Funkcje tensorowe

Funkcja skalarna tensora

zmienne niezależne to tensory, a zależne to skalar – np. temperatura, energia.
Jeśli odwzorowanie ma być fizycznie jednoznaczne, to nie będzie zależało od wyboru układu współrzędnych, a zatem funkcja powinna zależeć oo niezmienników tensora

np. dla jednego tensora:

$$f(\boldsymbol{A}) = f(I_1, I_2, I_3)$$

lub $W(\boldsymbol{e}) = W\left(I_1^e, I_2^e, I_3^e\right)$ ← energia jako funkcja niezmienników odkształcenia

Funkcja tensorowa tensora →

zmienne niezależne to tensory i zmienne zależne to tensor → np. σ / ε

$$\boldsymbol{B} = f\left(\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{F}_0\boldsymbol{A}^0 + F_1\boldsymbol{A}^1 + F_2\boldsymbol{A}^2 = F_0\boldsymbol{I} + F_1\boldsymbol{A} + F_2\boldsymbol{A}^2$$

gdzie funkcje skalarne F_1, F_2, F_3 zależą od niezmienników $\boldsymbol{A}$,

np. $\boldsymbol{F}_i = F_i\left(tr\boldsymbol{A}, tr\boldsymbol{A}^2, tr\boldsymbol{A}^3\right) = F_i\left(I_1, I_2, I_3\right)$

trzy niezmienniki to „baza” przestrzeni, można zatem potraktować to różnie (wybór nie jest tylko jeden):

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \qquad I_1' = tr\boldsymbol{A}$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \qquad I_2' = tr\boldsymbol{A}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \qquad I_3' = tr\boldsymbol{A}^3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \qquad I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(tr\boldsymbol{A}\right)^2 - tr\boldsymbol{A}^2\right]$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przy formułowaniu **praw konstytutywnych** należy posługiwać się zmiennymi sprzężonymi, aby dla każdej konfiguracji na ścieżce równowagi (trajektorii), na skutek deformacji elementu materialnego, infinitezymalny przyrost pracy był określony przez iloczyn skalarny odpowiednich sformułowań naprężeń i odkształceń:

$$dW = \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{e} \qquad \text{(Hill, 1948)}$$

np. naprężenie PK2 (symetryczny) i odkształcenie Greena_Lagrange'a
lub naprężenie Cauchy'ego i odkształcenie logarytmiczne

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\ln\left(\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}\right)$$

lub $$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\ln\left(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{e}\right)$$

(por. Skrzypek, p. 28)

4. Nieliniowe prawa konstytutywne w mechanice ciała stałego. Bazy energetyczne. Sformułowania bazujące na tensorach naprężenia i odkształcenia, lub na ich niezmiennikach. Materiały hypoelastyczne. Specyfika materiałów hiperelastycznych, duże i skończone przemieszczenia i obroty. Modele przykładowe: Mooney-Rivlin, Ogden, Arruda-Boyce. Podstawy doświadczalnego wyznaczania wartości współczynników do hiperelastycznych modeli konstytutywnych. Modele plastyczne oraz lepko-sprężyste.

SPRĘŻYSTOŚĆ na początek *LINIOWA*

Zadanie liniowo-sprężyste, materiał izotropowy

Funkcja tensorowa $\sigma - \varepsilon$ liniowa

$$\boldsymbol{\sigma} = F_0 \cdot \boldsymbol{I} + F_1 \cdot \boldsymbol{e} + F_2 \cdot \boldsymbol{e}^2$$

$F_2 \equiv 0$, bo funkcja ma być liniowa, więc człony kwadratowe znikają

gdzie:

$$F_0 = \lambda \cdot tr\boldsymbol{e}$$

$$F_1 = 2G \qquad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \cdot tr\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{mn} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$$

lub odwrotnie:

$$\boldsymbol{e} = \left(-\frac{\nu}{E} tr\boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \boldsymbol{I} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{mn} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

gdzie wykorzystano *(przypomnienie):*

$$tr\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\boldsymbol{I} = \delta_{ij}$$

UWAGA: w zapisie MES'owskim (przechodzimy na wielkości jednoindeksowe)

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}\,\sigma_{22}\,\sigma_{33}\,\sigma_{12}\,\sigma_{13}\,\sigma_{23}\}^T = \{\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4\,\sigma_5\,\sigma_6\}^T$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \varepsilon_{23}\}^T = \{\varepsilon_1\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \varepsilon_6\}^T$$

i prawo konstytutywne przyjmuje postać:

$$\{\sigma\} = [\boldsymbol{D}]\{\varepsilon\} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & & & \\ & \lambda+2G & \lambda & & & \\ & & \lambda+2G & & & \\ & & & 2G & & \\ & & & & 2G & \\ \text{Sym.} & & & & & 2G \end{bmatrix}$$

Ale macierz konstytutywna ***D*** nie jest już tensorem !! - ponieważ „kolumnowy" zapis naprężenia i odkształcenia zgubił sens tensorowy…

To pewna kombinacja, która transformuje się jak trzeba $\bar{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^T$ ale to nie tensor! (***R*** to macierz obrotu)

bo tensorowo byłoby:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \lambda\left(e_{11}+e_{22}+e_{33}\right)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + 2G\begin{bmatrix} e_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$