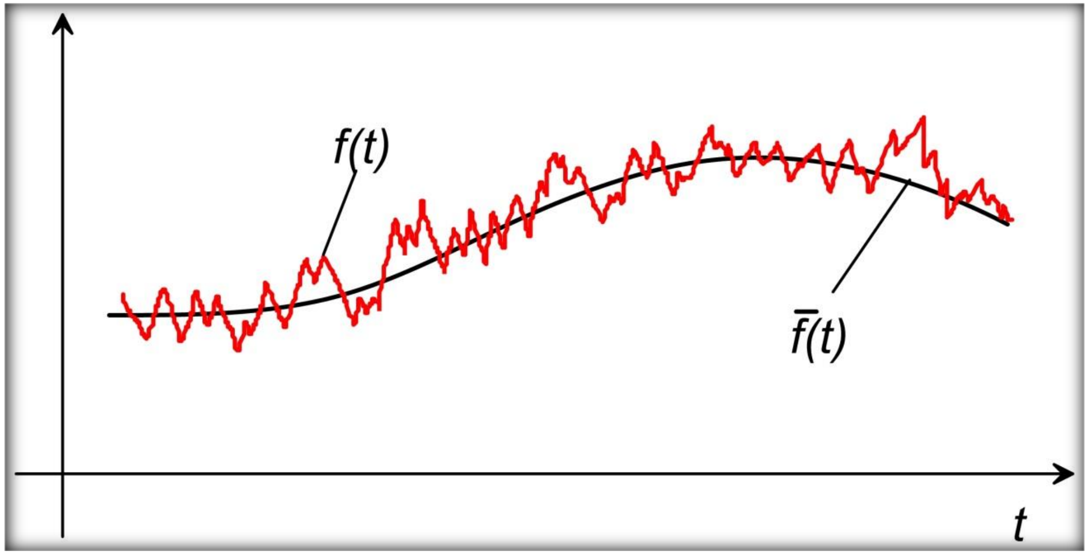
# WYKŁAD 5
# ELEMENTY TEORII WARSTWY PRZYŚCIENNEJ – CZĘŚĆ 2

# Podstawy modelowania przepływów turbulentnych

## Dekompozycja Reynoldsa




$$f = \overline{f} + f'$$

*srednia* *pulsacja*

Zakładamy, że procedura uśredniania spełnia warunek

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} \quad \Rightarrow \overline{f'} = 0$$

## Uśrednianie Reynoldsa

Przepływ niestacjonarny (wolno zmienny trend przepływu średniego)

$$\bar{f}(t,x) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau,\mathbf{x})d\tau$$

Czas uśredniania – mały w porównaniu ze „stałą czasową” średniego trendu, duży w porównaniu z charakterystycznym czasem fluktuacji.

W przypadku przepływu „statystycznie ustalonego”:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau,\mathbf{x})d\tau$$

# Przemienność operacji różniczkowania i uśredniania

$$\overline{\partial_{x_k} f}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \partial_{x_k} f(\tau,\mathbf{x})d\tau = \partial_{x_k}\left[\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau,\mathbf{x})d\tau\right] = \partial_{x_k}\overline{f}(t,\mathbf{x})$$

$$\overline{\partial_t f}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \partial_t f(\tau,\mathbf{x})d\tau = \frac{1}{2T}\left[f(t+T,\mathbf{x}) - f(t-T,\mathbf{x})\right] =$$
$$= \frac{1}{2T}\left[\partial_t \int_0^{t+T} f(\tau,\mathbf{x})d\tau - \partial_t \int_0^{t-T} f(\tau,\mathbf{x})d\tau\right] = \partial_t\left[\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(\tau,\mathbf{x})d\tau\right] = \partial_t \overline{f}(t,\mathbf{x})$$

# Wyprowadzenie uśrednionych r-nań Reynoldsa (RANS, URANS, przypadek nieściśliwy)

Punkt wyjścia …

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_j + \frac{\partial}{\partial x_k}(\upsilon_j\upsilon_k) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}p + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\upsilon_j \\ \frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_j = 0 \end{cases}$$

Dekompozycja Reynoldsa …

$$\upsilon_k = \bar{\upsilon}_k + \upsilon'_k \quad , \quad p = \bar{p} + p'$$

Podstawiamy i stosujemy uśrednienie …

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j)(\bar{\upsilon}_k + \upsilon'_k)\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{p} + p') + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}(\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\overline{(\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j)}}_{=\bar{\upsilon}_j} + \frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\overline{(\bar{\upsilon}_j\bar{\upsilon}_k + \upsilon'_j\bar{\upsilon}_k + \upsilon'_k\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j\upsilon'_k)}}_{=\bar{\upsilon}_j\bar{\upsilon}_k + \overline{\upsilon'_j\upsilon'_k}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\overline{(\bar{p} + p')}}_{=\bar{p}} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\underbrace{\overline{(\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j)}}_{=\bar{\upsilon}_j}$$

Otrzymujemy ….

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\bar{\upsilon}_j + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\upsilon}_j\bar{\upsilon}_k)\right] = -\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{p} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\bar{\upsilon}_j - \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\upsilon'_j\upsilon'_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(\bar{\upsilon}_j + \upsilon'_j)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\upsilon}_j = 0$$

Człon lepki możemy napisać w postaci (płyn newtonowski) …

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \bar{\upsilon}_j = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[ 2\mu \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{\upsilon}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\upsilon}_k\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_k} 2\mu \bar{D}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{S}_{jk}$$

Zdefiniujmy wielkość (gęstość masowa energii turbulencji) $k = \frac{1}{2}\overline{\upsilon'_j \upsilon'_j}$ oraz tensor Reynoldsa …

$$R_{jk} = -\rho \overline{\upsilon'_j \upsilon'}_k \quad \Rightarrow \quad tr\boldsymbol{R} = -\rho \overline{\upsilon'_j \upsilon'}_j = -2\rho k$$

Część dewiatorowa to tensor naprężeń turbulentnych …

$$T_{jk} = R_{jk} - \tfrac{1}{3} tr\boldsymbol{R}\,\delta_{jk} = -\rho \overline{\upsilon'_j \upsilon'}_k + \tfrac{2}{3}\rho k \delta_{jk}$$

Oczywiście, ślad tensora $\boldsymbol{T}$ jest równy zeru.

Dwa ostatnie składniki w prawej stronie RANS można zapisać w postaci

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \bar{\upsilon}_j - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\upsilon'_j \upsilon'_k} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{p} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\underbrace{\bar{S}_{jk} + T_{jk}}_{S^T_{jk}} - \tfrac{2}{3} \rho k \delta_{jk})$$

co pozwala zapisać RANS następująco

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\upsilon}_j + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\upsilon}_j \bar{\upsilon}_k) \right] = -\frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\bar{p} + \tfrac{2}{3} \rho k)}_{\substack{\text{cisnienie} \\ \text{turbulentne}}} + \frac{\partial}{\partial x_k} S^T_{jk}$$

## Hipoteza lepkości turbulentnej

Dla tensora naprężeń turbulentnych brakuje „związku konstytutywnego" – mamy dodatkowe 6 niewiadomych pól, ale nie mamy dodatkowych równań! Jest to tzw. **problem domknięcia**.

Hipoteza: tensor naprężeń turbulentnych da się wyrazić analogicznie jak naprężenia molekularne …

$$\boldsymbol{T} = 2\mu_T \bar{\boldsymbol{D}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}^T = 2(\mu + \mu_T)\bar{\boldsymbol{D}}$$

**UWAGA:**

- Tensor prędkości $\bar{\boldsymbol{D}}$ deformacji został obliczony dla **średniego pola prędkości**
- **Postulowany związek jest matematycznie spójny bowiem oba tensory $\boldsymbol{T}$ i $\bar{\boldsymbol{D}}$** mają zerowe ślady
- Wielkość $\mu_T$ - zwana **lepkością turbulentną** – nie jest fizyczną cechą płynu tylko charakterystyką przepływu i zależna od miejsca (i – na ogół – również czasu).

**Wniosek: nadal potrzebny jest sposób wyznaczenia lepkości turbulentnej w oparciu o wielkości charakteryzujące przepływ średni.**

# Turbulentna warstwa przyścienna

**Założenia:**

1. Przepływ zewnętrzny - 2D
2. Przepływ uśredniony w TWP – 2D
3. Obowiązują założenia przyjęte przy wyprowadzaniu „laminarnego” r-nia Prandtla.

