

## **WYKŁAD 3**

# **CALKOWANIE NUMERYCZNE**

## Motywacja

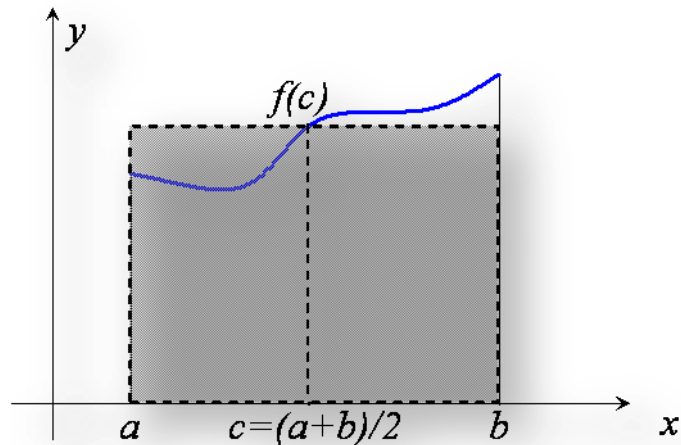
Wiele spotykanych w praktyce całek nie może być obliczona analitycznie lub ich ścisłe obliczenie jest bardzo pracochłonne. Z drugiej strony, bardzo często wystarczy znać jedynie przybliżoną (w rozsądną dokładnością) wartość całki. W takich sytuacjach pomocne jest wykorzystanie metod całkowania numerycznego i przerzucenie pracy na komputer.

W tym wykładzie zapoznamy się z podstawowymi metodami przybliżonego obliczania całek oznaczonych funkcji jednej zmiennej, tj. całek postaci

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Będziemy zakładać, że funkcja  $f$  jest przynajmniej ciągła w domkniętym przedziale  $[a,b]$  (oznacza to automatycznie, że funkcja  $f$  jest ograniczona w tym przedziale). Metody przybliżonego obliczania takich całek nazywać będziemy ogólnie **kwadraturami**.

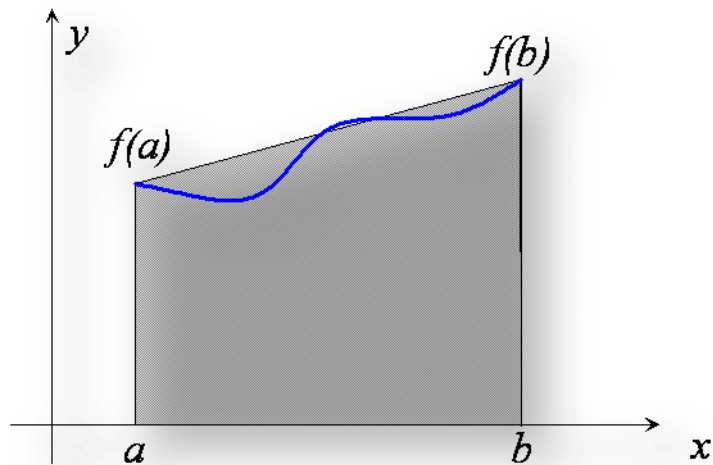
## Metoda punktu środkowego



Jest to bardzo prosty pomysł przedstawiony na rysunku po lewej. Odpowiednia reguła obliczania całki ma postać

