

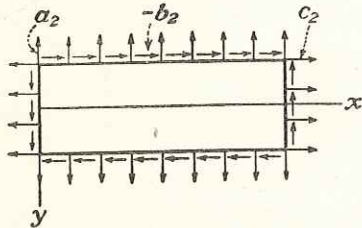
ROZDZIAŁ 3

ZAGADNIENIE DWUWYMIAROWE WE WSPÓLRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH

17. Rozwiązanie za pomocą wielomianów. Pokazaliśmy, że rozwiązanie zagadnień dwuwymiarowych w przypadkach, gdy nie ma sił masowych lub mają one wartości stałe, sprowadza się do całkowania równania różniczkowego

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad [a]$$

z uwzględnieniem warunków brzegowych [20]. W przypadku długiego, prostokątnego pasma można poszukiwać rozwiązań równania [a] w postaci wielomianów. Przyjmując wielomiany różnych stopni i odpowiednio dobierając ich współczynniki, można rozwiązać szereg praktycznie ważnych zagadnień¹⁾.



Rys. 21

Zaczynając od wielomianu drugiego stopnia

$$\Phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \quad [b]$$

który spełnia dokładnie równanie [a] i przyjmując $\rho g=0$, otrzymujemy na podstawie równań [29]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = c_2; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = a_2; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} = -b_2$$

Wszystkie trzy składowe są wielkościami stałymi w całym obszarze ciała, czyli funkcja naprężeń [b] opisuje kombinację równomiernego rozciągania lub ściskania²⁾ w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach oraz równomierne ścinanie. Siły na brzegach odniesione do jednostki powierzchni muszą być równe odpowiednim naprężeniom, zgodnie z omówieniem w par. 14; siły te w przypadku prostokątnej tarczy z brzegami równoległymi do osi współrzędnych pokazano na rys. 21.

Rozważmy obecnie funkcję naprężeń w postaci wielomianu trzeciego stopnia

$$\Phi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \quad [c]$$

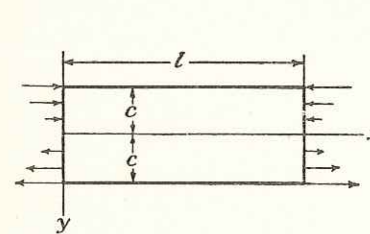
Funkcja powyższa także spełnia równanie [a]. Korzystając z równań [29] i przyjmując $\rho g=0$, znajdujemy

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y$$

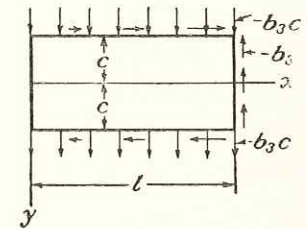
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y$$

Przyjmując dla płyty prostokątnej, pokazanej na rys. 22, wszystkie współczynniki z wyjątkiem d_3 równe zero, otrzymujemy czyste zginanie. Jeśli jedynie współczynnik a_3 jest różny



Rys. 22



Rys. 23

od zera, to otrzymujemy czyste zginanie spowodowane naprężeniami normalnymi przyłożonymi do brzegów tarczy $y = \pm c$. Jeśli przyjmie się, że od zera różny jest współczynnik b_3 lub c_3 , to oprócz naprężeń normalnych otrzymamy na brzegach tarczy naprężenia styczne. Na rys. 23 przedstawiony jest np. przypadek, w którym wszystkie współczynniki wielomianu [c] z wyjątkiem b_3 są równe zero.

Oznaczone kierunki naprężeń odpowiadają dodatniemu b_3 . Wzdłuż boków $y = \pm c$ działa odpowiednio równomiernie rozłożone naprężenie rozciągające i ściskające, a naprężenia styczne są proporcjonalne do x . Na brzegu $x=l$ działa jedynie stałe naprężenie styczne $-b_3 l$, a na brzegu $x=0$ nie ma żadnych naprężeń. Podobny rozkład naprężenia otrzymuje się, jeśli przyjąć c_3 różne od zera.

Przyjęcie funkcji naprężeń w postaci wielomianów drugiego i trzeciego stopnia pozwala na całkowitą swobodę w wyborze wielkości współczynników, ponieważ równanie [a] spełnione jest niezależnie od ich wielkości. W przypadku wielomianów wyższych stopni, równanie [a] spełnione jest jedynie wtedy, gdy między współczynnikami zachodzą pewne związki. Jeśli przyjmiemy funkcję naprężeń np. w postaci wielomianu czwartego stopnia

$$\Phi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4 \quad [d]$$

to po podstawieniu jej do równania [a] przekonamy się, że jest ono spełnione jedynie wtedy, gdy

$$e_4 = -(2c_4 + a_4)$$

¹⁾ A. Mesnager: „Compt. rend.“, t. 132, str. 1475, 1901; patrz także A. Timpe: „Z. Math. Physik“, t. 52 str. 348, 1905.

²⁾ Zależy to od znaku współczynników a_2 i b_2 . Kierunki naprężeń na rys. 21 odpowiadają dodatnim wartościom a_2 , b_2 i c_2 .

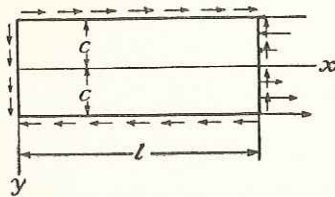
Składowe naprężenia w tym przypadku wynoszą

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4) y^2$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 xy - \frac{d_4}{2} y^2$$

Występujące w tych wyrażeniach współczynniki a_4, \dots, d_4 są dowolne i przez odpowiedni ich dobór możemy otrzymać różne warunki obciążenia prostokątnej tarczy. Przyjmując np. wszystkie współczynniki, z wyjątkiem d_4 , równe zeru, znajdujemy



Rys. 24

$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \quad [e]$$

Na rys. 24 pokazane są siły działające na prostokątną tarczę przy $d_4 > 0$ wywołujące naprężenia [e]. Na dłuższych brzegach $y = \pm c$ siły styczne rozłożone są równomiernie, a rozkład ich na końcach jest paraboliczny.

Działające na brzeg płyty siły styczne sprowadzić można do pary sił¹⁾, której moment wynosi

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} \cdot 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} \cdot 2c \cdot l = \frac{2}{3} d_4 c^3 l$$

Moment ten równoważy się z momentem wywołanym działaniem sił normalnych na brzegu płyty $x = l$.

Rozpatrzmy funkcję naprężeń w postaci wielomianu piątego stopnia

$$\Phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} xy^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5 \quad [f]$$

Po podstawieniu do równania [a] widzimy, że jest ono spełnione, gdy

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5)$$

$$f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)$$

Odpowiednie składowe naprężenia są równe

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) xy^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 xy^2 + \frac{d_5}{3} y^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 xy^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3$$

¹⁾ Przyjęto tu jednostkową grubość płyty.

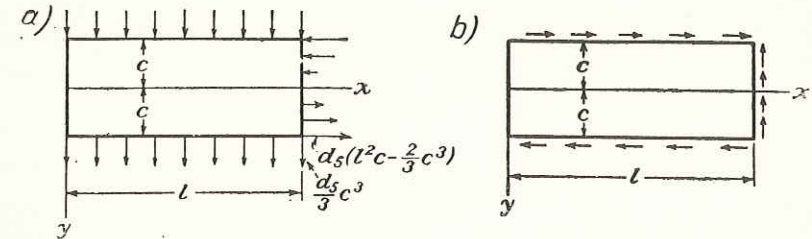
Współczynniki a_5, \dots, d_5 są dowolne i przez odpowiedni ich dobór otrzymujemy różne warunki obciążenia tarczy. Przyjmując np. wszystkie współczynniki z wyjątkiem d_5 równe zeru, otrzymujemy

$$\sigma_x = d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3$$

$$\tau_{xy} = -d_5 xy^2 \quad [g]$$

Siły normalne rozłożone są równomiernie wzdłuż dłuższych brzegów tarczy (rys. 25a). Wzdłuż brzegu $x = l$ siły normalne mają dwie składowe, z których jedna zmienia się liniowo, a druga podlega zmienności parabolicznej trzeciego stopnia. Siły styczne są proporcjonalne do x na dłuższych brzegach tarczy, a zmieniają się parabolicznie wzdłuż boku $x = l$. Ich rozkład pokazany jest na rys. 25b.



Rys. 25

Ponieważ równanie [a] jest równaniem różniczkowym liniowym, to można stwierdzić, że suma kilku rozwiązań tego równania jest także jego rozwiązaniem. Możemy superponować podane w tym paragrafie elementarne rozwiązania i w ten sposób dochodzić do nowych rozwiązań o znaczeniu praktycznym. W dalszym ciągu rozważamy kilka przykładów zastosowania metody superpozycji.

