

zmiennej z i $f(z)=1/z$, to otrzymujemy

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{(-y)}{x^2+y^2}$$

Podobnie, wiedząc, że: $\cosh iy = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$, $\sinh iy = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy})$, $e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y$, znajdujemy

$$\begin{aligned} \sinh z &= \sinh(x+iy) = \sinh x \cosh iy + \cosh x \sinh iy = \\ &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cosh(x+iy) = \cosh x \cosh iy + \sinh x \sinh iy = \\ &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \end{aligned}$$

Jako przykład ogólnej metody uwalniania mianownika od liczb zespolonych rozważmy funkcję $\operatorname{ctgh} z$. Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgh} z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{\cosh(x+iy)}{\sinh(x+iy)} \cdot \frac{\sinh(x-iy)}{\sinh(x-iy)} = \\ &= \frac{(\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y)(\sinh x \cos y - i \cosh x \sin y)}{(\sinh x \cos y + i \cosh x \sin y)(\sinh x \cos y - i \cosh x \sin y)} \end{aligned}$$

Mianownik jest równy wielkości rzeczywistej $(\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2$. Przemnożenie licznika i zastąpienie i^2 przez -1 pozwala rozdzielić ułamek na część rzeczywistą i urojoną. Wynik można uprościć do postaci

$$\operatorname{ctgh} z = \frac{\sinh 2x - i \sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y} \quad [c]$$

Inny sposób postępowania jest oparty na równaniu [p] w par. 62.

Pochodna $f(z)$ względem z określona jest definicją

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad [d]$$

gdzie $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, a warunek $\Delta z \rightarrow 0$ oznacza, że zarówno $\Delta x \rightarrow 0$, jak i $\Delta y \rightarrow 0$. Możemy zawsze uważać x i y za współrzędne kartezjańskie punktu płaszczyzny. Wtedy Δx i Δy przedstawiają przesunięcie do punktu sąsiedniego. Można by się spodziewać w pierwszej chwili, że [d] może być różne w zależności od kierunku przesunięcia. Niemniej jednak granicę [d] otrzymać można bezpośrednio za pomocą z i Δz , tak jak gdyby były one liczbami rzeczywistymi, otrzymując w ten sposób wyniki takie jak

$$\frac{d}{dz}(z^2) = 2z; \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

niezależnie od wyboru Δz oraz Δx i Δy . Tym samym możemy powiedzieć, że wszystkie utworzone w ten sposób funkcje z mają pochodne, które zależą jedynie od z , a nie zależą od kierunku dz w punkcie z . Są to funkcje analityczne.

Wielkość $x-iy$ można traktować jako funkcję z w tym znaczeniu, że dane z określa x i y , a tym samym $x-iy$. Niemniej jednak, $x-iy$ nie można tworzyć za pomocą z w taki sam sposób, jak tworzy się z^n , czy też e^z . Jej pochodna względem z jest granicą $(\Delta x - i\Delta y)/(\Delta x + i\Delta y)$ gdy Δx i Δy dążą do zera. Ta granica zależy od kierunku przyrostu Δx i Δy . Jeśli przyjmujemy przyrost jedynie w kierunku x , to $\Delta y = 0$ i jako wartość tej granicy otrzymujemy 1. Jeżeli teraz przesunięcie odbywa się w kierunku y , to $\Delta x = 0$ i granica równa się -1 . Tak więc $x-iy$ nie jest funkcją analityczną $x+iy$. Funkcje analityczne wraz z $x-iy$ wykorzystane będą później do konstruowania funkcji naprężeń. Każdą funkcję zawierającą i będziemy nazywać „funkcją zespoloną“.

Dowolna funkcja analityczna $f(z)$ posiadać będzie całkę nieoznaczoną, zdefiniowaną jako funkcję, której pochodną względem z jest $f(z)$; będziemy ją oznaczać przez $\int f(z)dz$. Np., gdy $f(z)=1/z$, mamy

$$\int \frac{1}{z} dz = \log z + C$$

gdzie stała C jest obecnie liczbą zespoloną $A+iB$ oraz zawiera dwie dowolne stałe liczby rzeczywiste A i B .

55. Funkcje analityczne i równanie Laplace'a. Dowolną funkcję analityczną można uważać za funkcję x i y , posiadającą pochodne cząstkowe. Tak więc

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{d}{dz} f(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad [a]$$

ponieważ $\partial z/\partial x = 1$. Podobnie

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = if'(z) \quad [b]$$

ponieważ $\partial z/\partial y = i$.

Jeśli jednak $f(z)$ przedstawić w postaci $\alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ lub prościej $\alpha + i\beta$, to wtedy mamy

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad [c]$$

Z porównania równań [c] z równaniem [a] i [b] wynika

$$i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad [d]$$

Pamiętając, że α i β są rzeczywiste, $i^2 = -1$ oraz, że znak równości pociąga za sobą równość części rzeczywistych i urojonych oddzielnie, znajdujemy zależność

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} \quad [e]$$

Są to tzw. równania *Cauchy-Riemanna*. Pierwsze równanie różniczkujemy teraz względem x , drugie względem y i dodajemy. W wyniku otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0 \quad [f]$$

Równanie tej postaci nazywa się równaniem *Laplace'a*, a każde jego rozwiązanie nazywa się *funkcją harmoniczną*. Eliminując w ten sposób z równań [e] funkcję α otrzymujemy drugie równanie

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0 \quad [g]$$

Tak więc, jeśli dwie funkcje α i β zmiennych x i y przedstawiają część rzeczywistą i urojoną funkcji analitycznej $f(z)$ to każda z nich jest rozwiązaniem równania *Laplace'a*. Równanie *Laplace'a* występuje w wielu zagadnieniach fizycznych nie wyłączając teorii sprężystości (patrz np. równanie [b], par. 16).

Funkcje α i β nazywają się funkcjami harmonicznymi *sprzężonymi*. Jeśli mamy daną dowolną funkcję α , to widzimy, że równania [e] określają z dokładnością do stałej również drugą funkcję β , sprzężoną z funkcją α .

Jako przykłady wyznaczania funkcji harmonicznymi z funkcji analitycznych, rozpatrzmy e^{inz} , z^n , $\log z$ gdzie n jest stałą rzeczywistą. Mamy

$$e^{inz} = e^{inx} e^{-ny} = e^{-ny} \cos nx + ie^{-ny} \sin nx$$

co wskazuje, że $e^{-ny} \cos nx$, $e^{-ny} \sin nx$ są funkcjami harmonicznymi. Zmieniając n na $-n$ znajdujemy, że $e^{ny} \cos nx$, $e^{ny} \sin nx$ są również funkcjami harmonicznymi. Z tego wynika, że funkcje

$$\sinh ny \sin nx; \quad \cosh ny \sin nx; \quad \sinh ny \cos nx; \quad \cosh ny \cos nx \quad [h]$$

są harmoniczne, ponieważ możemy je utworzyć przez dodawanie lub odejmowanie podanych wyżej funkcji, pomnożonych przez $\frac{1}{2}$. Ze związku

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta$$

znajdujemy następujące funkcje harmoniczne

$$r^n \cos n\theta; \quad r^n \sin n\theta; \quad r^{-n} \cos n\theta; \quad r^{-n} \sin n\theta \quad [i]$$

Ze związku

$$\log z = \log re^{i\theta} = \log r + i\theta$$

znajdujemy funkcje harmoniczne

$$\log r; \quad \theta \quad [j]$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje [i] i [j] spełniają równanie *Laplace'a* we współrzędnych biegunowych (patrz równanie [d], par. 25), to jest

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad [k]$$

ZADANIA

1. Określić funkcje rzeczywiste zmiennych x i y , które są częściami rzeczywistą i urojoną funkcji zespolonych $z^2, z^3, \operatorname{tgh} z$

$$[x^2 - y^2, 2xy; \quad x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3; \quad \sinh 2x (\cosh 2x + \cos 2y)^{-1}; \quad \sin 2y (\cosh 2x + \cos 2y)^{-1}]$$

2. Określić funkcje rzeczywiste r i θ , które tworzą część rzeczywistą i urojoną funkcji zespolonych $z^{-2}, z \log z$.

$$[r^{-2} \cos 2\theta; \quad r^{-2} \sin \theta; \quad r \log r \cos \theta - r\theta \sin \theta; \quad r \log r \sin \theta + r\theta \cos \theta]$$

3. Znaleźć

$$\frac{d}{dz} \sinh n\zeta$$

jeśli ζ jest zmienną zespoloną, a $z = c \cosh \zeta$. Pisząc $\zeta = \xi + i\eta$ znajdujemy część rzeczywistą i urojoną pochodnej, gdy c i n są rzeczywiste.

4. Pokazać, że

$$x = \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}; \quad y = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}$$

jeśli $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$, a $z = i \operatorname{actgh} \frac{1}{2} \zeta$, gdzie a jest rzeczywiste.

56. Funkcje naprężeń wyrażone przez funkcje harmoniczne i zespolone. Jeśli ψ jest dowolną funkcją x i y , to przez różniczkowanie otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x\psi) = x \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [a]$$

Jeśli funkcja ψ jest harmoniczna, to wyrażenie w nawiasie z prawej strony równa się zeru. Wtedy $\partial \psi / \partial x$ jest funkcją także harmoniczną, ponieważ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

Z tego wynika, że ponowne zastosowanie operacji *Laplace'a* do [a] prowadzi do wyniku

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x\psi) = 0 \quad [b]$$

który jest równoznaczny ze związkiem

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) (x\psi) = 0$$

Porównanie z równaniem [a] par. 17 pokazuje, że $x\psi$ można wykorzystać jako funkcję naprężeń przy założeniu, że ψ jest funkcją harmoniczną. To samo jest słuszne w przypadku funkcji $y\psi$, gdzie funkcja ψ jest również harmoniczna.

Drogą różniczkowania można łatwo pokazać, że $(x^2 + y^2), \psi$ tzn. $r^2\psi$, również spełnia to samo równanie różniczkowe i może być wykorzystana jako funkcja naprężeń, przy założeniu harmoniczności funkcji ψ .

Jeśli np. przyjąć dwie funkcje harmoniczne

$$\sinh ny \sin nx; \quad \cosh ny \sin nx$$

pochodzące z funkcji [h] poprzedniego paragrafu, to przez pomnożenie ich przez y otrzymuje się drogą superpozycji funkcję naprężeń [d] z par. 23. Jeśli wykorzystać funkcję [i] i [j] z poprzedniego paragrafu w ich obecnej postaci lub przez pomnożenie ich przez x, y , czy r^2 , to możemy z nich zbudować wszystkie składniki funkcji naprężeń ze współrzędnych biegunowych podanej równaniem [18] w par. 39.

Zagadnienie, czy dowolną funkcję naprężeń można otrzymać w ten sposób, pozostaje otwarte; można je rozstrzygnąć tworząc za pomocą dwóch dowolnych funkcji analitycznych ogólną funkcję naprężeń.

Oznaczając operator *Laplace'a*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

przez ∇^2 możemy zapisać równanie [a] z par. 17 w postaci $\nabla^2(\nabla^2\Phi) = 0$ lub $\nabla^4\Phi = 0$. Pisząc P zamiast $\nabla^2\Phi$, co odpowiada $\sigma_x + \sigma_y$, zauważamy, że P jest funkcją harmoniczną i posiada wobec tego sprzężoną z nią funkcję harmoniczną Q . W takim razie $P + iQ$ będzie funkcją analityczną zmiennej z i możemy napisać

$$f(z) = P + iQ \quad [c]$$

Całka tej funkcji względem z jest inną funkcją analityczną, którą np. oznaczmy przez $\frac{1}{4}\psi(z)$. Wtedy, oznaczając przez p i q część rzeczywistą i urojoną $\psi(z)$, otrzymamy

$$\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz \quad [d]$$

skąd $\psi'(z) = \frac{1}{4} f(z)$. Mamy więc

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(z) = \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + iQ)$$

Porównanie części rzeczywistych pierwszego i ostatniego składnika powyższej równości pozwala znaleźć

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4} P \quad [e]$$

Ponieważ p i q są funkcjami sprzężonymi, to każda z nich spełnia równania [e] par. 55 i dlatego można napisać

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P \quad [f]$$

Przypominamy, że $P = \nabla^2 \Phi$ i dlatego równania [e] i [f] upoważniają nas do stwierdzenia, że $\Phi - xp - yq$ jest funkcją harmoniczną, bowiem

$$\nabla^2(\Phi - xp - yq) = \nabla^2 \Phi - 2 \frac{\partial p}{\partial x} - 2 \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad [g]$$

Tak więc w przypadku dowolnej funkcji naprężeń mamy

$$\Phi - xp - yq = p_1$$

gdzie p_1 jest pewną funkcją harmoniczną. Tak więc

$$\Phi = xp + yq + p_1 \quad [96]$$

co wskazuje na to, że dowolną funkcję naprężeń można zbudować z odpowiednio dobranych sprzężonych funkcji harmonicznymi p i q oraz pewnej funkcji harmonicznnej p_1 .

