



Wykład 10

Large Eddy Simulation Modele podsiatkowe

Bartosz Górecki, Sławomir Kubacki

`bgorecki@meil.pw.edu.pl, slawomir.kubacki@meil.pw.edu.pl`

**Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa,
Politechnika Warszawska**

wrzesień, 2013

Transfer energii – produkcja a dyssypacja energii kinetycznej turbulencji

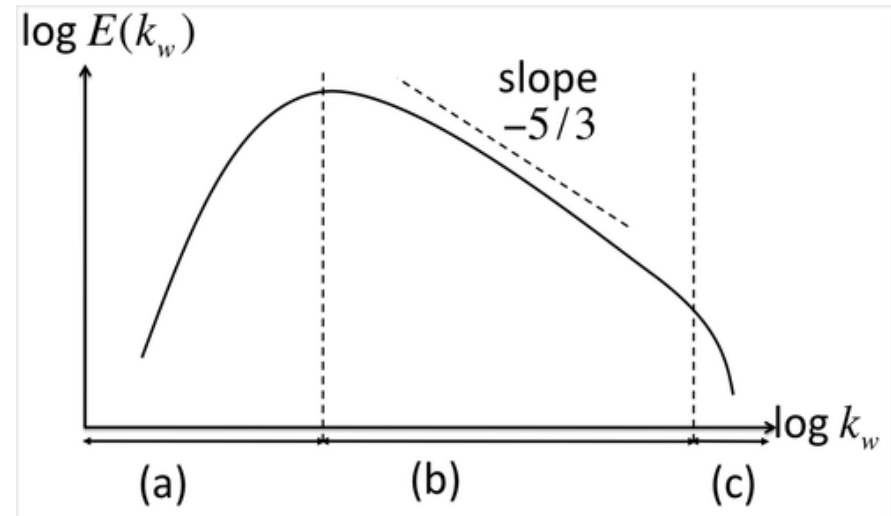
Trzy obszary:

- a) produkcja energii kinetycznej turbulencji,
- b) obszar inercyjny – przekazywanie energii ze skal dużych do małych,
- c) dyssypacja w małych strukturach.

$$\epsilon = \langle P_k \rangle$$

Produkcja en. kin. turb. w zakresie dużych jest równoważona przed dyssypacją lepka w zakresie małych skal.

Dla modeli podsiatkowych z równaniem na k (en. kin. turb.) musi się równać produkcji k w członie źródłowym!



Źródło: <http://alexanderjblack.weebly.com/turbulence.html> - pobrane 16.09.2013

Model Smagorńskiego

- Naprężenia podsiatkowe (modelowane) wyrażone są przez:

$$\tau_{ij} = -2\nu_{sgs} \overline{S_{ij}}$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\nu_{sgs} = l_s^2 |\overline{S}| = (C_s \Delta)^2 \overline{S}$$

$$|\overline{S}| = \sqrt{2\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}}$$

Model Smagorńskiego

- Lub inaczej:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -\nu_{sgs} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

Dlaczego druga wersja jest równoważna z poniższą?

$$\tau_{ij} = -2\nu_{sgs} \overline{S_{ij}}$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

- Rozmiar filtra to lokalne oczko siatki:

$$\Delta = (\Delta V)^{\frac{1}{3}}$$

Model Smagorńskiego

Wyznaczmy stałą C_S :

Wg Lilly (1976):

$$\langle \bar{S}^2 \rangle = 2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} = 2 \int_0^{\infty} \kappa^2 \bar{E}(\kappa) d\kappa = 2 \int_0^{\infty} \kappa^2 \hat{G}(\kappa) E(\kappa) d\kappa$$

Filtr $\hat{G}(\kappa)$ powoduje odcięcie liczb falowych wyższych od założonego progu (odpowiadającego oczku siatki $\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}$)

Dla spektrum Kołmogorowa, tj.

$$E(\kappa) = C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}$$

otrzymujemy:

$$\langle \bar{S}^2 \rangle = 2 \int_0^{\pi/\Delta} \kappa^2 C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} d\kappa = \frac{3}{2} C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} \pi^{4/3} \Delta^{-\frac{4}{3}}$$

Model Smagorńskiego

Z równania:

$$\langle \bar{S}^2 \rangle = \frac{3}{2} C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} \pi^{4/3} \Delta^{-\frac{4}{3}}$$

Mamy:

$$\epsilon = \left(\frac{3}{2} C_k \right)^{-\frac{3}{2}} \Delta^2 \pi^{-2} \langle \bar{S}^2 \rangle^{\frac{3}{2}}$$

Wiadomo też, że kaskada energii zapewnia:

$$\epsilon = \langle P \rangle$$

Da się też pokazać, że:

$$P = \tau_{ij} \overline{S_{ij}}$$

Model Smagorińskiego

Łączymy równania.

