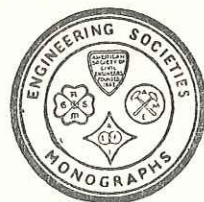


THEORY OF ELASTICITY

By S. TIMOSHENKO
And J. N. GOODIER
*Professors of Engineering Mechanics
Stanford University*



SECOND EDITION

NEW YORK TORONTO LONDON
McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Inc.

1951

Prof. S. TIMOSHENKO i prof. J. N. GOODIER

539.31:620.17.001.6

TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI

Z WYDANIA II

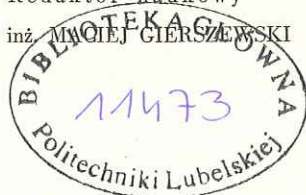
tłumaczyli

dr inż. HENRYK ZORSKI i dr inż. WŁODZIMIERZ DERSKI

WYDAWNICTWO » ARKADY «
BUDOWNICTWO • SZTUKA • ARCHITEKTURA

Opiniodawca
prof. dr inż. WITOLD NOWACKI

Redaktor naukowy
mgr inż. MACIEJ GIERŚWIAŁOWSKI



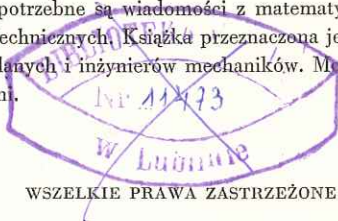
Tytuł oryginału:

Theory of elasticity
by S. TIMOSHENKO
and J. N. GOODIER

Praca zawiera podstawowe wiadomości z zakresu teorii sprężystości. Specjalny nacisk położono na interpretację fizyczną zagadnień.

Liczne przykłady dotyczą praktycznych zagadnień konstrukcyjnych.

Do studiowania książki potrzebne są wiadomości z matematyki w zakresie wykładanym na wyższych uczelniach technicznych. Książka przeznaczona jest dla pracowników naukowych, inżynierów budowlanych i inżynierów mechaników. Mogą z niej korzystać również studenci wyższych uczelni.



WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

Redaktor techniczny

HENRYK GLAZOWSKI

Okladkę projektował

TADEUSZ KOBYŁKA

Korektor techniczny

DANUTA SAMOTNY

Arkady, Warszawa 1962. Wydanie I. Dodruk 2.000 egz. Ark. wyd. 36,8; ark. druk. 26,75. (35,58/A). Format B5.
Papier druk. kl. III, 70 g, z Fabryki papieru we Włodawku. Druk ukończono w sierpniu 1962. Symbol 20449/Bk.
Zam. nr 423/62. N-24. Cena zł 55.—

DRUKARNIA NARODOWA W KRAKOWIE

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA DO DRUGIEGO WYDANIA

PRZEDMOWA DO PIERWSZEGO WYDANIA

OZNACZENIA

ROZDZIAŁ 1

WSTĘP

| | |
|--|----|
| 1. Sprężystość | 19 |
| 2. Naprężenie | 19 |
| 3. Oznaczenia sił i naprężeń | 20 |
| 4. Składowe naprężenia | 21 |
| 5. Składowe odkształcenia | 22 |
| 6. Prawo Hooke'a | 23 |
| Zadania | 26 |

ROZDZIAŁ 2

PLASKI STAN NAPRĘŻENIA I PLASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

| | |
|--|----|
| 7. Płaski stan naprężenia | 27 |
| 8. Płaski stan odkształcenia | 27 |
| 9. Stan naprężenia w dowolnym punkcie ciała | 29 |
| 10. Stan odkształcenia w dowolnym punkcie ciała | 32 |
| 11. Pomiar odkształceń powierzchniowych | 34 |
| 12. Konstrukcja koła Mohra dla odkształceń na podstawie rozety odkształceń | 35 |
| 13. Różniczkowe równania równowagi | 36 |
| 14. Warunki brzegowe | 37 |
| 15. Równania ciągłości odkształceń | 37 |
| 16. Funkcja naprężeń | 39 |
| Zadania | 41 |

ROZDZIAŁ 3

ZAGADNIENIE DWUWYMIAROWE WE WSPÓLRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH

| | |
|--|----|
| 17. Rozwiązanie za pomocą wielomianów | 42 |
| 18. Zasada de Saint-Venanta | 45 |
| 19. Wyznaczenie przemieszczeń | 46 |
| 20. Zginanie wspornika obciążonego na końcu | 47 |
| 21. Zginanie belki równomiernie rozłożonym obciążeniem | 51 |
| 22. Inne przypadki belek obciążonych w sposób ciągły | 55 |
| 23. Rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego w postaci szeregów Fouriera | 56 |
| 24. Inne zastosowanie szeregów Fouriera. Obciążenie siłami ciężkości | 61 |
| Zadania | 62 |

Str

19

27

27

29

32

34

35

36

37

37

39

41

42

42

45

46

47

51

55

56

61

62

5

| | | |
|---|------|-----|
| ROZDZIAŁ 4 | Str. | 64 |
| ZAGADNIENIA DWUWYMIAROWE WE WSPÓLRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH | | |
| 25. Równania ogólne we współrzędnych biegunowych | | 64 |
| 26. Osiowo-symetryczny rozkład naprężenia | | 66 |
| 27. Czyste zginanie prętów zakrzywionych | | 69 |
| 28. Składowe odkształcenia we współrzędnych biegunowych | | 72 |
| 29. Przemieszczenia w przypadkach osiowo-symetrycznych rozkładów naprężenia | | 73 |
| 30. Tarcze wirujące | | 75 |
| 31. Zginanie zakrzywionego pręta siłą przyłożoną na końcu | | 79 |
| 32. Wpływ otworów kołowych na rozkład naprężeń w tarczach | | 83 |
| 33. Siła skupiona działająca na prostej krawędzi tarczy | | 88 |
| 34. Dowolne obciążenie pionowe przyłożone na prostej krawędzi tarczy | | 94 |
| 35. Siła działająca na wierzchołku klina | | 97 |
| 36. Działanie siły skupionej na belkę | | 100 |
| 37. Naprężenia w tarczy kołowej | | 107 |
| 38. Siła przyłożona w punkcie tarczy nieograniczonej | | 111 |
| 39. Ogólne rozwiązanie zagadnienia płaskiego we współrzędnych biegunowych | | 114 |
| 40. Zastosowania ogólnego rozwiązania we współrzędnych biegunowych | | 118 |
| 41. Klin obciążony wzdłuż brzegów | | 120 |
| Zadania | | 122 |
| ROZDZIAŁ 5 | | 127 |
| METODA ELASTOOPTYCZNA | | |
| 42. Elastooptyczny pomiar naprężenia | | 127 |
| 43. Polaryskop kołowy | | 131 |
| 44. Przykłady wyznaczania naprężeń metodą elastooptyczną | | 133 |
| 45. Określenie naprężeń głównych | | 136 |
| 46. Elastooptyka trójwymiarowa | | 138 |
| ROZDZIAŁ 6 | | 140 |
| METODY ENERGETYCZNE | | |
| 47. Energia odkształcenia | | 140 |
| 48. Zasada prac przygotowanych | | 144 |
| 49. Twierdzenie <i>Castigliano</i> | | 153 |
| 50. Zasada najmniejszej pracy | | 156 |
| 51. Zastosowanie zasady najmniejszej pracy — tarcze prostokątne | | 157 |
| 52. Szerokość współpracująca pól w dźwigarach teowych | | 161 |
| 53. Ścinanie pól | | 165 |
| Zadania | | 165 |
| ROZDZIAŁ 7 | | 167 |
| ZAGADNIENIA DWUWYMIAROWE WE WSPÓLRZĘDNYCH KRZYWOLINIOWYCH | | |
| 54. Funkcje zmiennej zespolonej | | 167 |
| 55. Funkcje analityczne i równanie <i>Laplace'a</i> | | 169 |
| Zadania | | 170 |
| 56. Funkcje naprężeń wyrażone przez funkcje harmoniczne i zespolone | | 170 |
| 57. Przemieszczenie odpowiadające danej funkcji naprężeń | | 173 |
| 58. Przedstawienie naprężenia i przemieszczenia za pomocą potencjałów zespolonych | | 174 |
| 59. Wypadkowa naprężenia na krzywej. Warunki brzegowe | | 176 |
| 60. Współrzędne krzywoliniowe | | 178 |