18. Zasada de Saint-Venanta¹⁾. W poprzednim paragrafie omówiliśmy kilka przykładów, w których ściśle rozwiązania dla tarcz prostokątnych uzyskano przez przyjęcie bardzo prostych postaci funkcji naprężeń Φ . W każdym przypadku spełnione są wszystkie równania teorii sprężystości, ale rozwiązania są poprawne jedynie wtedy, gdy siły powierzchniowe rozłożone są w określony sposób. W przypadku np. czystego zginania (rys. 22), moment zginający powinien być wywołany przyłożonym na końcach rozciąganiem i ściskaniem, proporcjonalnym do odległości od osi obojętnej. Zamocowanie brzegu, jeśli istnieje, powinno być takie, aby nie przeszkadzało jego deplacji. Jeśli omówione warunki nie są spełnione, tzn. jeśli moment jest przyłożony inaczej lub sposób podparcia wymusza powstanie innych sił w końcowym przekroju, to rozwiązanie podane w par. 17 nie jest już rozwiązaniem ścisłym. Praktyczny pożytek z rozwiązania nie ogranicza się jednak do takiego szczególnego przypadku. Może być ono stosowane z wystarczającą dokładnością i do takich przypadków zginania, w których warunki na końcach nie są tak rygorystycznie spełnione.

Takie rozszerzenie stosowalności rozwiązania opiera się zwykle na tzw. zasadzie de Saint-Venanta. Zasada ta mówi, że jeśli układ sił działający na małą część powierzchni ciała sprę-

¹⁾ Zasada ta była sformułowana w słynnej rozprawie o skręcaniu w „Mém. savants étrangers“, t. 14, 1855. Jej związek z zasadą zachowania energii omówiony będzie w dalszym ciągu książki (patrz par. 47).

zycznego zastąpić innym, ale statycznie równoważnym układem sił działającym na tę samą część powierzchni, to ta zmiana rozkładu obciążenia powoduje tylko lokalnie istotne zmiany w naprężeniach, ale znikomy jest jej wpływ na naprężenie w odległościach dużych w porównaniu z liniowymi rozmiarami powierzchni, na której został zmieniony układ sił. W przypadku np. czystego zginania prostokątnego pasma (rys. 22), którego wymiary poprzeczne są małe w porównaniu z długością, sposób przyłożenia zewnętrznego momentu zginającego wpływa na rozkład naprężenia jedynie w okolicy jego końców, a nie ma znaczenia dla przekrojów dostatecznie od końców oddalonych, w których rozkład naprężeń będzie praktycznie określony rozwiązaniem przedstawionym na rys. 22.

Jest to słuszne również w przypadku osiowego rozciągania. Rozkład naprężeń zależy od sposobu przyłożenia sił rozciągających jedynie w pobliżu obciążonego końca, a w przekrojach poprzecznych w pewnych odległościach od końca rozkład naprężeń jest praktycznie równomierny. Kilka przykładów ilustrujących to twierdzenie i pokazujących jak szybko rozkład naprężeń staje się praktycznie równomierny omówimy później (patrz par. 23).

19. Wyznaczenie przemieszczeń. Składowe odkształcenia można otrzymać na podstawie prawa Hooke'a (równania [3] i [6]), gdy znane są składowe naprężenia, wyznaczone na podstawie poprzednich równań. Przemieszczenia u i v można wyznaczyć wtedy z równań

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad [a]$$

Całkowanie tych równań w każdym konkretnym przypadku nie przedstawia żadnych trudności i możemy podać kilka przykładów ich zastosowania. Składowe odkształcenia [a] nie ulegną zmianie, co można natychmiast sprawdzić, jeśli do u i v dodać funkcje liniowe

$$u_1 = a + by; \quad v_1 = c - bx \quad [b]$$

w których a , b i c są wielkościami stałymi. Oznacza to, że przemieszczenia nie są jednoznacznie określone przez naprężenia i odkształcenia. Na przemieszczenia wywołane wewnętrznymi odkształceniami można nałożyć takie przemieszczenie, jakiego doznaje ciało sztywne; stałe a i c w równaniach [b] określają przesunięcie, a stała b — mały kąt obrotu ciała (traktowanego jako sztywne) względem osi z .

Pokazaliśmy poprzednio (patrz par. 15), że w przypadku stałych sił masowych rozkład naprężeń jest taki sam dla płaskiego stanu naprężenia, jak dla płaskiego stanu odkształcenia. Przemieszczenia są jednak różne w obu przypadkach, ponieważ w zagadnieniu płaskiego stanu naprężenia składowe odkształcenia wchodzące w skład równań [a] określone są związkami

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

a w zagadnieniu płaskiego stanu odkształcenia związkami

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu (1 + \nu) \sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Łatwo sprawdzić, że ostatnie równania można otrzymać z poprzednich (dla płaskiego stanu naprężenia), jeśli zamiast E podstawić $E/(1 - \nu^2)$, zamiast ν podstawić $\nu/(1 - \nu)$. Wymienione podstawienia nie dotyczą G , które nie zmienia się i wynosi $E/2(1 + \nu)$. Sposób całkowania równań [a] pokażemy w dalszym ciągu przy omawianiu zagadnień szczegółowych.

20. Zginanie wspornika obciążonego na końcu.

Rozpatrzmy wspornik o szerokości jednostkowej, zginany przyłożoną na końcu siłą P (rys. 26). Brzeg dolny i górny jest wolny od obciążenia, a siły styczne, tworzące wypadkową P , rozłożone są wzdłuż brzegu $x=0$. Warunki te można spełnić przez odpowiednią kombinację czystego ścinania z naprężeniami opisanymi równaniami [e] w par. 17 i przedstawionymi na rys. 24. Po nałożeniu czystego ścinania $\tau_{xy} = -b_2$ na naprężenia określone przez [e] otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_4 xy; & \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 \end{aligned} \quad [a]$$

Aby dłuższe brzegi $y = \pm c$ były wolne od naprężeń, musimy przyjąć

$$(\tau_{xy})_{y = \pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0$$

skąd otrzymujemy

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}$$

Dla spełnienia zadanego warunku na obciążonym końcu, suma rozłożonych na nim sił stycznych musi być równa P . Stąd¹⁾

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} \cdot dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P$$

skąd

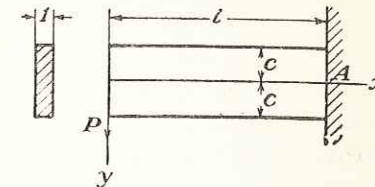
$$b_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{c}$$

Po podstawieniu wartości d_4 i b_2 do równań [a] mamy

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy; \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$$

¹⁾ Znak minus przed całką wynika z umowy określającej znak naprężenia stycznego. Naprężenie τ_{xy} na brzegu $x=0$ jest dodatnie, jeśli skierowane jest w górę (patrz par. 3).



Rys. 26

Wiedząc, że $\frac{2}{3} c^3$ jest momentem bezwładności J przekroju wspornika, mamy:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Pxy}{J}; & \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{J} \frac{1}{2} (c^2 - y^2) \end{aligned} \quad [b]$$

Wynik ten pokrywa się całkowicie z elementarnym rozwiązaniem podawanym w podręcznikach wytrzymałości materiałów. Należy podkreślić, że rozwiązanie to jest ściśle jedynie wtedy, gdy siły styczne na końcach rozłożone są według zależności parabolicznej, tak jak i naprężenie τ_{xy} , a intensywność sił normalnych na utwierdzonym brzegu jest proporcjonalna do y . Jeśli siły na końcach są rozłożone w jakiś inny sposób, to rozkład naprężeń [b] nie pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym na końcach wspornika, ale na podstawie zasady *de Saint-Venanta* może być uważany za zadowalający w przekrojach dostatecznie odległych od końców.