Równanie [96] okaże się przydatne później, ale można stwierdzić już teraz, że użycie obu funkcji p i q nie jest konieczne. Zamiast równania [g] możemy napisać

$$\nabla^2(\Phi - 2xp) = \nabla^2 \Phi - 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

co wskazuje, że $\Phi - 2xp$ jest funkcją harmoniczną, równą np. p_2 i że w ten sposób dowolna funkcja naprężeń daje się wyrazić w postaci

$$\Phi = 2xp + p_2 \quad [h]$$

gdzie p i p_2 są dobranymi odpowiednio funkcjami harmonicznymi. Podobnie, rozważając $\Phi - 2yq$ możemy pokazać, że dowolna funkcja naprężeń da się również wyrazić w postaci

$$\Phi = -2yq + p_3$$

gdzie q i p_3 są odpowiednio dobranymi funkcjami harmonicznymi.

Powróćmy do postaci [96] i wprowadźmy funkcję q_1 sprzężoną z funkcją harmoniczną p_1 ; piszemy

$$\chi(z) = p_1 + iq_1$$

Wtedy łatwo sprawdzić, że część rzeczywista wyrażenia

$$(x - iy)(p + iq) + p_1 + iq_1$$

jest identyczna z prawą stroną równania [96]. Tak więc dowolną funkcję naprężeń można wyrazić w postaci¹⁾

$$\Phi = \operatorname{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] \quad [97]$$

gdzie Re oznacza „część rzeczywistą“, $\bar{z} = x - iy$, a $\psi(z)$ oraz $\chi(z)$ są odpowiednio dobranymi funkcjami analitycznymi. Odwrotnie, równość [97] określa funkcję naprężeń, która jest rozwiązaniem równania [a] z par. 17 przy każdym doborze $\psi(z)$ i $\chi(z)$. W dalszym ciągu stosować ją będziemy do rozwiązywania pewnych zagadnień o znaczeniu praktycznym.

¹⁾ E. Goursat: „Bull. soc. math. France“, t. 26, str. 206, 1898. N. I. Muschelišvili: „Math. Ann.“, t. 107, str. 282–312, 1932.

Pisząc „zespoloną funkcję naprężeń“, podaną w nawiasie równości [97] w postaci

$$\bar{z}\psi(z) + \chi(z)$$

i uwzględniając że $\bar{z}z = r^2$, a $\psi(z)/z$ jest nadal funkcją z , znajdujemy, że każdą funkcję naprężeń można też wyrazić jako sumę

$$r^2 p_4 + p_5$$

gdzie p_4 i p_5 są funkcjami harmonicznymi.

57. Przemieszczenie odpowiadające danej funkcji naprężeń. W par. 39 pokazaliśmy, że określenie naprężeń w obszarze wielospójnym wymaga sprawdzenia warunków ciągłości przemieszczeń w celu przekonania się, czy naprężenia nie są częściowo wynikiem dyslokacji. Z tego względu, jak również we wszystkich przypadkach, w których celem jest wyznaczenie samych przemieszczeń, staje się konieczne opracowanie metody wyznaczenia przemieszczeń u i v przy zadanej funkcji naprężeń.

Związki między naprężeniami i odkształceniami dla płaskiego stanu naprężeń (równania [22] i [23]) można napisać w postaci

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y; \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad [a]$$

$$G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{xy} \quad [b]$$

Do pierwszego ze związków podstawiamy funkcję naprężeń i uwzględniamy, że $P = \nabla^2 \Phi$. W wyniku otrzymujemy

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left(P - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -(1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + P \quad [c]$$

podobnie

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = -(1 + \nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + P \quad [d]$$

Na podstawie równań [f] i [g] par. 56 możemy w równaniu [c] zastąpić P przez $4\partial p/\partial x$, a w równaniu [d] przez $4\partial q/\partial y$. Wtedy, po podzieleniu przez $1 + \nu$, otrzymujemy

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{4}{1 + \nu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad 2G \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{4}{1 + \nu} \frac{\partial q}{\partial y} \quad [e]$$

a stąd, po scałkowaniu

$$2Gu = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{4}{1 + \nu} p + f(y); \quad 2Gv = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{4}{1 + \nu} q + f_1(x) \quad [f]$$

gdzie $f(y)$ i $f_1(x)$ są dowolnymi funkcjami. Jeśli podstawić te zależności do lewej strony równania [b], to otrzymamy

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1 + \nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{df}{dy} + \frac{1}{2} \frac{df_1}{dx} = \tau_{xy} \quad [g]$$

Ale pierwszy składnik lewej strony równa się τ_{xy} , a nawias znika, ponieważ p i q są sprzężonymi funkcjami harmonicznymi, spełniającymi równania *Cauchy-Riemanna* (par. 56). Tak więc

$$\frac{df}{dy} + \frac{df_1}{dx} = 0$$

skąd wynika, że

$$\frac{df}{dy} = A; \quad \frac{df_1}{dx} = -A$$

gdzie A oznacza stałą. Stąd płynie wniosek, że składniki $f(y)$ i $f_1(x)$ przedstawiają w równaniach [f] przemieszczenia ciała jako bryły sztywnej. Pomijając te składniki, możemy obecnie równania [f] napisać w postaci¹⁾

$$2Gu = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu}p; \quad 2Gv = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu}q \quad [h]$$

pamiętając, że zawsze możemy dodać przemieszczenia ciała jako bryły sztywnej. Równania te pozwalają nam znaleźć u i v , gdy znana jest funkcja Φ . Najpierw należy znaleźć P równe $\nabla^2\Phi$, określić funkcję sprzężoną Q za pomocą równań *Cauchy-Riemanna*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

wiedząc, że $f(z) = P + iQ$, oraz wyznaczyć w końcu funkcję p i q przez całkowanie $f(z)$, jak to pokazane jest w równaniu [d] w par. 56. Wtedy można obliczyć wszystkie składniki związków [h].

Użyteczność związków [h] stwierdzimy w późniejszych zastosowaniach, w których zawodzi metoda określenia przemieszczeń, przedstawiona w rozdziale 3 i 4.

58. Przedstawienie naprężenia i przemieszczenia za pomocą potencjałów zespolonych. Dotychczas składowe naprężenia i przemieszczenia wyrażaliśmy za pomocą funkcji naprężeń Φ . Ponieważ jednak równanie [97] wyraża funkcję Φ za pomocą dwóch funkcji $\psi(z)$ oraz $\chi(z)$, to staje się możliwe wyrażenie naprężenia i przemieszczenia za pomocą dwóch „potencjałów zespolonych“.

Każdą funkcję zespoloną $f(z)$ można wyrazić w postaci $\alpha + i\beta$, gdzie α i β są funkcjami rzeczywistymi. Temu wyrażeniu odpowiada wyrażenie sprzężone²⁾ $\alpha - i\beta$, które otrzymuje się przez podstawienie wszędzie w funkcji $f(z)$ zamiast i wartość $-i$. Taką zmianę oznacza się za pomocą zapisu

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta \quad [a]$$

Tak więc, jeśli $f(z) = e^{inz}$, to otrzymujemy

$$\bar{f}(\bar{z}) = e^{-in\bar{z}} = e^{-in(x-iy)} = e^{-inx} \cdot e^{-ny} \quad [b]$$

W celu zilustrowania znaczenia kreski nad f -w równaniu [a] można mu przeciwstawić oznaczenie

$$f(\bar{z}) = e^{in\bar{z}}$$

Oczywiście

$$f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = 2\alpha = 2 \operatorname{Re} f(z)$$

Podobnie, jeśli do funkcji w nawiasach w równaniu [97] dodać sprzężoną z nią funkcję, to otrzyma się podwójną część rzeczywistą tej funkcji. Tak więc, równania [97] można zastąpić przez

$$2\Phi = \bar{z}\psi(z) + \chi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad [98]$$

a drogą różniczkowania znaleźć:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \bar{z}\psi'(z) + \psi(z) + \chi'(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})$$

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial y} = i[\bar{z}\psi'(z) - \psi(z) + \chi'(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]$$

Oba te równania można połączyć w jedno mnożąc drugie z nich przez i i dodając do siebie. Otrzymuje się wtedy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad [c]$$

Łącząc w ten sposób związki [h] z par. 57, znajdujemy

$$2G(u+iv) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{4}{1+\nu}(p+iq)$$

lub wykorzystując równanie [d] z par. 56 i równanie [c]

$$2G(u+iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu}\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad [99]$$

Równanie to określa u i v w przypadku płaskiego stanu naprężenia, gdy dane są potencjały zespolone $\psi(z)$ i $\chi(z)$. W przypadku płaskiego stanu odkształcenia należy zgodnie z par. 19, po prawej stronie równości [99] zamiast ν podstawić $\nu/(1-\nu)$.

Składowe naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} można otrzymać bezpośrednio za pomocą drugich pochodnych wyrażenia [98]. Jednakże z uwagi na późniejsze zastosowania do współrzędnych krzywoliniowych, lepiej jest postąpić inaczej. Po zróżniczkowaniu równości [c] względem x mamy

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \psi'(z) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \quad [d]$$

Różniczkując tę równość względem y i mnożąc przez i otrzymujemy

$$i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\psi'(z) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \quad [e]$$

¹⁾ A. E. H. Love: „Mathematical Theory of Elasticity“, wyd. 4 §§ 144, 146, 1926.

²⁾ Terminu tego użyto tu w zupełnie innym znaczeniu niż w zestawieniu „sprzężone funkcje harmoniczne“.

Prostsze postacie otrzymuje się przez odejmowanie i dodawanie równań [d] i [e]. Wtedy¹⁾

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\psi'(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z}) = 4 \operatorname{Re}\psi'(z) \quad [100]$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})] \quad [101]$$

Przez zamianę i na $-i$ po obu stronach równości [101] otrzymujemy inną postać

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad [102]$$

Rozdzielenie prawej strony równości [102] lub [101] na część rzeczywistą i urojoną daje $\sigma_x - \sigma_y$ oraz $2\tau_{xy}$. Równania [100] i [102] określają składowe naprężenia za pomocą potencjałów zespolonych $\psi(z)$ i $\chi(z)$. Tak więc dobór odpowiednich funkcji $\psi(z)$ i $\chi(z)$ pozwala z równań [100] i [102] wyznaczyć możliwy stan naprężenia, a odpowiadające temu stanowi przemieszczenia otrzymuje się z łatwością za pomocą równania [99].

Dla wyjaśnienia tej metody rozważmy stan naprężenia opisany za pomocą wielomianów, omówiony w par. 17. Funkcję naprężeń w postaci wielomianu piątego stopnia można z łatwością otrzymać z równania [98], jeśli przyjąć w nim

$$\psi(z) = (a_5 + ib_5)z^4; \quad \chi(z) = (c_5 + id_5)z^5$$

gdzie a_5, b_5, c_5, d_5 są dowolnymi rzeczywistymi współczynnikami. Wtedy

$$\psi'(z) = 4(a_5 + ib_5)z^3; \quad \chi'(z) = 5(c_5 + id_5)z^4$$

$$\psi''(z) = 12(a_5 + ib_5)z^2; \quad \chi''(z) = 20(c_5 + id_5)z^3$$

a z równań [100] i [102] otrzymuje się

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}4(a_5 + ib_5)z^3 = \\ &= 16\operatorname{Re}(a_5 + ib_5)[x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)] = \\ &= 16a_5(x^3 - 3xy^2) - 16b_5(3x^2y - y^3) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[12(a_5 + ib_5)\bar{z}z^2 + 20(c_5 + id_5)z^3] = \\ &= 24(a_5 + ib_5)(x - iy)(x + iy)^2 + 20(c_5 + id_5)(x + iy)^3 = \\ &= [24a_5x(x^2 + y^2) - 24b_5y(x^2 + y^2) + 20c_5(x^3 - 3xy^2) + \\ &\quad - 20d_5(3x^2y - y^3)] + i[24a_5y(x^2 + y^2) + 24b_5x(x^2 + y^2) + \\ &\quad + 20c_5(3x^2y - y^3) + 20d_5(x^3 - 3xy^2)] \end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach dają odpowiednio $\sigma_x - \sigma_y$ oraz $2\tau_{xy}$.

