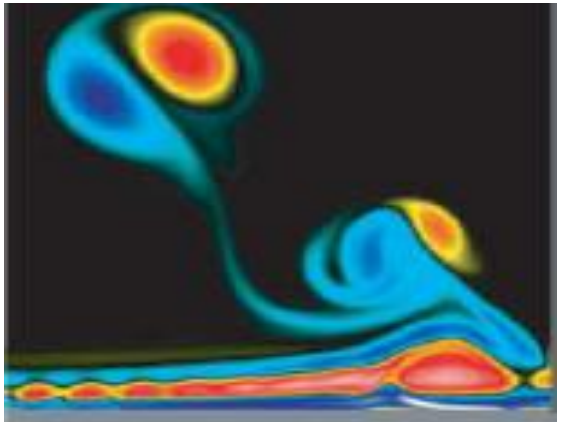
WYKŁAD 10
RÓWNANIE NAVIERA – STOKESA



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

"Gallery of Fluid Motion"-M. Samimy, K.S. Breuer

Wyprowadzenie Równanie Ruchu dla Płynu Newtona

Wychodzimy z równania Cauchy'ego. Przypomnijmy to równanie dla składowych

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho F_k + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

i tensor naprężenia dla płynu Newtona

$$T_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \beta\,\delta_{ik}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)$$

Wstawmy definicję tensora do równania Cauchy'go. Dostaniemy wtedy :

$$\rho\frac{dv_k}{dt} = \rho F_k + \mu\Delta v_k + (\mu+\beta)\frac{\partial}{\partial x_k}(\operatorname{div}\vec{v})$$

Dla gazu, którego cząsteczki mają właściwości zderzeniowe kulek sprężystych, suma lepkości dynamicznej i objętościowej jest równa:

$$\boxed{\mu+\beta=\frac{\mu}{3}}$$

Dla gazu o niesymetrycznych własnościach zderzeniowych:

$$\boxed{\mu+\beta=\frac{\mu}{3}+\mu'}$$

druga lepkość

RÓWNANIA NAVIERA - STOKESA

Biorąc pod uwagę powyższe informacje dostaniemy trzy równania ruchu dla płynu Newtona zwane równaniami Naviera – Stokesa.

Postać równań dla składowych k=1,2,3:

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho F_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \Delta v_k + \left(\frac{\mu}{3} + \mu' \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

Forma wektorowa:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \underbrace{\mu \Delta \vec{v} + \left(\frac{\mu}{3} + \mu' \right) \operatorname{grad} \operatorname{diw} \vec{v}}$$

przyspieszenie

pole sił zewnętrznych

siły wynikające z ciśnienia

siły wynikające z lepkości

Równania Naviera - Stokesa są równaniami ruchu. Wiążą one pole przyspieszeń z polem sił zewnętrznych, polem sił ciśnieniowych i siłami wynikającymi z lepkości.

Zawierają trzy pola: wektorowe pole prędkości i dwa pola skalarne
- ciśnienia i masy właściwej, czyli pięć niewiadomych:

Aby znaleźć rozwiązania równań Naviera – Stokesa trzeba dołączyć:

- **Równanie ciągłości**
- **Równanie energii wraz z określeniem energii wewnętrznej i wektora strumienia ciepła oraz pomocnicze związki opisujące lepkości, itp.,**
- **Warunek początkowy na pole prędkości**
- **Prędkość brzegową, określoną tak, by dawała zbilansowaną masę.**

Trudności wynikające przy rozwiązywaniu Równań Naviera - Stokesa

1

Równanie N - S jest równaniem drugiego rzędu – potrzeba więcej danych granicznych niż dla równania Eulera

2

Równanie N - S jest równaniem o niewielkim współczynniku przy najwyższych pochodnych (lepkość μ jest dla wielu ważnych przypadków niewielka). Powoduje to niestateczność rozwiązania, czyli istotną zmianę rozwiązania przy niewielkiej zmianie danych

3

Aby uzyskać dobrą aproksymację rozwiązania równania N - S przy użyciu metod numerycznych trzeba wprowadzić wiele punktów dyskretyzacji