Rozważmy obecnie przemieszczenia odpowiadające naprężeniom [b]. Po zastosowaniu prawa *Hooke'a* znajdujemy

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EJ}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu Pxy}{EJ} \quad [c]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2JG} (c^2 - y^2) \quad [d]$$

W celu otrzymania składowych przemieszczenia u i v należy scałkować równania [c] i [d]. Całkowanie równań [c] daje

$$u = -\frac{Px^2y}{2EJ} + f(y); \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EJ} + f_1(x)$$

gdzie $f(y)$ i $f_1(x)$ są dotychczas nieznanymi funkcjami jednej zmiennej y lub x . Po podstawieniu znalezionych wartości u i v do równania [d] znajdujemy

$$-\frac{Px^2}{2EJ} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EJ} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2JG} (c^2 - y^2)$$

W równaniu tym pewne wyrazy są jedynie funkcjami x , inne są jedynie funkcjami y , a jeden nie zależy ani od x , ani od y . Oznaczając wymienione grupy przez $F(x)$, $G(y)$ i K , mamy:

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EJ} + \frac{df_1(x)}{dx}; \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EJ} - \frac{Py^2}{2JG}$$

$$K = -\frac{Pc^2}{2JG}$$

i równanie może być napisane w postaci

$$F(x) + G(y) = K$$

Równanie takie oznacza, że $F(x)$ musi być pewną stałą d , a $G(y)$ — pewną stałą e . Jeśli bowiem $F(x)$ i $G(y)$ mogłyby się zmieniać wraz z x i y , to zmieniając tylko x lub tylko y , nie można

by spełnić naszej równości. Tak więc

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2JG} \quad [e]$$

oraz

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EJ} + d; \quad \frac{df(y)}{dy} = -\frac{Py^2}{2EJ} + \frac{Py^2}{2JG} + e$$

Funkcje $f(y)$ i $f_1(x)$ są więc równe

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EJ} + \frac{Py^3}{6JG} + ey + g$$

$$f_1(x) = \frac{Px^3}{6EJ} + dx + h$$

Podstawiając je do wyrażań na u i v , mamy

$$u = -\frac{Px^2y}{2EJ} - \frac{\nu Py^3}{6EJ} + \frac{Py^3}{6JG} + ey + g \quad [g]$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EJ} + \frac{Px^3}{6EJ} + dx + h$$

Stałe d , e , g i h można obecnie określić z równania [e] i trzech warunków, spowodowanych przez więzy, zabezpieczające belkę przed takim ruchem, jakiemu podlegałoby ciało sztywne w płaszczyźnie xy . Przyjmujemy, że punkt środkowy A przekroju końcowego jest unieruchomiony. Wtedy dla $x=l$ i $y=0$ przemieszczenia u i v równają się zeru, a z równań [g] znajdujemy:

$$g = 0; \quad h = -\frac{Pl^3}{6EJ} - dl$$

Krzywą ugięcia otrzymuje się przez podstawienie $y=0$ do drugiego z równań [g]. Wtedy

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Pl^3}{6EJ} - d(l-x) \quad [h]$$

W celu określenia występującej w tym równaniu stałej d , musimy użyć trzeciego warunku utwierdzenia, który eliminuje możliwość obrotu belki w płaszczyźnie xy względem stałego punktu A . Takie zamocowanie można zrealizować w różny sposób. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1) Gdy element osi belki jest utwierdzony zupełnie na końcu w punkcie A . Wtedy warunkiem utwierdzenia jest

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l, y=0} = 0 \quad [k]$$

2) Gdy pionowy element przekroju jest utwierdzony zupełnie w punkcie A . Wtedy warunek utwierdzenia ma postać

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = 0 \quad [l]$$

W pierwszym przypadku z równania [h] otrzymujemy

$$d = -\frac{Pl^2}{2EJ}$$

a z równania [e] znajdujemy, że

$$e = \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Pc^2}{2JG}$$

Po podstawieniu wszystkich stałych do równań [g] otrzymujemy

$$u = -\frac{Px^2y}{2EJ} - \frac{\nu Py^3}{6EJ} + \frac{Py^3}{6JG} + \left(\frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Pc^2}{2JG}\right)y \quad [m]$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EJ} + \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Pl^2x}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ}$$

Równaniem krzywej ugięcia jest

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Pl^2x}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ} \quad [n]$$

Daje ono ugięcie obciążonego końca ($x=0$) równe wartości $Pl^3/3EJ$ podawanej zwykle w elementarnych podręcznikach wytrzymałości materiałów.

W celu przedstawienia spowodowanego naprężeniami stycznymi odkształcenia przekroju poprzecznego, rozważmy przemieszczenie u na utwierdzonym końcu $x=l$. Na podstawie równań [m] mamy:

$$(u)_{x=l} = -\frac{\nu Py^3}{6EJ} + \frac{Py^3}{6JG} - \frac{Pc^2y}{2JG}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} = -\frac{\nu Py^2}{2EJ} + \frac{Py^2}{2JG} - \frac{Pc^2}{2JG} \quad [o]$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}^{x=l} = -\frac{Pc^2}{2JG} = -\frac{3P}{4cG}$$

Kształt przekroju po odkształceniu jest taki, jak pokazuje rys. 27a. Element przekroju w punkcie A obraca się względem niego pod wpływem naprężenia stycznego $\tau_{xy} = -3P/4c$ o kąt $3P/4cG$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Jeśli zamiast elementu poziomej osi pionowy element przekroju jest utwierdzony w punkcie A (rys. 27b), to z warunku [l] i pierwszego z równań [g] znajdujemy, że

$$e = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

a z równania [e]

$$d = -\frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Pc^2}{2JG}$$

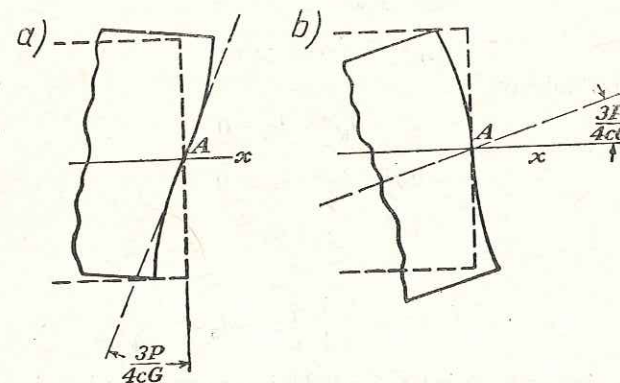
Po podstawieniu do drugiego z równań [g] znajdujemy

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Pl^2x}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{Pc^2}{2JG}(l-x) \quad [r]$$

Porównując ten wynik z równaniem [n] można stwierdzić, że ugięcia wspornika spowodowane obrotem końca osi w punkcie A (rys. 27b) wzrastają o wartość

$$\frac{Pc^2}{2JG}(l-x) = \frac{3P}{4cG}(l-x)$$

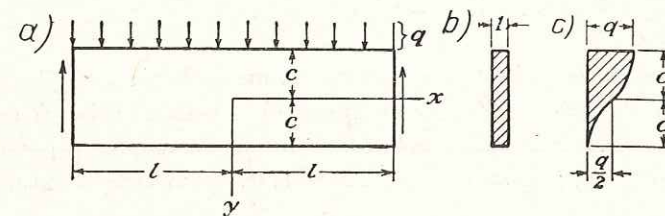
Jest to tzw. wpływ sił poprzecznych na ugięcie belki. W praktyce, na utwierdzonych końcach mamy warunki różne od pokazanych na rys. 27. Utwierdzony przekrój nie posiada zazwyczaj



Rys. 27

swobody odkształcenia i rozkład sił na omawianym końcu różny jest od tego, który wyrażają równania [b]. Rozwiązanie [b] jest jednak wystarczające dla odpowiednio długich wsporników w dostatecznej odległości od utwierdzonego końca.

21. Zginanie belki równomiernie rozłożonym obciążeniem. Belkę o wąskim przekroju i jednostkowej szerokości, podpartą na końcach, poddamy działaniu równomier-



Rys. 28

nie rozłożonego obciążenia o intensywności q (rys. 28). Na górnym i dolnym brzegu belki mamy następujące warunki:

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0; \quad (\sigma_y)_{y=+c} = 0; \quad (\sigma_y)_{y=-c} = -q \quad [a]$$

Warunki na końcach $x=\pm l$ mają postać

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql; \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0; \quad \int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = 0 \quad [b]$$

Ostatnie dwa z warunków [b] wskazują na to, że na końcach belki nie ma sił podłużnych i że nie działają na nie pary sił. Wszystkie warunki [a] i [b] można spełnić przez kombinację

pewnych rozwiązań otrzymanych w par. 17 w postaci wielomianów. Zaczniemy od rozwiązania [g] pokazanego na rys. 25. W celu wyeliminowania naprężeń rozciągających, działających wzdłuż brzegu $y=c$ i naprężeń stycznych na brzegach $y=\pm c$, dokonujemy superpozycji prostego ściskania $\sigma_y=a_2$ (rozwiązanie [b] par. 17) i naprężeń $\sigma_y=b_3y$ oraz $\tau_{xy}=-b_3x$, przedstawionych na rys. 23. Postępując w ten sposób, znajdujemy:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_5(x^2y - \frac{2}{3}y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{3}d_5y^3 + b_3y + a_2 \\ \tau_{xy} &= -d_5xy^2 - b_3x\end{aligned}\quad [c]$$