Odpowiadające temu rozkładowi naprężeń składowe przemieszczenia można łatwo wyznaczyć z równania [99], które w tym przypadku ma postać

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} (a_5 + ib_5)z^4 - 4(a_5 - ib_5)\bar{z}z^3 - 5(c_5 - id_5)\bar{z}^4$$

59. Wypadkowa naprężenia na krzywej. Warunki brzegowe. Na rys. 125 poprowadzony jest w płaszczyźnie tarczy łuk krzywej AB . Siłę działającą na odcinek tego łuku ds , wywołaną oddziaływaniem materiału po lewej stronie łuku na materiał po prawej

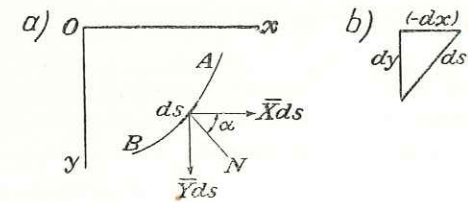
¹⁾ Wyniki te oraz równanie [99] otrzymał w swojej rozprawie doktorskiej G. Kolosoff, Dorpat, 1909. Por. także jego pracę „Z. Math. Physik“, t. 62, 1914.

stronie łuku, można przedstawić za pomocą składowych $\bar{X}ds$ i $\bar{Y}ds$. Wtedy, na podstawie związków [12], par. 9.

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha$$

$$Y = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad [a]$$

gdzie α jest kątem między normalną lewostronną N a osią x . Łukowi ds odpowiada dx i dy , zgodnie z rys. 125b. Przy posuwaniu się po ds w kierunku od A do B maleje x i dx będzie



Rys. 125

liczbą ujemną. Długość poziomego boku elementarnego trójkąta, pokazanego na rys. 125b, wynosi tym samym $-dx$. Tak więc

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad [b]$$

Podstawiając te wartości, łącznie z

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

w równania [a], znajdujemy

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ \bar{Y} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad [c]$$

Składowe siły wypadkowej na brzegu AB są tym samym równe

$$\begin{aligned} F_x &= \int_A^B \bar{X} ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) ds = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_A^B \\ F_y &= \int_A^B \bar{Y} ds = -\int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) ds = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_A^B \end{aligned} \quad [d]$$

Nawiasy kwadratowe przedstawiają różnicę zawartych w nich wielkości w punktach B i A .

Moment względem punktu O siły działającej na AB , wzięty zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, zgodnie z równaniem [c], wynosi

$$M = \int_A^B x \bar{Y} ds - \int_A^B y \bar{X} ds = -\int_A^B \left[xd \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + yd \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]$$

Całkowanie przez części prowadzi do wyniku¹⁾

$$M = \left[\Phi \right]_A^B - \left[x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_A^B \quad [e]$$

Ze związków [c] wynika, że gdy krzywa AB przedstawia swobodny brzeg, to \bar{X} i \bar{Y} równają się zeru i pochodne $\partial \Phi / \partial x$ oraz $\partial \Phi / \partial y$ muszą być stałe wzdłuż AB . Jeśli wzdłuż AB działa zadane obciążenie, to związki [c] pozwalają je wyrazić za pomocą pochodnych $\partial \Phi / \partial x$ i $\partial \Phi / \partial y$. Jest to równoznaczne z określeniem pochodnej w kierunku stycznej $\partial \Phi / \partial s$ i normalnej $\partial \Phi / \partial n$ do brzegu AB . Obie one²⁾ są znane, jeśli wzdłuż AB dana jest funkcja Φ i jej pochodna $\partial \Phi / \partial n$.

Niech obecnie łuk tworzy krzywą zamkniętą, a punkt B pokrywa się z punktem A , wtedy równania [d] i [e] podają wypadkową siłę i moment naprężenia działających na część tarczy ograniczoną zamkniętym konturem. Jeśli wielkości te nie są równe zeru, to znaczy że $\partial \Phi / \partial x$ oraz $\partial \Phi / \partial y$ nie powrócą do wartości wyjściowych (A) po przejściu zamkniętego obwodu (B).

Są one tym samym funkcjami nieciągłymi, podobnie jak kąt θ we współrzędnych biegunowych. Będzie to miało miejsce jedynie w tym przypadku, gdy do części tarczy, ograniczonej krzywą zamkniętą, przyłożone są obciążenia (równe i przeciwie skierowane do F_x , F_y i M).

Oba równania [d] można zapisać za pomocą potencjałów zespolonych $\psi(z)$ i $\chi(z)$, jak następuje

$$F_x + iF_y = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_A^B = -i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_A^B$$

lub korzystając ze związków [c] par. 58

$$F_x + iF_y = -i[\psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})]_A^B \quad [103]$$

Związek [e] przyjmuje postać

$$M = \text{Re} [-z\bar{z}\bar{\psi}'(\bar{z}) + \chi(z) - \bar{z}\bar{\chi}'(\bar{z})]_A^B \quad [104]$$

Równania [103] i [104] zastosowane do przypadku, w którym krzywa zamknięta otacza początek układu, pokazują, że gdy $\psi(z)$ oraz $\chi(z)$ przyjąć w postaci z^n , (n jest liczbą całkowitą), to F_x , F_y i M równają się zeru, ponieważ funkcje w nawiasach przyjmują po pełnym okrążeniu konturu swe wartości początkowe. Za pomocą tych samych funkcji nie można opisać stanu naprężenia wywołanego obciążeniem przyłożonym w początku układu. Funkcja $\log z = \log r + i\theta$ nie powraca do wartości wyjściowej po okrążeniu całego konturu, ponieważ θ wzrasta o 2π . Tak więc, jeśli $\psi(z) = C \log z$ lub $\chi(z) = D z \log z$, gdzie C i D oznaczają stałe, (zespolone) to równanie [103] daje dla $F_x + iF_y$ wartość różną od zera. Podobnie $\chi(z) = D \log z$ daje różną od zera wartość M , jeśli D jest urojone, lecz daje wartość równą zeru przy D rzeczywistym.

60. Współrzędne krzywoliniowe. Współrzędne biegunowe r i θ (rys. 124) opisują położenie punktu w miejscu przecięcia okręgu koła (o promieniu r) i promienia wodzącego wyprowadzonego z początku układu (pod kątem θ do prostej przyjętej za prostą odniesienia).

¹⁾ Związki [d] i [e] pozwalają ustalić analogię między płaskim stanem naprężenia i powolnym ruchem płaskim cieczej lepkiej. Patrz *J. N. Goodier*: „Phil. Mag.” seria 7, t. 17, str. 554 i 800, 1934.

²⁾ Te warunki brzegowe prowadzą do analogii z poprzecznymi ugięciami płyt sprężystych. Omówienie tej analogii wraz z przypisami podał *R. D. Mindlin*: „Quart. Applied Math.” t. 4, str. 279, 1946.

Przy przejściu od współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych biegunowych stosuje się równanie

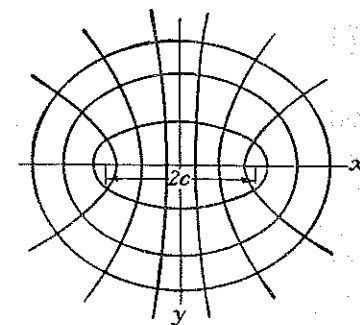
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r; \quad \arctg \frac{y}{x} = \theta \quad [a]$$

Nadając w pierwszym z nich różne wartości zmiennej r , otrzymuje się rodzinę okręgów. Gdy natomiast nadawać różne wartości kątowi θ , to z drugiego równania otrzymuje się rodzinę półprostych, wychodzących z jednego punktu.

Równania [a] są przypadkiem szczególnym związków postaci

$$F_1(x, y) = \xi; \quad F_2(x, y) = \eta \quad [b]$$

Przyjmowanie dwóch wartości stałych dla ξ i η określi dwie krzywe, które będą się przecinać, jeśli tylko funkcje $F_1(x, y)$ i $F_2(x, y)$ są odpowiednio dobrane. Różne wartości ξ i η prowadzą do różnych krzywych i różnych punktów przecięcia. Tak więc, każdy punkt płaszczyzny xy będzie scharakteryzowany dwiema wartościami ξ i η , które określają dwie krzywe dane równaniami [b], przechodzące przez ten punkt. Wartości ξ i η można uważać za „współrzędne” tego punktu. Ponieważ ξ i η określają położenie punktu za pomocą dwóch przecinających się krzywych, nazywa się je *współrzędnymi krzywoliniowymi*¹⁾.



Rys. 126

Współrzędne biegunowe wraz z odpowiadającymi im składowymi naprężeniami okazały się w rozdziale 4 bardzo wygodne do opisanie zagadnień, w których brzegi składały się z współśrodkowych okręgów kół. Naprężenie i przemieszczenia na takim brzegu staje się funkcją zależną jedynie od θ , ponieważ r posiada tu stałą wartość. Jeśli brzegi tworzą inne krzywe, np. elipsy, wygodnie jest zastosować współrzędne krzywoliniowe, z których jedna jest stała wzdłuż każdego brzegu.

Jeśli równania [b] rozwiązać względem x i y , to otrzymamy dwa równania o postaci

$$x = f_1(\xi, \eta); \quad y = f_2(\xi, \eta) \quad [c]$$

Wygodniej jest zwykle zaczynać rozważania od tej właśnie postaci. Rozważmy np. dwa równania

$$x = c \cosh \xi \cos \eta; \quad y = c \sinh \xi \sin \eta \quad [d]$$

w których c oznacza stałą. Przez eliminację η dochodzimy do równania

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1$$

Gdy ξ jest stałe, jest to równanie elipsy o półosiach $c \cosh \xi$ i $c \sinh \xi$ i ogniskach leżących w punktach $x = \pm c$. Dla różnych wartości ξ otrzymujemy różne elipsy o tych samych ogniskach, tzn. rodzinę *elips współogniskowych* (rys. 126). Na każdej z tych elips ξ ma war-

¹⁾ Ogólną teorię współrzędnych krzywoliniowych podał *Lamé* w książce: „Leçons sur les coordonnées curvilignes”, Paryż, 1859.

tość stałą, a η zmienia się (w przedziale od 0 do 2π). Podobnie na okręgu koła we współrzędnych biegunowych r ma wartość stałą, a zmienia się kąt θ . W naszym przypadku η jest kątem w parametrycznym równaniu elipsy o półosiach a i b : $x = a \cos \eta$, $y = b \sin \eta$.

Jeśli odwrotnie, wyeliminujemy z równań [d] ξ , to za pomocą związku $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$, otrzymujemy

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad [e]$$

Dla stałej wartości η równanie przedstawia hiperbolę, która ma te same ogniska co elipsa. Tak więc, równanie [e] przedstawia rodzinę współogniskowych hiperbol, na każdej z których η jest stałe, a ξ zmienne. Współrzędne te nazywają się *eliptycznymi*.

Dwa równania [d] równoważne są związkowi $x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$ lub

$$z = c \cosh \zeta \quad [f]$$

gdzie $\zeta = \xi + i\eta$. Jest to oczywiście szczególny przypadek związku

$$z = f(\zeta) \quad [g]$$

Związek ten, określający z jako funkcję ζ , może być rozwiązany względem ζ . Wtedy ξ i η są częściami rzeczywistą i urojoną funkcji z i tym samym spełniają równania *Cauchy-Riemanna* [e], par. 55, a nadto równania *Laplace'a* [f] i [g], par. 55.