Z założenia Boussinesqa:

$$\epsilon = \langle P \rangle = \langle \nu_{sgs} \bar{S}^2 \rangle$$

Wykorzystując model Smagorińskiego:

$$\epsilon = \langle (C_s \Delta)^2 \bar{S}^3 \rangle$$

Przyjmując za Lilly założenie, że

$$\langle \bar{S}^3 \rangle \cong \langle \bar{S}^2 \rangle^{\frac{3}{2}}$$

można zapisać

$$\epsilon = \left(\frac{3}{2} C_k \right)^{-\frac{3}{2}} \Delta^2 \pi^{-2} \langle \bar{S}^2 \rangle^{\frac{3}{2}} = \left\langle \left(\left(\frac{3}{2} C_k \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\pi} \Delta \right)^2 \bar{S}^3 \right\rangle$$

I identyfikujemy C_s :

Model Smagorińskiego

$$C_s = \left(\frac{3C_k}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\pi}$$

Stała Kolmogorowa $C_k = 1.4$

Stąd otrzymujemy:

$$C_s = 0.18$$

Uwagi:

- Wartość poprawna dla izotropowej turbulencji
- Przeważnie zbyt duża, model zbyt dyssypatywny
- Przyjmuje się zwykle $C_s = 0.1$
- Wymaga tłumienia przy ścianach (daje zbyt dużą lepkość na ścianie)

Model Smagorińskiego – funkcje tłumiące

Na ściance mamy:

$$u'' = v'' = w'' = 0$$

Tensor τ_{ij} odpowiada za turbulentny transport pędu. Wobec powyższego na ściance $\tau_{ij} = 0$, a zatem lepkość podsiatkowa modelu musi wynieść zero.

$$\nu_{sgs} = 0$$

Osiąga się to zastosowanie funkcji tłumiącej takiej, że

$$\nu + \nu_{sgs} \Big|_{wall} \rightarrow \nu$$

oraz odpowiada tej z modelu wewnątrz pola przepływu.

Funkcja tłumiąca:

$$f_{\mu} = 1 - \exp(-y^+ / 26)$$

y^+ to bezwymiarowa odległość od brzoju (będzie o niej dalej)

Model dynamiczny Germano

- Stała C_s w modelu Smagorińskiego ma różną wartość zależnie od charakteru przepływu
- Niech zatem $C_s = C_s(\mathbf{x}, t)$
- Przyjmijmy też drugi filtr (przeważnie dwa razy większy od poprzedniego) – tym razem to już nie siatka – będziemy na siatce dokonywać jawnego filtrowania po raz drugi. Oznaczmy go:
 - o szerokości filtra $\check{\Delta} = 2\Delta$
- Filtrujemy Naviera-Stokesa pierwszym i drugim filtrem:

Model dynamiczny Germano

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widetilde{\bar{v}_i \bar{v}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widetilde{\bar{p}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \widetilde{\bar{v}}_i}{\partial x_j} \right)$$

Wykorzystując własności z poprzedniego wykładu, otrzymamy:

$$\frac{\partial \check{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\check{v}_i \check{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \check{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \check{v}_i}{\partial x_j} \right)$$

Zapiszmy też:

$$\check{v}_i \check{v}_j = \widetilde{\bar{v}_i \bar{v}_j} + \check{v}_i \check{v}_j - \widetilde{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \check{v}_i \check{v}_j + T_{ij}$$

Model dynamiczny Germano

$$\frac{\partial \check{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\check{v}_i \check{v}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \check{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \check{v}_i}{\partial x_j} \right)$$
$$T_{ij} := \overline{\check{v}_i \check{v}_j} - \check{v}_i \check{v}_j$$

Otrzymamy:

$$\frac{\partial \check{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\check{v}_i \check{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \check{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \check{v}_i}{\partial x_j} - T_{ij} \right)$$