Z warunków [a] otrzymujemy

$$\begin{aligned}-d_5c^2 - b_3 &= 0 \\ \frac{1}{3}d_5c^3 + b_3c + a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{3}d_5c^3 - b_3c + a_2 &= -q\end{aligned}$$

skąd

$$a_2 = -\frac{q}{2}; \quad b_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}; \quad d_5 = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}$$

Po podstawieniu do równań [c], wiedząc, że $2c^3/3$ jest momentem bezwładności J przekroju prostokątnego o szerokości jednostkowej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) = -\frac{q}{2J}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) \\ \sigma_y &= -\frac{3q}{4c^3}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right) = -\frac{q}{2J}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4c^3}(c^2 - y^2)x = -\frac{q}{2J}(c^2 - y^2)x\end{aligned}\quad [d]$$

Można łatwo sprawdzić, że podane składowe naprężenia spełniają nie tylko warunki [a] na dłuższych brzegach, ale także pierwsze dwa warunki [b] na końcach belki. W celu zlikwidowania momentów działających na końce belki, dodamy do rozwiązania [d] stan czystego zginania, $\sigma_x=d_3y$, $\sigma_y=\tau_{xy}=0$, pokazany na rys. 22. Stałą d_3 wyznaczmy z warunku dla $x=\pm l$.

$$\int_{-c}^c \sigma_{xy} dy = \int_{-c}^c \left[-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(l^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + d_3y \right] y dy = 0$$

z którego

$$d_3 = \frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)$$

Na tej podstawie ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) + \frac{3}{4}\frac{q}{c}\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)y = \\ &= \frac{q}{2J}(l^2 - x^2)y + \frac{q}{2J}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)\end{aligned}\quad [33]$$

Pierwszy składnik w powyższym wyrażeniu przedstawia naprężenia, które otrzymuje się zwykle na podstawie elementarnej teorii zginania, a drugi — wprowadza konieczną poprawkę. Poprawka ta nie zależy od x i jest mała w porównaniu z maksymalną wartością naprężenia zginającego przy założeniu, że rozpiętość belki jest duża w porównaniu z jej wysokością. Dla takich belek elementarna teoria zginania daje dostatecznie dokładne wartości naprężenia. Należy podkreślić, że równanie [33] przedstawia rozwiązanie dokładne tylko wtedy, gdy siły podłużne na końcach $x=\pm l$ rozłożone są według zależności

$$\bar{X} = \frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)$$

tzn. jeśli są takie same dla $x=\pm l$ jak naprężenia σ_x wyrażone równaniem [33]. Siły te mają wypadkową i moment wypadkowy równy zero. Posługując się zasadą *Saint-Venanta* możemy wnioskować, że wpływ tych sił na naprężenia w dostatecznej odległości od końców, powiedzmy w odległości większej niż wysokość belki, może być pominięty. Dlatego rozwiązanie [33] jest w tych punktach dostatecznie dokładne gdy nie ma sił \bar{X} .

Różnica między rozwiązaniem ścisłym [33] i rozwiązaniem przybliżonym, określonym przez pierwszy składnik równania [33], wywołana jest tym, że przy otrzymywaniu rozwiązania przybliżonego przyjmuje się, że włókna podłużne belki znajdują się w stanie prostego rozciągania. Z rozwiązania [d] wynika, że między włóknami działają naprężenia ściskające σ_y . Naprężenia te odpowiadają poprawce określonej drugim składnikiem rozwiązania [33]. Rozkład naprężeń ściskających σ_y na grubości belki pokazany jest na rys. 28c. Rozkład naprężeń stycznych τ_{xy} na grubości belki opisany jest trzecim ze wzorów [d] i pokrywa się z rozkładem otrzymywanym zwykle na podstawie teorii elementarnej.

Gdy belka obciążona jest ciężarem własnym zamiast obciążenia q , to rozwiązanie należy zmodyfikować przez podstawienie $q=2qgc$ do [33] i do dwóch ostatnich równań [d] oraz przez dodanie naprężeń

$$\sigma_x=0; \quad \sigma_y=qg(c-y); \quad \tau_{xy}=0\quad [e]$$

Rozkład naprężeń [e] można otrzymać ze związków [29] przyjmując

$$\Phi = \frac{1}{2}qg(cx^2 + y^3/3)$$

Rozkład ten przedstawia stan naprężenia wywołany ciężarem własnym i siłami na brzegu. Na górnym brzegu $y=-c$ mamy $\sigma_y=2qgc$, a na dolnym (dla $y=c$) $\sigma_y=0$. Tak więc, gdy naprężenia [e] dodad do poprzedniego rozwiązania dla $q=2qgc$, to naprężenie na obu brzegach poziomych równa się zero, a obciążenie belki stanowi jedynie ciężar własny.

Przemieszczenia u i v można obliczyć w sposób przedstawiony w poprzednim paragrafie. Przyjmując, że w punkcie położonym w środku belki ($x=0, y=0$) przemieszczenie poziome równa się zero, a przemieszczenie pionowe równe jest ugięciu δ , znajdujemy, wykorzystując rozwiązania [d] i [33],

$$\begin{aligned}u &= \frac{q}{2EJ}\left[\left(l^2x - \frac{x^3}{3}\right)y + x\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right) + vx\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y + \frac{2}{3}c^3\right)\right] \\ v &= -\frac{q}{2EJ}\left\{\frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y + v\left[(l^2 - x^2)\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5}c^2y^2\right]\right\} + \\ &\quad -\frac{q}{2EJ}\left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5}c^2x^2 + \left(1 + \frac{1}{2}v\right)c^2x^2\right] + \delta\end{aligned}$$

Z wyrażenia określającego u można wyciągnąć wniosek, że powierzchnia obojętna nie pokrywa się z linią środkową belki. Linia środkowa doznaje odkształcenia dodatniego $\nu q/2E$, wywołanego naprężeniem ściskającym

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\frac{q}{2}$$

skąd znajdujemy, że

$$(u)_{y=0} = \frac{\nu q x}{2E}$$

Z wyrażenia dla v wyznaczamy krzywą ugięcia

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EJ} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu\right) c^2 x^2 \right] \quad [f]$$

Z warunku, że ugięcie linii środkowej na końcach ($x = \pm l$) jest równe zero, znajdujemy

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{q l^4}{EJ} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad [34]$$

Czynnik przed nawiasem wyraża ugięcie, które otrzymuje się na podstawie rozważań elementarnych przy założeniu, że przekroje belki pozostają płaskie w trakcie zginania. Drugi ze składników w nawiasach przedstawia poprawkę nazywaną zwykle wpływem sił poprzecznych.

Przez dwukrotne zróżniczkowanie równania krzywej ugięcia [f] względem x , otrzymujemy następujące wyrażenia na krzywiznę

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{y=0} = \frac{q}{EJ} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad [35]$$

Można zauważyć, że krzywizna nie jest ściśle proporcjonalna do momentu zginającego¹⁾ $q(l^2 - x^2)/2$. Dodatkowy składnik w nawiasach stanowi poprawkę, którą trzeba dodać do zwykłego równania elementarnego. Ogólniejsze badania krzywizny belek pokazują²⁾, że poprawka podana w wyrażeniu [35] może być wykorzystana również w przypadku każdego obciążenia, którego intensywność zmienia się w sposób ciągły. Wpływ siły poprzecznej na ugięcie w przypadku obciążenia skupionego omówimy później (par. 36).

Elementarne badania wpływu sił poprzecznych na krzywiznę krzywej ugięcia belek były prowadzone w Anglii przez Rankine'a³⁾, a w Niemczech przez Grashofa⁴⁾. Gdy maksymalne odkształcenie postaciowe na osi obojętnej prostokątnej belki o szerokości jednostkowej jest równe $\frac{3}{8}(Q/2cG)$, gdzie Q oznacza siłę poprzeczną, to wzrost krzywizny określa pochodna tego odkształcenia względem x i wynosi $\frac{3}{8}(q/2cG)$. Poprawione na podstawie elementarnych rozważań wyrażenie na krzywiznę jest więc równe

$$\frac{q}{EJ} \cdot \frac{l^2 - x^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{q}{2cG} = \frac{q}{EJ} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2(1 + \nu) \right]$$

Z porównania tego równania z wyrażeniem [35] wynika, że rozwiązanie elementarne podaje zbyt dużą wartość⁵⁾ poprawki.

