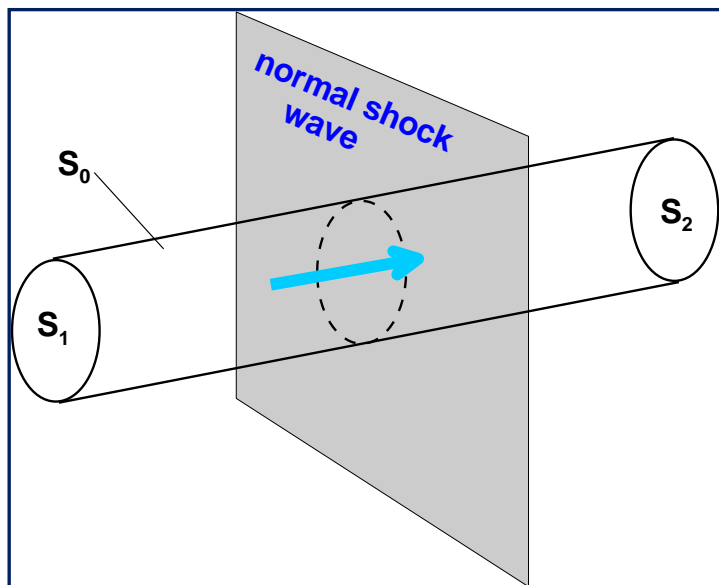


## **WYKŁAD 14**

# **PROSTOPADŁA FALA UDERZENIOWA**

## PROSTOPADŁA FALA UDERZENIOWA. ADIABATA HUGONIOTA.



Gazodynamika dopuszcza istnienie silnych nieciągłości w przepływach gazu. Najprostszym przypadkiem takiej nieciągłości w przepływie jest **prostopadła fala uderzeniowa** (PFU).

Rozważmy obszar kontrolny  $\Omega$  ograniczony powierzchnią brzegową  $\partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2$

**Równania zachowania dla przepływu ustalonego przez PFU:**

(1) masa 
$$\int_{\partial\Omega} \rho v_n ds = 0 \Rightarrow \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$
  
*1D*

(2) pęd 
$$\int_{\partial\Omega} (\rho v_n v + pn) ds = 0 \Rightarrow \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2$$
  
*1D*

(3) energia 
$$\frac{\kappa p_1}{(\kappa - 1)\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\kappa p_2}{(\kappa - 1)\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$$

## Plan działania:

1. Opisać proces termodynamiczny zachodzący podczas przepływu przez PFU.
2. Znaleźć związki pomiędzy parametrami gazodynamicznymi przed i za PFU.

## Zaczynamy ...

Podzielmy (2) przez (1) ...

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1 u_1} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2 u_2} \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} \quad (4)$$

Przepiszmy równanie (3) w postaci

$$(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad (5)$$

Stosując (4) równanie (5) może być zapisane następująco

$$\left( \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} \right) (u_1 + u_2) = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad (6)$$

Lewa strona równania (6) może być przekształcona następująco (korzystamy w równania zachowania masy (1) ) ...

$$LHS_{(6)} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho_2 u_2} u_1 + \frac{p_2}{\rho_2 u_2} u_2}_{=\rho_1 u_1} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} u_1 - \underbrace{\frac{p_1}{\rho_1 u_1} u_2}_{=\rho_2 u_2} = \frac{p_2}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2}$$

Równanie (6) przyjmuje postać

$$\frac{p_2}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2} = \frac{2\kappa}{\kappa-1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad (7)$$

Mnożymy równanie (7) przez  $\rho_1/p_1$  i otrzymujemy związek pomiędzy wielkościami  $\rho_1/\rho_2$  i  $p_2/p_1$  ....

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}} \quad (8)$$

Otrzymaliśmy formułę opisującą proces termodynamiczny, któremu podlega gaz przepływający przez PFU! Formuła ta nosi nazwę **adiabaty Hugoniota**.