Model dynamiczny Germano

Tym samym mamy dwa równania:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}} - \tau_{ij} \right)$$
$$\frac{\partial \check{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\check{v}_i \check{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \check{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v \frac{\partial \check{v}_i}{\partial x_j}} - T_{ij} \right)$$

I tensory:

$$\tau_{ij} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$$
$$T_{ij} = \overline{\check{v}_i \check{v}_j} - \check{v}_i \check{v}_j$$

Filtrując τ_{ij} filtrem $\check{\cdot}$ otrzymamy:

$$\check{\tau}_{ij} = \overline{\check{v}_i \check{v}_j} - \check{v}_i \check{v}_j$$

Model dynamiczny Germano

$$\begin{aligned} T_{ij} - \bar{\tau}_{ij} &= \overline{v_i v_j} - \check{v}_i \check{v}_j - \overline{v_i v_j} + \overline{v_i v_j} = \\ &= \overline{v_i v_j} - \check{v}_i \check{v}_j \end{aligned}$$

Naprężenia dynamiczne
Leonarda

$$\mathcal{L}_{ij} = \overline{v_i v_j} - \check{v}_i \check{v}_j$$

$$\mathcal{L}_{ii} = T_{ii} - \bar{\tau}_{ii}$$

$$\mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} = T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} - \left(\bar{\tau}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{\tau}_{kk} \right)$$

Zauważmy, że \mathcal{L}_{ij} daje się w przeciwieństwie do T_{ij} oraz $\bar{\tau}_{ij}$ policzyć jawnie.

Model dynamiczny Germano

Zwróćmy uwagę:

τ_{ij} reprezentują naprężenia wskutek skal o długości $l < \Delta$

T_{ij} reprezentują naprężenia wskutek skal o długości $l < \check{\Delta}$

Tym samym naprężenia dynamiczne Leonarda

$\mathcal{L}_{ij} = T_{ij} - \check{\tau}_{ij}$ reprezentują naprężenia wskutek skal o długości $\Delta < l < \check{\Delta}$

Przypomnijmy:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \\ T_{ij} &= \overline{\check{v}_i \check{v}_j} - \check{\bar{v}}_i \check{\bar{v}}_j\end{aligned}$$

Żadnego z nich nie da się policzyć jawnie. Przyjmiemy model Smagorińskiego.

Model dynamiczny Germano

Używamy modelu Smagorińskiego:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C \Delta^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$
$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2C \check{\Delta}^2 |\check{S}| \check{S}_{ij}$$

W powyższym

$$\check{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \check{v}_j}{\partial x_i} \right)$$
$$|\check{S}| = \sqrt{2 \check{S}_{ij} \check{S}_{ij}}$$

Model dynamiczny Germano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathcal{L}_{kk} &= -2C\check{\Delta}^2 \left| \check{S} \right| \check{S}_{ij} + 2C\Delta^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij} = \\ &= -2C \left(\check{\Delta}^2 \left| \check{S} \right| \check{S}_{ij} - \Delta^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij} \right)\end{aligned}$$

W powyższym $C = C(x, t)$. Ponadto równanie powyżej jest równaniem tensorowym - S_{ij} jest symetryczny i nie ma śladu, tym samym mamy pięć równań skalarnych na określenie C . Spełnijmy je w sensie najmniejszych kwadratów.

$$Q = \left(\mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathcal{L}_{kk} + 2CM_{ij} \right)^2$$

$$M_{ij} = \left(\check{\Delta}^2 \left| \check{S} \right| \check{S}_{ij} - \Delta^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij} \right)$$

Model dynamiczny Germano

$$Q = \left(\mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} + 2CM_{ij} \right)^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 4M_{ij} \left(\mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} + 2CM_{ij} \right) = 0$$

$$C = -\frac{\mathcal{L}_{ij}M_{ij}}{2M_{kl}M_{kl}}$$

C cechują duże fluktuacje w czasie i przestrzeni, co powoduje problemy numeryczne.

Model dynamiczny Germano

C cechują duże fluktuacje w czasie i przestrzeni, co powoduje problemy numeryczne.