¹⁾ Pierwszy zwrócił na to uwagę K. Pearson: „Quart. J. Math.“, t. 24, str. 63, 1889.

²⁾ Patrz praca T. v. Kármán: „Abhandl. aerodynam. Inst., Techn. Hochschule“, Aachen, t. 7, str. 3, 1927.

³⁾ Rankine: „Applied Mechanics“. Wyd. 14. Str. 344, 1895.

⁴⁾ Grashof: „Elastizität und Festigkeit“. Wyd. 2. 1878.

⁵⁾ Lepsze przybliżenie zostało otrzymane na podstawie elementarnych rozważań opartych na energii odkształcenia. Patrz S. Timoshenko: „Strength of Materials“. Wyd. 2. t. 1. Str. 299.

Poprawki na krzywiznę w równaniu [35] nie można przypisać jedynie siły poprzecznej. Wywołana jest ona częściowo naprężeniami ściskającymi σ_y . Naprężenia te rozłożone są nierównomiernie na wysokości belki. Wywołane nimi rozszerzenie poprzeczne w kierunku x maleje w miarę zbliżania się do powierzchni dolnej belki i w ten sposób powstaje krzywizna odwrotna (o wypukłości skierowanej do góry). Krzywizna ta, łącznie z wpływem siły poprzecznej, powoduje poprawkę w równaniu [35].

22. Inne przypadki belek obciążonych w sposób ciągły. Przez zwiększanie stopnia wielomianów użytych do otrzymania rozwiązań zagadnienia dwuwymiarowego (par. 17) można otrzymać rozwiązania zagadnień zginania w przypadku różnych rodzajów obciążenia zmieniającego się w sposób ciągły¹⁾.

Przyjmując na przykład rozwiązanie w postaci wielomianu szóstego stopnia i łącząc je z rozwiązaniami uzyskanymi w par. 17, można otrzymać naprężenia w pionowym wsporniku obciążonym ciśnieniem hydrostatycznym (rys. 29). W ten sposób można pokazać, że wszystkie warunki na pionowych krawędziach wspornika spełnione są przez następujące składowe naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q x^3 y}{4c^3} + \frac{q}{4c^3} \left(-2xy^3 + \frac{6}{5} c^2 xy \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q x}{2} + q x \left(\frac{y^3}{4c^3} - \frac{3y}{4c} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{3q x^2}{8c^3} (c^2 - y^2) - \frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2) \end{aligned} \quad [a]$$

Tutaj q jest ciężarem cieczy na jednostkę objętości, a więc intensywność obciążenia na głębokości x wynosi qx . Siła styczna i moment zginający na tej samej wysokości są równe odpowiednio $qx^2/2$ i $qx^3/6$. Pierwsze składniki wyrażen na σ_x i τ_{xy} pokrywają się oczywiście z wartościami naprężeń obliczonych na podstawie zwykłych równań elementarnych.

Na górnym końcu belki ($x=0$) naprężenie normalne jest równe zero, zaś naprężenie styczne wynosi

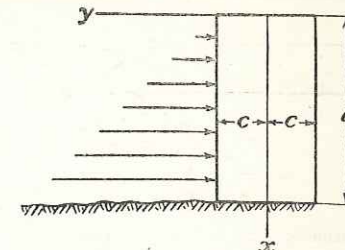
$$\tau_{xy} = -\frac{q}{8c^3} (c^4 - y^4) + \frac{q}{4c^3} \frac{3}{5} c^2 (c^2 - y^2)$$

Chociaż naprężenia te różnią się od zera, są jednak bardzo małe na całej powierzchni przekroju, a ich wypadkowa równa się zero i dlatego nasz warunek zbliżony jest do warunku końca swobodnego.

Przez dodanie do σ_x w równaniach [a] składnika $-q_1 x$ (przy czym q_1 oznacza ciężar jednostki objętości materiału zapory) uwzględnia się wpływ ciężaru własnego na rozkład naprężenia. Proponowano²⁾ już zastosować otrzymane właśnie rozwiązanie do obliczania naprężeń w zaporach o przekroju prostokątnym. Należy zaznaczyć, że rozwiązanie to nie spełnia warunków przy podstawie zapory. Rozwiązanie [a] jest ściśle, jeśli rozkład sił działających na podstawę pokrywa się z rozkładem σ_x i τ_{xy} określonych rozwiązaniem [a]. W rzeczywistości podstawa zapory połączona jest z podłożem i warunki są różne od tych, które narzuca rozwią-

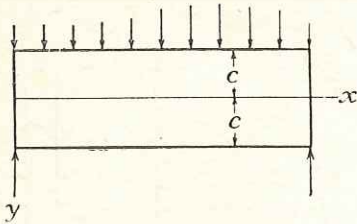
¹⁾ Patrz prace Timpe'a, loc. cit.; W. R. Osgood: „J. Research Natl. Bur. Standards“. T. 28. Str. 159, 1942.

²⁾ M. Levy: „Compt. rend.“ T. 126. Str. 1235, 1898.



Rys. 29

zanie. Na podstawie zasady *de Saint-Venanta* można stwierdzić, że wpływ utwierdzenia podstawy można pominąć w dużych odległościach od podstawy, ale w przypadku zapory szerokość przekroju $2c$ zwykle nie jest mała w porównaniu z jej wysokością l i wpływ ten nie może być pominięty¹⁾.



Rys. 30

można obliczać w sposób przybliżony z następujących równań²⁾:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{My}{J} + q \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2J} (c^2 - y^2) \end{aligned} \quad [36]$$

w którym M i Q oznaczają moment zginający i siłę poprzeczną, obliczone w zwykły sposób, a q jest intensywnością obciążenia w rozpatrywanym przekroju. Równania te są zgodne z otrzymanymi poprzednio dla belki obciążonej równomiernie (patrz par. 21).

Jeśli obciążenie o intensywności q rozłożone jest wzdłuż dolnego brzegu belki ($y = +c$) i skierowane w dół, wtedy wyrażenia dla naprężeń otrzymuje się z równań [36] przez superpozycję z równomiernym rozciąganiem $\sigma_y = q$ i mamy:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{My}{J} + q \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3}{10} \frac{y}{c} \right) \\ \sigma_y &= \frac{q}{2} + q \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{Q}{2J} (c^2 - y^2) \end{aligned} \quad [36']$$

23. Rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego w postaci szeregów Fouriera. Pokazaliśmy, że jeśli obciążenie rozłożone jest w sposób ciągły wzdłuż prostokątnej belki o wąskim przekroju, to można posługiwać się w pewnych prostych przypadkach funkcją naprężeń w postaci wielomianów. Jeśli obciążenie jest nieciągłe, można użyć funkcji naprężeń w postaci szeregów trygonometrycznych³⁾. Równanie dla funkcji naprężeń

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad [a]$$

¹⁾ Zagadnienie naprężeń w zaporach kamiennych przedstawia duże znaczenie praktyczne i było omawiane przez różnych autorów. Patrz *K. Pearson*: „On Some Disregarded Points in the Stability of Masonry Dams”. *Drapers' Co. Research Mems.*, 1904; *K. Pearson* and *C. Pollard*: „An Experimental Study of the Stresses in Masonry Dams”. *Drapers' Co. Research Mems.*, 1907. Patrz także prace: *L. F. Richardson*: „*Trans. Roy. Soc.*” (London) seria A, T. 210, str. 307, 1910; *S. D. Carothers*: „*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*”, T. 33, str. 292, 1913; *I. Muller*: „*Publications du laboratoire de photoélasticité*”, Zürich, 1930. *Fillunger*: „*Oesterr. Wochschr. öffentl. Baudienst*”, 1913, Zesz. 45; *K. Wolf*: „*Sitzber. Akad. Wiss.*” Wien, T. 123, 1914.

²⁾ *F. Seewald*: *Abhandl. aerodynam. Inst., Techn., Hochschule, Aachen*, T. 7, str. 11, 1927.