Przyjmując tradycyjne oznaczenia zapiszmy uśrednione równanie pędu na kierunek *x*:

$$\rho(\bar{u}\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{u}+\bar{\upsilon}\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u})=-\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{p}+\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x}(\mu\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{u}-\rho\overline{u'^2})}_{I}+\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial y}(\mu\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u}-\rho\overline{u'\upsilon'})}_{II}+\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'\upsilon'})}_{III}$$

Zakładamy, że $II \gg I, III$ co pozwala uprościć równanie do postaci

$$\rho(\bar{u}\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{u}+\bar{\upsilon}\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u})=-\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{p}+\tfrac{\partial}{\partial y}(\mu\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u}-\rho\overline{u'\upsilon'})$$

Obowiązuje również (uśrednione) r-nie ciągłości

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{u}+\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{\upsilon}=0$$

Wprowadzamy **lepkość turbulentną**

$$-\rho\overline{u'\upsilon'} = \rho\nu_T \tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u}$$

$$\mu_T$$

Równanie ruchu w TWP przyjmuje postać

$$\boxed{\rho(\bar{u}\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{u}+\bar{\upsilon}\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u}) = -\tfrac{\partial}{\partial x}\bar{p}+\tfrac{\partial}{\partial y}[(\mu+\mu_T)\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u}]}$$

W miarę zbliżania się do ściany pulsacje prędkości zanikają zatem na ścianie lepkość turbulentna znika $\mu_T = 0$, zatem naprężenia na ścianie są równe $\tau_w = \mu\tfrac{\partial}{\partial y}\bar{u}\Big|_{y=0}$.

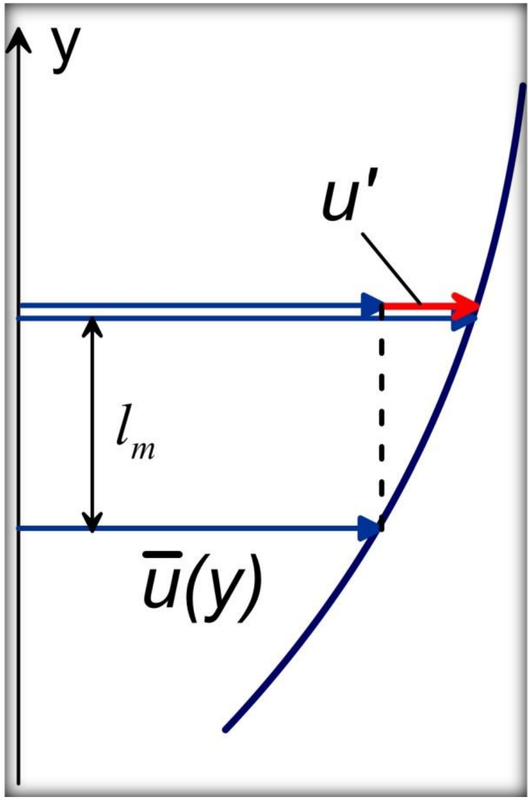
**WNIOSEK: równanie całkowe** von Karmana ma formalnie identyczną postać jak dla LWP !

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}[\bar{U}^2(x)\bar{\theta}(x)]+\bar{U}(x)\bar{U}'(x)\bar{\delta}_*(x) = \tfrac{1}{\rho}\tau_w}$$

lub

$$\boxed{\frac{d}{dx}\bar{\theta}+(2+\bar{H})\frac{\bar{U}'}{\bar{U}}\bar{\theta} = \frac{C_f}{2}}$$

# Hipoteza drogi mieszania (Prandtl)




Rozumując przez analogię do mikroskopowego opisu transportu pędu w teorii, Prandtl zaproponował prosty model wiążący lepkość turbulentną z ruchem średnim w obszarze TWP.

Załóżmy, że pewna niewielka porcja płynu przemieszcza się „kolektywnie" pod wpływem fluktuacji składowej prędkości normalnej do ściany na odległość równą średnio $l_m (l_m \ll \delta)$ zachowując swoją prędkość poziomą. Takie przemieszczenie spowoduje pojawienie się fluktuacji składowej poziomej równe

$$u' = \bar{u}(y + l_m) - \bar{u}(y) \approx \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} l_m$$

Jeżeli założymy, że $\qquad \upsilon' \simeq u' \quad \Rightarrow \quad \upsilon' \simeq \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} l_m$

to $\qquad -\overline{u'\upsilon'} \simeq l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

Wynika stąd, że kinematyczna lepkość turbulentna jest proporcjonalna do lokalnego gradientu prędkości średniej i kwadratu długości drogi mieszania

$$\nu_T \sim l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$$

Ile wynosi droga mieszania w TWP? Prandtl założył, że (niezbyt daleko od ściany) droga ta rośnie proporcjonalnie do odległości od ściany, czyli $l_m \sim y$. Wynika stąd, że

$$\nu_T \sim y^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$$

Zobaczymy za chwile, że założenie to prowadzi do wniosku o istnieniu obszaru wewnątrz TWP, gdzie profil prędkości średniej opisany jest funkcją logarytmiczną.

# Struktura TWP

W najbliższym sąsiedztwie ściany, turbulencja „zamiera”, a naprężenia styczne wynikają wyłącznie z lepkości molekularnej. Obszar ten nazywamy **subwarstwą laminarną** (SL). W SL prędkość styczna narasta liniowo w odległością, a naprężenia styczne są praktycznie stałe i równe naprężeniom na samej ścianie

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_w \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = (\tau_w / \mu)\, y$$

Powyżej SL lepkość turbulentna szybko rośnie w pewnej odległości od ściany staje się porównywalna, a dalej – o wiele większa niż lepkość molekularna. Zgodnie z hipotezą drogi mieszania, zapiszmy

$$\tau \approx y^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \rho$$

Ponieważ naprężenia zmieniają się z odległością w sposób ciągły to tuż nad SL musi zachodzić przybliżona równość

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{y}$$

Wprowadźmy wielkość (o wymiarze prędkości)

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

oraz bezwymiarową odległość od ściany

$$y^+ = \frac{yV_*}{\nu}$$

Zauważmy, że liniowy rozkład prędkości w wewnątrz SL możemy zapisać wzorem

$$\frac{\bar{u}(y)}{V_*} = \frac{yV_*}{\nu} \equiv y^+$$

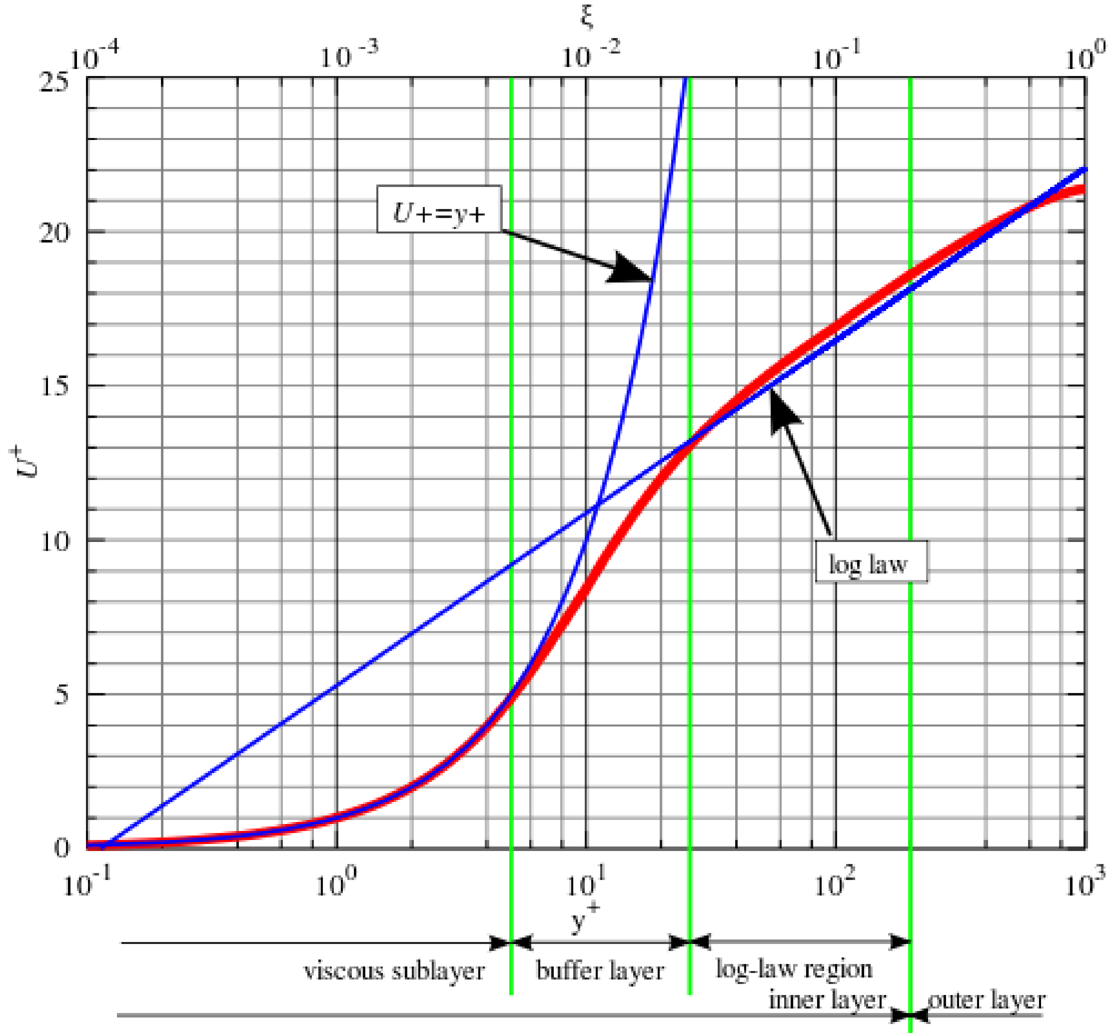
Całkujemy zależność otrzymaną dla prędkości średniej z hipotezy drogi mieszania. Otrzymany profil można zapisać wzorem