UPROSZCZENIE RÓWNANIA NAVIERA – STOKESA DLA CIECZY

Gęstość jest stała – $\rho = const$

Równanie ciągłości

$$\boxed{\mathrm{diw}\,\vec{v} = 0}$$

Równanie N - S

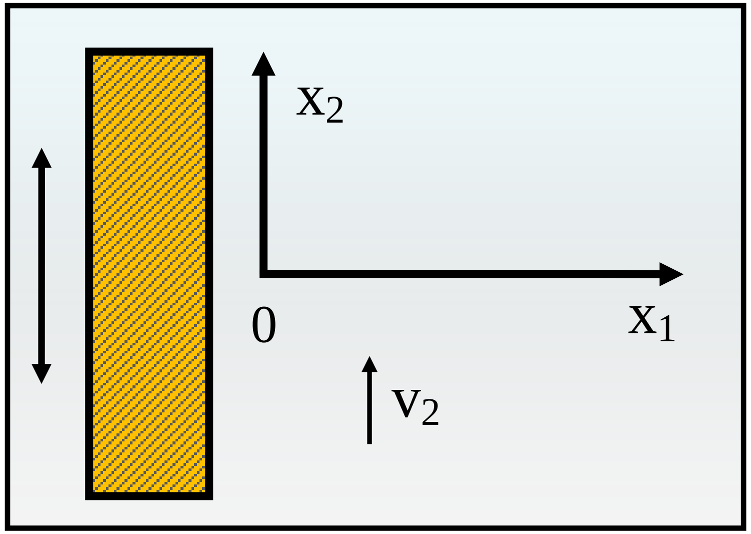
$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \mathrm{grad}\, p + \mu \Delta \vec{v}}$$

+ warunki początkowe i brzegowe.

Dla szczególnie prostych kształtów obszaru ruchu i przy wielu założeniach dotyczących kinematyki równania N – S można rozwiązać analitycznie

PRZYKŁAD 1

Drgająca wzdłużnie płyta w nieograniczonym zbiorniku wypełnionym cieczą. Płyta wykonuje ruch w kierunku $0x_2$.



Pole prędkości ma jedyną niezerową składową: $v_2 = v_2(t, x_1)$.

Prędkość v_2 nie zależy od x_2, bo wobec nieograniczoności płyty i zbiornika, dla każdego x_2 ruch jest taki sam.

Równanie ciągłości:

$$\mathrm{diw}\,\vec{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad \text{bo} \quad v_2 = v_2(t, x_1)$$

Równanie ruchu w kierunku $0x_2$:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \underbrace{v_1}_{=0} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}_{=0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2$$

Po rozpisaniu laplasjanu i uproszczeniu otrzymamy:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2{}_1}$$

Określmy ciśnienie. Z równania ruchu dla kierunku $0x_1$ wobec znikania v_1 pozostaje

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}$$

Stąd $p = f(x_2)$ **– nie zależy od** x_1.

Dla wielkich x_1 **ciśnienie jest takie samo jak na powierzchni płyty. Ale dostatecznie daleko od miejsca wzbudzenia ruchu prędkość znika, a ciśnienie jest stałe:**

$$f(x_2) = \text{const} \;\Rightarrow p = \text{const}$$

Równanie ruchu po uproszczeniu ma postać: $$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2{}_1}$$

Jeśli płyta drga harmonicznie to wtedy $$v_2\big|_{x_1=0} = A\, e^{i\omega t}$$

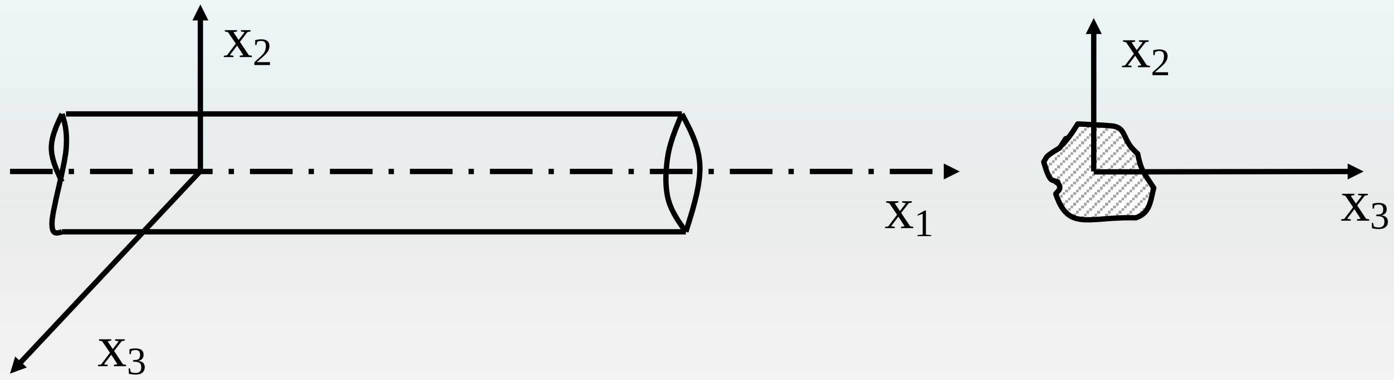
a daleko od płyty ruch zanika i $$v_2\big|_{x_1\to\infty} = 0$$

Rozwiązaniem zadania jest:

$$\boxed{v_2(t, x_1) = Be^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}x_1} e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

PRZYKŁAD 2

Ruch ustalony w nieskończenie długim przewodzie o niezmiennym przekroju.