| | | |
|--|--|-----|
| 61. Składowe naprężenia we współrzędnych krzywoliniowych | | 181 |
| Zadania | | 183 |
| 62. Rozwiązania we współrzędnych eliptycznych. Otwór eliptyczny w tarczy poddanej równomiernym naprężeniom | | 183 |
| 63. Eliptyczny otwór w tarczy poddanej jednoosiowemu rozciąganiu | | 187 |
| 64. Brzeg w postaci hiperboli. Karby | | 189 |
| 65. Współrzędne dwubiegunowe | | 191 |
| 66. Rozwiązania we współrzędnych dwubiegunowych | | 192 |
| ROZDZIAŁ 8 | | 197 |
| TRÓJWYMIAROWY STAN NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ | | |
| 67. Naprężenia w punkcie | | 197 |
| 68. Naprężenia główne | | 198 |
| 69. Elipsoida naprężeń i kierunkowa powierzchnia naprężeń | | 199 |
| 70. Wyznaczenie naprężeń głównych | | 200 |
| 71. Wyznaczenie maksymalnych naprężeń stycznych | | 201 |
| 72. Odkształcenie jednorodne | | 202 |
| 73. Wyznaczenie odkształceń w punkcie | | 203 |
| 74. Główne osie odkształcenia | | 206 |
| 75. Obrót | | 206 |
| Zadanie | | 208 |
| ROZDZIAŁ 9 | | 209 |
| TWIERDZENIA OGÓLNE | | |
| 76. Równania różniczkowe równowagi | | 209 |
| 77. Równania ciągłości odkształceń | | 210 |
| 78. Wyznaczenie przemieszczeń | | 213 |
| 79. Równania równowagi wyznaczone przez przemieszczenia | | 213 |
| 80. Ogólne rozwiązanie wyrażone w przemieszczeniach | | 214 |
| 81. Zasada superpozycji | | 215 |
| 82. Jednoznaczność rozwiązania | | 216 |
| 83. Twierdzenie o wzajemności prac | | 217 |
| 84. Przybliżony charakter rozwiązań dla płaskiego stanu naprężenia | | 220 |
| Zadania | | 222 |
| ROZDZIAŁ 10 | | 223 |
| ELEMENTARNE TRÓJWYMIAROWE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI | | |
| 85. Równomierny rozkład naprężenia | | 223 |
| 86. Rozciąganie pręta pryzmatycznego pod działaniem ciężaru własnego | | 224 |
| 87. Skręcanie wałów o stałym przekroju kołowym | | 226 |
| 88. Czyste zginanie belek pryzmatycznych | | 227 |
| 89. Czyste zginanie płyt | | 231 |
| ROZDZIAŁ 11 | | 233 |
| SKRĘCANIE | | |
| 90. Skręcanie prętów pryzmatycznych | | 233 |
| 91. Pręty o przekroju eliptycznym | | 237 |
| 92. Inne rozwiązania elementarne | | 238 |
| 93. Analogia błonowa | | 241 |
| 94. Skręcanie pręta o wąskim przekroju prostokątnym | | 244 |
| 95. Skręcanie prętów prostokątnych | | 246 |

| | |
|---|------------|
| 96. Dodatkowe wyniki | 249 |
| 97. Rozwiązanie zagadnień skręcania za pomocą metody energetycznej | 251 |
| 98. Skręcanie walcowanych kształtowników | 256 |
| 99. Zastosowanie blon mydlanych przy rozwiązywaniu zagadnień skręcania | 258 |
| 100. Analogie hydrodynamiczne | 260 |
| 101. Skręcanie wałów wydrążonych | 261 |
| 102. Skręcanie rur cienkościennych | 264 |
| 103. Skręcanie pręta, którego jeden przekrój poprzeczny pozostaje płaski | 268 |
| 104. Skręcanie wałów kołowych o zmiennej średnicy | 269 |
| Zadania | 276 |
| ROZDZIAŁ 12 | 279 |
| ZGINANIE PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH | |
| 105. Zginanie belek wspornikowych | 279 |
| 106. Funkcja naprężeń | 280 |
| 107. Kołowy przekrój poprzeczny | 282 |
| 108. Przekrój eliptyczny | 283 |
| 109. Przekrój prostokątny | 284 |
| 110. Dalsze wyniki | 290 |
| 111. Przekroje niesymetryczne | 291 |
| 112. Środek ścinania | 293 |
| 113. Rozwiązywanie zagadnień zginania za pomocą metody blony mydlanej | 295 |
| 114. Przemieszczenia | 298 |
| 115. Dalsze badania dotyczące zginania | 299 |
| ROZDZIAŁ 13 | 300 |
| OŚIOWO-SYMETRYCZNY ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W CIAŁACH O KSZTAŁCIE BRYŁ OBROTOWYCH | |
| 116. Równania ogólne | 300 |
| 117. Rozwiązanie za pomocą wielomianów | 303 |
| 118. Zginanie płyty kołowej | 305 |
| 119. Tarcza wirująca jako zagadnienie trójwymiarowe | 307 |
| 120. Siła skupiona w punkcie ciała nieograniczonego | 309 |
| 121. Zbiornik kulisty poddany wewnętrznemu lub zewnętrznemu równomiernemu ciśnieniu | 310 |
| 122. Naprężenia lokalne wokół pustki kulistej | 313 |
| 123. Siła skupiona na brzegu półprzestrzeni sprężystej | 315 |
| 124. Obciążenie rozmieszczone na części brzegu półprzestrzeni sprężystej | 318 |
| 125. Ciśnienie pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami kulistymi | 323 |
| 126. Ciśnienie pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami. Przypadek ogólniejszy | 327 |
| 127. Zderzenie kul | 331 |
| 128. Symetryczne odkształcenie walca kołowego | 332 |
| 129. Walec kołowy ściskany na części poboczniczy | 335 |
| 130. Skręcanie wycinka kołowego pierścienia | 337 |
| 131. Czyste zginanie wycinka kołowego pierścienia | 341 |
| ROZDZIAŁ 14. | 345 |
| NAPRĘŻENIA CIEPLNE | |
| 132. Najprostsze przypadki rozkładu naprężeń cieplnych | 345 |
| 133. Pewne zagadnienia płaskiego stanu naprężeń cieplnych | 349 |
| 134. Cienka tarcza kołowa przy osiowo-symetrycznym rozkładzie temperatury | 350 |
| 135. Długi walec kołowy | 352 |
| 136. Kula | 359 |

