WYKŁAD 4

PŁYN PASCALA, RÓWNANIE EULERA, STATYKA PŁYNÓW

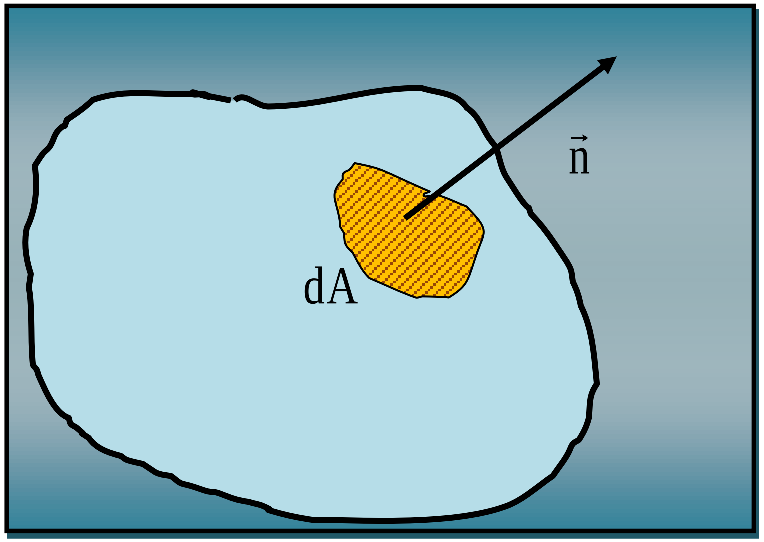
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

"Gallery of Fluid Motion"-M. Samimy, K.S. Breuer

PRAWO PASCALA

Prawo wiążące siłę działającą na powierzchnię obszaru z ciśnieniem gazu lub cieczy wypełniających ten obszar.



$$d\vec{F} = -\vec{n} \cdot p\,dA$$

siła na płyn

ciśnienie

Prawo Pascala obowiązuje w płynie nieruchomym

PŁYN PASCALA to taki płyn, dla którego prawo Pascala obowiązuje w spoczynku i w ruchu (zostaje ono rozszerzone na ruch). Dla płynu Pascala pomijamy składową styczną siły powierzchniowej.

TENSOR NAPRĘŻENIA DLA PŁYNU PASCALA

Wiemy, że jednostkowa siła powierzchniowa może być wyrażona wzorem:

$$\vec{f} = \vec{n} \cdot \mathbb{T}$$

dla płynu Pascala

$$\vec{f} = -\vec{n} \cdot p$$

Zatem

$$\mathbb{T} = -\mathbb{I}p = -p\delta_{ik}\vec{e}_i\vec{e}_k \qquad i,k = 1,2,3$$

Składowe tensora $\mathbb{T}$ są określone przez macierz jednostkową $\{\mathbb{I}\} = \{\delta_{ik}\}$, co oznacza, że dla $i = k$ jego wartości są równe 1, a dla $i \neq k$ są zerami.

Wykonajmy operację mnożenia skalarnego $\nabla \cdot \mathbb{T}$:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = -\vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(p \delta_{ik}\right) \vec{e}_i \vec{e}_k = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ik} \left(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i\right) \vec{e}_k = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ik}\, \delta_{ji}\, \vec{e}_k =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{jk} \vec{e}_k = -\frac{\partial p}{\partial x_k} \vec{e}_k$$

RÓWNANIE EULERA

Po przeprowadzeniu operacji mnożenia otrzymamy związek:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = -\nabla \cdot p$$

Wstawmy go do równania Cauchy'ego

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p} \iff \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p}$$

Otrzymane równanie nosi nazwę RÓWNANIA EULERA

RÓWNANIE EULERA opisuje ruch płynu o uproszczonych własnościach. Siła powierzchniowa została określona tak samo w ruchu jak i w spoczynku: nie posiada składowych stycznych, a składnik ciśnieniowy jest w niej dominujący

Zapiszmy to równanie dla składowych

$$\boxed{\frac{dv_i}{dt} = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

pole przyspieszenia

pole sił objętościowych

pole sił wynikające z niejednorodności ciśnienia

STATYKA PŁYNÓW

Płyn w przyjętym układzie odniesienia jest w bezruchu.
Wtedy $\vec{v} = 0$, a równanie Eulera upraszcza się do postaci:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{\rho}\nabla p}$$

RÓWNANIE RÓWNOWAGI

Zakładamy stałą wielkość ρ

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x_i}F_k = \frac{\partial}{\partial x_k}F_i}$$