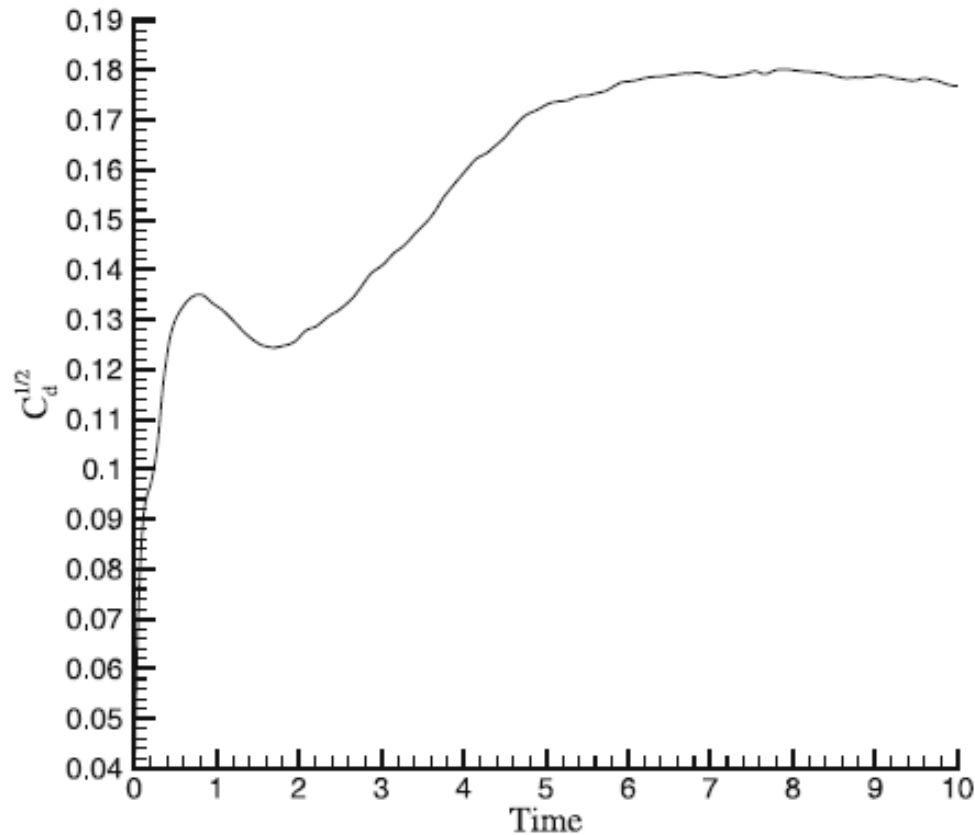
Wymagany jest warunek poprawiający stabilność numeryczną. Stosuje się odcięcie takie, że:

$$\text{Jeśli } \nu + \nu_{sgs} \leq 0 \rightarrow C = 0$$

Dyfuzyjność nie może bowiem być ujemna (II zasada termodynamiki).

Jeśli zaś $\nu + \nu_{sgs} \leq \nu$, to zachodzi tzw. backscatter.

Stała $c^{1/2}$ dla modelu dynamicznego Germano



Historia zmian pierwiastka kwadratowego stałej c w czasie na przykładzie symulacji izotropowej turbulencji przy pomocy modelu Germano. Sagaut (2000)

Modele oparte o podobieństwo skal (ang.: scale-similarity models)

Modele podobieństwa skal zakładają, że struktury tuż powyżej liczby falowej odcięcia i tuż poniżej liczby falowej odcięcia filtra są podobne.

Dokonujemy dekompozycji:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j = \overline{(\bar{v}_i + v_i'')(\bar{v}_j + v_j'')} - \bar{v}_i \bar{v}_j = \\ &= \underbrace{\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} + \overline{\bar{v}_i v_j''} + \overline{\bar{v}_j v_i''} + \overline{v_i'' v_j''}}_{\tau_{ij}} - \bar{v}_i \bar{v}_j = \\ &= \underbrace{\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{\bar{v}_i v_j''} + \overline{\bar{v}_j v_i''}}_{C_{ij}} + \underbrace{\overline{v_i'' v_j''}}_{R_{ij}}\end{aligned}$$

Modele oparte o podobieństwo skal (ang.: scale-similarity models)