**Otrzymana formuła różni się od formuły procesu izentropowego (zwanego adiabatą Poissona).** Przyjrzyjmy się temu bliżej ...

Zauważmy, że dla  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} > 1$  funkcja (8) ma **asymptotę pionową**. Wynika z tego, że podczas przechodzenia przez PFU gęstość gazu nie może wzrosnąć bardziej niż  $\frac{\kappa+1}{\kappa-1}$  razy. Dla  $\kappa = 1.4$  (gaz dwuatomowy) **maksymalna wartość stosunku** to  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6$ .

Oznaczmy  $y = p_2/p_1$  ,  $x = \rho_2/\rho_1$  ,  $\alpha = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$

Formuła (8) przyjmuje postać

$$y(x) = \frac{\alpha x - 1}{\alpha - x}$$

Obliczmy pierwszą pochodną

$$y'(x) = \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{(\alpha - x)^2} \Rightarrow y'_{Hugoniot}(1) = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \kappa$$

Dla przepływu izentropowego mamy  $y(x) = x^\kappa$ , zatem

$$y'(x) = \kappa x^{\kappa-1} \Rightarrow y'_{Poisson}(1) = \kappa$$

Ponadto

$$y''_{Hugoniot}(x) = \frac{2(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{(\alpha - x)^3} \Rightarrow y''_{Hugoniot}(1) = \kappa(\kappa - 1)$$

$$y''_{isentropic}(x) = \kappa(\kappa - 1)x^{\kappa-2} \Rightarrow y''_{isentropic}(1) = \kappa(\kappa - 1)$$

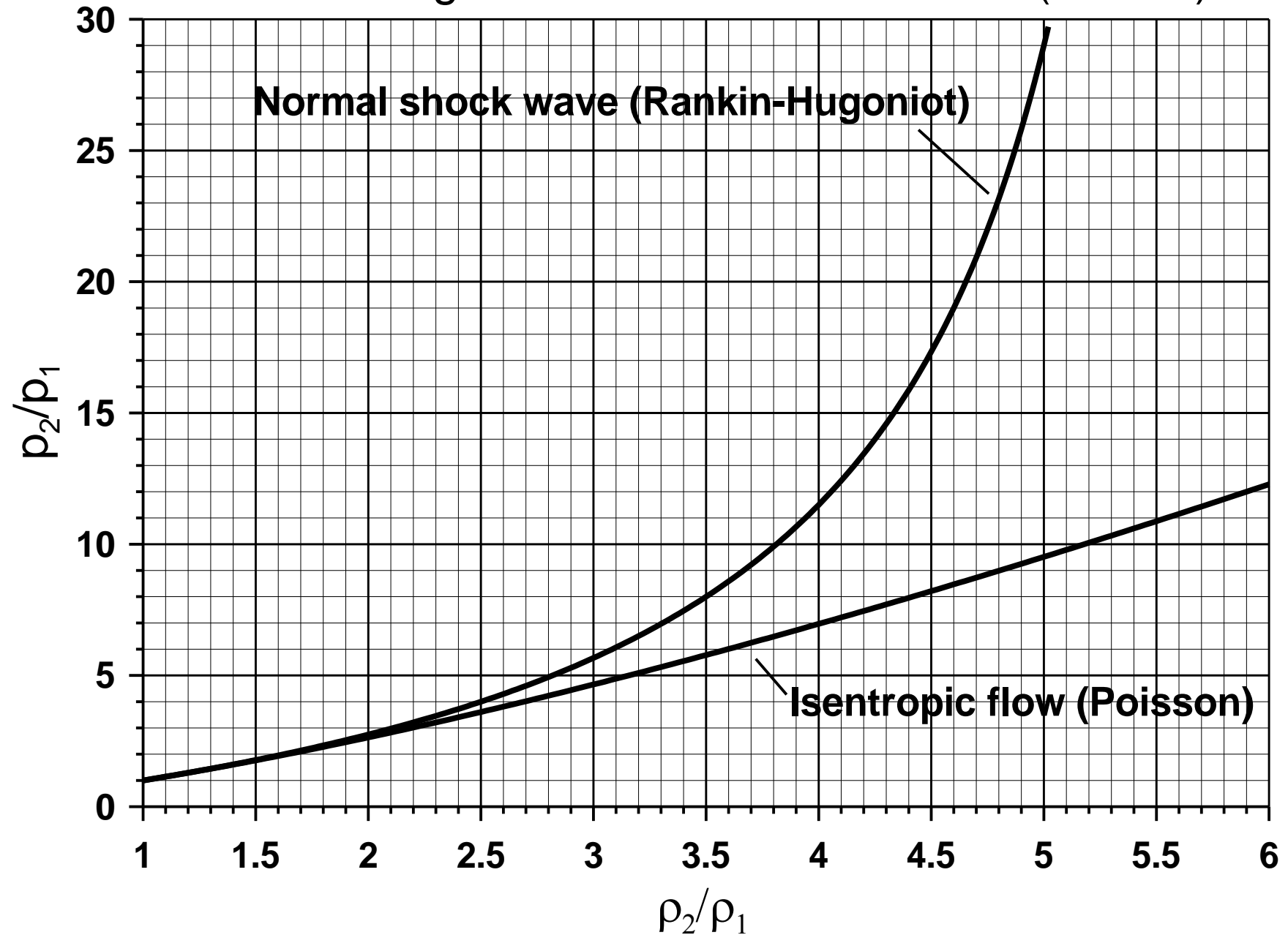
Widzimy, że **linie opisujące adiabaty Hugoniota (dla PFU) i Poissona (proces izentropowy) są w punkcie  $x = 1$  ściśle styczne.**