| | |
|--|------------|
| 137. Równania ogólne | 362 |
| 138. Naprężenia wstępne | 366 |
| 139. Zagadnienie dwuwymiarowe ustalonego przepływu ciepła | 368 |
| 140. Rozwiązania równań ogólnych | 372 |
| ROZDZIAŁ 15 | 376 |
| ROZCHODZENIE SIĘ FAL W CIAŁACH SPRĘŻYSTYCH | |
| 141. | 376 |
| 142. Fale podłużne w prętach pryzmatycznych | 376 |
| 143. Podłużne zderzenie prętów | 380 |
| 144. Fale dylatacyjne i dystorsyjne w ośrodkach sprężystych izotropowych | 386 |
| 145. Fale płaskie. | 388 |
| 146. Rozchodzenie się fal po powierzchni ciał stałych sprężystych | 390 |
| DODATEK | 393 |
| ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH W TEORII SPRĘŻYSTOŚCI | |
| 1. Wyprowadzenie równań różnicowych | 393 |
| 2. Metody kolejnych przybliżeń | 396 |
| 3. Metoda relaksacji | 398 |
| 4. Siatki trójkątne i sześciokątne. | 402 |
| 5. Relaksacja blokowa i grupowa | 405 |
| 6. Skręcanie prętów o przekrojach wielospójnych | 406 |
| 7. Punkty bliskie brzegu | 408 |
| 8. Równanie biharmoniczne | 409 |
| 9. Skręcanie prętów o przekroju kołowym, zmieniającym się wzdłuż osi | 415 |
| Uzupełniający wykaz piśmiennictwa | 418 |
| Skorowidz | 419 |

PRZEDMOWA DO DRUGIEGO WYDANIA

W obecnym wydaniu uwzględniono wiele nowych osiągnięć, jakie uzyskano w teorii sprężystości i jej zastosowaniach w okresie, dzielącym nas od ukazania się wydania pierwszego. Ogólny układ książki pozostaje w jej przeważającej części niezmienny.

Części dotyczące metod elastooptyki, zagadnień dwuwymiarowych we współrzędnych krzywoliniowych oraz naprężeń cieplnych zostały napisane na nowo i rozszerzone do osobnych rozdziałów; podają one szereg metod i rozwiązań, nie uwzględnionych w wydaniu poprzednim. Dołączono także Dodatek, zawierający omówienie metody różnic skończonych i jej zastosowań, z uwzględnieniem metody relaksacji. Do książki włączone zostały także nowe ustępy i paragrafy, omawiające następujące zagadnienia: tensometryczny pomiar odkształceń na powierzchni ciała, naprężenia spowodowane siłami grawitacji, zasada Saint-Venanta, składowe obroty, twierdzenie o wzajemności prac, rozwiązania ogólne, przybliżony charakter rozwiązań dla płaskiego stanu naprężenia, środek skręcania i środek ścinania, koncentracja naprężeń w zaokrągleniach załomów przekrojów skręcanych, przybliżony sposób obliczania smukłych przekrojów (np. pełnego skrzydła samolotu) na zginanie i skręcanie oraz walec kołowy, obciążony na pierścieniowej części poboczniczy.

Materiał książki zawarty w rozdziałach 1—11 uzupełniono zadaniami przeznaczonymi dla studentów.

Z prawdziwą przyjemnością składamy wyrazy podziękowania za wiele cennych uwag, nadesłanych przez czytelników książki.

S. TIMOSHENKO
J. N. GOODIER

PALO ALTO, KALIFORNIA
Luty, 1951

W ciągu ostatnich lat teoria sprężystości znalazła poważne zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień inżynierskich. Istnieje wiele przypadków, w których elementarne metody wytrzymałości materiałów nie pozwalają na otrzymanie zadowalającego wyobrażenia o rozkładzie naprężeń w konstrukcjach inżynierskich i trzeba uciekać się do bardziej dokładnych metod teorii sprężystości. Elementarna teoria nie wystarcza do opisanie naprężeń lokalnych w pobliżu punktu przyłożenia obciążenia i w pobliżu podpór belki. Podobnie nie może ona dać właściwego wyobrażenia o rozkładzie naprężeń w takich ciałach, których wszystkie wymiary są wielkościami tego samego rzędu. Naprężenia w wałkach i kulkach łożysk można określić jedynie za pomocą teorii sprężystości. Teoria elementarna nie pozwala na zbadanie naprężeń w tych punktach, w których występuje nagle zmiana średnicy wałów lub belek. Wiadomo, że w kątach szczelin otrzymuje się wysokie naprężenia lokalne i w wyniku tego zwykle od tych miejsc zaczynają pojawiać się pęknięcia szczególnie wtedy, gdy konstrukcja poddana jest działaniu naprężeń zmieniających znak. Większą część zniszczeń części maszynowych w trakcie pracy można złożyć na karb tych pęknięć.

W ciągu ostatnich lat osiągnięto dobre wyniki przy rozwiązywaniu wspomnianych praktycznie ważnych zagadnień. W przypadkach, w których trudno było otrzymać dokładne rozwiązania, zastosowano przybliżone metody rozwiązania. W niektórych przypadkach rozwiązanie otrzymano na drodze eksperymentalnej. Jako przykład można podać elastooptyczną metodę rozwiązywania zagadnień płaskich. Aparaturę elastooptyczną można obecnie spotkać w wyższych uczelniach, a także w wielu przemysłowych laboratoriach badawczych. Wyniki badań elastooptycznych okazały się szczególnie pożyteczne przy badaniu zjawiska koncentracji naprężeń w miejscach naglej zmiany wymiarów poprzecznych i narożach wycięć o małym promieniu rozwarcia. Wyniki te miały bez wątpienia duży wpływ na współczesne konstrukcje części maszynowych i pomagały w licznych przypadkach w ulepszaniu konstrukcji drogą eliminacji jej słabych punktów, od których mogły zaczynać się pęknięcia.

Jako inny przykład uwieńczonego powodzeniem badania doświadczalnego można podać metodę bańki mydlanej, służącej do określenia naprężeń przy zginaniu i skręcaniu pryzmatycznych prętów. Przy stosowaniu tej metody trudne zagadnienie, polegające na rozwiązaniu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych przy danych warunkach brzegowych, zastępuje się przez pomiar pochyleń i ugięć odpowiednio naprężonej i obciążonej bańki mydlanej. Doświadczenia pokazują, że na tej drodze otrzymuje się nie tylko poglądowy obraz rozkładu naprężeń, ale również nieodzowne dane dotyczące wielkości naprężeń, których dokładność wystarcza do celów praktycznych.