$$I \approx I_M = (b-a)f(c) \quad , \quad c = (a+b)/2$$

## Metoda trapezów

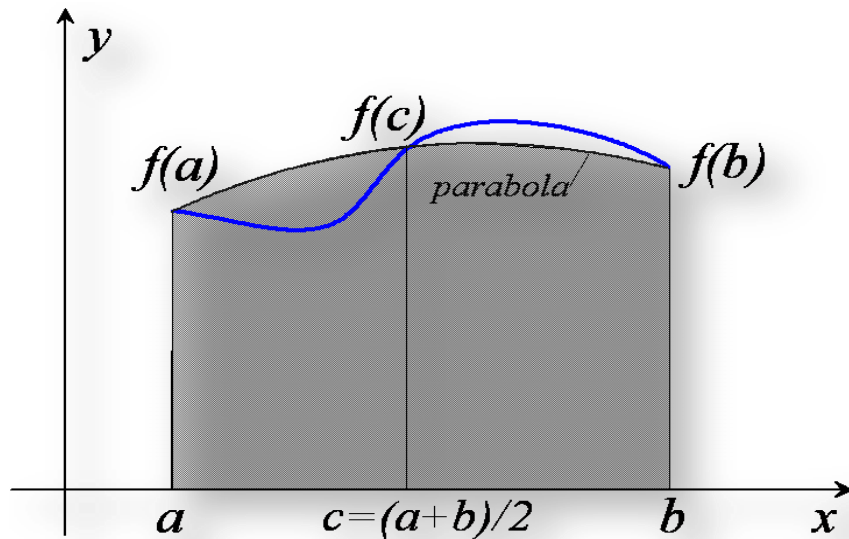


Metoda trapezów to kolejna prosta i naturalna metoda przybliżonego obliczania całki oznaczonej. Wzór tej metody ma postać

$$I_T = \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$$

Jest to najprostszy wariant metody interpolacyjnej: całkowana funkcja jest aproksymowana funkcją liniową, którą całkujemy analitycznie.

## Metoda Simpsona



Wprowadzając punkt środkowy możemy aproksymować funkcję całkowaną wielomianem interpolacyjnym 2-ego stopnia. Następnie wielomian ten całkujemy analitycznie, czego efektem jest formuła

$$I_S = \frac{1}{6}(b-a)[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

gdzie  $c = (a+b)/2$ .

## Kwadratury Newtona-Cotesa

Uogólniając ideę metody trapezów można skonstruować bardziej złożone kwadratury interpolacyjne. W tym celu wprowadzamy większą liczbę równo rozmieszczonych węzłów w przedziale, wyznaczamy wielomian interpolacyjny i całkujemy go analitycznie.

Ogólna formuła ma postać

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx \equiv I_n(f)$$

gdzie symbol  $P_n$  oznacza the wielomian interpolacyjny n-tego stopnia.

Wiemy już (Wykład nr 1), że wielomian ten może być wyznaczony np. metodą Lagrange'a. Mamy wówczas

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x)$$

Wobec tego, ogólna formuła kwadratury Newtona-Cotesa może być zapisana w postaci

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\left( \int_a^b l_k(x) dx \right)}_{\alpha_k} f(x_k) = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k)$$

gdzie

$$\alpha_k = \int_a^b l_k(x) dx.$$

## Dokładność metod całkowania numerycznego

Kluczowym pytaniem jest jak dokładny jest wynik całkowania otrzymany za pomocą tej czy innej metody. Aktualnie zajmiemy się tym właśnie problemem.

Zacznijmy od **metody punktu środkowego**. Stosując twierdzenie Taylora możemy napisać wzór

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(\hat{x})(x-c)^2, \quad \hat{x} \in [a, b]$$

Całkując powyższą równość otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \underbrace{(b-a)f(c)}_{I_M} + f'(c) \underbrace{\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) dx}_0 + \frac{1}{2} \int_a^b f''[\hat{x}(x)](x-c)^2 dx = \\ &= I_M + \frac{1}{24} f''(\xi)(b-a)^3 \end{aligned}$$

Do obliczenia trzeciej całki zastosowaliśmy twierdzenie o wartości średniej w następujący sposób

$$\int_a^b f''[\hat{x}(x)] \underbrace{(x-c)^2}_{\text{nieujemne w } [a,b]} dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{twierdzenie o} \\ \text{wart. średniej}}}{=} f''[\underbrace{\xi}_{\substack{\uparrow \\ \text{pewien} \\ \text{punkt} \\ \text{w } [a,b]}}] \int_a^b (x-c)^2 dx = \frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

Analogiczne rachunki można przeprowadzić dla **metody trapezów**. Wykorzystamy udowodnione w Wykładzie 1 twierdzenie o aproksymacji wielomianem interpolacyjnym. Dla wielomianu liniowego jego teza sprowadza się do formuły

$$f(x) = P_1(x) + \frac{1}{2} f''[\hat{x}(x)](x-a)(x-b)$$

Symbol  $P_1$  oznacza tu funkcję liniową interpolującą wartości funkcji całkowanej na końcach przedziału  $[a,b]$ , a  $\hat{x}$  jest pewnym punktem z  $[a,b]$ , na ogół zależnym od  $x$ .