Z fizycznego punktu widzenia oznacza to, że słabe fale uderzeniowe są prawie izentropowe. Istotnie, z własności ścisłej styczności adiabat wynika, że

$$\left. \frac{p_2}{p_1} \right|_{Hugoniot} - \left. \frac{p_2}{p_1} \right|_{isentropic} = C \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)^3 + o[(\rho_2/\rho_1)^3]$$

gdzie  $C$  jest pewną stałą. W szczególności, dla  $1 \leq \rho_2/\rho_1 < 2$  adiabaty Hugoniota i Poissona są niemal nierozróżnialne (vide obrazek).

# Rankin-Hugoniot and Poisson adiabats ( $\kappa = 1.4$ )



## ENTROPIA I ZWIĄZKI GAZODYNAMICZNE DLA PFU

Z 1-szej Zasady Termodynamiki mamy

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{1}{T} \left( di - \frac{dp}{\rho} \right) = c_p \frac{dT}{T} - \frac{dp}{T\rho} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Z równania stanu (Clapeyrona)  $p = \rho RT$  wynika, że

$$\ln p = \ln \rho + \ln T + const \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}$$

i różniczka entropii właściwej może być zapisana w postaci

$$ds = c_p \left( \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \right) - R \frac{dp}{p} = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$s = c_v \ln p - c_p \ln \rho + const = c_v \ln(p/\rho^\kappa) + const$$

$= \kappa c_v$



Z otrzymanej formuły wynika wzór opisujący zmianę entropii pomiędzy dwoma stanami termodynamicznymi gazu, a mianowicie

$$\frac{\Delta s}{c_v} \equiv \frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left(\frac{p_2}{\rho_2^\kappa}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{\rho_1^\kappa}\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \ln\left(\frac{\rho_2^\kappa}{\rho_1^\kappa}\right)$$

Zauważmy, że dla adiabaty Hugoniota ma miejsce nierówność

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} \Big|_{\text{Hugoniot}} < \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\kappa \Rightarrow \Delta s < 0$$

Wynika stąd, że **fala uderzeniowa, która prowadziłaby do spadku gęstości i ciśnienia (fala rozrzedzeniowa) przeczy 2-giej Zasadzie Termodynamiki.**

Wnioskujemy, że w **przyrodzie istnieją wyłącznie zgęszczeniowe (i sprężające gaz) fale uderzeniowe.**

$$\frac{p_2}{p_1} \Big|_{\text{Hugoniot}} > \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\kappa > 1 \Leftrightarrow \Delta s > 0$$

Zobaczmy co z tego dalej wynika ...

