

zmiennych x i y , a nie zależą od współrzędnej osiowej z . Ponieważ przemieszczenie w kierunku długości w równe jest zeru, to z równań [2] otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad [a]$$

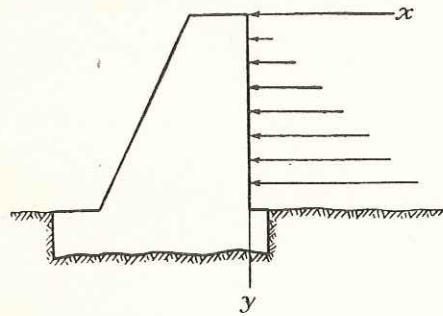
Napężenie normalne σ_z może być wyznaczone w funkcji σ_x i σ_y z prawa Hooke'a (równania [3]). Ponieważ $\epsilon_z = 0$, to

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

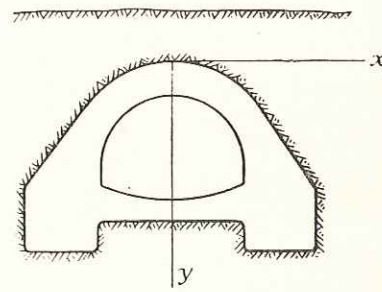
lub

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad [b]$$

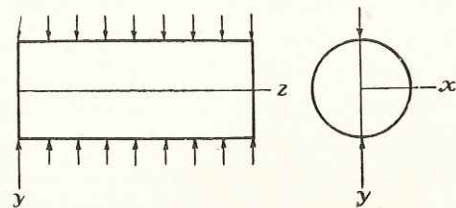
Te napężenia normalne działają nie tylko na poszczególne przekroje, ale również na końce ciała, gdzie stanowią siły potrzebne do utrzymania płaskiego stanu odkształcenia i wywołane są działaniem nieprzesuwanych gładkich sztywnych płaszczyzn.



Rys. 9



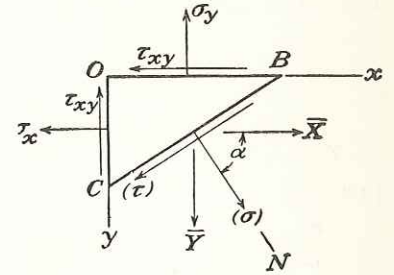
Rys. 10



Rys. 11

Z równań [a] i [6] wynika, że składowe napężenia τ_{xz} i τ_{yz} równają się zeru, a równanie [b] pozwala określić σ_z za pomocą σ_x i σ_y . Tak więc, zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia, podobnie jak zagadnienie płaskiego stanu naprężenia, sprowadza się do określenia jedynie σ_x , σ_y i τ_{xy} jako funkcji jedynie x i y .

9. Stan naprężenia w dowolnym punkcie ciała. Znając składowe σ_x , σ_y , τ_{xy} w dowolnym punkcie tarczy, która poddana jest działaniu płaskiego stanu naprężenia lub płaskiego stanu odkształcenia, można na podstawie równań statyki obliczyć naprężenia działające w płaszczyźnie nachylonej pod dowolnym kątem do osi x i y , prostopadłej do płaszczyzny x i y i przechodzącej przez ten punkt. Rozpatrzmy punkt O w tarczy poddanej działaniu naprężenia i założmy, że składowe naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} są znane (rys. 12). W celu znalezienia naprężenia w płaszczyźnie przechodzącej przez oś z i nachylonej do osi x i y pod pewnymi kątami, prowadzimy równoległą do niej płaszczyznę BC w pobliżu punktu O . Płaszczyzna BC i płaszczyzny współrzędnych wycinają z tarczy bardzo mały trójkątny graniastosłup OBC . Ponieważ naprężenia zmieniają się w sposób ciągły wewnątrz ciała, to w miarę zmniejszania elementu naprężenia działające na płaszczyźnie BC będą dążyć do naprężeń działających na płaszczyznę równoległą do niej i przechodzącą przez punkt O .



