością $U(x)$ i przepływu płynu lepkiego z prędkością $u(x, y)$ - płynących przez wybrany przekrój poprzeczny WP rozciągający się od ściany do linii $y = \Delta$.

Grubością straty wydatku nazywamy wielkość (interpretacja – rysunek)

$$\delta_*(x) := \frac{\Delta Q(x)}{U(x)} = \int_0^{\Delta} \left[1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right] dy \rightarrow \boxed{\delta_* = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy}$$

Wielkość $\delta_*(x)$ mówi, o ile należy przesunąć ścianę opływanego ciała, aby otrzymać ekwiwalentną korektę (ujemną, a więc stratę) wydatku objętościowego związana ze zmniejszeniem prędkości przy ścianie.

Zauważmy, że ma miejsce równość

$$\int_0^{\delta_*} u(x, y) dy = \int_{\delta_*}^{\Delta} [U(x) - u(x, y)] dy \Rightarrow \int_{\delta_*}^{\Delta} U(x) dy = \int_0^{\Delta} u(x, y) dy$$

Grubość straty pędu (ang. momentum thickness)

Analogiczną miarę grubości można wprowadzić względem strat pędu. Ponownie, rozważmy warstwę płynu o grubości $\Delta > \delta_*$ i obliczmy strumień składowej poziomej pędu przez przekrój określony współrzędną x , dla dwóch przypadków:

1) przepływ idealny ze stałą prędkością $U(x)$, odsunięty o δ_* od ściany

$$\dot{P}_{x,id} = \rho \int_{\delta_*}^{\Delta} U^2(x) dy = \rho U \int_{\delta_*}^{\Delta} U(x) dy = \rho U \int_0^{\Delta} u(x, y) dy = \rho \int_0^{\Delta} u(x, y) U(x) dy$$

2) przepływ płynu lepkiego w WP

$$\dot{P}_{x,WP} = \rho \int_0^{\Delta} u^2(x, y) dy$$

Różnica strumieni pędu wynosi

$$\Delta \dot{P}_x = \rho \int_0^{\Delta} u(x, y) U(x) dy - \rho \int_0^{\Delta} u^2(x, y) dy = \rho \int_0^{\Delta} u(x, y) [U(x) - u(x, y)] dy$$

W granicy $\Delta \rightarrow \infty$

$$\Delta \dot{P}_x = \rho U^2 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy}_{\theta} = \rho U^2 \theta$$

Pojawiła się wielkość θ zwana **grubością straty pędu**

$$\theta = \frac{\Delta \dot{P}_x}{\rho U^2} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy$$

Zauważmy, że zawsze $\theta < \delta_*$ (dlaczego?). Profil prędkości w warstwie charakteryzuje się również tzw. **współczynnikiem kształtu**

$$H := \frac{\delta_*}{\theta} > 1$$

Przykład 1:

Założmy, że dla ustalonego przekroju poprzecznego profil prędkości w WP można przybliżyć funkcją

$$u(y) = U_0(1 - e^{-\alpha y})$$

Wówczas

$$\delta_* = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (1 - 1 + e^{-\alpha y}) dy = -\frac{1}{\alpha} \lim_{\delta \rightarrow \infty} [e^{-\alpha \delta} - e^0] = \frac{1}{\alpha}$$

$$\theta = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (1 - e^{-\alpha y}) e^{-\alpha y} dy = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} e^{-\alpha y} dy - \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} e^{-2\alpha y} dy = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha}$$

Hence, the shape factor is $H = \frac{\delta_*}{\theta} = 2$

Zadanie: Powtórz obliczenia dla $u(y) = U_0[1 - (1 + y)^{-\alpha}]$, $\alpha > 1$

Przykład 2: Wyznacz całkowite parametry (grubości) laminarnej WP Blasiusa

W rozwiązaniu samopodobnym Blasiusa mamy:

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\sqrt{2 \frac{\nu x}{U}}} \quad , \quad \frac{u}{U}(x, y) = f'[\eta(x, y)]$$

Zatem

$$\delta_*(x) = \int_0^\infty \{1 - f'[\eta(x, y)]\} dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta \approx 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

czyli

$$\frac{\delta_*(x)}{x} \approx 1.721 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{1.721}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Dalej ...