³⁾ Pierwsze zastosowanie szeregów trygonometrycznych do rozwiązania zagadnień dotyczących belek podał *M. C. Ribière* w dysertacji: „*Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles*”, Bordeaux, 1889. Patrz także jego praca w *Compt.*, t. 126, str. 402—404 oraz 1190—1192. Dalszego rozwoju zastosowania tej metody rozwiązania dokonał *L. N. G. Filon*: „*Phil. Trans.*”, seria A, t. 201, str. 63, 1903. Kilka zadań szczegółowych opracował *F. Bleich*: „*Bauingenieur*”, t. 4, str. 255, 1923.

można spełnić przez przyjęcie jej w postaci

$$\Phi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y) \quad [b]$$

gdzie m jest liczbą całkowitą a funkcja $f(y)$ zależy jedynie od y . Podstawiając [b] do równania [a] i oznaczając $m\pi/l = \alpha$, otrzymujemy następujące równanie określające funkcję $f(y)$:

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0 \quad [c]$$

Całką ogólną tego liniowego równania różniczkowego ze stałymi współczynnikami jest

$$f(y) = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y$$

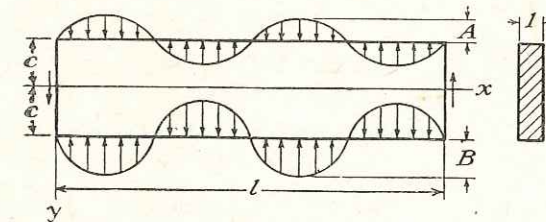
Funkcja naprężeń natomiast ma postać

$$\Phi = \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \quad [d]$$

a odpowiednie składowe naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sin \alpha x [C_1 \alpha^2 \cosh \alpha y + C_2 \alpha^2 \sinh \alpha y + C_3 \alpha (2 \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y) + \\ &\quad + C_4 \alpha (2 \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)] \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y) \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\alpha \cos \alpha x [C_1 \alpha \sinh \alpha y + C_2 \alpha \cosh \alpha y + C_3 (\cosh \alpha y + \\ &\quad + \alpha y \sinh \alpha y) + C_4 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)] \end{aligned} \quad [e]$$

Rozpatrzmy szczególnie przypadek prostokątnej belki podpartej na końcach i poddanej na górnej i dolnej powierzchni działaniu rozłożonych w sposób ciągły pionowych sił o intensywności odpowiednio $A \sin \alpha x$ i $B \sin \alpha x$.



Rys. 31

Rys. 31 przedstawia przypadek, w którym $\alpha = 4\pi/l$, a A i B mają wartości dodatnie. Rozkład naprężeń dla tego przypadku można otrzymać z rozwiązania [e]. Stałe całkowania $C_1 \dots C_4$ można otrzymać z warunków brzegowych na górnej i dolnej krawędzi belki $y = \pm c$. Warunki te mają postać:

$$\begin{aligned} \text{dla } y = +c & \quad \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = -B \sin \alpha x \\ \text{dla } y = -c & \quad \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = -A \sin \alpha x \end{aligned} \quad [f]$$

Po podstawieniu tych wartości do trzeciego z równań [e], znajdujemy:

$$\begin{aligned} C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) + C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) &= 0 \\ -C_1 \alpha \sinh \alpha c + C_2 \alpha \cosh \alpha c + C_3 (\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c) - C_4 (\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c) &= 0 \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} C_3 &= -C_2 \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c} \\ C_4 &= -C_1 \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c} \end{aligned} \quad [g]$$

Korzystając z warunków na powierzchniach $y = \pm c$ na podstawie drugiego z równań [e] otrzymujemy

$$\alpha^2 (C_1 \cosh \alpha c + C_2 \sinh \alpha c + C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) = B$$

$$\alpha^2 (C_1 \cosh \alpha c - C_2 \sinh \alpha c - C_3 c \cosh \alpha c + C_4 c \sinh \alpha c) = A$$

Przez dodanie i odjęcie tych równań oraz wykorzystanie związków [g], znajdujemy:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A+B}{\alpha^2} \cdot \frac{\sinh \alpha c + \alpha c \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \\ C_2 &= -\frac{A-B}{\alpha^2} \cdot \frac{\cosh \alpha c + \alpha c \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \\ C_3 &= \frac{A-B}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \\ C_4 &= -\frac{A+B}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \end{aligned} \quad [h]$$

Po podstawieniu powyższych związków do równań [e] otrzymujemy następujące wyrażenia dla składowych naprężeń:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (A+B) \frac{(\alpha c \cosh \alpha c - \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x + \\ &\quad - (A-B) \frac{(\alpha c \sinh \alpha c - \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x \\ \sigma_y &= - (A+B) \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x + \\ &\quad + (A-B) \frac{(\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c) \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x \\ \tau_{xy} &= - (A+B) \frac{\alpha c \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x + \\ &\quad + (A-B) \frac{\alpha c \sinh \alpha c \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \cosh \alpha c}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x \end{aligned} \quad [k]$$

Naprężenia te spełniają pokazane na rys. 31 warunki wzdłuż brzegów $y = \pm c$. Na końcach belki $x=0$ i $x=l$ naprężenia σ_x równają się zeru, a występują jedynie naprężenia styczne τ_{xy} .

Naprężenia te przedstawione są dwoma składnikami (patrz wzory [k]). Pierwszy składnik jest proporcjonalny do $A+B$ i odpowiada naprężeniom, które na górnej i dolnej połowie przekroju końcowego mają te same wielkości, ale różnią się znakiem. Wypadkowa tych naprężeń na całym przekroju końcowym równa się zeru. Drugi składnik jest proporcjonalny do $A-B$ i posiada na końcach belki wypadkową, która jest w równowadze z obciążeniem przyłożonym na powierzchniach belki $y = \pm c$.

Jeśli obciążenia są takie same na obu powierzchniach, to współczynniki A i B są sobie równe, a siły reakcji na końcach belki znikają. Rozpatrzmy ten przypadek szczególnie bardziej szczegółowo przyjmując, że długość belki jest duża w porównaniu z jej wysokością. Z drugiego równania [k] wynika, że naprężenia σ_y na powierzchni środkowej belki $y=0$ równają się

$$\sigma_y = -2A \frac{\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \sin \alpha x \quad [l]$$

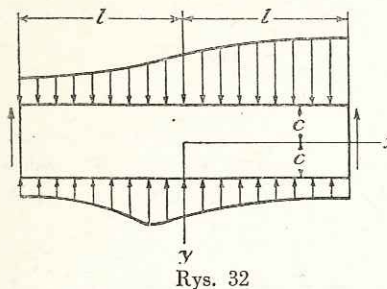
Dla długich belek αc równe $m\pi c/l$ jest wielkością małą pod warunkiem, że liczba fal m nie jest duża. Wtedy, po podstawieniu do [l] rozwinięć

$$\sinh \alpha c = \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots \quad \cosh \alpha c = 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots$$

i po pominięciu wielkości małych rzędu wyższego niż $(\alpha c)^4$, znajdujemy:

$$\sigma_y = -A \sin \alpha x \left(1 - \frac{(\alpha c)^4}{24} \right)$$

Tak więc, w przypadku małych wartości αc rozkład naprężeń na powierzchni środkowej belki jest praktycznie taki sam, jak i na obu powierzchniach poziomych $y = \pm c$. Można więc stwierdzić, że naciski przenoszone są przez materiał belki lub tarczy bez jakichś istotnych zmian pod warunkiem, że zmienność tych nacisków wzdłuż brzegów nie jest szybka.



Rys. 32

Naprężenia styczne τ_{xy} w tym przypadku są bardzo małe.

Na górnej i dolnej połowie przekrojów końcowych tworzą one małe wypadkowe, konieczne do zrównoważenia małych różnic między naciskami na powierzchniach poziomych ($y = \pm c$) i w płaszczyźnie środkowej ($y=0$).

W najogólniejszym przypadku rozkład obciążenia pionowego na powierzchni górnej i dolnej belki (rys. 32) można przedstawić za pomocą następujących szeregów¹⁾: na brzegu górnym

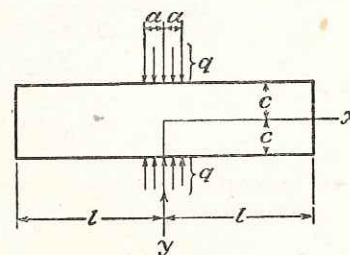
$$q_u = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{l}$$

na brzegu dolnym

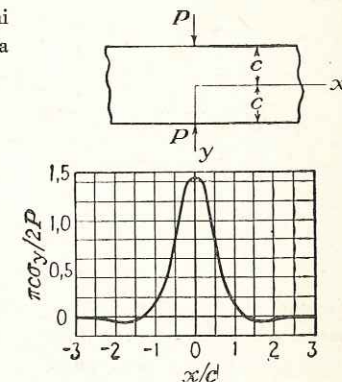
$$q_l = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m \cos \frac{m\pi x}{l}$$

[m]

Stałe składniki A_0 i B_0 odpowiadają równomiernemu obciążeniu belki omówionemu w par. 21. Naprężenia wywołane składnikami zawierającymi $\sin (m\pi x/l)$ można otrzymać przez zsumowanie rozwiązań [k]. Naprężenia spowodowane składnikami zawierającymi $\cos (m\pi x/l)$ można łatwo uzyskać z rozwiązań [k] przez zmianę $\sin \alpha x$ na $\cos \alpha x$ i odwrotnie oraz przez zmianę znaku τ_{xy} .