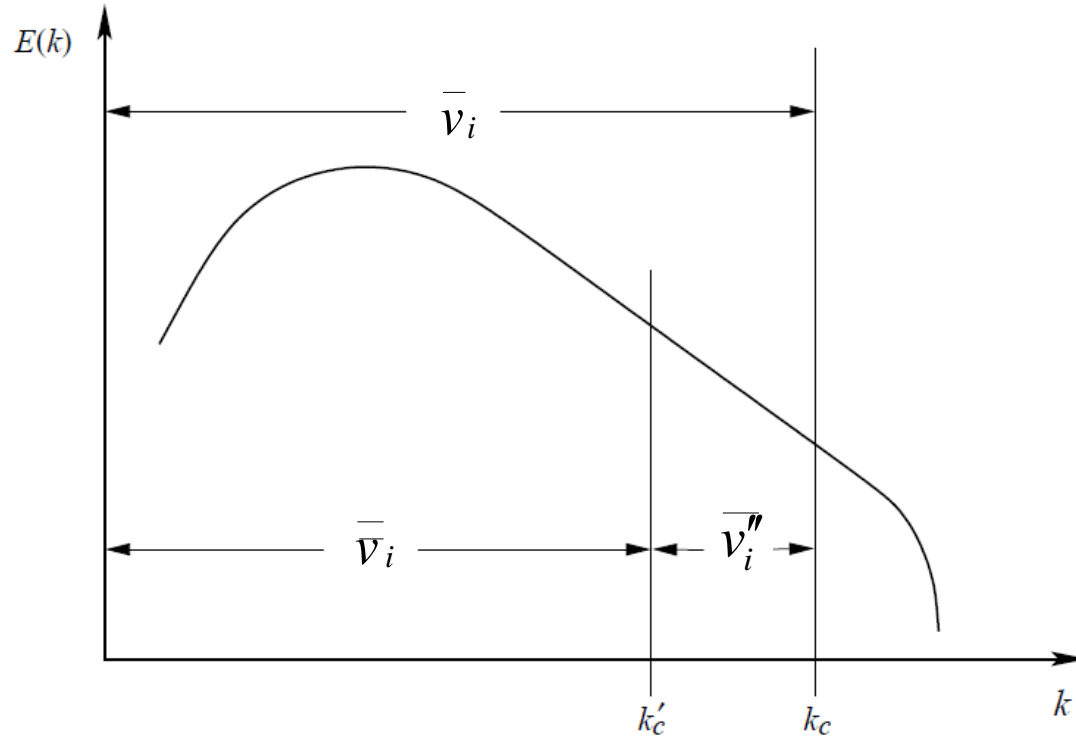
$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$$

$L_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i} \overline{v_j}$ - tensor Leonarda – nie wymaga modelowania

$C_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j''}} + \overline{\overline{v_j v_i''}}$ - tensor naprężeń krzyżowych (cross term)
(uwzględnia interakcję między skalami rozwiązywanymi a modelowanymi)

$R_{ij} = \overline{v_i'' v_j''}$ - tensor naprężeń Reynoldsa

Modele oparte o podobieństwo skal (ang.: scale-similarity models)



$$\bar{v}''_i = \bar{v}_i - \bar{v}_i \quad \text{lub}$$

$$\bar{v}''_i \cong \bar{v}_i - \bar{v}_i$$

Modele oparte o podobieństwo skal (ang.: scale-similarity models)

Aproksymujemy tensor naprężeń krzyżowych C_{ij} i tensor naprężeń Reynoldsa R_{ij} (tensor Leonarda L_{ij} pozostaje bez zmian)

$$L_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \overline{v_i} \overline{v_j}$$

$$C_{ij} \cong \overline{v_i} (\overline{v_j} - \overline{v_j}) + \overline{v_j} (\overline{v_i} - \overline{v_i})$$

$$R_{ij} \cong (\overline{v_i} - \overline{v_i}) (\overline{v_j} - \overline{v_j})$$

Dodajemy do siebie tensory C_{ij} i R_{ij}

$$C_{ij} + R_{ij} \cong \overline{v_i} \overline{v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}$$

Modele oparte o podobieństwo skal (ang.: scale-similarity models)

Sumę tensorów L_{ij} , C_{ij} i R_{ij} można wyrazić (aproksymować) jak poniżej

$$L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j} + \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}$$

Tensor $\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$ można więc wyznaczyć jawnie w oparciu o najmniejsze „rozwiązywalne” skale – nie jest wymagany model

W praktyce model podany powyżej okazuje się być za słabo dyssypatywny dlatego też tensor Reynoldsa modeluje się przy pomocy modelu Smagorinskiego

$$L_{ij} \cong \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}$$

$$C_{ij} = 0$$

$$R_{ij} = -2C_s \Delta^2 / \overline{S} / \overline{S}_{ij}$$