$$\frac{\bar{u}(y)}{V_*} = K \ln \frac{yV_*}{\nu} + C$$

Stałe K i C wyznaczono eksperymentalnie. Okazuje się, że dowolna TWP zawiera obszar, w którym profil prędkości bardzo dobrze opisany powyższym wzorem i to dla **uniwersalnych wartości stałych K i C**! . Zwykle, wzór ten zapisywany jest w postaci

$$\frac{\bar{u}(y)}{V_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y V_*}{\nu} + C$$

gdzie $\kappa = 0.41$ (tzw. stała Karmana) i $C \approx 5.25$.

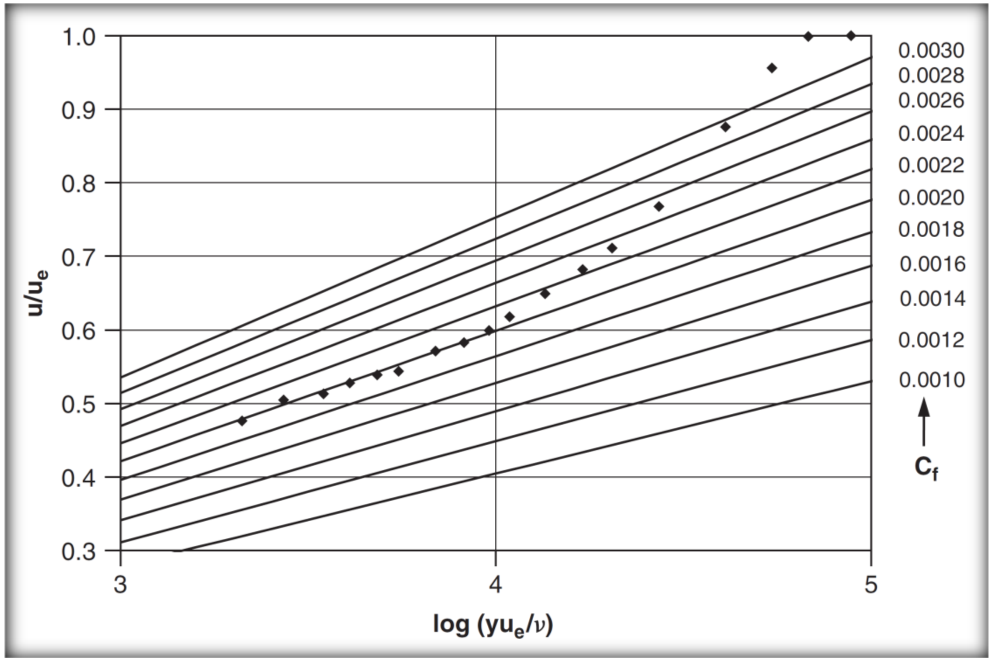



- Subwarstwa laminarna $y^+ \leq 5$
- Warstwa buforowa $5 < y^+ < 30 \div 50$
- Warstwa logarytmiczna $50 < y^+ < 150 \div 200$

Łącznie 15-20% grubości całek TWP, reszta to tzw. **warstwa zewnętrza.**

# Wykorzystanie logarytmicznego prawa ścianki do pośredniego wyznaczania naprężeń na ścianie

Bezpośredni pomiar gradientu prędkości przy samej ścianie – praktycznie niewykonalny (grubość SL to ułamki procenta całej TWP, może być rzędu dziesiątek mikronów).



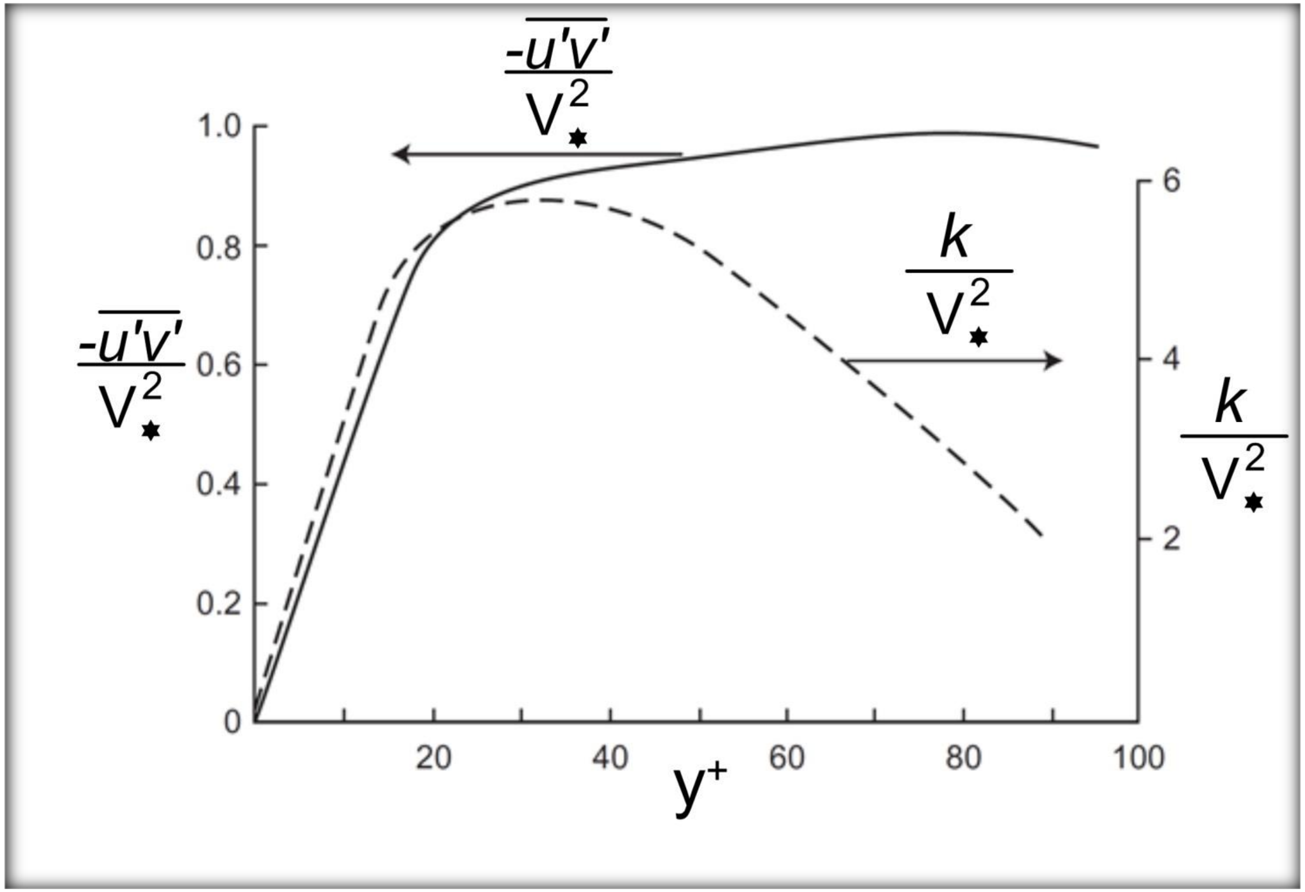

## Metoda pośrednia

$$\frac{\bar{u}}{U} = \frac{V_*}{U}\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{yU}{\nu}\right) + \frac{V_*}{U}\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{V_*}{U}\right) + \frac{V_*}{U}C$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = 2\left(\frac{V_*}{U}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_*}{U} = \sqrt{\tfrac{1}{2}C_f}$$