Całkujemy otrzymaną równość

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= I_T(f) + \frac{1}{2} \int_a^b f''[\hat{x}(x)] \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\text{niedodatnie w } [a,b]} dx = \\ &= I_T(f) + \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = I_T(f) - \frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3\end{aligned}$$

Zauważmy, że z otrzymanej formuły dla błędu wynika poprawny wniosek, że metoda trapezów zawyża wartość całki dla funkcji wypukłej w  $[a,b]$  ( $f'' > 0$ ) i zaniża wartość całki dla funkcji wklęsłej ( $f'' < 0$ ).

Analiza dokładności **metody Simpsona** może być przeprowadzona analogicznie. Szczegóły pomijamy, bowiem rachunek jest dość pracochłonny. Odpowiednia formuła ma postać

$$\int_a^b f(x)dx = I_S(f) - \frac{1}{2880} f^{IV}(\xi)(b-a)^5$$

Zauważmy, że w wyrażeniu na błąd całkowania metody punktu środkowego i metody trapezów pojawia się wartość 2-ej pochodnej funkcji całkowanej w pewnym punkcie wewnętrznym. Fakt ten pozostaje w zgodności z obserwacją, że obie te metody dają ścisły wynik dla wielomianów stopnia nie większego niż 1 (funkcji stałych lub liniowych). Z drugiej strony wynik całkowania dla wielomianów stopnia drugiego i wyższych obarczony będzie pewnym błędem. Mówimy, że **metoda punktu środkowego i metoda trapezów to metody 1-ego rzędu.**

Ponieważ analogiczne oszacowanie dla metody Simpsona zawiera 4-tą pochodną, wzór Simpsona jest ścisły dla wielomianów stopnia nie większego niż 3. Wnioskujemy z tego, że **metoda Simpsona jest 3-ego rzędu.**

Jaka jest ogólna reguła?

**Otóż w ogólności rząd kwadratury typu Newtona-Cotesa (zamkniętej, tj. używającej punkty końcowe przedziału jako węzły interpolacyjne) wykorzystującej aproksymację wielomianem interpolacyjnym stopnia  $n$  (czyli opartej na  $n+1$  węzłach) jest równy:**

- $n$ , gdy liczba  $n$  jest nieparzysta (np. metoda trapezów)
- $n+1$ , gdy liczba  $n$  jest parzysta (np. metoda Simpsona)

## Kwadratury złożone

Znaczącą poprawę dokładności całkowania można osiągnąć stosując **kwadratury złożone**. Pomysł jest banalnie prosty: zamiast stosować formułę danej metody globalnie do całego przedziału  $[a,b]$ , dzielimy ten przedział na pewną liczbę podprzedziałów, stosujemy metodę w podprzedziałach, a otrzymane wyniki częściowe sumujemy.

Pomysł ma uzasadnienie w postaci znanej własności całki oznaczonej. Mianowicie, wprowadzając podział przedziału  $[a,b]$  punktami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

możemy napisać

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

W ten oto sposób możemy skonstruować np. **złożoną metodę punktu środkowego**. Jej formuła będzie określona następująco

$$I \approx I_M^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) \quad , \quad c_k = (x_k + x_{k+1})/2 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Jeśli wprowadzone punkty wewnętrzne dzielą przedział  $[a,b]$  na podprzedziały równej długości to powyższa formuła sprowadza się