Wszystkie współrzędne krzywoliniowe, którymi będziemy się posługiwać w tym rozdziale, będą wyprowadzone z równań o postaci [g] i w związku z tym będą mieć dalsze własności szczególne. Jeśli punkt x, y posiada współrzędne krzywoliniowe ξ i η , a sąsiedni punkt $x + dx, y + dy$ — współrzędne krzywoliniowe $\xi + d\xi$ i $\eta + d\eta$, to, ponieważ istnieją dwa równania typu [c], możemy napisać

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad [h]$$

Jeśli zmienia się jedynie ξ , to przyrosty dx i dy odpowiadają pewnemu elementowi łuku ds , leżącemu na krzywej $\eta = \text{const}$, przy czym

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \quad [i]$$

Tak więc

$$(ds_\xi)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] (d\xi)^2 \quad [j]$$

Ponieważ $z = f(\zeta)$, mamy

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{d}{d\zeta} f(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = f'(\zeta) \quad [k]$$

gdzie

$$f'(\zeta) = \frac{df(\zeta)}{d\zeta}$$

Każdą wielkość zespoloną można napisać w postaci $J \cos \alpha + iJ \sin \alpha$ lub $Je^{i\alpha}$, gdzie J i α są rzeczywiste. Przy

$$f'(\zeta) = Je^{i\alpha} \quad [l]$$

z równania [k] mamy

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = J \cos \alpha; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = J \sin \alpha \quad [m]$$

a wtedy równanie [j] daje

$$ds_\xi = J d\xi$$

Wykorzystanie związków [i] oraz [m] pozwala obliczyć kąt nachylenia ds_ξ do poziomu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y / \partial \xi}{\partial x / \partial \xi} = \text{tg } \alpha \quad [n]$$

Tak więc, α określone związkiem [l] stanowi kąt między styczną do krzywej $\eta = \text{const}$ w kierunku wzrostu ξ i osią x (rys. 127).

W ten sam sposób, gdy zmienia się jedynie wielkość η , przyrosty dx i dy odpowiadają elementowi łuku ds_η leżącemu na krzywej $\xi = \text{const}$, a zamiast związków [i] mamy

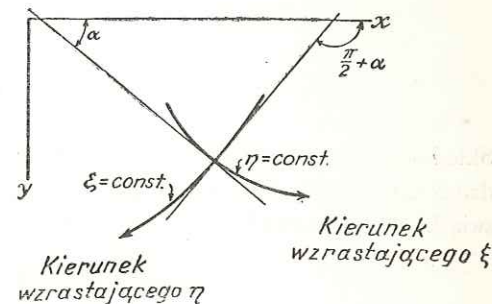
$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Postępując jak poprzednio, znajdziemy, że

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -J \sin \alpha; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = J \cos \alpha$$

oraz że $ds_\eta = J d\eta$, przy czym

$$dy/dx = -\text{ctg } \alpha$$



Rys. 127

Porównując ostatni wynik z równaniem [n], widzimy, że krzywe $\xi = \text{const}$ i $\eta = \text{const}$ przecinają się pod kątem prostym, a kierunek wzrostu η tworzy z osią x kąt $(\pi/2) + \alpha$ (rys. 127).

Rozpatrzmy np. współrzędne eliptyczne określone równaniem [f]. Mamy wtedy

$$f'(\zeta) = c \sinh \zeta = c \sinh \xi \cos \eta + ic \cosh \xi \sin \eta = Je^{i\alpha}$$

Porównanie części rzeczywistych i urojonych ostatniego związku prowadzi do równości

$$J \cos \alpha = c \sinh \xi \cos \eta; \quad J \sin \alpha = c \cosh \xi \sin \eta$$

i tym samym

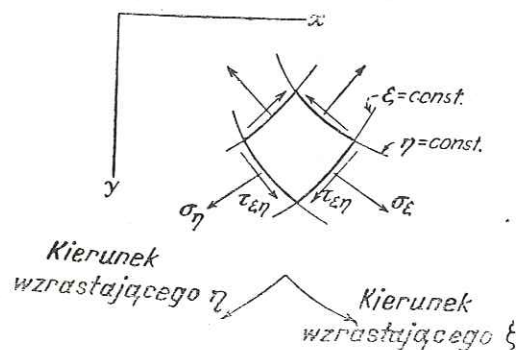
$$J^2 = c^2(\sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta) = \frac{1}{2}c^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \quad [o]$$

$$\text{tg } \alpha = \text{ctgh } \xi \text{ tg } \eta \quad [p]$$

61. Składowe naprężenia we współrzędnych krzywoliniowych. Równania [99], [100] i [102] podają składowe naprężenia i przemieszczenia we współrzędnych kartezjańskich za pomocą potencjałów zespolonych $\psi(z)$ i $\chi(z)$. Gdy korzysta się ze współrzędnych

krzywoliniowych potencjały zespolone można przyjąć w postaci funkcji ζ , a samo z wyrażone jest przez ζ równaniem typu [g], par. 60, określającym współrzędne krzywoliniowe. Nie ma więc trudności w przedstawieniu $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ za pomocą ξ i η . Jednakże zwykle wygodnie jest przyjąć składowe naprężenia w postaci:

- σ_ξ , składowa normalna na krzywej $\xi = \text{const}$;
- σ_η , składowa normalna na krzywej $\eta = \text{const}$;
- $\tau_{\xi\eta}$, składowa styczna do obu krzywych.



Rys. 128

Składowe te są pokazane na rys. 128. Porównując ten rysunek oraz rys. 127 z rys. 12 dochodzimy do wniosku, że σ_ξ i $\tau_{\xi\eta}$ odpowiadają σ i τ na rys. 12. Możemy wobec tego wykorzystać związki [13] i napisać

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Podobnie zastępując α przez $(\pi/2) + \alpha$, znajdujemy

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

a stąd łatwo otrzymujemy równania następujące¹⁾:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y \quad [105]$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \quad [106]$$

Mnożnik $e^{2i\alpha}$, występujący we współrzędnych krzywoliniowych określonych równaniem $z=f(\zeta)$, można wyznaczyć z równania [l], par. 60. Równanie to wraz z równaniem sprzężonym, otrzymanym przez zmianę i na $-i$, daje

$$f'(\zeta) = J e^{i\alpha}; \quad \bar{f}'(\bar{\zeta}) = J e^{-i\alpha}$$

tak, że

$$e^{2i\alpha} = \frac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} \quad [107]$$

¹⁾ Równania [105], [106] i [108] otrzymał *Kolesoff*, loc. cit. *KOLESOFF*

Nasze współrzędne, np. eliptyczne, dają $f'(\zeta) = c \sinh \zeta$ i

$$e^{2i\alpha} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}} \quad [q]$$

Przy tak określonej wartości $e^{2i\alpha}$ równania [105] i [106] wyrażają σ_ξ, σ_η i $\tau_{\xi\eta}$ przez $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Przemieszczenie we współrzędnych krzywoliniowych określone jest za pomocą składowej u_ξ w kierunku wzrostu ξ (rys. 127) i składowej u_η w kierunku wzrostu η . Jeśli u i v są składowymi przemieszczenia we współrzędnych kartezjańskich, to mamy

$$u_\xi = u \cos \alpha + v \sin \alpha; \quad u_\eta = v \cos \alpha - u \sin \alpha$$

a stąd

$$u_\xi + iu_\eta = e^{-i\alpha}(u + iv) \quad [108]$$

Przy zadanych potencjałach zespolonych $\psi(z)$ oraz $\chi(z)$, korzystając z równania [99] przy $z=f(\zeta)$ oraz z równania [107], możemy wyrazić u_ξ i u_η przez ξ i η .

Łącząc równania [99], [100] i [102] z [105], [106] i [108] otrzymujemy następujące związki na składowe naprężenia i przemieszczenia (z zamianą w ostatnim z nich i na $-i$):

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) \quad [109]$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad [110]$$

$$2G(u_\xi - iu_\eta) = e^{i\alpha} \left[\frac{3-v}{1+v} \bar{\psi}(z) - \bar{z}\psi'(z) - \chi'(z) \right] \quad [111]$$

Użyjemy tych związków do rozwiązywania kilku zagadnień, w których będziemy mieli do czynienia z brzegami krzywoliniowymi.

ZADANIA

1. Pokazać, że w przypadku współrzędnych biegunowych gdy $z=e^{\zeta}$, równanie [107] przyjmuje postać $e^{2i\alpha} = e^{2i\eta}$, a $\alpha = \eta = \theta$.
2. Znaleźć rozwiązania następujących zagadnień posługując się podanymi potencjałami zespolonymi. Wyznaczyć składowe naprężenia i przemieszczenia. Duże litery oznaczają stałe, niekoniecznie rzeczywiste.
 - a) Pierścień ($a < r < b$) obciążony jest momentami M za pośrednictwem sił stycznych działających na brzegach (rys. 122). $\psi(z) = 0$, $\chi(z) = A \log z$.
 - b) Pierścień poddany ciśnieniu wewnętrznemu p_1 i zewnętrznemu p_0 (patrz par. 26). $\psi(z) = Az$, $\chi(z) = B \log z$.
 - c) Częste zginanie pręta zakrzywionego i „dyslokacja obrotowa” pierścienia, jak w par. 27 i par. 29. $\psi(z) = Az \log z + Bz$, $\chi(z) = C \log z$.
 - d) Zagadnienie rozwiązane w par. 31. $\psi(z) = Az^2 + B \log z$, $\chi(z) = Cz \log z + D/z$.
 - e) Tarcza poddana rozciąganiu z otworem kołowym (par. 32). $\psi(z) = Az + B/z$, $\chi(z) = C \log z + Dz^2 + F/z^2$.
 - f) Promieniowy rozkład naprężeń z par. 33. $\psi(z) = A \log z$, $\chi(z) = Bz \log z$.
 - g) Siła działająca w punkcie tarczy nieograniczonej (par. 38). $\psi(z) = A \log z$, $\chi(z) = Bz \log z$.

62. Rozwiązania we współrzędnych eliptycznych. Otwór eliptyczny w tarczy poddanej równomiernym naprężeniom. Już poprzednio w par. 60 rozważaliśmy współrzędne eliptyczne ξ, η i pokazaliśmy je na rys. 126, definiując w następujący sposób

$$z = c \cosh \zeta; \quad \zeta = \xi + i\eta \quad [a]$$

skąd

$$x = c \cosh \xi \cos \eta; \quad y = c \sinh \xi \sin \eta$$

oraz

$$\frac{dz}{d\zeta} = c \sinh \zeta; \quad e^{2i\alpha} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}} \quad [b]$$

Na elipsie o półosiach $c \cosh \xi_0$, $c \sinh \xi_0$, współrzędna ξ jest stała i równa ξ_0 . Jeżeli półosie a i b są wielkościami znanymi, to c i ξ_0 możemy znaleźć ze związków

$$c \cosh \xi_0 = a; \quad c \sinh \xi_0 = b \quad [c]$$

W ten sposób, jeżeli znamy jedną z rodziny elips, zdefiniowana jest również cała rodzina elips i rodzina hiperbol (patrz str. 179). Jeżeli ξ jest bardzo małe, to odpowiadająca mu elipsa jest bardzo smukła i w granicy gdy $\xi = 0$ stanie się odcinkiem prostej o długości $2c$ łączącym ogniska. Dla coraz to większych dodatnich wartości ξ elipsa będzie coraz to większa i w granicy gdy $\xi = \infty$ będzie kołem o promieniu równym nieskończoności. Dowolny punkt na każdej z elips przebiega cały obwód elipsy gdy η przyjmuje wartości od zera do 2π (na dodatniej osi x , rys. 126). Pod tym względem η przypomina kąt θ we współrzędnych biegunowych. Na skutek ciągłości składowych odkształcenia i naprężenia, η musi być okresowe o okresie 2π tak, że wartości dla $\eta = 2\pi$ będą się równać wartościom dla $\eta = 0$.

Rozważmy obecnie tarczę nieskończoną będącą w stanie równomiernego wszechstronnego rozciągania S zaburzonego eliptycznym otworem o półosiach a i b , przy czym brzeg otworu jest wolny od naprężeń¹⁾. Warunki te oznaczają, że

$$\sigma_x = \sigma_y = S \text{ w nieskończoności} \quad [d]$$

$$\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0 \text{ na brzegu otworu eliptycznego, gdzie } \xi \text{ przyjmuje wartość } \xi_0 \quad [e]$$

Z równań [100] i [102] znajdujemy, że warunek [d] jest spełniony, jeżeli

$$2 \operatorname{Re} \psi'(z) = S; \quad \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z) = 0 \text{ w nieskończoności} \quad [f]$$

Ponieważ składowe stanu naprężenia i odkształcenia z powodu ciągłości są okresowe ze względu na η o okresie 2π , będziemy rozpatrywać takie postacie $\psi(z)$ i $\chi(z)$, które dadzą nam funkcję naprężeń o tym samym okresie. Takimi postaciami są:

$$\sinh n\zeta, \quad \text{tzn.} \quad \sinh n\xi \cos n\eta + i \cosh n\xi \sin n\eta$$

$$\cosh n\zeta, \quad \text{tzn.} \quad \cosh n\xi \cos n\eta + i \sinh n\xi \sin n\eta$$

gdzie n jest liczbą całkowitą. Funkcja $\chi(z) = Bc^2\zeta$, gdzie B jest stałą, również spełnia warunki zadania.