Rys. 33



Rys. 34

W celu zilustrowania zastosowania tej ogólnej metody obliczania naprężeń w tarczach prostokątnych rozpatrzmy przypadek pokazany na rys. 33. W przypadku tym obciążenie jest symetryczne i w wyrażeniach [m] znikają składniki zawierające $\sin (m\pi x/l)$, a współczynniki A_0 i A'_m otrzymuje się w zwykły sposób;

$$A_0 = B_0 = \frac{qa}{l}; \quad A'_m = B'_m = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2q \sin \frac{m\pi a}{l}}{m\pi} \quad [n]$$

¹⁾ Odnosnie szeregów Fouriera patrz Osgood: „Advanced Calculus“, 1928; lub Byerly: „Fourier Series and Spherical Harmonics“, 1902; lub Churchill: „Fourier Series and Boundary Value Problems“, 1941.

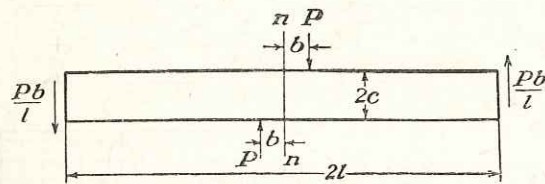
Składniki A_0 i B_0 odpowiadają równomiernemu ścisnaniu w kierunku y równemu qa/l . Naprężenia wywołane składnikami trygonometrycznymi otrzymuje się przez wykorzystanie rozwiązań [k], zamiast $\sin(\alpha x)$ na $\cos(\alpha x)$ i zmianę znaku τ_{xy} .

Rozpatrzmy płaszczyznę środkową $y=0$, na której istnieje jedynie naprężenie normalne σ_y . Wykorzystując drugie z równań [k], znajdujemy:

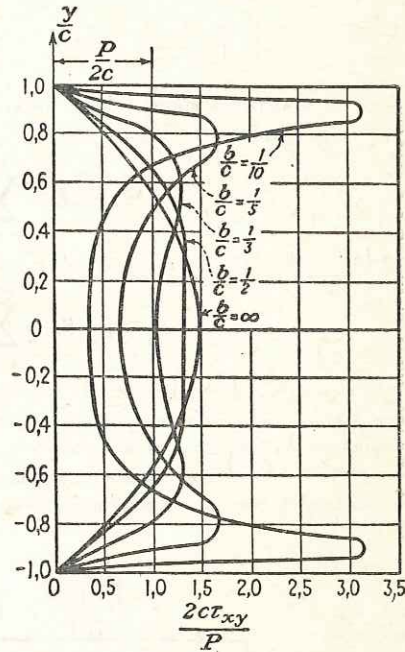
$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \cdot \frac{m\pi c}{l} \cosh \frac{m\pi c}{l} + \sinh \frac{m\pi c}{l}}{\sinh \frac{2m\pi c}{l} + 2 \frac{m\pi c}{l}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l}$$

Naprężenie to otrzymał *Filon*¹⁾ w przypadku pasma nieskończonego, gdy wymiar a jest bardzo mały (tzn. w przypadku siły skupionej $P=2qa$). Wyniki tych obliczeń pokazane są na rys. 34. Można się przekonać, że σ_y maleje bardzo szybko ze wzrostem x . W punkcie $x/c=1,35$ naprężenie osiąga wartość zero, a następnie zmienia znak i staje się naprężeniem rozciągającym. *Filon* omawia także przypadek pokazany na rys. 35, w którym siły P są przesunięte względem siebie. Rozkład naprężeń stycznych na przekroju nn ma w tym przypadku znaczenie praktyczne i pokazany jest na rys. 36. Można zauważyć, że dla małych wartości stosunku b/c rozkład ten odbiega od rozkładu parabolicznego, otrzymanego na podstawie teorii elementarnej oraz, że w pobliżu górnej krawędzi belki istnieją wtedy duże naprężenia styczne, podczas gdy powierzchnia środkowa jest od nich praktycznie wolna.

W zagadnieniu przedstawionym na rys. 34, z powodu symetrii, na powierzchni środkowej $y=0$ nie wystąpią ani naprężenia styczne, ani przemieszczenia pionowe. Wobec tego górna połowa belki zachowuje się tak, jak warstwa sprężysta na gładkim nieodkształcalnym podłożu²⁾. Rozpatrzmy obecnie inny przypadek ekstremalny, w którym wysokość tarczy $2c$ jest duża w porównaniu z długością $2l$ (rys. 37). Wykorzystamy ten przypadek, aby pokazać, że w miarę



Rys. 35



Rys. 36

wzrostu odległości od punktów przyłożenia sił P rozkład naprężeń na powierzchni przekrojów staje się bardzo szybko równomierny. Posługując się drugim z równań [k] i zastępując $\sin(\alpha x)$ przez $\cos(\alpha x)$ w wyrażeniach [n], określających współczynniki A'_m równe B'_m , znajdujemy

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{m} \cdot \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x \quad [p]$$

¹⁾ L. N. G. Filon: „Trans. Roy. Soc.” (London), seria A, t. 201, str. 67, 1903. To samo zagadnienie omawiali także: A. Timpe: „Z. Math. Physik”, t. 55, str. 149, 1907; G. Mesmer: „Vergleichende spannungsoptische Untersuchungen...”, Dissertation, Göttingen, 1929; F. Seewald: „Abhandl. aerodynam., Inst. Tech. Hochschule”, Aachen, t. 7, str. 11, 1927; H. Bay: „Ingenieur-Archiv”, t. 3, str. 435, 1932. Rozwiązanie przybliżone tego zagadnienia podał Pigeaud: „Compt. rend.” t. 161, str. 673, 1915. Badania tego zagadnienia w przypadku prostokątnej tarczy o skończonej długości przeprowadził J. N. Goodier: „J. Applied Mechanics” (Trans. A. S. M. E.), t. 54, nr 18, str. 173, 1932.

²⁾ K. Marguerre: „Ingenieur-Archiv”, t. 2, str. 108, 1931, rozważał przypadek podłoża chropowatego, a zagadnienie giętkiej lecz nierozciągliwej warstwy zanurzonej w cieple sprężystym — zagadnienie interesujące z punktu widzenia mechaniki gruntów — rozpatrywał M. Biot: „Physics”, t. 6, str. 367, 1935.

przy czym $qa=P/2$. Jeśli l jest małe w porównaniu z c , to αc jest dużą liczbą i może być pominięte w porównaniu z $\sinh \alpha c$. Możemy więc przyjąć

$$\sinh \alpha c = \cosh \alpha c = \frac{1}{2} e^{\alpha c}$$

Dla przekrojów znacznie odległych od powierzchni środkowej tarczy możemy przyjąć $\sinh \alpha y = \cosh \alpha y = \frac{1}{2} e^{\alpha y}$. Po podstawieniu tych wyrażeń do równania [p], otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha a}{2m} [(\alpha c + 1) e^{\alpha(y-c)} - \alpha y e^{\alpha(y-c)}] \cos \alpha x = \\ &= -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi a}{l}}{2m} \left[\frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned}$$

Jeśli $c-y$ nie jest zbyt małe, na przykład $c-y > l/2$, to szeregi powyższe są bardzo szybkozbieżne i wystarczy uwzględnić tylko kilka pierwszych składników przy obliczaniu σ_y . Możemy więc przyjąć

$$\sin \frac{m\pi a}{l} = \frac{m\pi a}{l}$$

i podstawiając $2aq=P$, znaleźć

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{l} (c-y) + 1 \right] e^{\frac{m\pi}{l}(y-c)} \cos \frac{m\pi x}{l}$$

Np. dla $y=c-l$

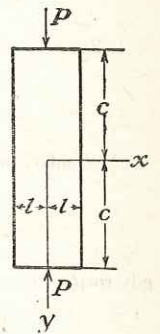
$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{P}{l} \left(\frac{\pi+1}{e\pi} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi+1}{e^{2\pi}} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{3\pi+1}{e^{3\pi}} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

Pierwsze trzy składniki szeregu wystarczają do otrzymania dobrej dokładności, a odpowiedni rozkład naprężenia pokazany jest na rys. 38b. Na tym samym rysunku pokazane są także rozkłady naprężenia dla $c-y=l/2$ oraz $c-y=2l$. Widzimy, że w odległości od końca równej szerokości pasma rozkład naprężeń jest praktycznie równomierny, co potwierdza wniosek, który czyni się zwykle na podstawie zasady *de Saint-Venanta*.