Oprócz tego interesująca jest analogia elektryczna, która daje możliwość badania wywołanych skręcaniem naprężeń w wałach o zmiennej średnicy w miejscach załamań i wycięć. Przy rozwiązywaniu ważnych zagadnień technicznych stosuje się również z powodzeniem analogię między zagadnieniem zginania płyt i płaskimi zagadnieniami teorii sprężystości.

dla inżynierów, podstawowych wiadomości z zakresu teorii sprężystości. Oprócz tego autor pragnął zebrać rozwiązania tych szczególnych zagadnień, które mogą mieć znaczenie praktyczne i omówić przybliżone i doświadczalne metody rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości.

Mając na uwadze praktyczne zastosowania teorii sprężystości, autor pominął te zagadnienia, które mają przede wszystkim charakter teoretyczny i takie, które nie znajdują obecnie bezpośredniego zastosowania w technice, na korzyść omówienia przypadków szczególnych. Tylko na podstawie przestudiowania ze wszystkimi szczegółami takich przypadków i porównania wyników rozwiązań ścisłych z rozwiązaniami przybliżonymi, podawanymi zwykle w elementarnych podręcznikach wytrzymałości materiałów, projektant może otrzymać pełne wyobrażenie o rozkładzie naprężeń w konstrukcjach inżynierskich i nauczyć się właściwie i z korzyścią dla siebie stosować bardziej dokładne metody analizy naprężeń.

Przy rozwiązywaniu zagadnień szczególnych w większości przypadków stosowana jest droga bezpośredniego określenia naprężeń za pomocą równań nierozdzielności, wyrażonych w naprężeniach. Taki sposób rozwiązywania jest bliższy inżynierom, których interesuje zwykle wielkość naprężeń. Oprócz tego, przy wprowadzaniu odpowiednich funkcji naprężeń metoda ta jest prostsza od tej, w której wykorzystuje się równania równowagi wyrażone w przemieszczeniach.

W licznych przypadkach wykorzystane zostały rozwiązania zagadnień, otrzymane za pomocą metod energetycznych. Na tej drodze całkowanie równań różniczkowych zastępuje się przez poszukiwanie warunków na minimum określonych całek. Powyższe zagadnienie rachunku wariacyjnego przez wykorzystanie metody Ritza sprowadza się do prostego zadania, polegającego na znalezieniu minimum funkcji. W ten sposób w wielu praktycznie ważnych przypadkach, można otrzymać odpowiednie rozwiązania przybliżone.

W celu uproszczenia wykładu — książka zaczyna się od omówienia zagadnień płaskich, a dalej, gdy czytelnik jest już oswojony z różnymi metodami stosowanymi przy rozwiązywaniu zagadnień teorii sprężystości, rozważa się zagadnienia trójwymiarowe. Te części książki, które, mimo posiadania znaczenia praktycznego, mogą być przy pierwszym czytaniu pominięte, wydrukowane zostały *petitem*. Do przestudiowania tych zagadnień czytelnik może powrócić po opanowaniu podstawowych rozdziałów książki.

Wywody matematyczne podane są w postaci elementarnej i zwykle nie wymagają głębszej znajomości matematyki niż ta, która wykładana jest w wyższych szkołach technicznych. W przypadkach zagadnień bardziej złożonych podano wszystkie nieodzowne wyjaśnienia i obliczenia, na podstawie których czytelnik może bez trudności śledzić tok rozumowania. Jedynie w kilku przypadkach końcowe wyniki przytoczono bez żadnych wyprowadzeń. Podane są natomiast nieodzowne odsyłacze do prac, w których można znaleźć wyprowadzenia.

W licznych odnośnikach podano prace i książki z teorii sprężystości, które mogą mieć znaczenie praktyczne. Mogą one być ciekawe dla tych inżynierów, którzy pragną przestudiować bliżej pewne zagadnienia szczególne. Oprócz tego, podane odsyłacze dają obraz współczesnego stanu teorii sprężystości i mogą być pożyteczne także i dla studentów wyższych lat, którzy chcą w przyszłości pracować na tym polu.

Przy przygotowywaniu pracy autor w znacznym stopniu korzystał z poprzedniej książki na ten sam temat (Teoria uprugosti, t. I, St. Petersburg, Rosja, 1914), która jest zbiorem wykładów na temat teorii sprężystości, wygłaszanych w kilku rosyjskich wyższych szkołach technicznych.

cały manuskrypt i poczynili wiele poprawek i uzupełnień. Autor wyraża również podziękowania prof. G. H. MacCulloughowi, dr E. E. Weibelowi, prof. M. Sadow-
skemu i panu D. H. Youngowi, którzy wzięli udział w ostatecznym przygotowaniu książki
czytając pewne części manuskryptu. Autor jest również zobowiązany panu L. S. Veenstra
za przygotowanie rysunków i panu E. D. Websterowi za sporządzenie maszynopisu manu-
skryptu.

S TIMOSHENKO

UNIWERSYTET MICHIGAN
Grudzień, 1933



OZNACZENIA

x, y, z — współrzędne prostokątne
 r, θ — współrzędne biegunowe
 ξ, η — ortogonalne współrzędne krzywoliniowe; czasami współrzędne prostokątne
 R, ψ, θ — współrzędne kuliste

N — zewnętrzna normalna do powierzchni ciała
 l, m, n — cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej
 A — pole przekroju poprzecznego

J_x, J_y — momenty bezwładności przekroju względem osi x i y
 J_p — biegunowy moment bezwładności przekroju
 g — przyspieszenie siły ciężkości
 ρ — gęstość
 q — intensywność obciążenia ciągłego
 p — ciśnienie

X, Y, Z — składowe siły masowej na jednostkę objętości
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ — składowe obciążenia powierzchni na jednostkę powierzchni
 M — moment zginający
 M_t — moment skręcający

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — składowe normalne naprężenia, równoległe do osi x, y, z
 σ_n — składowa normalna naprężenia, równoległa do N
 σ_r, σ_θ — składowa promieniowa i obwodowa naprężenia we współrzędnych biegunowych
 σ_ξ, σ_η — składowe normalne naprężenia we współrzędnych krzywoliniowych
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ — składowe normalne naprężenia we współrzędnych walcowych

$$\Theta = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2$$

τ — naprężenie styczne

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — składowe styczne naprężenia we współrzędnych prostokątnych

$\tau_{r\theta}$ — naprężenie styczne we współrzędnych biegunowych

$\tau_{\xi\eta}$ — naprężenie styczne we współrzędnych krzywoliniowych

$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ — składowe styczne naprężenia we współrzędnych walcowych

S — całkowite naprężenie na płaszczyźnie

u, v, w — składowe przemieszczenia

ε — wydłużenie jednostkowe

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — wydłużenie jednostkowe w kierunkach x, y, z

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ — promieniowe i obwodowe wydłużenie jednostkowe we współrzędnych biegunowych

$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ — rozszerzenie objętościowe

γ — odkształcenie postaciowe

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ — składowe odkształcenia postaciowego we współrzędnych prostokątnych

$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$ — składowe odkształcenia postaciowego we współrzędnych walcowych

E — moduł sprężystości rozciągania i ściskania

G — moduł odkształcenia postaciowego. Moduł skręcania

ν — współczynnik Poissona

$$\mu = G, \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{ — stałe Lamégo}$$