Przyjmując $\psi(z) = Ac \sinh \zeta$, gdzie A jest stałą, i biorąc pod uwagę pierwsze z równań [b] dla $d\zeta/dz$ będącego odwrotnością $dz/d\zeta$, otrzymujemy

$$\psi(z) = Ac \cosh \zeta \cdot \frac{d\zeta}{dz} = A \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} = A \operatorname{ctgh} \zeta \quad [g]$$

¹⁾ Pierwsze rozwiązania dla tarczy z otworem eliptycznym zostały podane przez *Kolosowa*, loc. cit., oraz *C. E. Inglis*: „Trans. Inst. Naval Arch.”, Londyn 1913; „Engineering”, tom 95, str. 415, 1913. Patrz również *T. Pöschl*: „Math. Z.”, tom 11, str. 95, 1921. Tutaj zastosowano metodę *Kolosowa*. Ta sama metoda została zastosowana w kilku dwuwymiarowych zadaniach sprężystości przez *A. C. Stevenson*: „Proc. Roy. Soc.” (London), seria A, tom 184, str. 129 i 218, 1945. Inne pozycje zostaną podane poniżej.

W odległości od początku układu równej nieskończoności ξ jest nieskończoność i $\operatorname{ctgh} \zeta$ jest równy jedności. Pierwszy z warunków [f] jest przeto spełniony gdy $2A = S$. Następnie z [g] znajdziemy

$$\psi''(z) = -\frac{A}{c} \frac{1}{\sinh^3 \zeta} \quad [h]$$

oraz

$$z\psi''(z) = -A \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh^3 \zeta} \quad [i]$$

Biorąc $\chi(z) = Bc^2\zeta$, gdzie B jest stałą, mamy

$$\chi'(z) = \frac{Bc}{\sinh \zeta}; \quad \chi''(z) = -B \frac{\cosh \zeta}{\sinh^3 \zeta} \quad [j]$$

Z równań [i] i [j] widzimy, że $\bar{z}\psi''(z)$ oraz $\chi(z)$ znikają w nieskończoności. W ten sposób drugi z warunków [f] jest spełniony.

Warunek [e] może być spełniony przez odpowiedni dobór stałej B . Odejmując równanie [110] od równania [109], mamy

$$\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} = \psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) - e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad [k]$$

gdzie $e^{2i\alpha}$ jest dane drugim równaniem [b]. W ten sposób

$$\begin{aligned} \sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} &= A \left(\frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} + \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh \bar{\zeta}} \right) + \frac{\sinh \zeta}{\sinh \bar{\zeta}} \left(A \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh^3 \zeta} + B \frac{\cosh \zeta}{\sinh^3 \bar{\zeta}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sinh^2 \zeta \sinh \bar{\zeta}} \{ A [\sinh \zeta \sinh (\zeta + \bar{\zeta}) + \cosh \bar{\zeta}] + B \cosh \bar{\zeta} \} \end{aligned}$$

Na brzegu otworu eliptycznego $\xi = \xi_0$ i $\zeta + \bar{\zeta} = 2\xi_0$, $\bar{\zeta} = 2\xi_0 - \zeta$. Wtedy [l] sprowadza się do

$$\frac{1}{\sinh^2 \zeta \sinh \bar{\zeta}} (A \cosh 2\xi_0 + B) \cosh \zeta$$

W ten sposób warunek [e] jest spełniony, jeżeli

$$B = -A \cosh 2\xi_0 = -\frac{1}{2}S \cosh 2\xi_0 \quad [m]$$

Obecnie mamy

$$\psi(z) = \frac{1}{2}Sc \sinh \zeta; \quad \chi(z) = -\frac{1}{2}Sc^2 \cosh 2\xi_0 \cdot \zeta \quad [n]$$

Teraz wszystkie warunki brzegowe są spełnione. Nie możemy być jednak pewni, czy potencjały zespolone [n] przedstawiają rozwiązanie naszego problemu, dopóki nie dowiemy się, że nie powodują nieciągłości odkształceń. Składowe odkształceń w układzie kartezjańskim znajdziemy z równania [99], które w bieżącym przypadku daje nam

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} Ac \sinh \zeta - Ac \cosh \zeta \operatorname{ctgh} \bar{\zeta} - \frac{Bc}{\sinh \bar{\zeta}} \quad [o]$$

gdzie $A = S/2$, a B jest dane przez wyrażenie [m]. Hiperboliczne funkcje posiadają części rzeczywiste i urojone, będące okresowymi względem η . W ten sposób każdy obieg wewnątrz

tarczy po elipsie $\xi = \text{stała}$ sprowadzi u i v z powrotem do początkowych wartości. Dlatego potencjały zespolone [n] są rozwiązaniami problemu.

Składową naprężenia σ_η na otworze możemy łatwo znaleźć z równania [109], ponieważ σ_ξ jest na powierzchni otworu równe zero. Wstawiając wartość na $\psi'(z)$ z równania [g], przy czym $A = S/2$, mamy

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) = 2S \operatorname{Re} \operatorname{ctgh} \zeta$$

lecz

$$\operatorname{ctgh} \zeta = \frac{e^{\xi+i\eta} + e^{-\xi-i\eta}}{e^{\xi+i\eta} - e^{-\xi-i\eta}} = \frac{(e^{\xi+i\eta} + e^{-\xi-i\eta})}{(e^{\xi+i\eta} - e^{-\xi-i\eta})} \cdot \frac{(e^{\xi-i\eta} - e^{-\xi+i\eta})}{(e^{\xi-i\eta} - e^{-\xi+i\eta})} \quad [p]$$

Przemnażając wyrażenia z nawiasów licznika i mianownika otrzymujemy uproszczoną postać

$$\operatorname{ctgh} \zeta = \frac{\sinh 2\xi - i \sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

Stąd

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \frac{2S \sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

i na brzegu otworu

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = \frac{2S \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

Największa wartość, którą otrzymujemy na końcach dużej osi elipsy, gdzie $\eta=0$ i π , a $\cos 2\eta = -1$, wynosi

$$(\sigma_\eta)_{\max} = \frac{2S \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - 1}$$

Z zależności [c] zauważymy łatwo, że

$$c^2 = a^2 - b^2; \quad \sinh 2\xi_0 = \frac{2ab}{c^2}; \quad \cosh 2\xi_0 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

co uwzględniając, znajdziemy

$$(\sigma_\eta)_{\max} = 2S \frac{a}{b}$$

Naprężenia te są tym większe im elipsa jest smuklejsza.

Najmniejsza wartość $(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0}$ ma miejsce na końcach małej osi gdzie $\cos 2\eta = -1$. W ten sposób

$$(\sigma_\eta)_{\min} = \frac{2S \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 + 1} = 2S \frac{b}{a}$$

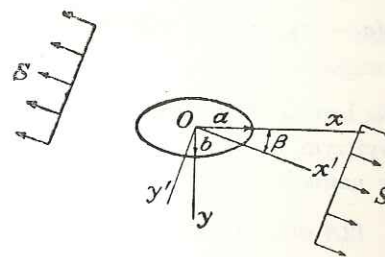
W przypadku gdy elipsa staje się kołem, to znaczy gdy $a=b$, oba naprężenia $(\sigma_\eta)_{\max}$ i $(\sigma_\eta)_{\min}$ są równe $2S$, zgodnie z wartością naprężeń dla kołowego otworu pod działaniem równomiernego, wszechstronnego rozciągania (str. 85).

Odształcenia mogą być obliczone z równania [n] i [111] lub [99]. Oczywiście są one ciągle i przedstawione za pomocą ciągłej jednowartościowej funkcji.

Problem równomiernego ciśnienia S wewnątrz eliptycznego otworu¹⁾ i naprężeń zerowych w nieskończoności, może być łatwo rozwiązany przez dodanie powyższego rozwiązania jednorodnego stanu naprężeń $\sigma_\xi = \sigma_\eta = -S$, który może być wyprowadzony z zespolonego potencjału $\psi(z) = -Sz/2$.

63. Eliptyczny otwór w tarczy poddanej jednoosiowemu rozciąganiu.

Jako drugie zadanie rozpatrzmy tarczę nieskończoną będącą w stanie jednowymiarowego rozciągania naprężeniami S w kierunku pod kątem β poniżej dodatniej osi x -ów (rys. 129), zaburzonego otworem eliptycznym o dużej osi w kierunku osi x -ów, jak w poprzednim zadaniu. Przypadkiem szczególnym jest otwór eliptyczny, którego duża oś jest prostopadła lub równoległa do kierunku rozciągania²⁾. Stosując obecną metodą rozwiązania możemy stwierdzić, że przypadek ogólny nie jest bardziej skomplikowany. Z rozwiązania zdania możemy znaleźć wpływ, jaki wywołuje eliptyczny otwór na dowolny jednorodny płaski stan naprężeń określony przez naprężenia główne w nieskończoności, zorientowane dowolnie względem otworu.



Rys. 129

Niech Ox' , Oy' będą osiami kartezjańskiego układu współrzędnych, otrzymanego przez obrót osi Ox o kąt β tak, że jest ona równoległa do kierunku rozciągania S . Wtedy za pomocą równań [105] i [106]

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y; \quad \sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} = e^{2i\beta}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$

Ponieważ w nieskończoności $\sigma_{x'} = S$, $\sigma_{y'} = \tau_{x'y'} = 0$, mamy

$$\sigma_x + \sigma_y = S; \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -Se^{-2i\beta} \text{ w nieskończoności i z równań [100] i [102]}$$

$$4 \operatorname{Re} \psi'(z) = S; \quad 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] = -Se^{-2i\beta} \text{ w nieskończoności} \quad [a]$$

Na brzegu otworu $\xi = \xi_0$ musi być $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$.

Warunki powyższe będą spełnione, gdy przyjmiemy $\psi(z)$, $\chi(z)$ w następującej postaci³⁾

$$4\psi(z) = Ac \cosh \zeta + Bc \sinh \zeta$$

$$4\chi(z) = Cc^2 \zeta + Dc^2 \cosh 2\zeta + Ec^2 \sinh 2\zeta$$

gdzie A, B, C, D, E są stałymi, które należy wyznaczyć.

Ponieważ $z = c \cosh \zeta$, człon $Ac \cosh \zeta$ w wyrażeniu na $4\psi(z)$ jest po prostu równy Az . W wyniku tego w funkcji naprężeń (równanie [97]) powstanie człon $\operatorname{Re} A\bar{z}z$ albo $\operatorname{Re} Ar^2$. Człon ten byłby zerem, gdyby A było urojone, dlatego możemy przyjąć od razu A jako rzeczywiste. Również stała C musi być rzeczywista: o ile wstawimy powyższe wyrażenia na $\psi(z)$, $\chi(z)$ do równania [104], biorąc jako krzywą AB zamknięty obwód naokoło otworu, znajdziemy, że wszystkie człony z wyjątkiem zawierającego C są równe zero, ponieważ funkcje hiperboliczne są okresowe względem η z okresem 2π . Człon zawierający C równa się $\operatorname{Re}[Cc^2(\xi + i\eta)]$ i znika dla zamkniętego obwodu jedynie gdy C jest rzeczywiste.

¹⁾ Nierównomierne ciśnienie w eliptycznym otworze zostało rozważone przez *I. N. Sneddon* i *H. A. Elliott* w „Quart. Applied Math.“, tom 4, str. 262, 1946.

²⁾ Patrz prace cytowane na str. 184.

³⁾ *Stevenson*, loc. cit.