Zauważmy, że skoro  $\left. \frac{\rho_2}{\rho_1} \right|_{PFU} > 1$  to z równania zachowania masy mamy

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow u_2 = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-1} u_1 \Rightarrow u_2 < u_1$$

Z równania energii wynika dalej, że

$$T_2 - T_1 = (u_1^2 - u_2^2) / 2c_p > 0 \Rightarrow T_2 > T_1$$

**czyli gaz po przekroczeniu fali uderzeniowej ogrzewa się.**

**Pokażemy, że przepływ przed falą uderzeniową jest (w układzie odniesienia związanym z falą) zawsze naddźwiękowy, a za PFU – poddźwiękowy.**

W tym celu zapiszmy równanie energii w następującej postaci

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} = \left( \frac{1}{2}u^2 + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} \right)_{M=1} \equiv \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} a_*^2$$

Pisząc to równanie w punktach – odpowiednio – przed i za PFU otrzymujemy równości

$$\frac{1}{2}u_1 + \frac{\kappa p_1}{(\kappa - 1)u_1\rho_1} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} \frac{a_*^2}{u_1}$$

$$\frac{1}{2}u_2 + \frac{\kappa p_2}{(\kappa - 1)u_2\rho_2} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} \frac{a_*^2}{u_2}$$

Następnie odejmujemy je stronami ....

$$u_1 - u_2 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \underbrace{\left( \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} \right)}_{= u_2 - u_1 \text{ (Równ.4)}} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left( \frac{a_*^2}{u_1} - \frac{a_*^2}{u_2} \right)$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy **związek Prandtla dla PFU**

$$u_2 - u_1 = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} a_*^2 \quad \text{and} \quad u_2 \neq u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 u_2 = a_*^2$$

który implikuje, że

$$u_1 > a_* \quad , \quad u_2 < a_*$$

## Co z liczbami Macha?

Równanie energii

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} a_*^2$$

dzielimy przez kwadrat prędkości gazu i otrzymujemy równość

$$1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M^2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{a_*^2}{u^2}$$

Po prostych przekształceniach mamy

$$\left( \frac{u}{a_*} \right)^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1 + \frac{2}{M^2}}$$

W powyższej równości wynika, że

$$u_1 > a_* \Rightarrow M_1 > 1, \quad u_2 < a_* \Rightarrow M_2 < 1$$

Zatem, przepływ przed PFU jest naddźwiękowy, a za PFU – poddźwiękowy.

Wielkość  $\lambda = \frac{u}{a_*}$  zwana jest współczynnikiem prędkości. W przeciwieństwie do liczby

Macha, współczynnik prędkości przyjmuje wartości z przedziału ograniczonego, a mianowicie

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \lambda_1 = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \quad , \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \lambda_2 = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$$

Liczba Macha  $M_2$  (za PFU) może być wyrażona jako funkcja liczby Macha  $M_1$  (przed PFU). Wykorzystując **związek Prandtla**, możemy napisać

$$\frac{u_1}{a_*} \frac{u_2}{a_*} = 1 \Rightarrow \frac{\kappa+1}{\sqrt{\kappa-1 + \frac{2}{M_1^2}}} \frac{\kappa+1}{\sqrt{\kappa-1 + \frac{2}{M_2^2}}} = 1$$

skąd wynika, że

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\kappa-1)M_1^2}{2\kappa M_1^2 - \kappa + 1}} < 1$$

Podobnie, można wyrazić jako funkcje liczby Macha przez PFU inne stosunki wielkości gazodynamicznych. Np. stosunek gęstości wynika z równania zachowania masy