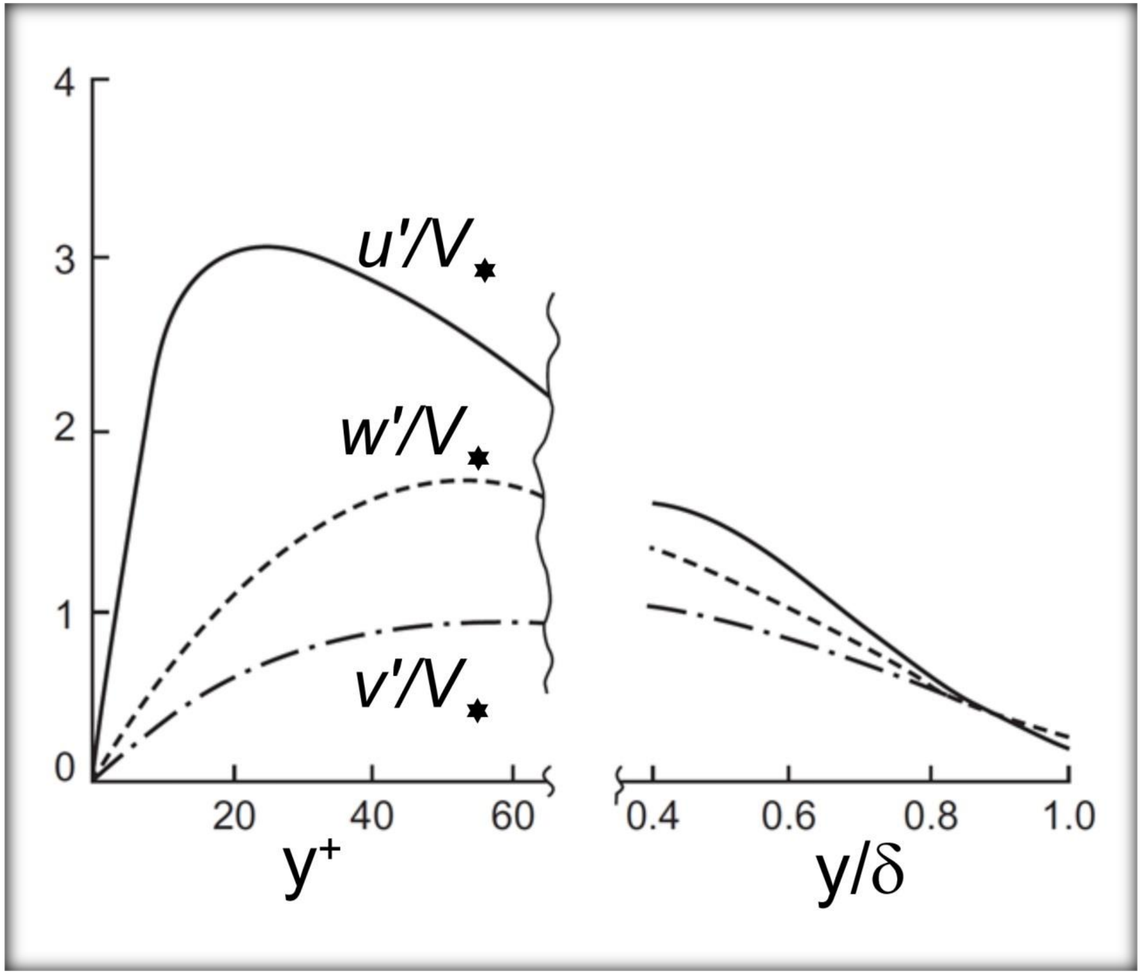
$$\frac{\bar{u}}{U} = \underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}C_f}\,\frac{1}{\kappa}}_{A(C_f)}\ln\left(\frac{yU}{\nu}\right) + \underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}C_f}\left[\frac{1}{\kappa}\ln\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}C_f}\right) + C\right]}_{B(C_f)}$$

# Profil naprężeń turbulentnych i energii turbulentnej w TWP



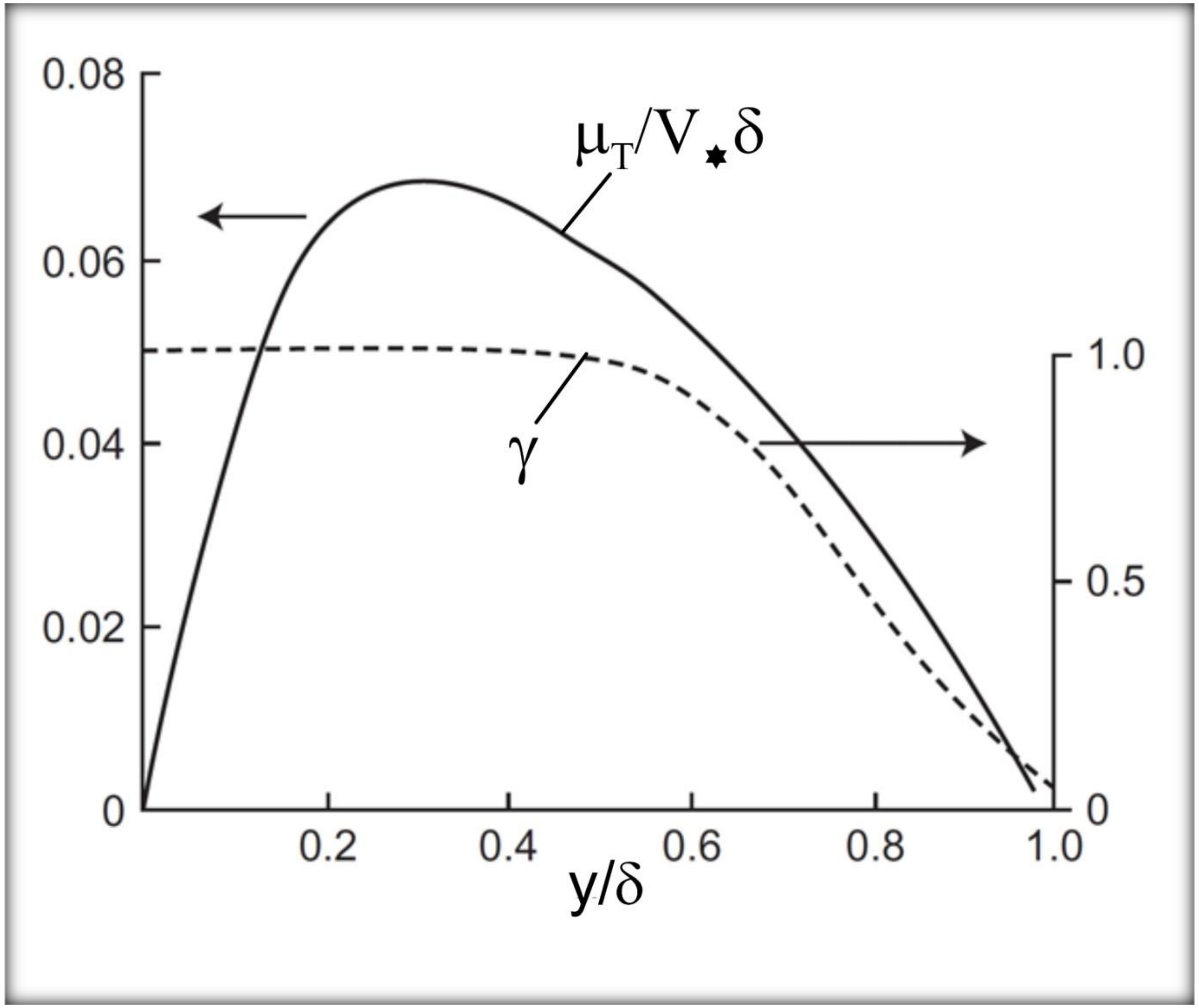

(źródło: E.L. Houghton at al.: Aerodynamics for Engineering Students, 6th Ed., Elsevier Ltd., 2013)

# Profil średniej amplitudy pulsacji prędkości w turbulentnej w TWP




(źródło: E.L. Houghton at al.: Aerodynamics for Engineering Students, 6th Ed., Elsevier Ltd., 2013)

# Profil lepkości turbulentnej i współczynnika intermitencji w turbulentnej w TWP




(źródło: E.L. Houghton at al.: Aerodynamics for Engineering Students, 6th Ed., Elsevier Ltd., 2013)

# TWP na płaskiej płycie

Chociaż prawdziwe powierzchnie nośne nie są z reguły płaskie, wyniki uzyskane dla tego przypadku są dość użyteczne, przynajmniej jako wstępne przybliżenie.