Rys. 12

Rozważając warunki równowagi małego trójkątnego graniastosłupa będziemy pomijać siły masowe jako wielkości małe wyższego rzędu (par. 4). Podobnie, jeśli element jest bardzo mały, możemy pominąć zmiany naprężenia na jego ściankach i przyjąć, że są one rozłożone równomiernie. Siły działające na graniastosłup trójkątny można więc określić mnożąc składowe naprężenia przez powierzchnie ścianek. Niech N będzie kierunkiem normalnej do płaszczyzny BC , a cosinusy kątów zawartych między normalną N a osiami x i y oznaczmy przez

$$\cos Nx = l; \quad \cos Ny = m$$

Wtedy, jeśli A oznacza powierzchnię ścianki BC , to powierzchnie dwóch pozostałych ścianek równają się Al i Am .

Jeśli przez \bar{X} i \bar{Y} oznaczymy składowe naprężenia działającego na ściankę BC , to równania równowagi elementarnego graniastosłupa dają

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \quad [12]$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

Tak więc składowe naprężenia działającego na każdą płaszczyznę określoną cosinusami kierunkowym l i m mogą być łatwo obliczone z równań [12], przy założeniu, że znane są trzy składowe naprężenia σ_x , σ_y i τ_{xy} w punkcie O .

Zakładając, że α jest kątem między normalną N a osią x , tj. że $l = \cos \alpha$ oraz $m = \sin \alpha$, otrzymujemy z równań [12] składową normalną i styczną naprężenia działającego na płaszczyznę BC

$$\sigma = \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad [13]$$

$$\tau = \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha$$

Kąt α można dobrać w taki sposób, aby naprężenia styczne τ były równe zeru. W tym przypadku mamy

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

lub

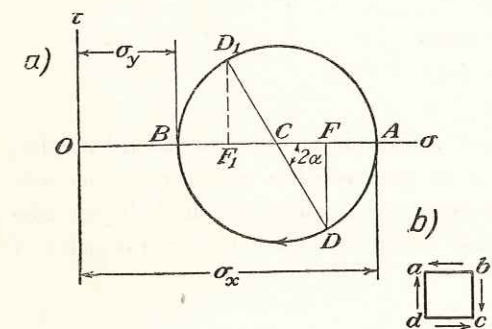
$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha \quad [14]$$

Z równania tego można wyznaczyć dwa wzajemnie prostopadłe kierunki, dla których naprężenie styczne jest równe zero. Kierunki te nazywają się *kierunkami głównymi*, a odpowiadające im naprężenia normalne — *naprężeniami głównymi*.

Jeśli kierunki główne pokrywają się z kierunkami osi x i y , to τ_{xy} jest równe zero, a równania [13] upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ \tau &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sigma_y - \sigma_x) \end{aligned} \quad [13']$$

Zmiany składowych naprężenia σ i τ w zależności od zmiany kąta α można z łatwością przedstawić graficznie¹⁾ sporządzając wykres, w którym role współrzędnych spełniają σ i τ .



Rys. 13

Każdej płaszczyźnie odpowiada na tym wykresie pewien punkt, którego współrzędnymi są σ i τ działające na tej płaszczyźnie. Taki wykres przedstawia rys. 13. Płaszczyzny prostopadłe do kierunków głównych wyznaczają punkty A i B o odciętych równych odpowiednio σ_x i σ_y . Można obecnie dowiedzieć, że składowe naprężenia odpowiadające każdej płaszczyźnie BC , określonej kątem α (rys. 12), będą przedstawione za pomocą współrzędnych punktu położonego na okręgu o średnicy AB . W celu znalezienia tego punktu, wystarcza odmierzyć od punktu A łuk odpowiadający kątowi 2α w tym kierunku, w którym mierzony jest kąt α . Jeśli D jest punktem otrzymanym w opisany właśnie sposób, to na podstawie wykresu

$$OF = OC + CF = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

$$DF = CD \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha$$

Przy porównaniu z równaniem [13'] widać, że współrzędne punktu D dają wartości liczbowe składowych naprężenia w płaszczyźnie BC określonej kątem α . Aby osiągnąć zgodność znaku składowej stycznej, przyjmujemy na rys. 13 τ skierowane dodatnio do góry i uważamy naprężenia styczne za dodatnie wtedy, gdy dają moment o kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu wskazówek zegara, tj. taki, jak na ściankach bc i ad elementu $abcd$ pokazanego na rys. 13b. Za zwrot ujemny naprężeń stycznych uważamy taki, jaki ma miejsce na ściankach ab i cd naszego elementu²⁾.