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \int_0^\infty f'[\eta(x, y)] \{1 - f'[\eta(x, y)]\} dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} \int_0^\infty f'(\eta) [1 - f'(\eta)] d\eta = \\ &= \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} f''(0) \approx 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{\theta(x)}{x} \approx 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad H \approx 2.592$$

Inne ważne parametry to:

- naprężenia na ścianie

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu U f''(0)}{\sqrt{2\nu x/U}}$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \approx \frac{\sqrt{2} f''(0)}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{\theta}{x} \quad (\text{lokalny wsp. tarcia})$$

- (globalny) współczynnik tarcia na odcinku płytki o długości L

$$C_D(L) = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx = \frac{0.664}{L} \sqrt{\frac{\nu}{U}} \int_0^L x^{-1/2} dx = \frac{0.664}{L} \sqrt{\frac{\nu}{U}} 2\sqrt{L} = 2C_f(L) = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

Równanie von Karmana

Wyprowadzimy ważne równanie von Karmana, które wiąże wprowadzone wyżej całkowite grubości WP.

Punktem wyjścia jest równanie Prandtla

$$u \partial_x u + v \partial_y u = U(x)U'(x) + \frac{\mu}{\rho} \partial_{yy} u$$

Scałkujemy to równanie względem y w przedziale $[0, \Delta]$. Jak zwykle, $y = 0$ odpowiada ścianie. Otrzymujemy równość

$$\underbrace{\int_0^{\Delta} (u \partial_x u + v \partial_y u - UU') dy}_{L_{\Delta}} = \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \int_0^{\Delta} \partial_{yy} u dy}_{R_{\Delta}}$$

Zajmijmy się najpierw prawą stroną tej równości ...

$$R_{\Delta} = \frac{\mu}{\rho} \int_0^{\Delta} \partial_{yy} u dy = \frac{1}{\rho} (\mu \partial_y u \Big|_{y=\Delta} - \mu \partial_y u \Big|_{y=0})$$

W granicy $\Delta \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$R = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} R_{\Delta} = -\frac{1}{\rho} \mu \partial_y u \Big|_{\text{ściana}} = -\frac{1}{\rho} \tau_w$$

Symbolem τ_w oznaczyliśmy wartość naprężeń stycznych na ścianie.

Posługując się równaniem ciągłości możemy następnie napisać równość

$$v \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow v = \int_0^y \partial_y v dy = -\int_0^y \partial_x u dy$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta} v \partial_y u dy &= \int_0^{\Delta} \left(-\int_0^y \partial_x u dy' \right) \partial_y u dy = \underbrace{\left(-\int_0^y \partial_x u dy' \right) u \Big|_0^{\Delta}}_{\text{przez części...}} + \int_0^{\Delta} u \partial_x u dy = \\ &= -u(x, \Delta) \int_0^{\Delta} \partial_x u dy + \int_0^{\Delta} u \partial_x u dy = -\int_0^{\Delta} [u(x, \Delta) \partial_x u - u(x, y) \partial_x u] dy \end{aligned}$$

Podstawiamy otrzymane wyrażenie do lewej części równości i otrzymujemy ...

$$\begin{aligned}
 L_{\Delta} &= \int_0^{\Delta} (u \partial_x u + v \partial_x u - UU') dy = \\
 &= \int_0^{\Delta} (u \partial_x u - UU') dy - \int_0^{\Delta} [u(\Delta) \partial_x u - u \partial_x u] dy = \\
 &= \int_0^{\Delta} [u \partial_x u - UU' - u(\Delta) \partial_x u + u \partial_x u] dy = \\
 &= \int_0^{\Delta} [u \partial_x u - UU' - u(\Delta) \partial_x u + u \partial_x u + uU' - uU'] dy = \\
 &= - \int_0^{\Delta} \{u \partial_x (U - u) + [u(\Delta) - u] \partial_x u\} dy - \int_0^{\Delta} (U - u) U' dy
 \end{aligned}$$

Ale $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} u(\Delta) = U$, zatem

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\Delta \rightarrow \infty} L_{\Delta} = -\int_0^{\infty} \{u \partial_x (U - u) + [U - u] \partial_x u\} dy - \int_0^{\infty} (U - u) U' dy = \\
 &= -\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(U - u) dy - U' \int_0^{\infty} (U - u) dy = \\
 &= -\frac{d}{dx} \left[U^2 \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \right] - U' U \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy
 \end{aligned}$$

Przyrównując L do R otrzymujemy **równanie von Karmana**

$$\boxed{\frac{d}{dx} [U^2(x)\theta(x)] + U(x)U'(x)\delta_*(x) = \frac{1}{\rho} \tau_w}$$

Postacie równoważne ...

$$\boxed{\frac{d}{dx} \theta + \frac{U'}{U} (\delta_* + 2\theta) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}}$$

,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \theta + (2 + H) \frac{U'}{U} \theta = \frac{C_f}{2}}$$

Metoda Thwaitesa (1949)