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1) = \frac{u_1}{u_2}(M_1) = \frac{M_1}{M_2(M_1)} \frac{a_1}{a_2}(M_1) = \frac{M_1}{M_2(M_1)} \left(\frac{a}{a_0}\right)_{iz.} (M_1) \left(\frac{a}{a_0}\right)_{iz.}^{-1} [M_2(M_1)] > 1$$

W celu obliczenia stosunku ciśnień (jako funkcji  $M_1$ ) przekształcimy równanie pędu w następujący sposób

$$p + \rho u^2 = p \left( 1 + \frac{u^2}{p/\rho} \right) = p \left( 1 + \frac{\kappa u^2}{a^2} \right) = p(1 + \kappa M^2) = const$$

Stosując otrzymaną równość w punktach przed i za PFU otrzymujemy związek

$$\frac{p_2}{p_1}(M_1) = \frac{1 + \kappa M_1^2}{1 + \kappa M_2^2(M_1)} > 1$$

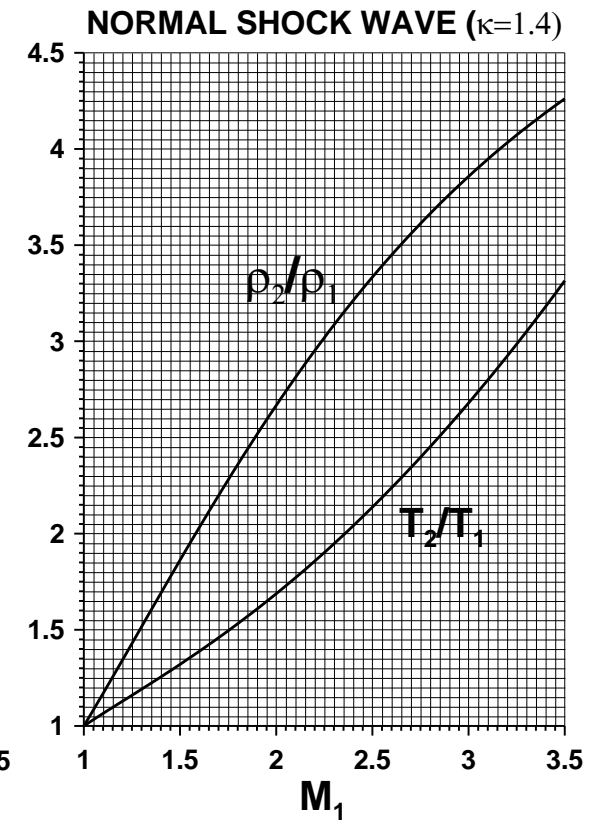
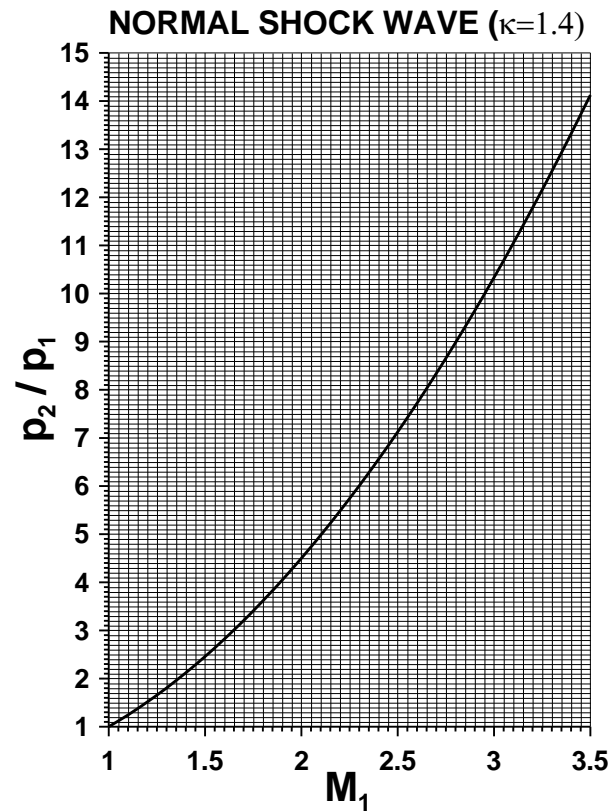
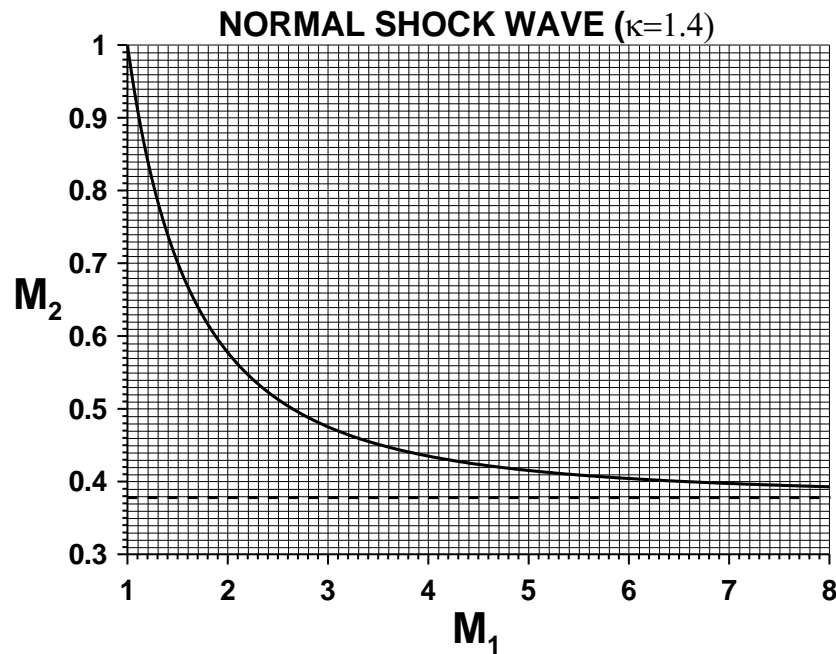
Przepływ przez falę uderzeniową jest (z założenia) adiabatyczny, zatem temperatura całkowita  $T_0$  nie ulega zmianie (formalnie  $T_{01} = T_{02} \equiv T_0$ ). Mamy zatem