ψ — funkcja naprężeń
 $\psi(z), \chi(z)$ — potencjały zespolone; funkcje zmiennej zespolonej $z = x + iy$
 \bar{z} — zmienna zespolona sprzężona $x - iy$
 C — sztywność skręcania
 θ — kąt skręcania na jednostkę długości
 $F = 2G\theta$; stosowane w zagadnieniach skręcania
 V — energia odkształcenia
 V_0 — energia odkształcenia na jednostkę objętości
 t — czas
 T — pewien okres czasu. Temperatura
 α — współczynnik rozszerzalności cieplnej

ROZDZIAŁ I

WSTĘP

1. Sprężystość. Wszystkie materiały konstrukcyjne mają w pewnym zakresie własności *sprężyste*, polegające na tym, że w przypadku, gdy siły zewnętrzne, powodujące *odkształcenie* ciała nie przekraczają pewnej granicy — odkształcenie znika z chwilą usunięcia tych sił. W książce niniejszej przyjmuje się, że ciała poddane działaniu sił zewnętrznych są *doskonale sprężyste*, tzn., że przyjmują dokładnie kształt początkowy z chwilą usunięcia sił.

Nie będziemy tutaj uwzględniać struktury molekularnej ciał sprężystych. Przyjmuje się, że ciało sprężyste wypełnione jest materiałem *jednorodnym*, rozłożonym w sposób ciągły w całej jego objętości tak, że nawet najmniejszy jego element ma takie same własności fizyczne jak całe ciało. W celu uproszczenia dyskusji przyjmuje się również, że ciało jest *izotropowe*, tzn., że jego własności sprężyste są takie same we wszystkich kierunkach.

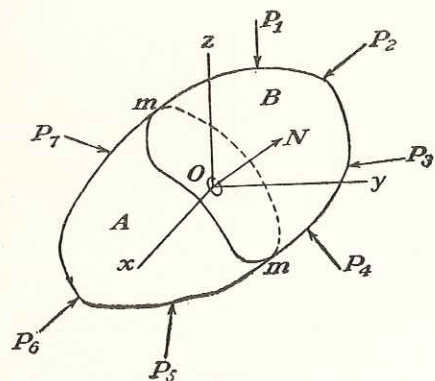
Materiały konstrukcyjne nie spełniają zwykle powyższych założeń. Materiał, np. tak ważny jak stal, wykazuje pod mikroskopem budowę krystaliczną, na którą składają się kryształy różnych rodzajów i różnej orientacji — jest więc bardzo daleki od jednorodności. Doświadczenie mimo to pokazuje, że rozwiązania teorii sprężystości oparte na przyjęciu jednorodności i izotropii materiału mogą być stosowane do konstrukcji stalowych z bardzo dużą dokładnością. Tłumaczy się to tym, że kryształy są bardzo małe — są ich miliony w jednym cm^3 stali. Chociaż własności sprężyste pojedynczego kryształu mogą się znacznie zmieniać w zależności od kierunku, to jednak ponieważ kryształy są zwykle rozłożone w sposób przypadkowy, własności sprężyste większych elementów metalowych mają średnie własności kryształów. Dopóki geometryczne wymiary określające kształt ciała są duże w porównaniu z wymiarami pojedynczego kryształu, można z dużą dokładnością zakładać, że materiał jest jednorodny, a jeśli kryształy mają orientacje przypadkowe, materiał można traktować jako izotropowy.

Gdy pewne procesy technologiczne (takie jak walcowanie) powodują przewagę jakiejś orientacji kryształów w metalu, własności sprężyste stają się zależne od kierunku i ciało powinno być rozpatrywane jako *anizotropowe*. Zjawisko tego rodzaju ma miejsce np. w przypadku miedzi walcowanej na zimno.

2. Naprężenie. Zakładamy, że ciało znajduje się w stanie równowagi (rys. 1). Pod działaniem sił zewnętrznych P_1, \dots, P_7 między cząsteczkami ciała zaczną działać siły wewnętrzne. W celu zbadania wielkości tych sił w dowolnym punkcie O , wyobraźmy sobie ciało podzielone na dwie części A i B za pomocą przekroju mm przechodzącego przez ten punkt. Rozpatrując jedną z tych części, np. część A , można stwierdzić, że znajduje się ona w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych P_1, \dots, P_7 oraz sił wewnętrznych rozłożonych na powierzchni przekroju mm i przedstawiających oddziaływanie materiału części B na materiał części A . Przyjmiemy, że siły te rozłożone są na powierzchni przekroju mm w sposób ciągły, podobnie jak parcie hydrostatyczne lub parcie wiatru rozłożone jest w sposób ciągły na po-

wierzchni, na którą działa. Wielkości takich sił określane są zwykle przez ich *intensywności*, tzn. przez wartość siły przypadającą na jednostkę powierzchni, na którą siła ta działa. Przy rozważaniu sił wewnętrznych intensywność tę nazywamy *naprężeniem*.

W najprostszym przypadku pryzmatycznego pręta, poddanego rozciąganiu siłami rozłożonymi równomiernie na jego końcach (rys. 2), siły wewnętrzne są także równomiernie rozłożone na powierzchni przekroju mm . Tak więc, intensywność tego rozkładu, czyli naprężenie, można otrzymać, dzieląc całkowitą siłę rozciągającą P przez powierzchnię przekroju A .



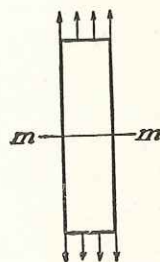
Rys. 1

W rozpatrzonym przykładzie (rys. 2) naprężenie było rozłożone równomiernie na powierzchni przekroju. W przypadku ogólnym, przedstawionym na rys. 1, naprężenie nie rozkłada się równomiernie na powierzchni przekroju mm . W celu określenia wielkości naprężenia, działającego na małą powierzchnię δA , wyciętą z przekroju mm i zawierającą punkt O , przyjmujemy, że siły działające na tę elementarną powierzchnię, wywołane działaniem materiału

części B na materiał części A , mogą być sprowadzone do wypadkowej δP . Jeśli obecnie w sposób ciągły będziemy zmniejszać elementarną powierzchnię δA , to granica stosunku $\delta P/\delta A$ da nam wielkość naprężenia działającego na przekrój mm w punkcie O . Kierunek graniczny wypadkowej δP jest kierunkiem naprężenia. W ogólnym przypadku kierunek naprężenia jest nachylony do powierzchni δA , na którą działa. Zwykle rozkładamy naprężenie na dwie składowe: *naprężenie normalne* prostopadłe do powierzchni i *naprężenie styczne* działające w płaszczyźnie powierzchni δA .