WARUNEK KONIECZNY RÓWNOWAGI

Gdy warunek konieczny równowagi jest spełniony istnieje funkcja

$\phi(x_1, x_2, x_3)$ **taka, że**

$$F_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \Longleftrightarrow F_k = \nabla \phi$$

ϕ **- nazywa się potencjałem pola** F**. Obliczamy go następująco:**

$$\boxed{\phi = \int d\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx_k = \int (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3)}$$

Płyn nieściśliwy czyli $\rho = const$

Równanie równowagi sprowadza się do postaci:

$$\vec{F} = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) \rightarrow \nabla\phi = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) \rightarrow \nabla\left(\phi - \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Z ostatniego związku wyznaczamy pole ciśnienia w ośrodku nieściśliwym

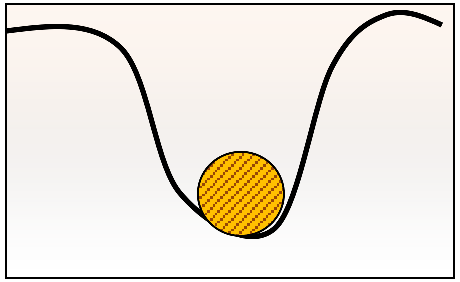
$$\boxed{p = \rho\phi + const}$$

Stałą const wyznaczamy z informacji o wartości ciśnienia w zadanym punkcie.

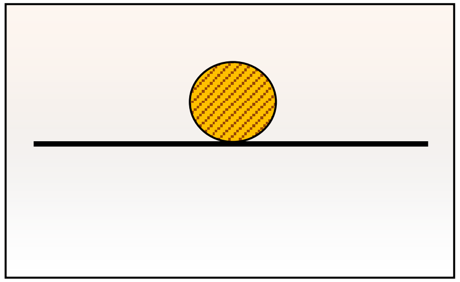
Płyn .ściśliwy czyli $\rho \neq const$

Trzy rodzaje stanów równowagi:

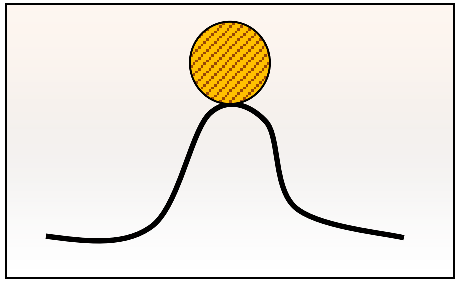
- trwała – zachodzi wtedy, gdy zaistniała zmiana samoistnie znika



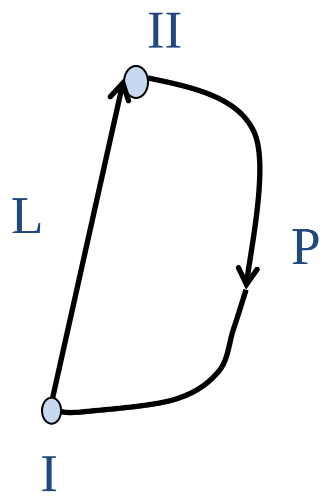
- obojętna – zachodzi wtedy, gdy zaistniała zmiana pozostaje bez skasowania równowagi



- nietrwała – zachodzi wtedy, gdy każda zmiana burzy stan równowagi



Równowaga obojętna



Dwie elementarne porcje płynu mogą być bez naruszania równowagi zamienione miejscami. Przemiana zachodząca przy przemieszczaniu wzdłuż linii L+P musi być przemianą odwracalną. Odwracalność oznacza <u>stałość entropii</u>

$$\boxed{s = \mathrm{const}}$$

Zatem:

$$\boxed{T\,ds = di - \frac{1}{\rho}dp = 0}$$

gdzie entalpia właściwa i jest równa:

$$\boxed{i = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\Bigg|_{s=\mathrm{const}} = i\big(\,p(x_1, x_2, x_3)\big)}$$

Można pokazać, że gradient entalpii właściwej równy jest prawej stronie równania równowagi.

$$\frac{\partial i}{\partial x_k} = \frac{di}{dp}\frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} \longrightarrow \vec{F} = \nabla i$$

Z drugiej strony, gdy jest spełniony warunek równowagi mamy

$$\vec{F} = \nabla \phi \qquad \text{zatem} \qquad \nabla i = \nabla \phi$$

W wyniku całkowania dostaniemy równanie równowagi dla ośrodka ściśliwego

$$\boxed{i = \phi + \text{const}} \longrightarrow$$

Korzystając z równania równowagi, jak również ze znanego związku $i=c_pT$ oraz z równania stanu gazu doskonałego możemy wyznaczyć pole ciśnienia, masy właściwej czy też temperatury.