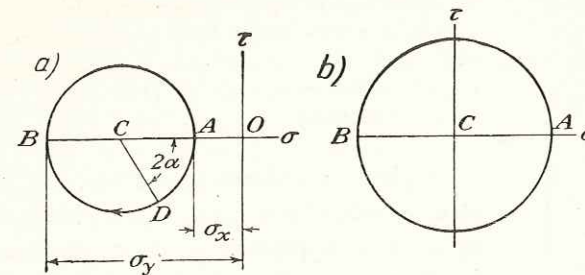
Gdy płaszczyzna BC obraca się wokół osi prostopadłej do płaszczyzny xy (rys. 12) w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, a kąt α zmienia się od 0 do $\pi/2$, to punkt D

¹⁾ Powyższa metoda wykreślna podana została przez *O. Mohra*: „Zivilingenieur“, 1882, str. 113. Patrz także jego „Technische Mechanik“, wyd. II, 1914.

²⁾ Prawidłowo wykorzystywane jest jedynie przy konstrukcji koła *Mohra*. W innych przypadkach pozostaje w mocy zasada określona w par. 3.

(rys. 13) porusza się od punktu A do B i w ten sposób dolna połowa okręgu określa zmianę naprężenia dla wszystkich wartości α w podanych granicach. Górna część okręgu określa naprężenia odpowiadające $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$.

Przedłużenie promienia CD do punktu D (rys. 13) odpowiada kątowi $\pi + 2\alpha$, a naprężenia odpowiadają płaszczyźnie prostopadłej do BC (rys. 12). Wynika stąd, że naprężenia



Rys. 14

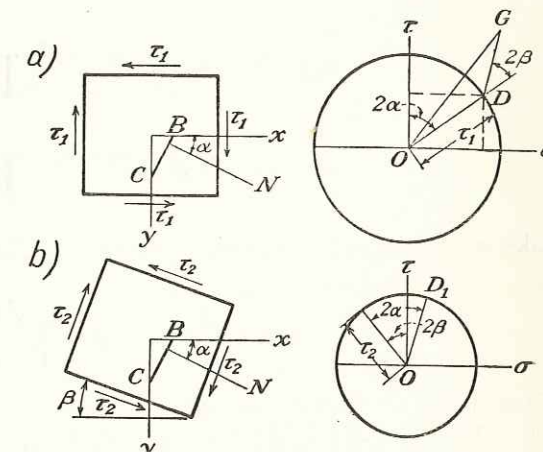
styczne w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach są liczbowo równe, jak to już zostało wykazane poprzednio. Z wykresu widać, że $OF_1 + OF = 2OC$, tzn. że suma naprężeń normalnych na dwóch wzajemnie prostopadłych przekrojach nie zależy od kąta α .

Maksymalne naprężenie styczne określone jest na wykresie przez maksymalną wartość rzędnej koła (rys. 13), równa się więc promieniowi koła. Na skutek tego

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad [15]$$

Działa ono na płaszczyznę, której kąt nachylenia wynosi $\alpha = \pi/4$, tj. na płaszczyznę, która jest dwusieczną kąta między kierunkami dwóch naprężeń głównych.

Omawianym wykresem można się posługiwać i w tym przypadku, gdy jedno lub oba naprężenia główne są ujemne (ściskanie). Trzeba jedynie zmienić znak odciętej odpowiadającej naprężeniu ściskającemu. W ten sposób rys. 14a przedstawia przypadek, w którym oba naprężenia główne są ujemne, a rys. 14b odpowiada przypadkowi czystego ścinania.

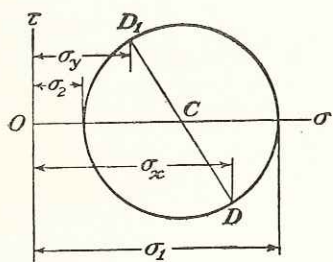


Rys. 15

Z rys. 13 i 14 widać, że naprężenie w punkcie może być rozłożone na dwie części: jedna część odpowiada rozciąganiu lub ściskaniu, którego wielkość określona jest odcięcią środka koła, a druga — czystemu ścinaniu, którego wielkość odpowiada promieniowi koła. Gdy nakłada się na siebie kilka płaskich stanów naprężenia, to zarówno naprężenia rozciągające, jak i ściskające dodają się algebraicznie. Stany czystego ścinania muszą być dodawane z uwzględnieniem kierunków płaszczyzn, na które działają. Można pokazać, że przy nakładaniu na siebie dwóch stanów czystego ścinania, których płaszczyzny maksymalnych wartości ścinania tworzą między sobą kąt β , otrzymana się w wyniku inny przypadek czystego ścinania. Rys. 15 przedstawia np. proces wyznaczenia naprężenia w płaszczyźnie określonej kątem α , wywołanego działaniem dwóch stanów czystego ścinania o wielkości τ_1 i τ_2 , z których