**Wynik 1 – prawo 1/7 (Prandtl).**

Profil prędkości w TWP na płaskiej płycie (zerowy gradient ciśnienia) opisane jest w przybliżeniu wzorem (wyprowadzenie AforES str. 522)

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

**Uwaga:** wzór ten nie obowiązuje w bezpośrednim sąsiedztwie ściany (osobliwość!). Wzór ten daje zupełnie sensowną dokaldność dla zakresu liczb Reynoldsa $10^6 < \mathrm{Re}_x < 10^7$

**Wynik 2:** Naprężenia styczne i lokalny współczynnik tarcia można wyliczyć ze wzorów

$$\tau_w \approx 0.0234 \rho U_\infty^{7/4} (\nu / y)^{1/4} \quad , \quad C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.0468 \left( \frac{\nu}{U_\infty \delta} \right)^{1/4} = \frac{0.0468}{\mathrm{Re}_\delta^{1/4}}$$

**Wynik 3: Tempo wzrostu grubości TWP**

Z równania von Karmana zapisanego dla TWP bez gradientu ciśnienia mamy

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

Przyjmując za prawdziwe prawo 1/7, możemy obliczyć jaką częścią grubości warstwy $\delta$ jest grubość straty pędu $\theta$, a mianowicie

$$\theta = \delta \int_0^1 \tfrac{u}{U_\infty} (1 - \tfrac{u}{U_\infty}) d\,\bar{y} = \delta \int_0^1 \bar{y}^{1/7} (1 - \bar{y}^{1/7}) d\,\bar{y} = \tfrac{7}{72} \delta$$

Zatem

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72C_f}{14} = 0.2406\left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4}$$

Przy założeniu, że w punkcie $x = 0$ TWP ma zerową grubość, otrzymujemy

$$\delta(x) \approx 0.383\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/5} x^{4/5}$$

lub, równoważnie

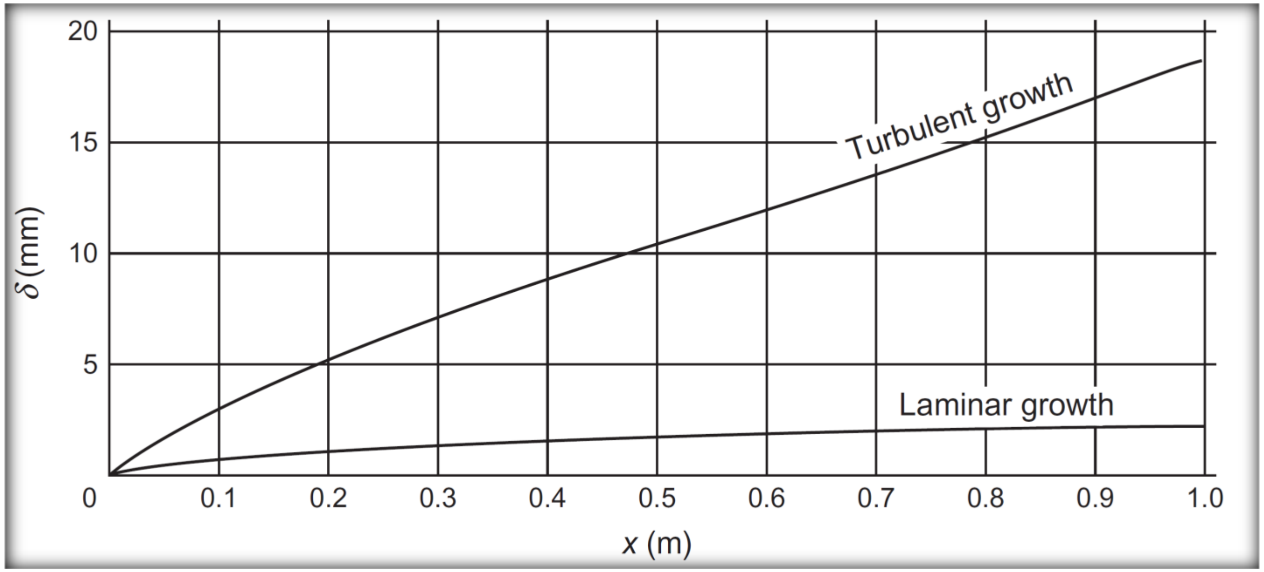
$$\frac{\delta(x)}{x} \approx 0.383\left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{1/5} = \frac{0.383}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$

Posługując się prawem „jednej siódmej” możemy obliczyć również grubość straty wydatku. Wynosi ona

$$\delta_* = 0.125\delta$$

Zauważmy, że współczynnik kształtu $H \approx\sim 1.3$ jest o wiele mniejszy niż w LWP.
**Ostatecznie, otrzymujemy zależności**

$$\frac{\delta_*(x)}{x} = \frac{0.0479}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \quad , \quad \frac{\theta(x)}{x} = \frac{0.0372}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$




**Porównanie tempa przyrostu grubości LWP i TWP na płaskiej płycie** (źródło: E.L. Houghton at al.: Aerodynamics for Engineering Students, 6th Ed., Elsevier Ltd., 2013)

**Wynik 4: Lokalny i całkowity współczynnik oporu tarcia**

Podstawiając wzór dla grubości TWP do uzyskanej wcześniej formuły dla lokalnego współczynnika tarcia otrzymujemy

$$C_f = \frac{0.0595}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$

**Wynika stąd, że naprężenia styczne wzdłuż płyty zmieniają się zgodnie ze wzorem**

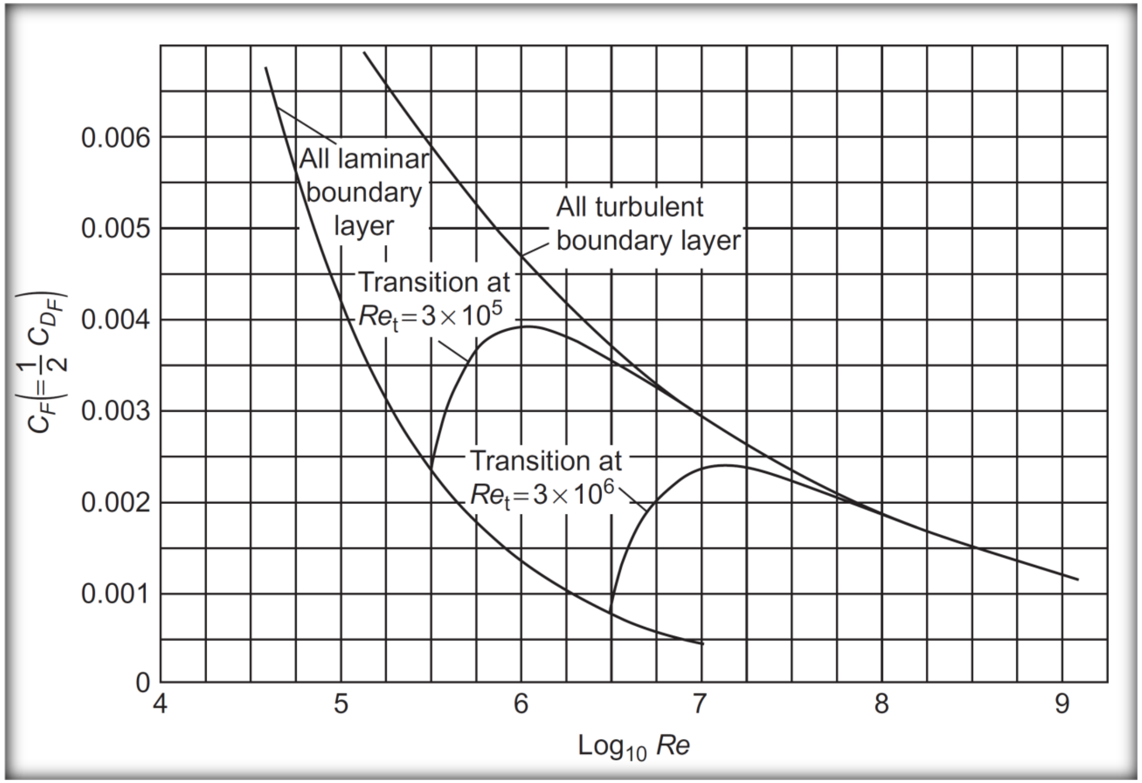
$$\tau_w = 0.0298 \rho \nu^{1/5} U_\infty^{9/5} x^{-1/5}$$

**Całkowity współczynnik tarcia obliczamy następująco**

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L}\int_0^L \tau_w(x)dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} 0.0298 \rho \nu^{1/5} U_\infty^{9/5} \int_0^L x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{0.0596}{L}\frac{\nu^{1/5}}{U_\infty^{1/5}}\frac{5}{4}L^{4/5} = 0.0745\left(\frac{\nu}{U_\infty L}\right)^{1/5} = \frac{0.0745}{\mathrm{Re}_L^{1/5}}$$