Stałe B , D i E są zespolone i możemy napisać

$$B = B_1 + iB_2; \quad D = D_1 + iD_2; \quad E = E_1 + iE_2 \quad [b]$$

Podstawiając powyższe wyrażenia na $\psi(z)$, $\chi(z)$ do warunków [a], otrzymujemy

$$A + B_1 = S; \quad 2(D + E) = -Se^{-2i\beta} \quad [c]$$

Odejmując równanie [110] od równania [109] w celu otrzymania $\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}$, znajdujemy

$$4(\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}) = \operatorname{cosech} \zeta [(2A + B \operatorname{ctgh} \zeta) \sinh \bar{\zeta} + (B + B \operatorname{cosech}^2 \zeta) \cosh \bar{\zeta} + (C + 2E) \operatorname{cosech} \zeta \operatorname{ctgh} \zeta - 4D \sinh \zeta - 4E \cosh \zeta]$$

Na brzegu otworu $\xi = \xi_0$ i $\bar{\zeta} = 2\xi_0 - \zeta$. Jeżeli wstawimy tę wartość $\bar{\zeta}$ do $\sinh \bar{\zeta}$ i $\cosh \bar{\zeta}$ w powyższym wyrażeniu oraz rozwiniemy funkcje $\sinh (2\xi_0 - \xi)$ i $\cosh (2\xi_0 - \zeta)$, to wyrażenie w nawiasie kwadratowym uprości się do

$$(2A \sinh 2\alpha - 2iB_2 \cosh 2\alpha - 4E) \cosh \zeta - (2A \cosh 2\alpha - 2iB_2 \sinh 2\alpha + 4D) \sinh \zeta + (C + 2E + B \cosh 2\alpha) \operatorname{ctgh} \zeta \operatorname{cosech} \zeta$$

Wyrażenie to oraz $\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta}$ znikają w otworze o ile współczynniki przy $\cosh \zeta$, $\sinh \zeta$, $\operatorname{ctgh} \zeta$ $\operatorname{cosech} \zeta$ znikają. W ten sposób otrzymaliśmy w celu wyznaczenia stałych A , B , C , D , E trzy równania oraz dwa równania [e]. Ponieważ A i C są wielkościami rzeczywistymi, w istocie mamy dziewięć równań do spełnienia oraz osiem stałych $-A$, C , i B_1 , B_2 , D_1 , D_2 , E_1 , E_2 (będących rzeczywistymi i urojonymi częściami B , D i E). Równania te nie są sprzeczne, a ich rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned} A &= Se^{2\xi_0} \cos 2\beta & D &= -\frac{1}{2}Se^{2\xi_0} \cosh 2(\xi_0 + i\beta) \\ B &= S(1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta}) & E &= \frac{1}{2}Se^{2\xi_0} \sinh 2(\xi_0 + i\beta) \\ C &= -S(\cosh 2\xi_0 - \cos 2\beta) \end{aligned}$$

Zatem potencjał zespolony naszego problemu jest dany przez

$$\begin{aligned} 4\psi(z) &= Sc[e^{2\xi_0} \cos 2\beta \cosh \zeta + (1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta}) \sinh \zeta] \\ 4\chi(z) &= -Sc^2[(\cosh 2\xi_0 - \cosh 2\beta) \zeta + \frac{1}{2}e^{2\xi_0} - \cosh 2(\zeta - \xi_0 - i\beta)] \end{aligned}$$

Obecnie z równania [111] możemy wyznaczyć odkształcenia. Widzimy od razu, że są one funkcjami jednoznaczными.

Naprężenie σ_η w otworze możemy otrzymać z równania [109], ponieważ w otworze σ_ξ jest równe zero. A więc

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = S \frac{\sinh 2\xi_0 + \cos 2\beta - e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta)}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

Gdy naprężenia rozciągające S działają pod kątem prostym do dużej osi ($\beta = \pi/2$),

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = Se^{2\xi_0} \left[\frac{\sinh 2\xi_0(1 + e^{-2\xi_0})}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1 \right]$$

i największa wartość powstająca na końcach dużej osi ($\cos 2\eta = 1$) sprowadza się do

$$S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

Wielkość ta wzrasta nieograniczenie, gdy otwór staje się coraz bardziej smukły. W przypadku gdy $a=b$, wartość powyższa równa się wartości $3S$ znalezionej dla otworu kołowego na str. 85. Najmniejsza wartość naprężeń wynosi $-S$ i ma miejsce na końcach małej osi. Taką samą wartość otrzymujemy dla otworu kołowego.

Gdy naprężenia rozciągające S są równoległe do dużej osi ($\beta=0$), to największa wartość σ_η na obwodzie otworu występuje na końcach małej osi i wynosi $S(1+2b/a)$. Wyrażenie to dąży do S , gdy elipsa jest bardzo smukła. Na końcach dużej osi naprężenia są równe $-S$ dla dowolnej wartości a/b .

Wpływ eliptycznego otworu na stan czystego ścinania S równoległego do osi x i y może być łatwo znaleziony przez zastosowanie zasady superpozycji do przypadków rozciągania naprężeniami S dla $\beta = \pi/4$, oraz ściskania $-S$ dla $\beta = 3\pi/4$. W ten sposób

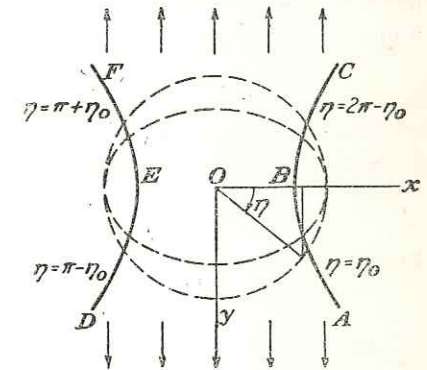
$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = -2S \frac{e^{2\xi_0} \sin 2\eta}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}$$

Wyrażenie to znika na końcach małej i dużej osi i posiada największą wartość

$$\pm S \frac{(a+b)^2}{ab}$$

w punktach, dla których $\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \xi_0 = b/a$. O ile elipsa jest bardzo smukła, wielkości te są bardzo duże, a punkty, dla których zachodzą te wartości, położone są blisko końców dużej osi.

Oprócz powyższych rozwiązań istnieją również rozwiązania dla eliptycznego otworu w przypadku tarczy poddanej czystemu zginaniu w swej płaszczyźnie¹⁾,²⁾ oraz poddanej parabolicznemu rozkładowi naprężeń stycznych, jak ma to miejsce w przypadku cienkiej prostokątnej belki³⁾, dla eliptycznego otworu z równymi i przeciwnie skierowanymi siłami skupionymi, działającymi na końcach mniejszej średnicy³⁾, oraz dla sztywnego i sprężystego „wtrącenia“, wypełniającego otwór tarczy poddanej rozciąganiu⁴⁾. Szereg ogólniejszych postaci funkcji naprężeń zmiennej rzeczywistej Φ został rozpatrzony we współrzędnych eliptycznych⁵⁾. Równoważne im potencjały zespolone można zbudować z funkcji użytych lub wspomnianych tutaj — łącznie z odpowiednikiem prostej funkcji przytoczonej w zadaniu na str. 183, w którym uwzględniono dyslokacje oraz skupione siły i pary sił.



Rys. 130

64. Brzeg w postaci hiperboli. Karby. Pokazaliśmy w par. 60, że krzywe $\eta = \text{const}$ w przypadku eliptycznych współrzędnych są hiperbolami, i w par. 62, że zakres η może być przyjęty od 0 do 2π , natomiast ξ — od 0 do ∞ .

¹⁾ K. Wolf: „Z. tech. Physik“, 1922, str. 160.
²⁾ H. Neuber: „Ingenieur-Archiv“, tom 5, str. 242, 1934. To rozwiązanie i kilka innych dotyczących elips i hiperbol zostało podanych w książce Neubera „Kerbspannungslehre“, Berlin, 1937.
³⁾ P. S. Symonds: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 13, str. A-183, 1946. Rozwiązanie w postaci zamkniętej, tamże — tom 14, str. A-246, 1947, przez A. E. Greena.
⁴⁾ N. I. Muschelišvili: „Zeit. angew. Math. Mech.“ tom 13, str. 264, 1933, L. H. Donnell: „Theodore von Kármán Anniversary Volume“, str. 293, Pasadena, 1941.
⁵⁾ E. G. Coker i L. N. G. Filon: „Photo-elasticity“, str. 123, 535, Cambridge Univ. Press, 1931; A. Timpe: „Math. Z.“, tom 17 str. 189, 1923.

Niech η_0 będzie wartością η wzdłuż łuku hiperboli BA na rys. 130 i będzie zawarte pomiędzy 0 i $\pi/2$, ponieważ zarówno x jak i y są dodatnie wzdłuż BA . Wzdłuż drugiej połowy tej gałęzi hiperboli BC , przyjmuje η wartość $2\pi - \eta_0$. Wzdłuż połowy ED drugiej gałęzi η równa się $\pi - \eta_0$, natomiast wzdłuż EF jest równa $\pi + \eta_0$.

Rozważmy tarczę $ABCFED$ zawartą wewnątrz tych hiperbolicznych brzegów i rozciągana w kierunku osi Oy^1). Naprężenia rozciągające w nieskończoności muszą spadać do zera, aby w ten sposób zapewnić skończoną wartość sił rozciągających działających w pasie EOB . Potencjały zespolone dopuszczające ten warunek, oraz spełniające inne konieczne warunki symetrii względem osi Ox i Oy i warunek, że hiperboliczne brzegi są wolne od naprężeń, przyjmują postać

$$\psi(z) = -\frac{1}{2} Ai\zeta; \quad \chi(z) = -\frac{1}{2} Ai\zeta - Bci \sinh \zeta \quad [a]$$

gdzie A i B są stałymi rzeczywistymi, a $z = c \cosh \zeta$. Stąd

$$\psi'(z) = -\frac{iA}{2c \sinh \zeta}; \quad \chi'(z) = -\frac{1}{2} Ai\zeta - \left(\frac{1}{2} A + B\right) i \operatorname{ctgh} \zeta \quad [b]$$

Równanie [103] par. 59 wskazuje, że brzegi w kształcie hiperbol $\eta = \eta_0$ będą wolne od sił, jeżeli funkcja

$$\psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad [c]$$

jest stała wzdłuż nich, lub jeżeli funkcja z nią sprzężona jest stała. Z równań [a] i [b] otrzymujemy wartość sprzężoną

$$A\eta - \frac{1}{2} Ai \frac{\cosh \bar{\zeta}}{\sinh \bar{\zeta}} - \left(\frac{1}{2} A + B\right) i \operatorname{ctgh} \bar{\zeta} \quad [d]$$

Na hiperboli $\eta = \eta_0$ mamy $\bar{\zeta} = \zeta - 2i\eta_0$; podstawiając te wartości, otrzymujemy wyrażenie

$$A\eta_0 - \frac{1}{2} A \sin 2\eta_0 - \left(\frac{1}{2} A \cos 2\eta_0 + \frac{1}{2} A + B\right) i \operatorname{ctgh} \zeta$$

które jest stałe, jeżeli wielkość w nawiasie znika. W ten sposób

$$B = -A \cos^2 \eta_0 \quad [e]$$

Aby znaleźć siłę wypadkową, możemy zastosować równanie [103] z par. 59 do wąskiego odcinka EOB , (rys. 130), dokładniej do dolnej części elipsy ograniczającej $\xi = 0$ pomiędzy hiperbolami $\eta = \eta_0$ i $\eta = \pi - \eta_0$. Na tej elipsie $\zeta = i\eta$ oraz $\bar{\zeta} = -i\eta$ i otrzymujemy z równań [103], [c] i [d]

$$F_x - iF_y = i[A\eta - (A + B) \operatorname{ctg} \eta]_{\eta=\eta_0}^{\eta=\pi-\eta_0} = i[A(\pi - 2\eta_0 + 2 \operatorname{ctg} \eta_0) + 2B \operatorname{ctg} \eta_0]$$

Ponieważ przyjęliśmy, że stałe A i B są rzeczywiste, $F_x = 0$. Stosując równanie [e], mamy

$$F_y = -A(\pi - 2\eta_0 + \sin 2\eta_0)$$

skąd wyznaczymy A , o ile całkowite rozciąganie F_y zostało ustalone. Składowe naprężeń i odkształceń można łatwo znaleźć z równań [109], [110], [111]. Z pierwszego otrzymujemy

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = -\frac{4A}{c} \frac{\cosh \xi \sin \eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

¹⁾ Zadanie to (również przypadek obciążenia tnącego) zostało rozwiązane przez *A. A. Griffitha*: „Tech. Rept. Aeronaut. Research Comm.“ (Great Britain), 1927—1928, tom II, str. 668 i przez *H. Neubergera*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 13, str. 439, 1933, lub „Kerbspannungslehre“, str. 35, Berlin, 1938.

Wartość naprężeń σ_ξ wzdłuż brzegu o kształcie hiperboli możemy znaleźć przez podstawienie w tym wyrażeniu $\eta = \eta_0$. Wyrażenie to posiada maksimum $-2A/c \sin \eta_0$ w pasie, gdzie $\xi = 0$. *Neuberger*¹⁾ wyraził ten wzór jako funkcję promienia krzywizny hiperboli dla $x = 0$ oraz rozwiązał, stosując inną metodę, zarówno zagadnienie zginania i ścinania w tarczy jak i rozciągania.