jeden działa na płaszczyznach xz i yz (rys. 15a), a drugi na płaszczyznach pochyłonych względem xz i yz pod kątem β (rys. 15b). Współrzędne punktu D na rys. 15a przedstawiają naprężenia styczne i normalne na płaszczyźnie CB wywołane pierwszym układem, podczas gdy współrzędne D_1 (rys. 15b) dają naprężenia na tej samej płaszczyźnie, ale odpowiadające drugiemu układowi. Dodając geometrycznie OD i OD_1 otrzymujemy OG , które jest naprężeniem wypadkowym na rozpatrywanej płaszczyźnie, wywołanym działaniem obu układów, a współrzędne punktu G określają naprężenie normalne i styczne. Należy zauważyć, że wielkość OG nie zależy od kąta α .

Na skutek tego, jako wynik superpozycji dwóch stanów czystego ścinania, otrzymujemy koło Mohra, które także przedstawia czyste ścinanie; jego wielkość określona jest przez OG , a płaszczyzny maksymalnych wartości ścinania pochyłone są względem płaszczyzn xz i yz pod kątem równym połowie kąta GOD .



Rys. 16

Wykres, przedstawiony na rys. 13, może być wykorzystany w celu określenia naprężeń głównych, jeśli tylko znane są składowe naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} dla dowolnych dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn (rys. 12). Zaczynamy w takim przypadku od wyznaczenia punktów D i D_1 , które przedstawiają stan naprężenia na dwóch płaszczyznach współrzędnych (rys. 16). W ten sposób otrzymuje się średnicę koła DD_1 . Przy wykreślaniu koła otrzymuje się naprężenia główne σ_1 i σ_2 , które wyznaczone są z przecięcia okręgu z osią odciętych. Z wykresu znajdujemy

$$\sigma_1 = OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = OC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maksymalna wartość naprężenia stycznego określona jest promieniem okręgu, tzn.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

W ten sposób można otrzymać wszystkie niezbędne właściwości stanu naprężenia w punkcie, jeśli tylko znane są trzy składowe naprężenia: σ_x , σ_y , τ_{xy} .

10. Stan odkształcenia w dowolnym punkcie ciała. Gdy znane są składowe odkształcenia ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} w punkcie, to można znaleźć wydłużenia jednostkowe w dowolnym kierunku i wyznaczyć zmianę kąta prostego — odkształcenie postaciowe — o dowolnym kierunku w tymże punkcie. Podczas odkształcenia liniowy element PQ (rys. 17a) zawarty między punktami (x, y) i $(x+dx, y+dy)$ ulega przemieszczeniu, rozciągnięciu (lub skróceniu), obrotowi i w końcu przechodzi w element $P'Q'$. Składowe przemieszczenia punktu P są oznaczone przez u i v , a składowe przemieszczenia punktu Q są równe

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Jeśli obecnie $P'Q'$ (rys. 17a) przesuniemy w ten sposób, że P' pokryje się na powrót z P , to znajdzie się on w pozycji PQ'' (rys. 17b), a QR i RQ'' przedstawiają składowe przemiesz-

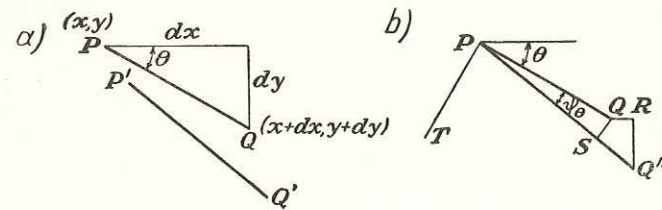
czenia Q względem P . Tak więc

$$QR = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad RQ'' = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Składowe tego przemieszczenia względnego QS , SQ'' normalne do PQ'' i wzdłuż PQ'' , można znaleźć w postaci

$$QS = -QR \sin \theta + RQ'' \cos \theta; \quad SQ'' = QR \cos \theta + RQ'' \sin \theta$$

przy założeniu, że pomija się kąt QPS jako mały w porównaniu z θ . Ponieważ krótki odcinek QS można identyfikować z łukiem koła, którego środek znajduje się w punkcie P , to SQ''