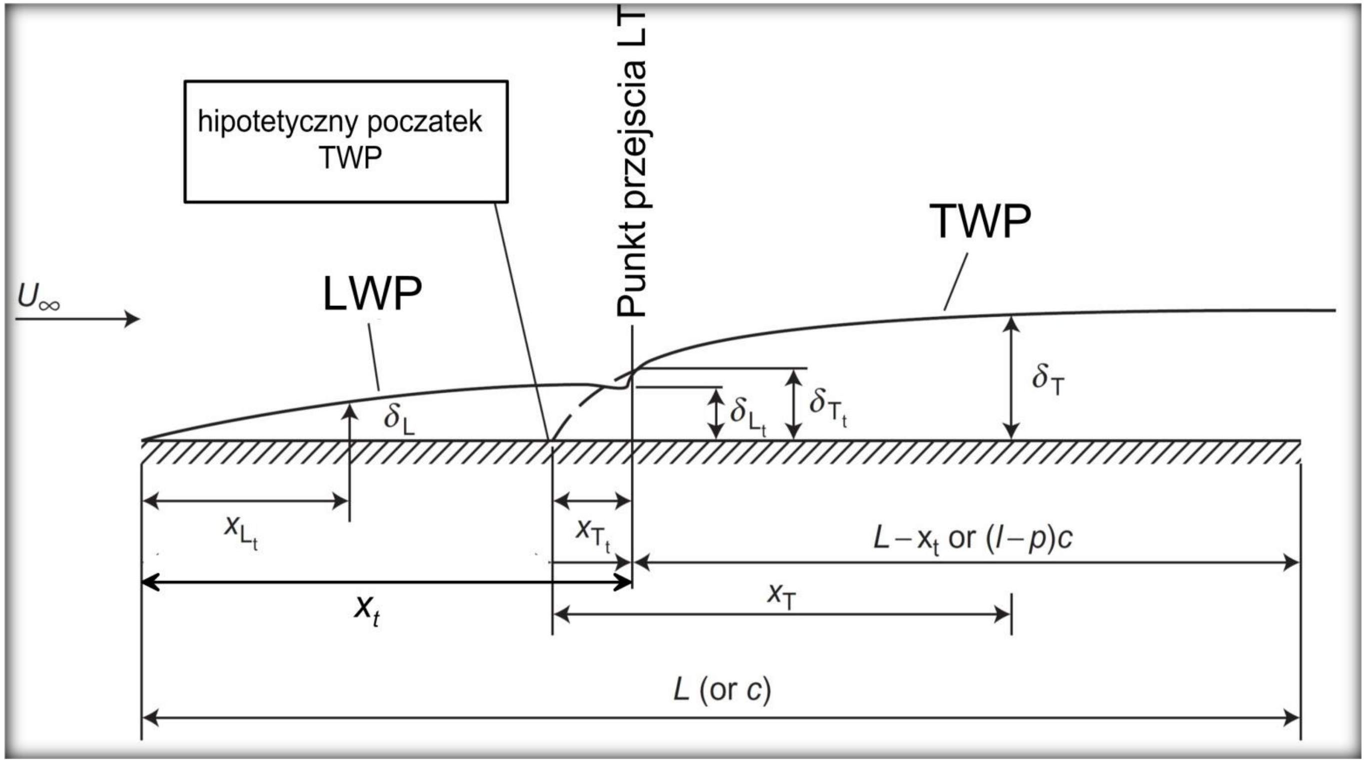
**UWAGA: jest to współczynnik oporu tarcia w przypadku, gdy WP jest turbulentna od samego początku!**




Zależność współczynnik tarcia od lokalnej liczby Reynoldsa (źródło: E.L. Houghton at al.: Aerodynamics for Engineering Students, 6th Ed., Elsevier Ltd., 2013)

**W przypadku profili aerodynamicznych, pewna początkowa część WP jest laminarna. Jeżeli w tej części nie nastąpi oderwanie to opór tarcia jest mniejszy.**

# Opór tarcia – przypadek warstwy laminarnej mieszanego typu




*Warstwa przyścienna z przejściem laminarno-turbulentnym na płaskiej płycie (źródło: (źródło: E.L. Houghton at al.: Aerodynamics for Engineering Students, 6th Ed., Elsevier Ltd., 2013)*

Hipotetyczny początek TWP: $\delta_{T_t} = \dfrac{0.383 x_{T_t}}{\sqrt[5]{(\mathrm{Re}_x)_{T_t}}} = 0.383 \left( \dfrac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/5} x_{T_t}^{4/5} \Rightarrow x_{T_t}$

Odległość od „noska” do hipotetycznego początku TWP: $x_t = \dfrac{\nu}{U_\infty}\mathrm{Re}_t$

Grubość straty pędu w LWP w punkcie $x = x_t$:

$$\theta_{L_t} = 0.646\frac{x_t}{\sqrt{\mathrm{Re}_t}} = 0.646\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/2} x_t^{1/2} = 0.646\frac{\nu}{U_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}_t}$$

Grubość straty pędu TWP w punkcie $x = x_t$: $\theta_{T_t} = 0.037\dfrac{x_{T_t}}{(\mathrm{Re}_x)_{T_t}^{1/5}}$

W punkcie przejścia grubość straty wydatku musi być ciągłą funkcją $x$ ( w przeciwnym razie naprężenia styczne na ścianie w tym punkcie nie byłyby dobrze określone – vide r-nie Karmana z zerowym gradientem ciśnienia). Mamy zatem $\theta_{L_t} = \theta_{T_t}$, czyli

$$0.646\sqrt{\frac{\nu x_t}{U_\infty}} = 0.037\frac{(x_{T_t})^{4/5}\nu^{1/5}}{U^{1/5}} \quad \Rightarrow \quad x_{T_t} = 35.5\frac{\nu}{U_\infty}\mathrm{Re}_t^{5/8}$$

**Efektywna długość TWP to** $L - x_t + x_{T_t}$

Z równania Karmana dla WP z zerowym gradientem ciśnienia wynika, że całkowita siła tarcia na odcinku [a,b] jest równa

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \theta' \;\Rightarrow\; D_f = \int_a^b \tau_w dx = \rho U_\infty^2 [\theta(b) - \theta(a)] = \rho U_\infty^2 \Delta\theta \Big|_{[a,b]}$$

Zauważmy, że zmiana grubości straty wydatku w LWP na odcinku $[0, x_t]$ jest taka sama jak w TWP na odcinku $[x_t - x_{T_t}, x_t]$, zatem **w oby przypadkach opór tarcia jest identyczny**!

W takim razie, opór tarcia całej WP jest taki jak opór TWP na odcinku $[x_t - x_{T_t}, L]$.

Mamy

$$D_f = \tfrac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot 0.0595 \left( \frac{\nu}{U_\infty} \right)^{1/5} 1.25 (L - x_t + x_{T_t})^{4/5}$$

Stąd, całkowity współczynnik opory tarcia to

$$C_{D_f} = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} = 0.0744\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/5} \frac{\left(L - x_t + x_{T_t}\right)^{4/5}}{L} =$$

$$= 0.0744\frac{\nu}{U_\infty L}\left(\frac{U_\infty L}{\nu} - \frac{U_\infty x_t}{\nu} + \frac{U_\infty x_{T_t}}{\nu}\right)^{4/5} =$$