Wprowadźmy parametr

$$\lambda = \frac{\theta^2 U'}{\nu}$$

Pomnóżmy r-nie Karmana przez czynnik $\text{Re}_\theta = U\theta/\nu$. Otrzymamy

$$\frac{1}{\nu} U \theta \theta' + (2 + H) \frac{1}{\nu} U' \theta^2 = \frac{\tau_w \theta}{\rho \nu U} \equiv \frac{\tau_w \theta}{\mu U}$$

Lewą stronę tego równania można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} U \theta \theta' + (2 + H) \frac{1}{\nu} U' \theta^2 &= \frac{1}{2} U \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\nu} \theta^2 \right) + (2 + H) \lambda = \\ &= \frac{1}{2} U \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{U'} \lambda \right) + (2 + H) \lambda \end{aligned}$$

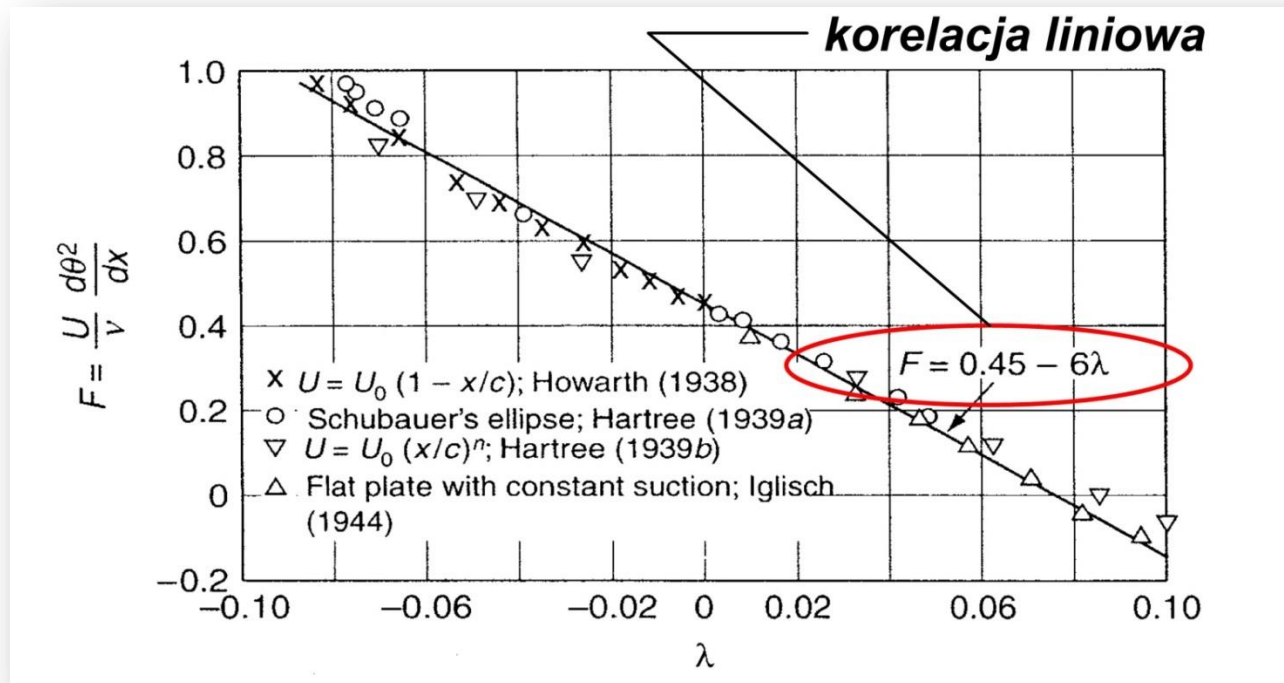
Założmy, że prawą stronę też można przedstawić jako pewną funkcję parametry λ

$$S(\lambda) = \tau_w \theta / \mu U$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe dla parametru $\lambda = \lambda(x)$

$$U \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{U'} \lambda \right) = 2[S(\lambda) - (2 + H)\lambda] \equiv F(\lambda)$$

Thwaites zebrał znane mu wyniki badań teoretycznych i eksperymentalnych i skonstruował w 1949 r. słynny wykres



Wzór aproksymacyjny Thwaitesa

$$F(\lambda) = 0.45 - 6\lambda$$

Otrzymane równanie z podaną wyżej liniową funkcją F można rozwiązać analitycznie! (ćwiczenie: rozwiąż r-nie jednorodne otrzymane po odrzuceniu stałej 0.45 metodą rozdzielania zmiennych, a następnie uzmiennij stałą całkowania). Rozwiązanie to można zapisać wzorem

$$\theta^2(x) = 0.45\nu U^{-6} \left(\int_{x_0}^x U^5 dx + C \right)$$

Dla $x = x_0$ otrzymujemy

$$\theta^2(x_0) = 0.45\nu U(x_0)^{-6} C \Rightarrow C = \frac{\theta^2(x_0) U^6(x_0)}{0.45\nu}$$