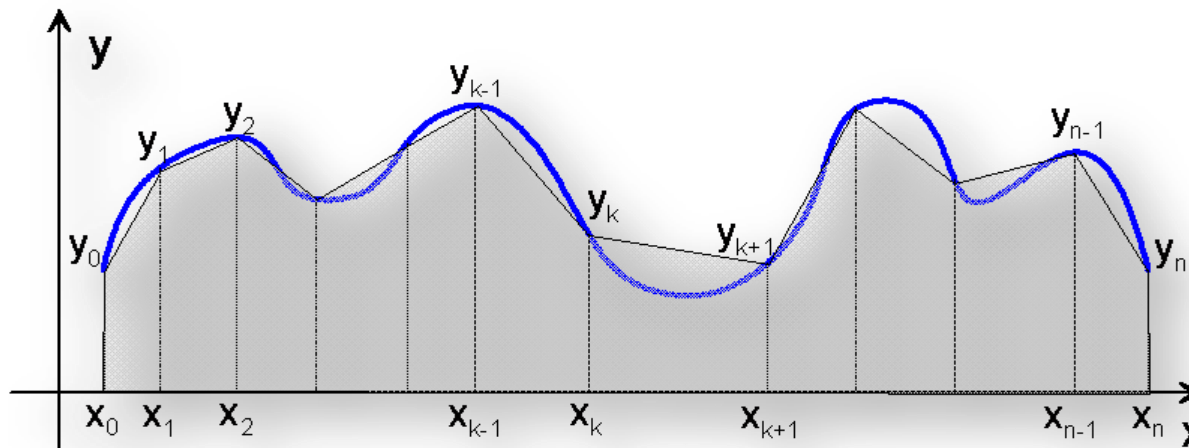
$$I_M^n(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \quad , \quad h = (b-a)/n \quad , \quad c_k = x_k + h/2 = a + (k + \frac{1}{2})h \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Można pokazać, że błąd całkowania w tej metodzie opisuje wzór

$$E_M^n = \int_a^b f(x)dx - I_M^n = \frac{1}{24} f''(\xi)(b-a)h^2 \quad , \quad \xi \in [a,b]$$

Jasnym jest, że złożona metoda punktu środkowego jest ścisła nadal jedynie dla wielomianów stopnia nie wyższego niż 1. Nie to jest jednak teraz najważniejsze, lecz fakt, że **błąd całkowania „kurczy się” wraz z kwadratem długości odcinków na które podzieliliśmy przedział  $[a,b]$ .**

W analogiczny sposób skonstruować można **złożoną metodę trapezów** (vide obrazek).



Jej ogólny wzór ma postać

$$I \approx I_T^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] (x_{k+1} - x_k)$$

W przypadku równomiernego podziału przedziału całkowania otrzymujemy

$$I_T^n(f) = \left[ \frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] h$$

Formuła dla błędu całkowania złożoną metodą trapezów ma postać

$$E_T^n = \int_a^b f(x)dx - I_T^n = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)h^2 \quad , \quad \xi \in [a,b]$$

Widzimy, że złożona metoda trapezów dawać będzie wynik podobnej „jakości” co złożona metoda punktu środkowego. W szczególności, w obu metodach błąd całkowania jest proporcjonalny do  $h^2$ .

Warto wspomnieć, że **złożona metoda trapezów jest szczególnie użyteczna do obliczania całki z funkcji okresowej w przedziale o długości równej okresowi tej funkcji**. Wówczas bowiem błąd całkowania znika z  $h$  w potęgze równiej rzędowi najwyższej periodycznej pochodnej jaką posiada funkcja całkowana. W szczególności, jeśli funkcja całkowalna jest gładka (tj. klasy  $C^\infty$ ) to błąd znika z tempie szybszym niż jakakolwiek potęga  $h$  – mówimy wówczas, że złożona metoda trapezów osiąga **spektralną zbieżność**.

Na koniec zapoznajmy się z ogólną formułą złożonej metody Simpsona

$$I_S^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6} [f(x_k) + 4f(c_k) + f(x_{k+1})] (x_{k+1} - x_k) \quad ,$$

$$c_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

W przypadku podziału równomiernego, formuła ta może być zapisana w postaci

$$I_S^n(f) = \frac{1}{3}h \left[ f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2n}) \right] ,$$

$$x_j = a + jh \quad , \quad j = 0, 1, \dots, 2n \quad , \quad h = \frac{b-a}{2n}$$

Oszacowanie błędu całkowania dla złożonej metody Simpsona z podziałem równomiernym podaje następujący wzór

$$E_S^n = \int_a^b f(x) dx - I_S^n = -\frac{1}{180} f^{IV}(\xi)(b-a)h^4 \quad , \quad \xi \in [a, b]$$



Widzimy, że błąd całkowania maleje tym razem proporcjonalnie aż do 4-ej potęgi długości odcinka podziału! Metoda ta daje bardzo dobrą dokładność przy rozsądnej liczbie podziałów.