Rura ma nieograniczoną długość, więc dla każdego x_1 ruch jest taki sam a pole prędkości nie zależy od x_1.

Załóżmy też, że $v_2 = v_3 = 0 \;\; \mathrm{i} \;\; v_1 = v_1(x_2, x_3)$

To równanie ruchu dla kierunku $0x_1$ ma postać:

$$\rho\left[\underset{\overset{\uparrow}{0}}{\frac{\partial v_1}{\partial t}} + v_1 \underset{\overset{\uparrow}{0}}{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}} + \underset{\overset{\uparrow}{0}}{v_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \underset{\overset{\uparrow}{0}}{v_3} \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)$$

Dla pozostałych kierunków wobec znikania v_2 i v_3 mamy:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \;\Rightarrow\; p = p(x_1)$$

Równanie ruchu upraszcza się do postaci:

$$\underbrace{\frac{dp(x_1)}{dx_1}}_{\text{zależy od } x_1} = \underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3}\right) v_1(x_2, x_3)}_{\text{zależy od } x_2 \text{ i } x_3}$$

Wniosek: lewa strona musi mieć wartość niezależną od x_1, czyli stałą!

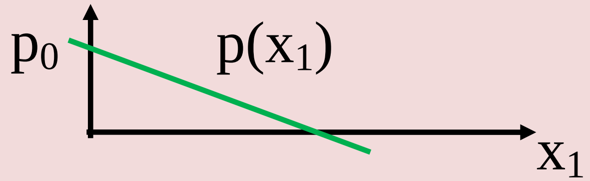
Zatem:

$$\frac{dp(x_1)}{dx_1} = -\gamma = \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3}\right)v_1\left(x_2, x_3\right)$$

Ciśnienie:

$$\boxed{p = p_0 - \gamma x_1} \Rightarrow$$

Jest liniową funkcją długości przewodu



Prędkość:

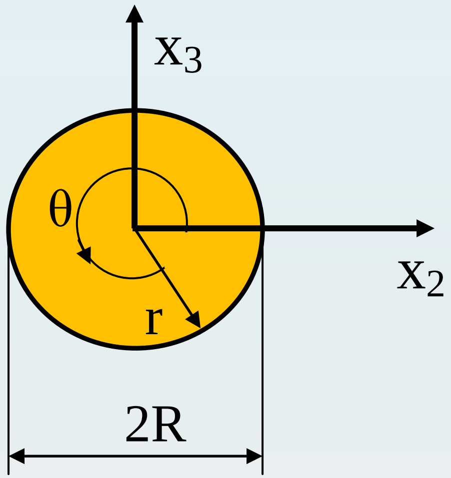
$$\Delta v_1 = -\frac{\gamma}{\mu}$$

$$v_1\big|_{brzeg} = 0$$

Zagadnienie Dirichleta

Wyraża warunek przylepienia cieczy do rury.

Dla przewodu kołowego:



$$\Delta v_1 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} v_1 = -\frac{\gamma}{\mu}$$

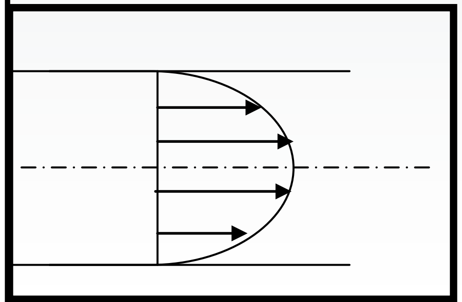
$$v_1\Big|_{r=R} = 0$$

Rozwiązanie:

$$v_1 = -\frac{\gamma}{4\mu} r^2 + A \ln r + B$$

A=0 bo r = 0 należy do obszaru ruchu, B wyznaczamy z warunku brzegowego

Ostatecznie



$$v_1 = -\frac{dp/dx_1}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)$$

Rozkład prędkości jest paraboliczny