Zatem

$$\theta^2(x) = U^{-6} \left[0.45\nu \int_{x_0}^x U^5 dx' + U^6 \theta^2(x_0) \right]$$

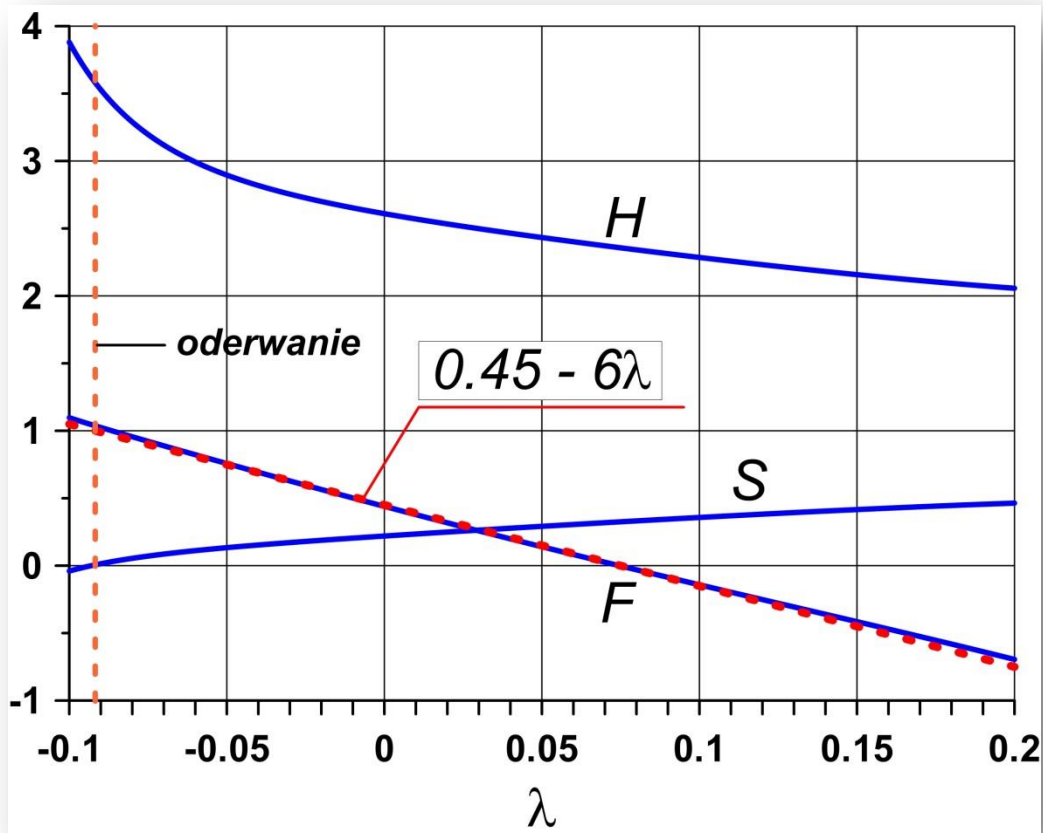
W praktyce, gdy x_0 odpowiada początkowi warstwy, drugi składnik w nawiasie znika (dlaczego?). Otrzymujemy formułę Thwaitesa

$$\theta^2(x) = \frac{0.45\nu}{U^6} \int_{x_0}^x U^5 dx'$$

Po obliczeniu θ wyznaczamy kolejno $\lambda(x) = \frac{1}{\nu} U'(x)\theta^2(x)$ i $Re_\theta(x) = \frac{U(x)\theta(x)}{\nu}$.

Współczynnik oporu tarcia obliczmy ze wzoru $C_f(x) = \frac{2}{Re_\theta(x)} S[\lambda(x)]$.

Thwaites podał zależności $S = S(\lambda)$ i $H = H(\lambda)$ w formie tabeli. Wygodniej korzysta się jednak ze wzorów aproksymacyjnych.



Ich współczesna forma ma postać:

$$S(\lambda) = 0.22 + 1.52\lambda - 5\lambda^3 - \frac{0.072\lambda^2}{(\lambda + 0.18)^2}$$

$$H(\lambda) = 2.61 - 4.1\lambda + 14\lambda^3 + \frac{0.56\lambda^2}{(\lambda + 0.18)^2}$$