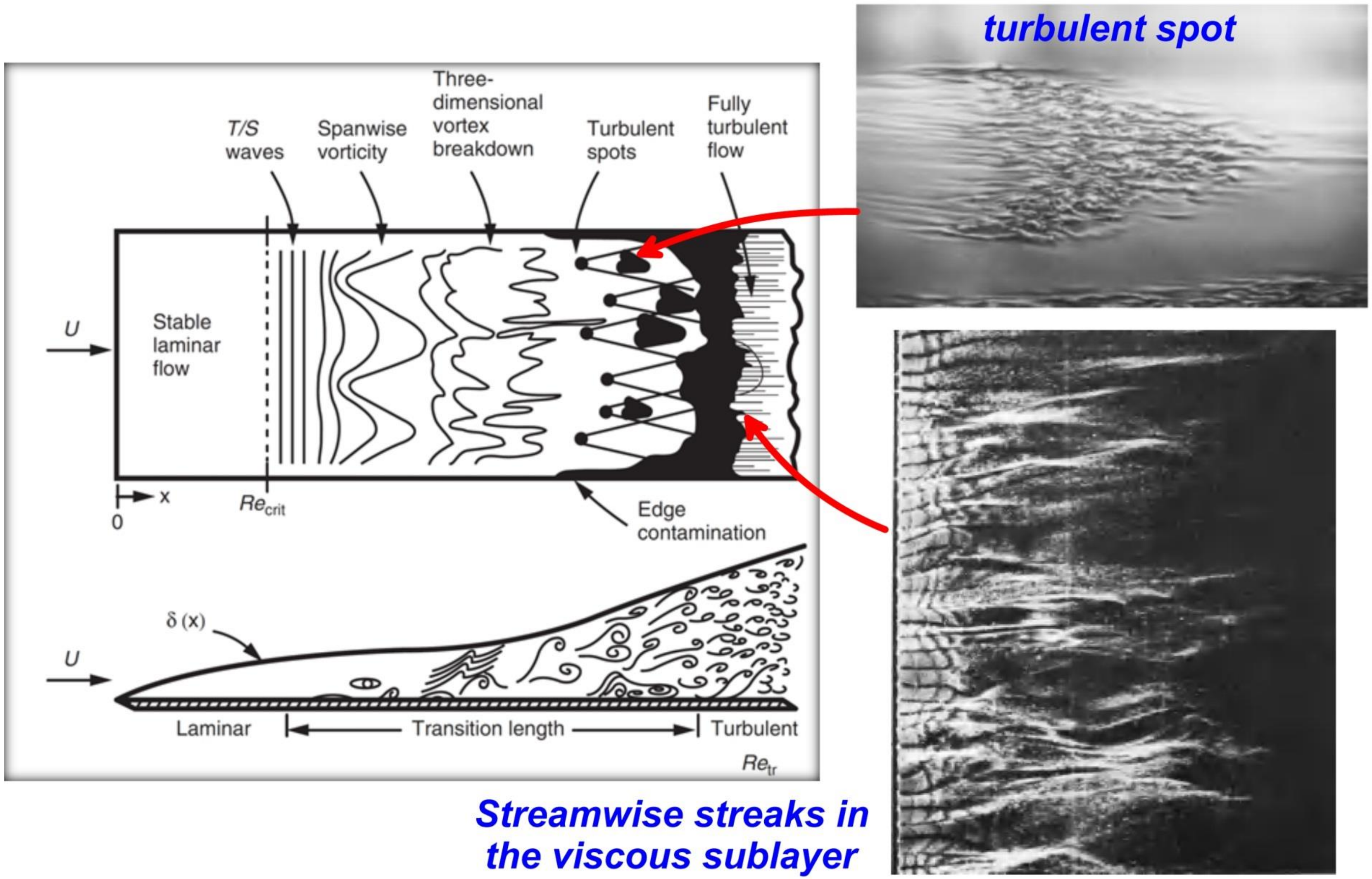
$$= \frac{0.0744}{\mathrm{Re}}\left(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_t + 35.5\,\mathrm{Re}_t^{5/8}\right)^{4/5}$$

**Uwaga:** Otrzymana formuła obowiązuje oczywiście tylko gdy $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_t$. W przeciwnym razie cała warstwa jest LWP i obowiązuje formuła

$$C_{D_f} = \frac{2.586}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

# ZJAWISKO PRZEJŚCIA LAMINARNO-TURBULENTNEGO W WARSTWIE PRZYŚCIENNEJ

## Ogólna struktura obszaru przejścia (przejście naturalne)



## Typy przejścia

1. Przejście naturalne (niski poziom pulsacji prędkości i ciśnienia w przepływie zewnętrznym, gładkie powierzchnie).

2. Przejście typu by-pass (wysoki poziom pulsacji prędkości i ciśnienia w przepływie zewnętrznym, powierzchnie z wadami powierzchniowymi (np. szorstkość, pofalowanie, wady lokalne)

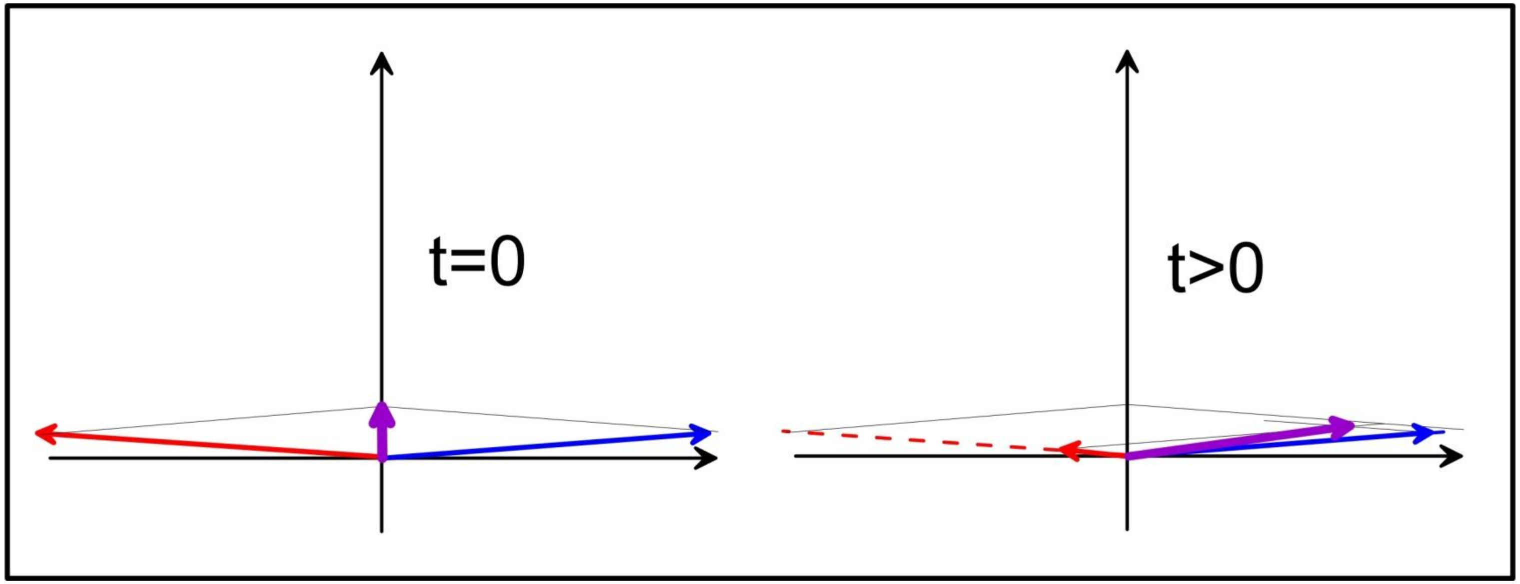
## Mechanizm pierwotnego wzmocnienia małych zaburzeń

1. Modalny – wykładniczy wzrost amplitudy niestabilnych (liniowo) modów pola zaburzeń. Jest to główny mechanizm wzrostu zaburzeń w początkowej fazie przejścia naturalnego.

$$[u', \upsilon', w', p'](t, x, y, z) = \Re\mathfrak{e}\{[A_u, A_\upsilon, A_w, A_p](y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]\}$$

$\omega, \beta \in R \quad , \quad \alpha = \alpha_r + i\alpha_i \in C \Rightarrow$ niestabilność, gdy $\alpha_i < 0$

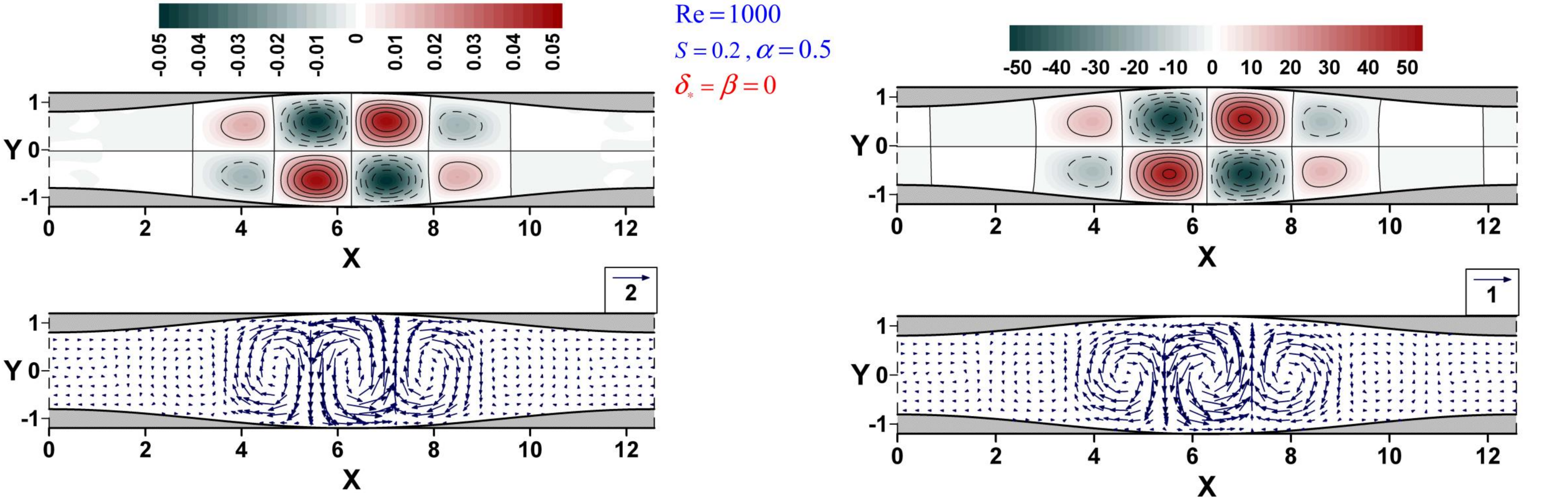
2. Niemodalny (algebraiczny) – wzrost amplitudy zaburzeń wynikający z nie ortogonalności modów własnych. Odgrywa kluczową rolę z pierwszej fazie przejścia typu by-pass.