65. Współrzędne dwubiegunowe. Zadania, w których występują dwa niewspółśrodkowe brzegi kołowe, łącznie z przypadkiem szczególnym otworu kołowego w tarczy półnieskończonej, zwykle są rozwiązywane we współrzędnych dwubiegunowych ξ, η zdefiniowanych następująco

$$z = ia \operatorname{ctgh} \frac{1}{2} \zeta; \quad \zeta = \xi + i\eta \quad [a]$$

Podstawiając $(e^{\zeta} + e^{-\zeta})/(e^{\zeta} - e^{-\zeta})$ zamiast $\operatorname{ctgh} \frac{1}{2} \zeta$ i rozwiązując pierwsze z równań względem e^{ζ} , znajdziemy łatwo, że jest ono równoważne następującemu

$$\zeta = \log \frac{z + ia}{z - ia} \quad [b]$$

Wielkość $z + ia$ jest przedstawiona przez odcinek prostej łączący punkt $-ia$ z punktem z na płaszczyźnie xy ; rzuty tego odcinka na osie są jego częścią rzeczywistą i urojoną. Ta sama wielkość może być przedstawiona za pomocą $r_1 e^{i\theta_1}$, gdzie r_1 jest długością odcinka, a θ_1 jest kątem, jaki tworzy on z osią x -ów. (rys. 131). Podobnie $z - ia$ jest odcinkiem łączącym punkt ia z punktem z i może być przedstawiony w postaci $r_2 e^{i\theta_2}$ (rys. 131). Wtedy równanie [b] przybierze postać

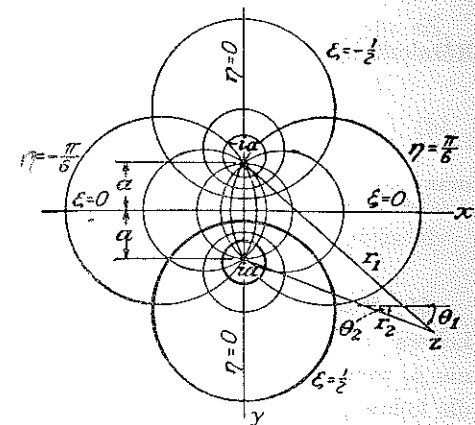
$$\xi + i\eta = \log \left(\frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} \right) = \log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

a więc

$$\xi = \log \frac{r_1}{r_2}; \quad \eta = \theta_1 - \theta_2 \quad [c]$$

Widać z rys. 131, że $\theta_1 - \theta_2$ jest kątem pomiędzy dwoma odcinkami łączącymi „bieguny“ $-ia$ oraz ia z punktem z , o ile ten punkt leży na prawo od osi y -ów, a jest tym kątem ze znakiem minus, gdy punkt z leży na lewo od tej osi. Stąd wynika, że krzywa $\xi = \text{const}$ jest łukiem koła przechodzącego przez bieguny. Kilka takich kół wykreślono na rys. 131. Jasno wynika z równania [c], że krzywa $\xi = \text{const}$ będzie krzywą, dla której $r_1/r_2 = \text{const}$. Taka krzywa jest oczywiście również kołem. Otacza ona biegun ia , gdy r_1/r_2 jest większe od jedności, tzn. gdy ξ jest dodatnie, natomiast otacza drugi biegun $-ia$, jeżeli ξ jest ujemne. Również te koła zostały pokazane na rys. 131. Tworzą one rodzinę współosiowych kół, przy czym bieguny są ich punktami granicznymi.

¹⁾ Loc. cit. W celu porównania wyników *Neubergera* z badaniami elastooptycznymi i zmęczeniowymi nad tarczami z korbami i żłobkowymi wałami patrz *R. E. Peterson* i *A. M. Wahl*: „J. Applied Mechanics“, tom 3, str. 15, 1936, lub *S. Timoshenko*: „Strength of Materials“, 2 wyd., tom II, str. 340. Patrz również *M. M. Frocht*: „Photoelasticity“, tom 2.



Rys. 131

Współrzędna η przyjmuje wartości od π do $-\pi$, gdy przecina odcinek osi y łączący oba bieguny, natomiast jej zakres dla całej płaszczyzny przyjmuje wartości pomiędzy $-\pi$ a π . Odkształcenia i naprężenia będą ciągłe wzdłuż odcinka, jeżeli zostaną przedstawione za pomocą okresowej funkcji η o okresie 2π .

Rozdzielając części rzeczywistą i urojoną w równaniu [a] otrzymujemy¹⁾

$$x = \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}; \quad y = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad [d]$$

Różniczkując równanie [a], dostajemy

$$J e^{i\alpha} = \frac{dz}{d\xi} = -\frac{1}{2} ia \operatorname{cosech}^2 \frac{1}{2} \xi \quad [e]$$

oraz

$$e^{2ia} = \frac{dz/d\xi}{d\bar{z}/d\bar{\xi}} = -\sinh^2 \frac{1}{2} \bar{\xi} \operatorname{cosech}^2 \frac{1}{2} \bar{\xi} \quad [f]$$

66. Rozwiązania we współrzędnych dwubiegunowych. Rozpatrzmy obecnie tarczę kołową z mimośrodowym otworem, poddaną ciśnieniu zewnętrznemu p_0 oraz ciśnieniu p_1 wewnątrz otworu²⁾. Otrzymane wyrażenia na składowe naprężenia będą również ważne dla kołowej rury grubościenniej z mimośrodowym otworem kołowym.

Niech brzeg zewnętrzny będzie kołem rodziny $\xi = \text{const}$, dla którego $\xi = \xi_0$, natomiast brzeg otworu kołem $\xi = \xi_1$. Dwa takie koła zostały wykreślone grubą linią na rys. 131. Z wyrażenia na y równań [d] poprzedniego paragrafu wynika, że koła te posiadają promienie $a \operatorname{cosech} \xi_0$, $a \operatorname{cosech} \xi_1$, natomiast ich środki są położone w następujących odległościach od początku układu: $a \operatorname{ctgh} \xi_0$, $a \operatorname{ctgh} \xi_1$. W ten sposób wielkości a , ξ_0 i ξ_1 są określone, jeżeli są znane promienie i odległość pomiędzy środkami.

Poruszając się w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara wzdłuż koła $\xi = \text{const}$, począwszy od punktu na lewo od osi y -ów (rys. 131), współrzędna η przyjmuje wartości od $-\pi$ do π . Funkcje, za pomocą których są wyrażone składowe naprężenia i odkształceń, muszą posiadać tę samą wartość dla $\eta = \pi$ co dla $\eta = -\pi$. Będzie to miało miejsce, gdy funkcje te będą periodyczne względem η o okresie 2π . A więc odpowiednią postacią potencjałów zespolonych będą następujące funkcje

$$\cosh n\xi; \quad \sinh n\xi \quad [a]$$

gdzie n jest liczbą naturalną. Istotnie funkcje powyższe są okresowe względem η o okresie 2π , jak również ich pochodne względem z , bo $d\xi/dz$ posiada tę samą własność (równ. [e] par. 65).

Jeżeli funkcje te wstawimy do równań [103], [104] i zastosujemy do koła $\xi = \text{const}$, to z powodu okresowości odpowiednia siła i moment będą równe zeru. Warunek ten jest spełniony również dla pełnego rozwiązania zagadnienia równowagi tarczy wewnątrz koła.

Przyjmujemy również, że funkcja $\chi(z) = aD\xi$, gdzie D jest stałą. Wstawiając ją jak poprzednio do równań [103] i [104], otrzymujemy, że moment (równanie [104]) będzie równy zeru jedynie, gdy D jest rzeczywiste. Przyjmujemy, że tak jest w istocie. Rozważając równanie

na odkształcenia [99], znajdziemy, że funkcja ta, zarówno jak funkcje [a], wstawione bądź jako $\psi(z)$ lub $\chi(z)$, dadzą nam odkształcenia bez nieciągłości.

Stan jednorodnego rozciągania lub ściskania, stanowiący rozwiązanie częściowe, otrzymamy stosując potencjał zespolony o postaci $\psi(z) = Az$, gdzie A jest rzeczywiste. Odpowiadającą funkcję naprężeń zmiennej rzeczywistej otrzymamy z równania [97]

$$\Phi = \operatorname{Re}(\bar{z}Az) = A\bar{z}z = A(x^2 + y^2)$$

Wyrażając funkcję tę we współrzędnych dwubiegunowych za pomocą równania [d] par. 65, dostajemy

$$Aa^2 \frac{\cosh \xi + \cos \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad [b]$$

Rozpatrując funkcje postaci [a] i $n=1$, zauważymy, że ponieważ rozkład naprężeń w zadaniu tym jest symetryczny względem osi y , to należy przyjąć funkcje naprężeń tak, by posiadały tę samą symetrię. Możemy więc przyjąć

$$\psi(z) = iB \cosh \xi; \quad \chi(z) = B' \sinh \xi \quad [c]$$

gdzie B i B' są rzeczywiste, oraz

$$\psi(z) = iC \sinh \xi; \quad \chi(z) = C' \cosh \xi \quad [d]$$

gdzie C i C' są rzeczywiste.

Z równania [97] otrzymujemy funkcję naprężeń zmiennej rzeczywistej, odpowiadającą [c]

$$aB \frac{\sinh \xi \cosh \xi \cos \eta - \sinh \xi \sin^2 \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} + B' \frac{\sinh \xi \cosh \xi \cos \eta - \sinh \xi \cos^2 \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}$$

Gdy założymy $B' = aB$, to wyrazy zawierające $\sin^2 \eta$, $\cos^2 \eta$ w licznikach będą niezależne od η , a cały licznik będzie zależał od η tylko za pośrednictwem wyrazu zawierającego $\cos \eta$ podobnie jak funkcja [b]. Jest to również prawdziwe dla potencjału zespolonego [d], o ile przyjmiemy $C' = aC$. Otrzymaliśmy w ten sposób prostsze, mniej ogólne funkcje, wystarczające do rozwiązania obecnego zadania.

Biorąc przeto

$$\psi(z) = iB \cosh \xi; \quad \chi(z) = aB \sinh \xi \quad [e]$$

znajdziemy za pomocą równań [109], [110] i [a], [f] par. 65, że odpowiednie składowe naprężenia są następującej postaci

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = 2B(2 \sinh \xi \cos \eta - \sinh 2\xi \cos 2\eta) \quad [f]$$

$$a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = -2B[\sinh 2\xi - 2 \sinh 2\xi \cosh \xi \cos \eta + \sinh 2\xi \cos 2\eta - i(2 \cosh 2\xi \cosh \xi \sin \eta - \cosh 2\xi \sin 2\eta)] \quad [g]$$

Podobnie zakładając funkcje

$$\psi(z) = iC \sinh \xi; \quad \chi(z) = aC \cosh \xi \quad [h]$$

¹⁾ Patrz wyprowadzenie wyrażenia [c] w par. 54.