W przypadku długiego pasma (rys. 37), naprężenia σ_x będą przenoszone przez całą szerokość płyty $2l$ z małymi zmianami, pod warunkiem, że wielkość zmian w kierunku podłużnym nie jest zbyt szybka. Naprężenia określone naszym rozwiązaniem wymagać będą jednakże z tego względu pewnych zmian, zwłaszcza w pobliżu końców $y=\pm c$. Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego na rys. 37 dla $c=2l$ przy pomocy innej metody²⁾ daje, zgodnie z rys. 38c, na powierzchni poziomego środkowego przekroju* praktycznie równomierne naprężenie ścisające. Naprężenia w pobliżu punktów przyłożenia obciążeń P omówimy później (patrz par. 33).

24. Inne zastosowanie szeregów Fouriera. Obciążenie siłami ciężkości.

Zagadnienia rozważane w par. 23 dotyczą pojedynczych „rozpiętości” l lub $2l$, jednak ze względu na okresowość szeregów Fouriera można przyjąć, że przedstawiają one periodycznie zmienne stany naprężenia w długich pasmach, równoległych do osi x . Taki okresowy rozkład naprężenia wystąpi w belce ciągłej, obciążonej jednakowo w poszczególnych przęsłach i odpowiednio podparte. Jeśli, jak to ma miejsce w pewnych konstrukcjach zbiorników żelbetonowych, belka jest właściwie ścianą podpartą punkto w odstępach porównywalnych z jej grubością (rys. 39) to posługując się tą metodą³⁾ można uzyskać dobre wyniki. Elementarna teoria belek jest tutaj nieprzydatna. Równomiernie rozłożone obciążenie q_1 na



Rys. 37

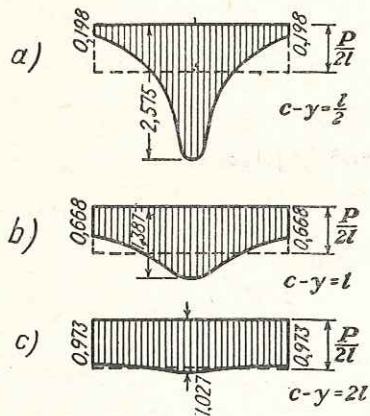
¹⁾ Patrz praca F. Bleicha, loc. cit.

²⁾ J. N. Goodier: „Trans. A. S. M. E.” t. 54, str. 173, 1932.

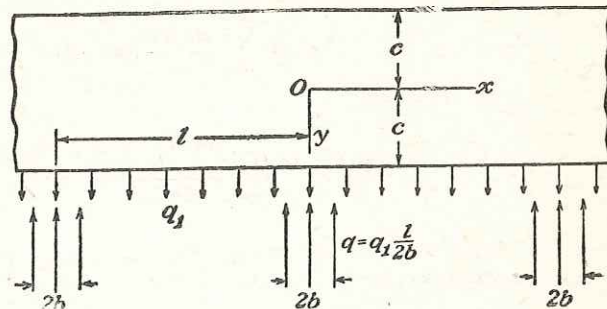
³⁾ Zagadnienia tego rodzaju omówione są z podaniem źródeł w książce: K. Beyer: „Die Statik im Eisenbetonbau” wyd. 2, str. 723, 1934; patrz także H. Craemer: „Ingenieur-Archiv”, t. 7, str. 325, 1936.

dolnym brzegu, na który działają skierowane do góry reakcje podporowe, rozłożone równomiernie na odcinkach o szerokości $2b$ i rozmieszczone w odległościach l , przedstawia szczególnie przypadek zastosowania równań

[m] par. 23. Jeśli obciążenie q_1 jest przyłożone na górnym brzegu, wystarczy tu jedynie nałożyć stan naprężeń wywołany przyłożeniem na obu krawędziach równych i przeciwnie skierowanych naprężeń ściskających q_1 .



Rys. 38



Rys. 39

Jeśli belka obciążona jest ciężarem własnym, to takie zagadnienie sił masowych można natychmiast sprowadzić do zagadnienia obciążeń brzegowych. Prosty rozkład naprężeń

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = -\rho g(y+c); \quad \tau_{xy} = 0$$

spełnia równania równowagi i równanie ciągłości [19] i [24]. Rozkład ten określa oczywiście podparcie dolnego brzegu za pomocą równomiernie rozłożonego obciążenia ściskającego $2\rho g c$ (rys. 39). Warunek, że σ_x równe jest zeru na dolnym brzegu wszędzie z wyjątkiem odcinków podparcia (o szerokości $2b$) spełnia się przez dodanie tego rozkładu naprężeń do rozkładu, pokazanego na rys. 39, przy czym q_1 zastąpiono przez $2\rho g c$. W ten sposób obliczone naprężenia związane zostały z obciążeniami brzegowymi q i q_1 bez udziału sił masowych.

ZADANIA

1. Zbadać, jakie zagadnienie płaskiego stanu naprężenia rozwiązuje się za pomocą funkcji naprężeń w postaci

$$\Phi = \frac{3F}{4c} \left(xy - \frac{xy^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{2} y^2$$

2. Zbadać, jakie zagadnienie rozwiązuje się za pomocą funkcji

$$\Phi = -\frac{F}{d^3} xy^2 (3d - 2y)$$

gdy rozpatrywany obszar zawarty jest między $y=0$, $y=d$, $x=0$ i rozciąga się po dodatniej stronie osi x .

3. Pokazać, że

$$\Phi = \frac{q}{8c^3} \left[x^2 (y^3 - 3c^2 y + 2c^3) - \frac{1}{5} y^3 (y^2 - 2c^2) \right]$$

jest funkcją naprężeń i określić, jakie zagadnienie ona rozwiązuje, gdy obszar zawarty jest między $y=\pm c$, $x=0$ i rozciąga się po dodatniej stronie osi x .

4. Chcemy, by funkcja naprężeń

$$\Phi = s \left(\frac{1}{2} xy - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{ly^2}{4c} + \frac{ly^3}{4c^2} \right)$$

określała rozwiązanie w przypadku wspornika ($y=\pm c$, $0 < x < l$) obciążonego równomiernie rozłożonymi siłami stycznymi wzdłuż krawędzi dolnej, podczas gdy brzeg górny i koniec wspornika $x=l$ są wolne od obciążenia.

Pod jakim względem rozwiązanie to jest niedoskonałe? Porównać otrzymane naprężenia z naprężeniami, które uzyskuje się z elementarnych równań dla rozciągania i zginania.

5. Obciążeniem belki przedstawionej na rys. 28 jest ciężar własny zamiast obciążenia q na powierzchni górnej. Znaleźć równania na składowe przemieszczenia u i v . Znaleźć także wyrażenie na zmianę (początkowo jednostkowej) grubości.

6. Wspornik przedstawiony na rys. 26 posiada zamiast wąskiego — szeroki przekrój prostokątny i utrzymywany jest w płaskim stanie odkształcenia przez odpowiednie siły, przyłożone wzdłuż jego ścian pionowych. Obciążenie wynosi P na jednostkę szerokości końca wspornika.

Sprawdzić twierdzenie, że naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} pokrywają się z tymi, które zostały znalezione w par. 20. Znaleźć wyrażenie na σ_z i naszkicować jego rozkład wzdłuż ścian wspornika. Wypisać wyrażenia na składowe przemieszczenia u i v , gdy poziomy element osi utwierdzony jest w punkcie $x=l$.

7. V jest płaską funkcją harmoniczną, to znaczy spełnia równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Należy wykazać, że każda z funkcji: xV , yV , $(x^2+y^2)V$ spełnia równanie [a] z par. 17 i może być tym samym wykorzystana jako funkcja naprężeń.

8. Wykazać, że

$$(Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} + Cy e^{\alpha y} + Dy e^{-\alpha y}) \sin \alpha x$$

jest funkcją naprężeń.

Wyprowadzić wyrażenia w postaci szeregów na naprężenia w półnieskończonej tarczy ($y > 0$), wywołane obciążeniem brzegu $y=0$ za pomocą ciśnienia o rozkładzie

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

Wykazać, że naprężenia σ_x w dowolnym punkcie położonym na brzegu są naprężeniami ściskającymi o wielkości równej naciskowi w tym punkcie. Przyjąć, że naprężenia zanikają w miarę wzrostu y .

9. Pokazać, że naprężenia określone równaniami [c] w par. 23 oraz naprężenia z zadania 8 spełniają równanie [b] w par. 16