Warto również wspomnieć, że innym sposobem uzyskania bardzo dokładnych wartości całki dla funkcji o wysokim stopniu regularności (tj. posiadających ciągłe pochodne wysokiego rzędu) jest zastosowanie rekurencyjnego poprawiania wyniku uzyskanego metodą trapezów – procedura ta znana jest pod nazwą **algorytmu Romberga**.

## Całkowanie metodą Gaussa

Omówimy teraz inną, bardzo popularną metodę przybliżonego obliczania całek zwaną Metodą Gaussa-Legendre'a (MGL). Zaczniemy od prostego spostrzeżenia, że całka w przedziale  $[a,b]$  może być transformowana do całki w „standardowym” przedziale  $[-1,1]$  drogą liniowej zamiany zmiennych.

Istotnie

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a(1-t) + \frac{1}{2}b(1+t) \quad , \quad dx = \frac{1}{2}(b-a)dt \\ x = a \Rightarrow t = -1 \quad , \quad x = b \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 F(t)dt$$

gdzie

$$F(t) = f\left[\frac{1}{2}a(1-t) + \frac{1}{2}b(1+t)\right]$$

Zaczniemy od przykładu. Załóżmy, że chcemy skonstruować wzór przybliżonego obliczania całki oznaczonej z przedziale  $[1,1]$ . Wzór ten ma mieć formę

$$\int_{-1}^1 F(t)dt \approx w_1 F(x_1) + w_2 F(x_2) \quad , \quad x_1, x_2 \in [-1,1]$$

Potrzebujemy wyznaczyć punkty (węzły) tej kwadratury  $x_1$  i  $x_2$  oraz współczynniki wagowe  $w_1$  and  $w_2$  w taki sposób, aby kwadratura miała **największy możliwy rząd dokładności**.

W tym celu „przetestujemy” powyższy wzór na jednomianach stopnia 0, 1, 2 itd., aż do uzyskania warunków (równań) z których da się wyznaczyć nieznane parametry kwadratury. Rachunki przebiegają następująco:

$$F(t) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = 2 = w_1 + w_2$$

$$F(t) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$F(t) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$$

$$F(t) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3$$

Otrzymaliśmy następujący nieliniowy układ równań dla niewiadomych  $x_1, x_2, w_1$  i  $w_2$ :

$$(a) w_1 + w_2 = 2 \quad , \quad (b) w_1 x_1 = -w_2 x_2$$
$$(c) w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \quad , \quad (d) w_1 x_1^3 = -w_2 x_2^3$$

Rozwiązujemy ....

$$x_1^2 = x_2^2 \quad \text{and} \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$$w_1 = w_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_2 = 1$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = 2x_1^2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.5773502692$$

Otrzymana formuła całkowania ma zatem postać

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + E_2(F)$$

Zauważmy, że **otrzymana formuła jest 3-ego rzędu**, tj. jest ścisła dla dowolnego wielomianu stopnia  $\leq 3$ ! Można również pokazać, że błąd całkowania wyraża się wzorem

$$E_2(F) = \frac{1}{135} F^{IV}(\xi) \quad , \quad \xi \in [-1, 1]$$

Mówiąc ogólnie, metoda Gaussa oparta jest – podobnie jak metody Newtona-Cotesa – na wykorzystaniu aproksymacji funkcji całkowanej wielomianem interpolacyjnym. Podstawowa różnica polega na tym, że w metodzie Gaussa wykorzystywane są specjalnie dobrane węzły. **Ich dobór jest optymalny w tym sensie, że metoda osiąga najwyższy możliwy rząd.** Sposób wyboru węzłów w metodzie Gaussa jest ściśle związany z koncepcją wielomianów ortogonalnych.

Rozważmy standardowy przedział  $[-1,1]$  i niech  $\Omega = \Omega(x)$  będzie zadaną funkcją dodatnią i całkowaną w tym przedziale.

Mówimy, że zbiór wielomianów

$$\{p_k(x) = a_{k,k}x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + \dots + a_{k,0} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots\}$$

jest  **$\Omega$ -ortogonalny** w przedziale  $[-1,1]$  wtedy i tylko, gdy spełnione są warunki (ortogonalności)

$$\int_{-1}^1 p_i(x) p_j(x) \Omega(x) dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Podajmy dwa ważne przykłady rodzin wielomianów ortogonalnych ...