Rys. 17

określa przyrost PQ . Wydłużenie jednostkowe $P'Q'$ oznaczone jest przez ϵ_θ i wyraża się stosunkiem SQ''/PQ . Posługując się równaniami [b] i [a], otrzymujemy

$$\epsilon_\theta = \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta$$

lub

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta$$

Jest to wydłużenie jednostkowe w dowolnym kierunku θ .

Kąt ψ_θ , o który obrócił się PQ , równa się QS/PQ . Tak więc, na podstawie [b] i [a]

$$\psi_\theta = -\sin \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)$$

lub

$$\psi_\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta$$

Element liniowy PT , prostopadły do PQ , tworzy z osią x kąt $\theta + (\pi/2)$, a jego obrót $\psi_{\theta + \pi/2}$ określony jest związkiem [d], jeśli na miejsce θ postawimy $\theta + (\pi/2)$. Ponieważ $\cos[\theta + (\pi/2)] = -\sin \theta$, a $\sin[\theta + (\pi/2)] = \cos \theta$, to otrzymamy

$$\psi_{\theta + \pi/2} = \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \theta$$

Odształcenie postaciowe γ dla kierunków PQ, PT określone jest różnicą $\psi_\theta - \psi_{\theta + \frac{\pi}{2}}$ a stąd

$$\gamma_\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) 2 \sin \theta \cos \theta$$

lub

$$\frac{1}{2} \gamma_\theta = \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \theta \cos \theta \quad (f)$$

Porównując równania [c] i [f] z [13] zauważymy, że można je otrzymać z [13] drogą zastąpienia: σ przez ε_θ , τ przez $\gamma_\theta/2$, σ_x przez ε_x , σ_y przez ε_y , τ_{xy} przez $\gamma_{xy}/2$ i α przez θ . W konsekwencji, każdemu wnioskowi wyciągniętemu z równania [13] i dotyczącemu σ oraz τ odpowiada wniosek z [c] i [f] dotyczący ε_θ oraz $\gamma_\theta/2$. Tak więc, istnieją dwie wartości kąta θ , które różnią się o 90° , a dla których γ_θ jest równe zero. Wartości te dane są związkiem

$$\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \operatorname{tg} 2\theta$$

Odpowiadające im odkształcenia ε_θ są *odkształceniami głównymi*. Można wykreślić koło *Mohra* analogicznie do tego, które znajduje się na rys. 13 lub rys. 16, a wtedy rzędne przedstawiają $\gamma_\theta/2$, a odcięte — wartości ε_θ . Odkształcenia główne $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ będą to algebraicznie największe i najmniejsze spośród wartości ε_θ jako funkcji θ . Największa wartość $\gamma_\theta/2$ odpowiada promieniowi okręgu. Tak więc, największa wartość odkształcenia postaciowego $\gamma_{\theta \max}$ wynosi

$$\gamma_{\theta \max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

11. Pomiar odkształceń powierzchniowych. Odkształcenia lub wydłużenia jednostkowe na powierzchni ciała najwygodniej jest mierzyć za pomocą tensometrów elektrooporowych¹⁾. Najprostszą postacią takiego tensometru jest krótki izolowany drucik przyklejony do powierzchni ciała. Podczas rozciągania opór drucika wzrasta i w ten sposób odkształcenie może być mierzone elektrycznie. Efekt pomiaru zwiększany jest zwykle drogą kilkukrotnego przewinięcia drucików w jedną i w drugą stronę przez całą długość tensometru, co daje szeregowe połączenie kilku pojedynczych drucików. Druciki wkleja się między dwa paski papieru i dopiero tak połączone przykleja się do powierzchni.