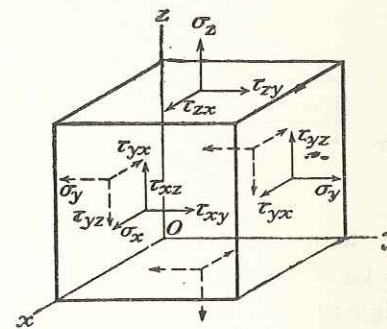
3. **Oznaczenia sił i naprężeń.** Na ciało mogą działać dwa rodzaje sił zewnętrznych. Siły rozłożone na powierzchni ciała, takie jak nacisk jednego ciała na drugie lub ciśnienie hydrostatyczne, nazywają się *siłami powierzchniowymi*. Siły rozłożone wewnątrz obszaru ciała, takie jak siły grawitacyjne, siły magnetyczne, czy też, jak to ma miejsce w przypadku ruchu ciała, siły inercji, nazywają się *siłami masowymi*. Siły powierzchniowe odniesione do jednostki powierzchni będziemy zwykle rozkładać na trzy składowe równoległe do osi współrzędnych i będziemy je oznaczać \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} . Również siły masowe odniesione do jednostki objętości rozłożymy na trzy składowe i składowe te oznaczymy przez X , Y , Z .

Symbolu σ używać będziemy do oznaczenia naprężenia normalnego, a symbolu τ — do oznaczenia naprężenia stycznego. Dla oznaczenia kierunku płaszczyzny, na którą działa naprężenie, posłużymy się wskaźnikami. W punkcie O (rys. 1) przedstawiamy element sześcienny, którego ścianki są równoległe do osi współrzędnych. Na rys. 3 oznaczono składowe naprężenia działającego na ścianki elementu oraz dodatnie zwroty tych składowych. Składowe normalne naprężenia, działającego na ścianki elementu prostopadłe na przykład do osi y , oznaczone są przez σ_y . Wskaźnik y oznacza, że naprężenie działa na płaszczyznę prostopadłą do osi y . Naprężenie normalne uważane jest za dodatnie, jeśli powoduje rozciąganie i ujemne, jeśli wywołuje ściskanie.



Rys. 2

Naprężenie styczne rozkłada się na dwie składowe równoległe do osi współrzędnych. W tym przypadku używa się dwóch wskaźników; pierwszy oznacza kierunek prostopadły do rozpatrywanej płaszczyzny, a drugi oznacza kierunek składowej naprężenia. Na przykład, jeśli ponownie rozpatrzmy ścianki prostopadłe do osi y , to składowa w kierunku x oznaczona jest przez τ_{yx} , a w kierunku z — przez τ_{yz} . Za zwroty dodatnie składowych naprężenia stycznego na każdej ze ścianek elementu sześciennego przyjmuje się te, które pokrywają się z kierunkiem osi współrzędnych, jeśli naprężenie rozciągające na tej samej ściance ma zwrot dodatni, zgodny ze zwrotem odpowiedniej osi. Jeśli naprężenie rozciągające ma zwrot przeciwny do dodatniego zwrotu osi, to zwroty dodatnie składowych naprężenia stycznego są odwrotne. Zgodnie z tą zasadą, dodatnie zwroty wszystkich składowych naprężenia działającego na prawostronne ścianki elementu sześciennego (rys. 3) pokrywają się z dodatnimi zwrotami osi współrzędnych. Dodatnie zwroty są przeciwne do zwrotów osi, jeśli rozpatrujemy lewostronne ścianki tego elementu.



Rys. 3

4. **Składowe naprężenia.** Z dyskusji w poprzednim paragrafie widzimy, że dla każdej pary równoległych ścianek elementu sześciennego, takiego jak na rys. 3, potrzeba jednego symbolu do oznaczenia składowej normalnej i dwóch symboli do oznaczenia składowych stycznych naprężenia. Aby opisać naprężenia działające na sześć ścian elementu sześciennego, konieczne są trzy symbole σ_x , σ_y , σ_z do oznaczenia naprężeń normalnych i sześć symboli τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy} , odpowiadających naprężeniom stycznym. Na podstawie prostych rozważań równowagi elementu, liczba symboli odpowiadających naprężeniom stycznym może być zmniejszona do trzech.

Jeśli na przykład weźmiemy moment działających na element sił względem osi x , to należy uwzględnić jedynie naprężenia pokazane na rys. 4. W interesującym nas przypadku siły masowe, takie jak ciężar elementu, mogą być pominięte, co wynika z faktu, że w miarę malenia wymiarów elementu, działające na niego siły masowe maleją z sześcianiem wymiarów liniowych, podczas gdy siły powierzchniowe maleją z kwadratem wymiarów liniowych. Tak więc, dla bardzo małego elementu siły masowe są wielkościami małymi wyższego rzędu, niż siły powierzchniowe i dlatego mogą być pominięte w porównaniu z siłami powierzchniowymi. Podobnie momenty wywołane nierównomiernym rozkładem sił normalnych są wyższego rzędu, niż momenty wywołane siłami stycznymi i znikają w miarę dążenia do granicy. Tak więc, siły na każdej ściance mogą być uważane za iloczyn powierzchni ścianki przez wartość naprężenia na środku ścianki. Oznaczając wymiary małego elementu podanego na rys. 4 przez dx , dy , dz i biorąc momenty względem osi x , otrzymujemy równanie równowagi tego elementu w postaci

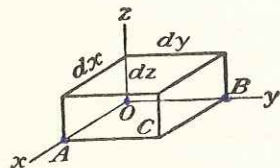
$$\tau_{zy} dx dy dz = \tau_{yz} dx dy dz$$

Dwa pozostałe równania można otrzymać w ten sam sposób. Z równań tych znajdujemy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad [1]$$

Wynika stąd, że naprężenia styczne na dwóch wzajemnie prostopadłych ściankach elementu sześciennego, prostopadłe do krawędzi tych ścianek, są sobie równe.

Dlatego też, dla opisu naprężeń działających na płaszczyzny współrzędnych w dowolnym punkcie, wystarcza sześć wielkości $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$; wielkości te nazywają się *składowymi naprężeniami* w punkcie.



Rys. 5

Pokażemy później (par. 7), że za pomocą tych sześciu składowych naprężenia można będzie określić naprężenie na dowolnie nachylonej płaszczyźnie przechodzącej przez ten sam punkt.

5. Składowe odkształcenia. Przy badaniu odkształcenia ciała sprężystego będziemy przyjmować, że istnieją odpowiednie więzy, które zapobiegają ruchowi ciała jako bryły sztywnej; w taki sposób nie istnieje żadna możliwość przemieszczeń poszczególnych części ciała bez jego odkształcenia.

W niniejszej książce rozpatrywane będą jedynie małe odkształcenia, jakie występują w konstrukcjach inżynierskich. Małe przemieszczenia cząstek odkształconego ciała rozkłada się na trzy składowe u, v, w , równoległe odpowiednio do osi współrzędnych x, y, z . Przyjmujemy, że składowe te są bardzo małymi wielkościami, zmieniającymi się w sposób ciągły wewnątrz całego ciała. Rozpatrzmy mały element $dx dy dz$ ciała sprężystego (rys. 5). Jeśli ciało podlega odkształceniu, a u, v, w są składowymi przemieszczenia w punkcie O , to przemieszczenie w kierunku osi x odległego o dx punktu A wynosi

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Przyrost $(\partial u / \partial x) dx$ funkcji u odpowiada przyrostowi współrzędnej x o wielkości dx . Przyrost długości elementu OA wywołany odkształceniem wynosi więc $(\partial u / \partial x) dx$, a odkształcenie jednostkowe w punkcie O w kierunku osi x jest równe $\partial u / \partial x$. W ten sam sposób można pokazać, że wydłużenia jednostkowe w kierunku osi y i z dane są pochodnymi $\partial v / \partial y$ oraz $\partial w / \partial z$.