**Stan początkowy** – pierwotne trójwymiarowe mody (stabilne liniowo!) w formie wzdłużnie zorientowanych wirków (dominuje zaburzenie w płaszczyźnie poprzecznej do głównego kierunku przepływu, czyli $u'$ jest zmniejsza niż $\upsilon'$ i $w'$ ).

**Stan końcowy** – w momencie maksymalnego wzmocnienia pojawia się silna składowa wzdłużna, tj. $u' \gg \upsilon', w'$. Składowa $u'$ podlega silnej modulacji w kierunku $z$ (spanwise) – pojawiają się „streamwise streaks”.

Przykład: algebraiczne wzmocnienie zaburzeń w kanale z poprzecznym pofalowaniem

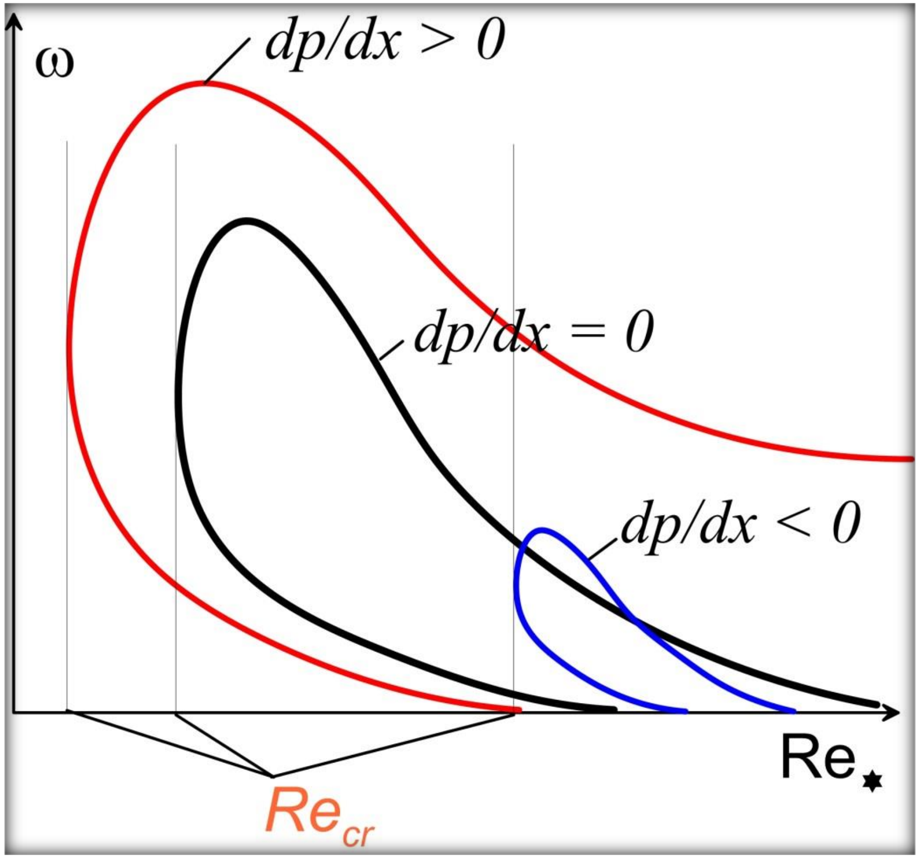



t = 0

t = 96

Wzdłużna składowa pola zaburzeń wzrosła ok. 1000 razy!

# Analiza stabilności liniowej dwuwymiarowej warstwy laminarnej




1. Mod krytyczny – liczba Reynoldsa (oparta np. na grub. straty wydatku $\delta_*$) odpowiadająca stanowi stabilności neutralnej jest najmniejsza).
2. Obszar stateczności – wnętrze pętli utworzonej przez linię neutralnej stabilności.
3. Dla $dp/dx \leq 0$ i $\mathrm{Re}_* \to \infty$ (czyli w granicy znikającej lepkości) obie gałęzie linii neutralnej dążą asymptotycznie do osi poziomej – obszar niestateczności kurczy się!
Nie jest tak jeśli $dp/dx > 0$ bowiem wówczas profil prędkości w warstwie ma punkt przegięcia i dla dowolnie wielkich liczb Reynoldsa pozostaje ( w pewnym zakresie częstości $\omega$) niestateczny (kryterium Fjortofta)

4. Zaburzenia mają charakter fal biegnących (fale Tollmiena-Schlichtinga). W warstwach samopodobnych (Falker-Skan) zakres liczb falowych odpowiadający najbardziej niestabilnym falom TS to w przybliżeniu [0.25-0.35] (jednostką długości jest grubość straty wydatku), co odpowiada długości fal TS ok. 6-7 grubości $\delta_{99}$.

5. Stabilność fal TS silnie zależy od gradientu ciśnienia: dodatni gradient ciśnienia destabilizuje fale TS (i – generalnie – prowadzi do wcześniejszego przejścia), ujemny – odwrotnie.

Przykładowo: krytyczna liczba Reynoldsa dla

- warstwy Blasiusa (płaska płyta, zerowy gradient ciśnienia) to $\mathrm{Re}_{*,cr} \approx 520$.
- warstwy Falknera-Skan z parametrem $m = -0.075$ (dodatni gradient ciśnienia odpowiadający opływowi górnej powierzchni płaskiej płytki ustawionej pod dodatnim kątem natarcia ok. 14.6 stopnia) to $\mathrm{Re}_{*,cr} \approx 130$
- warstwy Falknera-Skan z parametrem $m = 0.075$ (ujemny gradient ciśnienia odpowiadający opływowi górnej powierzchni płaskiej płytki ustawionej pod ujemnym kątem natarcia ok. 12.5 stopnia) to $\mathrm{Re}_{*,cr} \approx 2000$

**Przypomnienie:** dla warstwy Blasiusa

$$\mathrm{Re}_* = \frac{U_\infty \delta_*}{\nu} \approx 1.721 \frac{U_\infty}{\nu} \frac{\sqrt{\nu x}}{\sqrt{U_\infty}} = 1.721 \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}} = 1.721 \sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

czyli $\mathrm{Re}_x \approx 0.338 \, \mathrm{Re}_*^2$ Teoretycznie zatem, $\mathrm{Re}_{x,cr} \approx 91300$.

**Faktyczne miejsce przejścia (w wariancie naturalnym) – o wiele dalej ($\mathrm{Re}_t$ rzędu setek tysięcy i więcej). Wynika to m.in. z dość powolnego (w pierwszej fazie) narastania amplitudy fal T-S wzdłuż LWP. W pewnym momencie – wskutek wtórnej niestabilności – zaburzenia stają się silnie trójwymiarowe. Dalszy proces ma charakter nagłej „erupcji" chaosu w przepływie (wzmocnienie zaburzeń 3D jest bardzo silne) – niewielki dystans dalej mamy już warstwę turbulentną. Na krótkim odcinku następuje znaczące pogrubienie warstwy – grubość straty pędu w obszarze przejścia zmienia się stopniowo, ale współczynnik kształtu gwałtownie spada.**

**Położenie przejścia zależy istotnie od gradientu ciśnienia, jakości powierzchni oraz poziomu zaburzeń „absorbowanych" przez warstwę z przepływu zewnętrznego (poziom turbulencji, zaburzenia akustyczne).**

Inżynierskie (co nie znaczy, że prymitywne!) metody określania „punktu" przejścia polega na założeniu, że jego położenie wynika ze „skumulowanego" efektu wzmocnienia dwuwymiarowych fal T-S. Lokalny współczynnik wzmocnienia wynika z analizy liniowej stabilności przepływu z lokalnym profilem prędkości. Uznaje się, że przejście ma miejsce gdy skumulowane wzmocnienie najsilniej niestabilnych modów T-S przekroczy czynnik równy $e^N$, gdzie wykładnik N określa się na podstawie doświadczenia (również symulacji numerycznych). **Jest to tzw. metoda „e do N-tej".** We współczesnej wersji jest ona zaimplementowana w popularnym programie XFOIL.