Użycie opisanych tensometrów jest proste, gdy znane są kierunki główne. Na linii każdego kierunku głównego umieszcza się jeden tensometr i otrzymuje się bezpośrednio pomiary ε_1 i ε_2 . Naprężenie główne σ_1 i σ_2 można obliczyć na podstawie prawa *Hooke'a* (związki [3]), wiedząc, że $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2$ i $\sigma_z = 0$; ostatnia równość wynika z założenia, że powierzchnia, do której przyłączone są tensometry, wolna jest od obciążeń. Stąd

$$(1 - \nu^2) \sigma_1 = E(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad (1 - \nu^2) \sigma_2 = E(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)$$

Gdy kierunki główne nie są z góry znane, to trzeba dokonać trzech pomiarów. Stan odkształcenia jest całkowicie określony, jeśli można zmierzyć $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Dogodnie jest mierzyć wydłużenie jednostkowe w trzech kierunkach, bo pomiary tensometryczne podają miarę wydłużeń, a nie pozwalają bezpośrednio mierzyć odkształcenia postaciowego. Taka grupa pomiarów nazywa się „rozetą odkształcenia”. Za pomocą prostej konstrukcji²⁾ opisanej

w par. 12 można wykreślić koło *Mohra*, z którego odczytujemy główne odkształcenia. Na rys. 18a przedstawione są liniami ciągłymi trzy bazy pomiarowe. Linia przerywana przedstawia (nieznany) kierunek większego z odkształceń głównych ε_1 . Kierunek pierwszego tensometru obrócony jest względem kierunku ε_1 o kąt Φ zgodnie z kierunkiem obrotu wskazówek zegara.

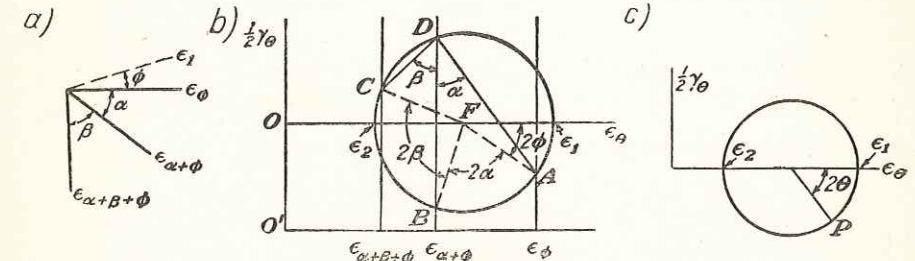
Jeśli kierunki x i y z równań [c] i [f] p. 10 przyjęte są jako kierunki główne, to ε_x może być przyjęte jako $\varepsilon_1, \varepsilon_y$ — jako ε_2 , a γ_{xy} jest równe zero. Równania te można więc napisać następująco:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta; \quad \frac{1}{2} \gamma_\theta = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta$$

przy czym θ oznacza kąt mierzony od kierunku ε_1 . Równania te mogą być napisane w postaci

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta; \quad \frac{1}{2} \gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta$$

a otrzymane na ich podstawie wielkości — przedstawione punktem P na okręgu koła (rys. 18c). Jeśli θ przyjmuje wartość Φ , to P odpowiada punktowi A na okręgu (rys. 18b), a przemiesz-



Rys. 18

czenie katowe osi ε_θ jest wtedy równe 2Φ . Odcięta tego punktu pokrywa się ze znaną wartością ε_θ . Jeśli θ przyjmuje wartość $\Phi + \alpha$, to P przemieszcza się w położenie B , co odpowiada kątowi $AFB = 2\alpha$, a odcięta ma znaną wartość $\varepsilon_{\alpha+\phi}$. Jeśli θ przyjmuje wartość $\Phi + \alpha + \beta$, to P , poprzez kąt $BFC = 2\beta$, przemieszcza się do punktu C , którego odcięta jest $\varepsilon_{\alpha+\beta+\phi}$.

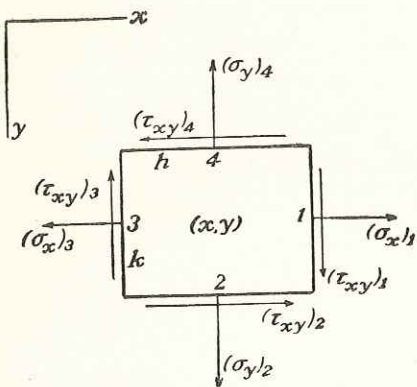
Zagadnienie sprowadza się do wykreślenia okręgu, gdy znane są omówione wyżej trzy odcięte i dwa kąty α oraz β .