Rozważmy obecnie zmianę kąta zawartego między elementami OA i OB (rys. 6). Jeśli u i v są przemieszczeniami w punkcie O w kierunku osi x i y , to przemieszczenie punktu A w kierunku osi y i przemieszczenie punktu B w kierunku osi x jest odpowiednio równe $v + (\partial v / \partial x) dx$ oraz $u + (\partial u / \partial y) dy$. Spowodowany tymi przemieszczeniami nowy kierunek $O'A'$ elementu OA odchylony jest od kierunku początkowego o mały kąt równy $\partial v / \partial x$. Podobnie kierunek $O'B'$ odchylony jest o mały kąt $\partial u / \partial y$ od kierunku OB . Z tego widać, że początkowy kąt prosty AOB , zawarty między elementami OA i OB , uległ zmniejszeniu o kąt $\partial v / \partial x + \partial u / \partial y$. Ta zmiana kąta jest odkształceniem postaciowym między płaszczyznami xz i yz . Odkształcenia postaciowe między płaszczyznami xy i xz oraz yx i yz można otrzymać w taki sam sposób.

Dla oznaczenia wydłużeń jednostkowych będziemy używać symbolu ϵ , a dla jednostkowych odkształceń postaciowych symbolu γ . Dla oznaczenia kierunków odkształceń posłużymy się takimi samymi wskaźnikami, jakich używaliśmy do oznaczenia składowych naprężenia.

Na podstawie tego, co zostało powiedziane, możemy napisać:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad [2]$$

Okaże się później, że mając trzy wydłużenia jednostkowe w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach oraz trzy jednostkowe odkształcenia postaciowe odniesione do tych samych kierunków, można wyznaczyć wydłużenia w *każdym* kierunku i wyliczyć zmianę kąta między *każdymi* dwoma kierunkami (por. par. 73). Sześć wielkości $\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}, \dots$ nazywa się *składowymi odkształceniami*.

6. Prawo Hooke'a. Związki między składowymi naprężeniami i składowymi odkształceniami zostały ustalone na drodze doświadczalnej i znane są jako *prawo Hooke'a*. Wyobraźmy sobie elementarny prostopadłościan ze ściankami równoległymi do osi współrzędnych, poddany działaniu naprężenia normalnego σ_x , rozłożonego równomiernie na dwóch przeciwległych ściankach. Doświadczenia pokazują, że w przypadku materiału izotropowego, naprężenia nie wywołują żadnych zmian kątowych elementu. Wielkość wydłużenia jednostkowego elementu wyrażona jest równaniem

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad [a]$$

w którym E oznacza *moduł sprężystości przy rozciąganiu*. W konstrukcjach inżynierskich używane są materiały, których moduły są bardzo duże w porównaniu z dopuszczalnymi naprężeniami i dlatego wydłużenie jednostkowe $[a]$ ma bardzo małą wartość. W przypadku konstrukcji stalowych wielkość ta jest zwykle mniejsza od 0,001.

Wydłużenie elementu w kierunku x związane jest ze zwężeniem poprzecznym, określonym zależnościami

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}; \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad [b]$$

w których ν jest wielkością stałą i nazywa się *liczbą Poissona*. Dla wielu materiałów można przyjąć liczbę *Poissona* równą 0,25. Dla stali konstrukcyjnych przyjmuje się zwykle $\nu = 0,3$.

Równania $[a]$ i $[b]$ można wykorzystać także i w przypadku prostego ściskania. Poniżej granicy sprężystości tak moduł sprężystości, jak i liczba *Poissona* są takie same w przypadku ściskania i rozciągania.

Jeśli omawiany element poddany jest działaniu naprężeń normalnych $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ rozłożonych równomiernie na powierzchni ścianek, to składowe odkształcenia wypadkowego można otrzymać za pomocą związków $[a]$ i $[b]$. Doświadczenia pokazują, że w celu otrzymania tych składowych można superponować składowe odkształcenia wywołane przez każde z trzech naprężeń. Stosując tę metodę, otrzymujemy zależność:

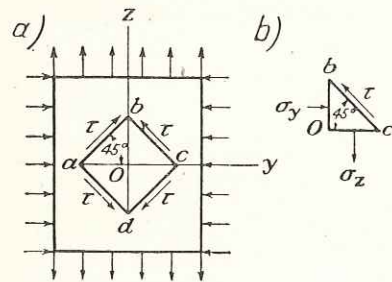
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad [3]$$

W naszych dalszych rozważaniach będących często stosować zasadę *superpozycji* przy obliczaniu całkowitych odkształceń i naprężeń wywołanych działaniem kilku sił. Zasada ta dopóty obowiązuje, dopóki są odkształcenia małe, a odpowiadające im małe przemieszczenia nie wpływają w sposób istotny na działanie sił zewnętrznych. W takim przypadku pomijamy małe zmiany wymiarów odkształczanych ciał, a tym samym pomijamy małe przemieszczenia punktów przyłożenia sił zewnętrznych i opieramy nasze obliczenia na wymiarach początkowych i początkowym kształcie ciała. Przemieszczenia wypadkowe otrzymamy więc przez superpozycję w postaci liniowych funkcji sił zewnętrznych, podobnie, jak przy wprowadzeniu równań [3].

Istnieją jednakże takie przypadki, w których małe odkształcenia nie mogą być pominięte, lecz muszą być brane pod uwagę. Jako przykład tego rodzaju można podać cienką belkę, na którą działają równocześnie siły osiowe i poprzeczne. Siły osiowe wywołują jedynie proste ściskanie lub rozciąganie, ale mogą mieć istotny wpływ na zginanie belki, jeśli działają one równocześnie z siłami poprzecznymi. Przy obliczaniu odkształcenia belek znajdujących się pod takim obciążeniem trzeba uwzględnić wpływ ugięcia na moment sił zewnętrznych, nawet gdy ugięcia te są bardzo małe¹⁾. Zatem, całkowite ugięcie nie jest już liniową funkcją sił i nie może być otrzymane za pomocą superpozycji.

Z równań [3] wynika, że związki między wydłużeniami i naprężeniami są w zupełności określone przez dwie stałe fizyczne: E i ν . Do określenia związku między odkształceniem postaciowym i naprężeniem stycznym mogą służyć również te same stałe.