²⁾ Pierwsze rozwiązanie za pomocą funkcji naprężeń zmiennej rzeczywistej zostało podane przez G. B. Jeffery: „Trans. Roy. Soc.” (Londyn), seria A, tom 221, str. 265, 1921.

otrzymamy

$$a(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = -2C(1 - 2 \cosh \xi \cos \eta + \cosh 2\xi \cos 2\eta) \quad [i]$$

$$a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = 2C[-\cosh 2\xi + 2 \cosh 2\xi \cosh \xi \cos \eta - \cosh 2\xi \cos 2\eta + i(2 \sinh 2\xi \cosh \xi \sin \eta - \sinh 2\xi \sin 2\eta)] \quad [j]$$

O ile przyjmiemy

$$\chi(z) = aD\zeta \quad [k]$$

to dostaniemy składowe naprężenia w postaci

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 0$$

$$a(\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta}) = D[\sinh 2\xi - 2 \sinh \xi \cos \eta - i(2 \cosh \xi \sin \eta - \sin 2\eta)] \quad [l]$$

Przyjmując stan jednorodnego naprężenia rozciągającego, danego przez

$$\psi(z) = Az \quad [m]$$

mamy

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4A; \quad \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 0$$

lub

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = 2A; \quad \tau_{\xi\eta} = 0 \quad [n]$$

Rozwiązanie naszego zadania możemy otrzymać za pomocą superpozycji stanów naprężeń, przedstawionych zespolonymi potencjałami [e], [h], [k] oraz [m]. Dodając do siebie składowe przedstawiające $\tau_{\xi\eta}$ w równaniach [g], [j] oraz [l], znajdziemy, że znikanie $\tau_{\xi\eta}$ na brzegach $\xi = \xi_0$, $\xi = \xi_1$ zachodzi, gdy są spełnione warunki

$$\begin{aligned} D - 2B \cosh 2\xi_0 - 2C \sinh 2\xi_0 &= 0 \\ D - 2B \cosh 2\xi_1 - 2C \sinh 2\xi_1 &= 0 \end{aligned} \quad [o]$$

Rozwiązując je ze względu na B i C , mamy

$$2B = D \frac{\cosh(\xi_1 + \xi_0)}{\cosh(\xi_1 - \xi_0)}; \quad 2C = -D \frac{\sinh(\xi_1 + \xi_0)}{\cosh(\xi_1 - \xi_0)} \quad [p]$$

Naprężenia normalne σ_ξ możemy znaleźć przez odjęcie rzeczywistej części równania [g] od równania [f] lub podobnie, biorąc inne pary równań. Na brzegu $\xi = \xi_0$ musimy przyjąć wartość $-p_0$, a na brzegu $\xi = \xi_1$ wartość $-p_1$. Biorąc pod uwagę wartości na B i C dane w równaniach [p], warunki powyższe prowadzą do dwu równań

$$2A + \frac{D}{a} \sinh^2 \xi_0 \operatorname{tgh}(\xi_1 - \xi_0) = -p_0$$

$$2A - \frac{D}{a} \sinh^2 \xi_1 \operatorname{tgh}(\xi_1 - \xi_0) = -p_1$$

i stąd

$$A = -\frac{1}{2} \frac{p_0 \sinh^2 \xi_1 + p_1 \sinh^2 \xi_0}{\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_0}$$

$$D = -a \frac{(p_0 - p_1) \operatorname{ctgh}(\xi_1 - \xi_0)}{\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_0}$$

Wartości te łącznie z wyrażeniami [p] określają całkowicie potencjały zespolone. O ile zadane jest tylko ciśnienie wewnętrzne p_1 ($p_0 = 0$), naprężenia obwodowe na otworze przyjmują postać $(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_1} = -p_1 + 2p_1(\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_0)^{-1}(\cosh \xi_1 - \cos \eta)[\sinh \xi_1 \operatorname{ctgh}(\xi_1 - \xi_0) + \cos \eta]$

Wyrażenie na maksymalną wartość tychże¹⁾ zostało podane uprzednio na str. 68.

Ogólna postać funkcji naprężeń we współrzędnych dwubiegunowych została podana przez *G. B. Jeffery*²⁾. Równoważne jej potencjały zespolone mogą być znalezione łatwo; zawierają one funkcje rozpatrzone tutaj łącznie z dwubiegunowymi odpowiednikami prostych funkcji, przytoczonych w zadaniu na str. 183, gdzie zostały uwzględnione dyslokacje i siły skupione. Powyższy sposób zastosowano do rozwiązania następujących zagadnień: półnieskończona tarcza z siłą skupioną w dowolnym punkcie³⁾, półnieskończona tarcza z otworem kołowym, obciążona rozciągającymi naprężeniami równoległymi do prostoliniowej krawędzi lub płaskiego brzegu⁴⁾ oraz obciążona ciężarem własnym⁵⁾, nieograniczona tarcza z dwoma otworami⁶⁾ lub z otworem utworzonym z dwu przecinających się kół⁷⁾.

W przypadku tarcz kołowych znane są następujące rozwiązania: tarcza poddana działaniu siły skupionej, przyłożonej w dowolnym punkcie⁸⁾, obciążona ciężarem własnym i zawieszona w dowolnym punkcie⁹⁾, lub wirująca naokoło osi umieszczonej mimośrodkowo¹⁰⁾, z zastosowaniem lub bez¹¹⁾ zastosowania współrzędnych dwubiegunowych, oraz wpływ otworu kołowego w półnieskończonej tarczy obciążonej siłą skupioną na prostoliniowym brzegu¹²⁾.

Inne współrzędne krzywoliniowe. Równanie

$$z = e^\xi + abe^{-\xi} + ac^3e^{-3\xi}$$

lub co za tym idzie

$$x = (e^\xi + abe^{-\xi}) \cos \eta + ac^3 e^{-3\xi} \cos 3\eta$$

$$y = (e^\xi - abe^{-\xi}) \sin \eta - ac^3 e^{-3\xi} \sin 3\eta$$

gdzie a , b , c są stałymi, przedstawia rodzinę krzywych $\xi = \text{const}$, która zawiera owale różnych kształtów włączając kwadrat z zaokrąglonymi narożami. Wpływ otworu o takim kształcie w tarczy poddanej rozciąganiu został rozważony (za pomocą funkcji naprężeń zmiennej rzeczywistej) przez *M. Greenspana*¹³⁾. *A. E. Green*¹⁴⁾, uogólniając powyższe współrzędne, otrzymał rozwiązanie dla trójkątnego otworu z zaokrąglonymi wierzchołkami oraz stosując inną transformację układu współrzędnych — dla otworu dokładnie prostokątnego. W ostatnim przypadku naroża powodują koncentrację naprężeń o nieskończonej wielkości.

Krzywoliniowe współrzędne dane równaniem

$$z = \zeta + ia_1 e^{i\zeta} + ia_2 e^{2i\zeta} + \dots + ia_n e^{in\zeta}$$

¹⁾ Wyczerpująca dyskusja dotycząca maksymalnej wartości została przeprowadzona przez *Cokera* i *Filona*, loc. cit.

²⁾ Loc. cit.

³⁾ *E. Melan*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 5, str. 314, 1925.

⁴⁾ Patrz str. 86.

⁵⁾ *R. D. Mindlin*: „Proc. A. S. C. E.“, str. 619, 1939.

⁶⁾ *T. Pöschl*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 1, str. 174, 1921, i tom 2, str. 187, 1922. Również *C. Weber*: tamże tom 2, s. 267, 1922; *E. Weinel*: tamże, tom 17, s. 276, 1937; *Chih Bing Ling*: „J. Applied Phys.“, tom 19, s. 77, 1948.

⁷⁾ *Chih Bing Ling*: tamże, str. 405, 1948.

⁸⁾ *R. D. Mindlin*: „J. Applied Mechanics“ (Trans. A. S. M. E.), tom 4, str. A-115, 1937.

⁹⁾ *R. D. Mindlin*: „J. Applied Physics“, tom 9, str. 714, 1938.

¹⁰⁾ *R. D. Mindlin*: „Phil. Mag.“, seria 7, tom 26, str. 713, 1938.

¹¹⁾ *B. Sen*: „Bull. Calcutta Math. Soc.“, tom 36, str. 58 i 83, 1944.

¹²⁾ *A. Barjansky*: „Quart. Applied Math.“, tom 2, str. 16, 1944.

¹³⁾ „Quart. Applied Math.“, tom 2, str. 60, 1944. Patrz również *V. Morkovin*; tamże, str. 350, 1945.

¹⁴⁾ „Proc. Roy. Soc.“ (Londyn), seria A, tom 184, str. 231, 1945.

gdzie a_1, a_2, \dots, a_n są stałymi rzeczywistymi, zostały zastosowane przez *C. Webera* do półnieskończonej tarczy o ząbkowanym brzegu¹⁾, jak w przykładzie tarczy z równomiernie rozmieszczonymi półkolistymi korbami. Gdy odległość pomiędzy środkami korbów jest równa dwukrotnej ich średnicy, wtedy koncentracja naprężeń przy rozciąganiu wynosi 2,13. W przypadku pojedynczego karbu otrzymujemy wartość 3,07 (patrz str. 92).

Metoda pozwalająca wyznaczyć potencjały zespolone z warunków brzegowych, bez konieczności zgadywania ich postaci, została rozwinięta przez *N. Muscheliszwilego*^{2,3)}.

¹⁾ *C. Weber*: „Z. angew. Math. Mech.“, tom 22, str. 29, 1942.

²⁾ „Math. Ann.“, tom 107, str. 282—312, 1932. Również „Z. angew. Math. Mech.“, tom 13, str. 264, 1933. O tej metodzie patrz *I. S. Sokolnikoff*: „Lectures on the Theory of Elasticity“, Brown University, 1941 (powielony skrypt).

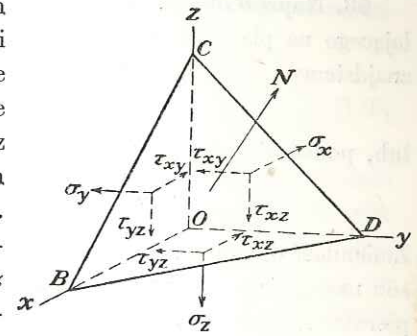
³⁾ Zastosowane przez *Morkovina*, loc. cit. Większość prac *Muscheliszwilego* i jego współpracowników jest napisana po rosyjsku. Jego książka „Singularnyje intiegralnyje urawnenija“, 2 wyd., Moskwa 1946 — przyp. red. pol. „Singular Integral Equations“ (2 wyd.), zawierająca szereg dwuwymiarowych problemów sprężystości, w szczególności mieszanych warunków brzegowych, została przetłumaczona przez the Aeronautical Research Laboratories, Dept. of Supply and Development, Commonwealth of Australia (Translation nr 12, 1949). Drugie tłumaczenie zostało wydane przez *J. R. M. Radoka* i opublikowane przez *P. Noordhoffa*, N. V., Groningen, Holandia, 1953. *Muscheliszwili* przedstawił swoją metodę w książce pt. „Niekotoryje osnovnyje problemy matematycznej teorii uprugosti“, 3 wyd. Moskwa 1949 — przyp. red. pol. „Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity“ (3 wyd.) Moskwa 1949, tłumaczone przez *J. R. M. Radoka* i opublikowane przez *P. Noordhoffa*, Groningen, Holandia 1953. Wyniki typu podanych w odnośnikach 13 i 14 na poprzedniej stronie zostały wcześniej uzyskane przez rosyjskich autorów i są cytowane w ostatniej książce.

ROZDZIAŁ 8

TRÓJWYMIAROWY STAN NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEN

67. Naprężenia w punkcie. Dotychczasowe nasze rozważania były ograniczone do zagadnień dwuwymiarowych. Rozpatrzmy obecnie ogólny przypadek naprężeń w trzech wymiarach. Pokazaliśmy już (patrz par. 4), że naprężenia działające na sześć ścian elementarnego sześcianu mogą być opisane za pomocą sześciu składowych naprężenia, a mianowicie trzech naprężeń normalnych $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ oraz trzech naprężeń stycznych $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Jeśli składowe powyższych naprężeń w dowolnym punkcie są wielkościami znanymi, wtedy naprężenia działające na dowolnie nachylonej płaszczyźnie przechodzącej przez ten punkt mogą być obliczone z równań statyki. Niech O będzie punktem ciała będącego w stanie naprężenia.

Przypuśćmy, że naprężenia te w płaszczyznach utworzonych przez osie układu współrzędnych xy, xz, yz są znane (rys. 132). W celu otrzymania naprężeń działających na dowolnie nachylonej płaszczyźnie przechodzącej przez punkt O , weźmiemy płaszczyznę BCD równoległą do niej w małej odległości od punktu O , tak że płaszczyzna ta wraz z płaszczyznami układu współrzędnych odcina z ciała bardzo mały czworościan $BCDO$. Ponieważ naprężenia w ciele zmieniają się w sposób ciągły, to naprężenia działające w płaszczyźnie BCD osiągną wartość naprężeń w płaszczyźnie równoległej, przechodzącej przez punkt O , gdy wycięty element stanie się nieskończenie mały.



Rys. 132

Rozważając warunki równowagi elementarnego czworościanu możemy pominąć siły masowe (patrz str. 21). Ponieważ element jest bardzo mały, możemy także pominąć zmienność naprężeń na bokach czworościanu i przyjąć, że naprężenia są rozmieszczone równomiernie. Dlatego siły działające na czworościan są iloczynem składowych naprężeń i powierzchni odpowiednich ścian. Jeżeli A oznacza powierzchnię ścian BCD czworościanu, wtedy powierzchnie trzech pozostałych ścian są rzutami A na trzy płaszczyzny układu współrzędnych. Jeśli N jest normalną do płaszczyzny BCD , to oznaczamy

$$\cos(Nx) = l; \quad \cos(Ny) = m; \quad \cos(Nz) = n \quad [a]$$

a powierzchniami ścian czworościanu są

$$Al, Am, An$$

Jeżeli oznaczymy przez X, Y, Z trzy składowe naprężenia równoległe do osi współrzędnych, działające na nachyloną ścianę BCD , to składową siłę działającą na ścianę BCD w kierunku osi x jest AX . Składowymi sił w kierunku osi x działającymi na pozostałych ścianach czwo-