12. Konstrukcja koła Mohra dla odkształceń na podstawie rozety odkształceń. Przyjęta chwilowo pozioma oś ε wykreślona jest poziomo z dowolnego punktu O' (rys. 18b), który jest początkiem układu; na niej odkłada się pomierzone trzy odkształcenia $\varepsilon_\theta, \varepsilon_{\alpha+\phi}, \varepsilon_{\alpha+\beta+\phi}$. Przez otrzymane punkty prowadzi się proste pionowe. Z punktu D , wybranego dowolnie na prostej pionowej odpowiadającej wartości $\varepsilon_{\alpha+\phi}$, prowadzimy linie DA oraz DC , aż do przecięcia z pozostałymi dwoma pionowymi, pod kątami α i β . Okrąg poprowadzony przez punkty D, A i C jest poszukiwanym okręgiem. Jego środek F wyznaczony jest przez przecięcie symetrycznych odcinków CD i DA . Punkty A, B, C określają trzy kierunki pomiarowe. Kąt AFB jest dwukrotnie większy od kąta ADB opartego na łuku koła i ma wartość 2α , a kąt BFC wynosi 2β . Tak więc, punkty A, B, C rozmieszczone są na okręgu pod właściwymi kątami i mają odpowiednie wartości odciętych. Ośią ε_θ jest obecnie OF , a odległości od punktu O do przecięcia z okręgiem określają ε_1 i ε_2 . Kąt 2Φ jest kątem, pod jakim poniżej osi nachylony jest promień FA .

¹⁾ Szczegółowy opis tej metody podany jest w „Handbook of Experimental Stress Analysis”, rozdz. 5 i 9.

²⁾ Glenn Murphy: „J. Applied Mechanics” (Trans. A. S. M. E.), t. 12, str. A—209, 1945; N. J. Hoff, tamże.

13. Różniczkowe równania równowagi. Rozważmy obecnie równowagę małego prostopadłościanu o krawędziach h, k i wysokości jednostkowej (rys. 19). Na rysunku są oznaczone naprężenia działające na ścianki boczne 1, 2, 3, 4 i ich dodatnie zwroty. W związku ze zmiennością naprężeń wewnątrz ciała, wartość np. σ_x na ściance bocznej 1 różni się nieco od wartości na ściance 3. Symbole $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ odnoszą się do punktu x, y , który jest punktem środkowym prostokąta przedstawionego na rys. 19. Wartości w środkowych punktach boków oznaczone są przez $(\sigma_x)_1, (\sigma_x)_3$, itd. Ponieważ powierzchnie ścianek są bardzo małe, to odpowiadające im siły otrzymuje się przez pomnożenie wartości naprężeń w punktach środkowych przez powierzchnię ścian, na które działają¹⁾.



Rys. 19

Siły masowe, działające na prostopadłościan, pomijane jako małe wyższego rzędu przy rozpatrywaniu równowagi graniastostłupa trójkątnego (rys. 12), muszą być obecnie wzięte pod uwagę, ponieważ ich wielkości są tego samego rzędu co i składniki

spowodowane zmiennością składowych naprężeń, które właśnie są rozważane. Jeśli X i Y oznaczają składowe siły masowej odniesione do jednostki objętości, to równanie równowagi dla sił działających w kierunku x ma postać

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0$$

lub po podzieleniu przez hk

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0$$

Jeśli obecnie przyjmiemy, że prostopadłościan maleje w sposób ciągły, tzn. że $h \rightarrow 0$ i $k \rightarrow 0$, to granicą stosunku $[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3]/h$ będzie $\partial\sigma_x/\partial x$, co wynika z definicji pochodnej cząstkowej. Podobnie $[(\tau_{xy})_2 + (\tau_{xy})_4]/k$ dąży do $\partial\tau_{xy}/\partial y$. Równanie równowagi sił w kierunku y otrzymujemy w taki sam sposób. Tak więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad [18]$$

W zastosowaniach praktycznych zwykle jedyną siłą masową jest ciężar ciała. Wtedy równania [18] przy założeniu, że oś y skierowana jest w dół, a ρ oznacza masę na jednostkę objętości, przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0 \end{aligned} \quad [19]$$

¹⁾ Przy bardziej ścisłych rozważaniach należy wprowadzić składniki wyższego rzędu, które znikają w warunkach granicznych.