Rozpatrzmy przypadek szczególny odkształcenia prostopadłościanu (rys. 7), w którym $\sigma_y = -\sigma_z$, a $\sigma_x = 0$. Po wycięciu elementu $abcd$ o ściankach równoległych do osi x i nachylonych



Rys. 7

pod kątem 45° do osi z i y można z łatwością stwierdzić (rys. 7b) (sumując siły w kierunku równoległym i prostopadłym do bc), że naprężenie normalne na ściankach tego elementu równa się zero, a naprężenie styczne ma wartość

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z \quad [c]$$

Taki stan naprężenia nazywa się *czystym ścinaniem*. Wydłużenie elementu pionowego Ob jest równe skróceniu elementów poziomych Oa i Oc . Pomijając wielkości małe drugiego rzędu, stwierdzamy, że długości ab

i bc elementu nie ulegają zmianie w procesie odkształcania. Kąt między ściankami ab i bc zmienia się, a odpowiednia wielkość odkształcenia postaciowego może być wyznaczona z trójkąta Obc . Po odkształceniu otrzymujemy

$$\frac{Oc}{Ob} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z}$$

Po podstawieniu równań [3]

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_y) = \frac{(1 + \nu) \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = - \frac{(1 + \nu) \sigma_z}{E}$$

¹⁾ Pewne przykłady tego rodzaju można znaleźć w książce: S. Timoshenko: „Strength of Materials“. T. II, str. 25—49.

uwzględniając, że dla małych γ

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

znajdujemy

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu) \sigma_z}{E} = \frac{2(1 + \nu) \tau}{E} \quad [4]$$

W ten sposób związek między odkształceniem postaciowym i naprężeniem stycznym określony jest za pomocą stałych E i ν . Często używa się oznaczenia

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad [5]$$

Wtedy równanie [4] przyjmuje postać

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Stała G , zdefiniowana związkiem [5], nazywana jest *modułem odkształcenia postaciowego*, *modułem ścinania* lub *modułem skręcania*.

Jeśli naprężenia styczne działają na ścianki elementu, tak jak to pokazano na rys. 3, zmiana kąta między każdymi dwoma osiami współrzędnych zależy jedynie od składowych naprężenia stycznego równoległych do tych osi i wyraża się zależnością

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad [6]$$

Wydłużenia [3] i zmiany postaciowe [6] są wzajemnie od siebie niezależne. A więc ogólny przypadek odkształcenia, wywołany trzema normalnymi i trzema stycznymi składowymi naprężeniami, może być otrzymany przez superpozycję. Na trzy wydłużenia dane równaniami [3] nakłada się trzy odkształcenia postaciowe dane równaniami [6].

Równania [3] i [6] podają składowe odkształcenia w funkcji składowych naprężenia. Niekiedy potrzebne są składowe naprężenia wyrażone w funkcji składowych odkształcenia. Można je otrzymać dodając do siebie równania [3] i używając oznaczeń

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad [7]$$

Otrzymujemy następujący związek między odkształceniem objętościowym e i sumą naprężeń normalnych

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \Theta \quad [8]$$

W przypadku równomiernego ciśnienia hydrostatycznego o wielkości p , mamy

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

a ze związków [8] otrzymujemy zależność

$$e = - \frac{3(1 - 2\nu)p}{E}$$

między jednostkowym odkształceniem objętościowym e i ciśnieniem hydrostatycznym p .

Wielkość $E/3(1 - 2\nu)$ nazywana jest *modułem odkształcenia objętościowego* lub *modułem ściśliwości*.

Używając oznaczeń [7] i rozwiązując równania [3] względem $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, znajdujemy

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_z \end{aligned} \quad [9]$$

Przy użyciu oznaczenia

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad [10]$$

i związku [5], zależności [9] przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \end{aligned} \quad [11]$$

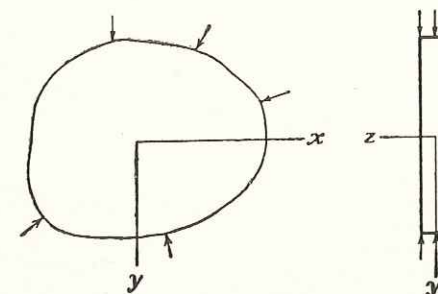
ZADANIA

1. Wykazać, że związki [1] pozostają w mocy, gdy element pokazany na rys. 4 znajduje się w ruchu i podlega przyspieszeniu kątowemu w taki sposób, jak ciało sztywne.
2. Wyobraźmy sobie materiał sprężysty, który zawiera szereg równomiernie rozłożonych małych namagnetyzowanych cząstek, a ich pole magnetyczne działa na każdy element $dx dy dz$ momentem $\mu dx dy dz$, licznym względem osi równoległej do osi x . Jakiej modyfikacji powinny ulec równania [1]?
3. Uzasadnić kilkoma przykładami, dlaczego równania [2] są ważne jedynie dla *małych* odkształceń.
4. Warstwa materiału sprężystego umieszczona jest między dwiema doskonale sztywnymi płytami, do których jest przytwierdzona. Warstwa ta jest ściskana między płytami naprężeniem σ_z . Zakładając, że tarcie o płyty zapobiega całkowicie odkształceniom poprzecznym ε_x i ε_y , znaleźć pozorny moduł *Younga* (tj. σ_z/ε_z) w funkcji E i ν . Pokazać, że moduł ten może być wielokrotnie większy od E w przypadku, jeśli materiał warstwy jest prawie nieściśliwy pod ciśnieniem hydrostatycznym.
5. Dowieść, że równanie [8] wynika z równań [11], [10] i [5].

ROZDZIAŁ 2

PLASKI STAN NAPRĘŻENIA I PLASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

7. Płaski stan naprężenia. Jeśli cienka tarcza jest obciążona siłami przyłożonymi na brzegu, równoległymi do płaszczyzn tarczy i równomiernie rozłożonymi na jej grubości (rys. 8), to składowe naprężenia $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ są równe zero na obu powierzchniach tarczy i można z początku przyjąć, że są one równe zero także na całej grubości tarczy. Stan naprężenia jest więc określony przez $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ i nazywa się *płaskim stanem naprężenia*. Można



Rys. 8

także przyjąć, że wymienione trzy składowe nie zależą od współrzędnej z , tzn. pozostają niezmiennie na całej grubości. Są więc one jedynie funkcjami zmiennych x i y .

8. Płaski stan odkształcenia. Podobnego rodzaju uproszczenie możliwe jest w innym przypadku krańcowym, w którym wymiar ciała w kierunku osi z jest bardzo duży. Jeśli ciało o kształcie cylindrycznym lub pryzmatycznym ma w jednym kierunku bardzo duże wymiary i jest obciążone siłami niezmiennymi się na długości i prostopadłymi do tego kierunku, to można przyjąć, że wszystkie przekroje poprzeczne znajdują się w tych samych warunkach. Najłatwiej jest początkowo założyć, że przekroje końcowe zawarte są między nieprzesuwającymi się sztywnymi płaszczyznami, co zapobiega przemieszczeniu w kierunku osiowym. Wpływ usunięcia tego ograniczenia zbadamy później. Ponieważ przemieszczenia osiowe na końcach ciała równają się zero, a względem przekroju środkowego zachodzi symetria, to można przyjąć, że to samo odnosi się do każdego przekroju.

Istnieje wiele ważnych zagadnień tego rodzaju; są to np.: zaporą obciążona ciśnieniem bocznym (rys. 9), rura tunelu (rys. 10), rura walcowa poddana ciśnieniu wewnętrznemu, wałek łożyska tocznego ściskany siłami w płaszczyźnie średnicy (rys. 11). W żadnym przypadku obciążenie nie może się zmieniać wzdłuż długości. Ponieważ każdy przekrój znajduje się w tych samych warunkach, wystarcza rozważyć jedynie warstwę wydzieloną dwoma przekrojami w odległości jednostkowej. Składowe przemieszczenia u i v są jedynie funkcjami