## 1. Wielomiany Czebyszewa

Z wielomianami Czebyszewa zetknęliśmy się już w Wykładzie 1-szym. Wielomiany te zadane są przez następującą formułę rekurencyjną

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

Wielomiany Czebyszewa tworzą zbiór ortogonalny, mają bowiem miejsce równości

$$\int_{-1}^1 T_i(x)T_j(x)\Omega(x)dx = \begin{cases} \pi, & i = j = 0 \\ \frac{1}{2}\pi, & i = j > 0 \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

gdzie funkcja wagowa  $\Omega$  dana jest wzorem  $\Omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ .

Dowód ortogonalności polega na wykorzystaniu związku wielomianów Czebyszewa z funkcjami trygonometrycznymi ( $T_j(\cos x) = \cos jx$ ) i wykorzystaniu ortogonalności („zwykłej” to jest bez funkcji wagowej) tych ostatnich na przedziale  $[-\pi, \pi]$ .

## 2. Wielomiany Legendre'a

Wielomiany Legendre'a są zdefiniowane za pomocą następującej reguły rekurencyjnej

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_{j+1}(x) = \frac{2j+1}{j+1} x L_j(x) - \frac{j}{j+1} L_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

lub bezpośrednio wzorem postaci

$$L_j(x) = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{2j-2k}{j} x^{j-2k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Wielomiany te są ortogonalne na przedziale  $[-1, 1]$  w „zwykły” sposób tj. przy jednostkowej funkcji wagowej  $\Omega \equiv 1$

$$\int_{-1}^1 L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{2}{2i+1}, & i = j \end{cases}$$

**Uwaga:** wszystkie miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa i Legendre'a są położone w otwartym przedziale  $(-1, 1)$ .

Objaśnimy konstrukcję ogólnej metody Gaussa tj. przybliżonej metody obliczania całek oznaczonych z zadaną funkcją wagową  $\Omega$  na przedziale  $[-1,1]$

$$I_{\Omega}(f) = \int_{-1}^1 F(x)\Omega(x)dx$$

Wzór przybliżonego całkowania ma postać

$$I_{n,\omega}(F) = \sum_{j=0}^n \alpha_j F(x_j) \quad , \quad x_j \in [-1,1] \quad , \quad j = 0,1,\dots,n$$

przy czym współczynniki  $\alpha_j$ ,  $j = 0,1,\dots,n$  oblicza się następująco

$$\alpha_j = \int_{-1}^1 l_j(x)\Omega(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}\Omega(x)dx$$

W powyższych całkach  $l_j(x)$ ,  $j = 0,1,\dots,n$  to wielomiany interpolacyjny Lagrange'a (vide Wykład nr 1) zdefiniowane dla układu węzłów kwadratury Gaussa.



## Jak wyznaczyć węzły kwadratury Gaussa?

Odpowiedź na to nietrywialne pytanie wynika z ważnego twierdzenia (dowodzonego przez **Carla Jacobiego** w roku 1826):

Rząd dokładności **kwadratury interpolacyjnej** wykorzystującej  $n+1$  węzłów (tj., wielomian interpolacyjny  $n$ -tego stopnia) jest równy  $n+m$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian

$$v_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

spełnia warunki

$$\int_{-1}^1 x^k v_{n+1}(x) \Omega(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

**Komentarz:** Sformułowane w twierdzeniu warunki oznaczają de facto, że wielomian  $v_{n+1}(x)$  ma być  $\Omega$ -ortogonalny do wszystkich wielomianów stopnia nie wyższego niż  $m-1$ .

## Dowód:

Założmy, że funkcja  $F$  jest wielomianem stopnia  $n + m$ . Możemy zatem napisać równość  $F(x) = v_{n+1}(x)q_{m-1}(x) + r_n(x)$ , gdzie  $r_n(x)$  jest resztą dzielenia  $F$  przez  $v_{n+1}$ .