$$\frac{T_2}{T_1}(M_1) = \frac{(T/T_0)(M_2)}{(T/T_0)[M_2(M_1)]} > 1$$

gdzie stosunek  $T/T_0$  wyraża wzór wyprowadzony z równania energii (vide Wykład nr 13)

$$\frac{T}{T_0}(M) = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

Otrzymane zależności przedstawiają poniższe wykresy ...



Na koniec rozważmy zmiany ciśnienia całkowitego (spiętrzenia) wywołane obecnością PFU. Rozważmy proces opisany schematem ...

$$p_{01} \xrightarrow{\text{izentropowe rozprędzanie}} p_1 \xrightarrow{\text{PFU}} p_2 \xrightarrow{\text{izentropowe spowolnienie}} p_{02} < p_{01}$$

Pokażemy, że po przejściu gazu przez falę uderzeniową ciśnienie całkowite maleje.



Uzasadnienie tego stwierdzenia przebiega następująco.

Wiemy, że entropia gazu na fali uderzeniowej wzrasta. Wyprowadzona wcześniej formuła dla zmian entropii może być zapisana dla parametrów ściętrzenia, a mianowicie

$$0 < \frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln(p_{02}/p_{01}) - \kappa \ln(\rho_{02}/\rho_{01})$$

Ponieważ temperatura ściętrzenia (całkowita) nie ulega zmianie, to

$$T_{01} = T_{02} \equiv T_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

*równanie Clapeyrona*

Zatem

$$0 < \frac{\Delta s}{c_v} = (1 - \kappa) \ln(p_{02}/p_{01}) \Rightarrow p_{02}/p_{01} < 1.$$