Ponieważ stopień wielomianu  $r_n(x)$  nie przewyższa liczby  $n$ , zatem zastosowania kwadratury interpolacyjnej wykorzystującej  $n+1$  węzłów do przybliżonego scałkowania tego wielomianu **daje wynik ścisły**. Mamy zatem

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j r_n(x_j) \equiv \int_{-1}^1 r_n(x) \Omega(x) dx = \int_{-1}^1 F(x) \Omega(x) dx - \int_{-1}^1 v_{n+1}(x) q_{m-1}(x) \Omega(x) dx$$

Dalej, teza twierdzenia wynika z faktu, że **druga całka znika** (patrz **Komentarz**) i mają miejsce równości  $F(x_j) = r_n(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Wobec tego mamy równość

$$\int_{-1}^1 F(x) \Omega(x) dx = \sum_{j=0}^n \alpha_j r_n(x_j) = \sum_{j=0}^n \alpha_j F(x_j)$$

co kończy dowód.

Z powyższego twierdzenia możemy wyciągnąć dwa kluczowe wnioski:

**1. Maksymalny rząd dokładności kwadratury interpolacyjnej wykorzystującej  $n+1$  węzłów wynosi  $2n+1$ .**

Wniosek ten wynika z prostej obserwacji, że sformułowane w powyższym twierdzeniu warunki ortogonalności nie mogą mieć miejsca dla  $m = n + 2$ . Gdyby tak było, to wielomian  $v_{n+1}$  byłby  $\Omega$ -ortogonalny to wszystkim wielomianów stopnia  $n + 1$ , a więc w szczególności do samego siebie! Implikowałoby to równość postaci

$$\int_{-1}^1 v_{n+1}^2(x) \Omega(x) dx = 0$$

a w konsekwencji fałszywy wniosek, że  $v_{n+1} \equiv 0$ .

**2. Węzłami kwadratury interpolacyjnej dla całek bez wagi ( $\Omega \equiv 1$ ) o maksymalnym rzędzie są miejsca zerowe wielomianu Legendre'a o stopniu równym  $n+1$ .**

Istotnie, dla kwadratury o maksymalnym rzędzie warunki ortogonalności sformułowane w twierdzeniu Jacobiego są spełnione dla  $k = 0, 1, \dots, n$ . Oznacza to, że wielomian  $v_{n+1}$  jest ortogonalny do wszystkich do wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż  $n$  (patrz ponownie Komentarz). Jedynym takim wielomianem jest właśnie wielomian Legendre'a  $L_{n+1}$ , zatem

$$v_{n+1}(x) = L_{n+1}(x) \Rightarrow x_j = \xi_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Otrzymaną kwadraturę interpolacyjną nazywamy kwadraturą Gaussa-Legendre'a. Ma ona ostatecznie postać

$$\int_{-1}^1 F(x) dx \approx I_{GL}(F) = \sum_{j=0}^n \alpha_j F(\xi_j)$$

przy czym współczynniki  $\alpha_j, j = 0, 1, \dots, n$  dane są wzorami

$$\alpha_j = \frac{2}{(1 - \xi_j^2)[L'_{n+1}(\xi_j)]^2}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Znane jest również następujące **oszacowanie błędu** tej metody

$$\int_{-1}^1 F(x)dx - I_{GL}(F) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} F^{(2n+2)}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in (-1,1)$$

Widzimy, że **rzęd dokładności MGL jest równy  $2n+1$** .

Niestety, węzły tej kwadratury (czyli miejsca zerowe wielomianu Legendre'a) nie mogą być w ogólności znalezione metodami czysto analitycznymi. Do ich wyznaczenia używa się odpowiednich metod przybliżonych (np. **metody stycznych**, z którą zapoznamy się w Wykładzie 4-tym). W wielu podręcznikach można znaleźć stabelaryzowane wartości parametrów kwadratury Gaussa (i szeregu innych jej pokrewnych). Wreszcie, kwadratura Gaussa-Legendre'a jest dostępna w formie gotowej w rozmaitych bibliotekach numerycznych i pakietach programów matematycznych (np. MATLAB).

Jedną z pokrewnych metod jest **kwadratura Gaussa-Czebyszewa** służąca do przybliżonego obliczania wartości całki z wagą Czebyszewa  $\Omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ . Jej własności są w pełni analogiczne do kwadratury Gaussa-Legendre'a. Różnica polega na tym, że węzły kwadratury Gaussa-Czebyszewa to miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa, dla których istnieją proste formuły analityczne (patrz **Wykład 1**).