Otrzymane równania są różniczkowymi równaniami równowagi dla zagadnień dwuwymiarowych.

14. Warunki brzegowe. Równania [18] lub [19] muszą być spełnione we wszystkich punktach wewnątrz ciała. Składowe naprężenia zmieniają się od punktu do punktu we wnętrzu tarczy; osiągając brzeg muszą one pozostawać w równowadze z siłami zewnętrznymi na brzegu tarczy i dlatego siły zewnętrzne mogą być uważane za przedłużenie rozkładu naprężeń wewnętrznych. Wspomniane warunki równowagi na brzegu można otrzymać z równań [12]. Przyjmując mały trójkątny graniastostłup OBC (rys. 12) w taki sposób, by ścianka BC pokrywała się z brzegiem tarczy, jak to pokazano na rys. 20, i oznaczając przez \bar{X} oraz \bar{Y} składowe siły powierzchniowych odniesionych do jednostki powierzchni w tym punkcie, mamy

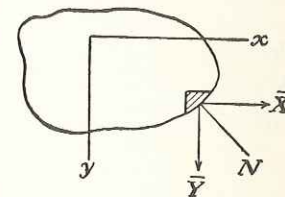
$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \quad [20]$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

gdzie l i m są cosinusami kierunkowymi normalnej do brzegu N .

W przypadku szczególnym tarczy prostokątnej, osie współrzędnych przyjmuje się równoległe do jej boków i warunki brzegowe [20] mogą ulec uproszczeniu. Przyjmijmy np., że krawędź tarczy jest równoległa do osi x . Tarcza ma wtedy normalną N równoległą do osi y oraz $l = 0$, a $m = \pm 1$. Równania [20] przyjmują więc postać

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}; \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y$$



Rys. 20

Znak dodatni przyjmujemy wtedy, gdy zwrot normalnej N jest zgodny ze zwrotem osi y , a ujemny — gdy zwroty są przeciwne. Widać z tego, że składowe naprężenia na brzegu stają się równe składowym siłom powierzchniowym odniesionych do jednostki powierzchni brzegu.

15. Równania ciągłości odkształceń. Zadaniem teorii sprężystości jest zwykle określenie stanu naprężenia w ciele poddanym działaniu określonych sił. W przypadku dwuwymiarowym należy rozwiązać układ różniczkowych równań równowagi [18], przy czym rozwiązanie musi spełniać warunki brzegowe [20]. Powyższe równania, wyprowadzone na podstawie równań statyki ciała doskonale sztywnego i zawierające trzy składowe naprężenia σ_x, σ_y oraz τ_{xy} , nie wystarczają do określenia tych składowych. Zagadnienie jest statycznie niewyznaczalne i celem otrzymania rozwiązania należy dodatkowo rozważyć odkształcenie sprężyste ciała.

Matematyczne sformułowanie warunku zgodności rozkładu naprężeń z istnieniem ciągłych funkcji u, v, w , określających odkształcenie, otrzymamy z równań [2]. W przypadku zagadnień dwuwymiarowych wystarcza rozważyć jedynie trzy składowe odkształcenia, a mianowicie:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad [a]$$

Powyższe trzy składowe odkształcenia wyrażone są przez dwie funkcje u i v , a więc nie mogą być przyjmowane dowolnie i istnieć musi między nimi pewien związek, który można łatwo wyznaczyć posługując się równaniami [a]. Różniczkując dwukrotnie względem y pierwszy

ze związków [a], drugi — dwukrotnie względem x , a trzeci — jednokrotnie względem x i jednokrotnie względem y , znajdujemy

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad [21]$$

Powyższy związek różniczkowy nazywa się warunkiem ciągłości odkształceń i musi być spełniony przez składowe odkształcenia, co zapewnia istnienie funkcji u i v powiązanych z nimi związkami [a]. Wykorzystanie prawa *Hooke'a* (równania [3]) pozwala przekształcić warunek [21] w związek między składowymi naprężeniami.

W przypadku płaskiego rozkładu naprężenia (par. 7), równania [3] upraszczają się do postaci

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad [22]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad [23]$$

Po podstawieniu do równania [21] znajdujemy

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad [b]$$

Przez wykorzystanie równań równowagi równanie powyższe można napisać w innej postaci. W przypadku, gdy ciężar ciała jest jedyną siłą masową, po zróżniczkowaniu pierwszego z równań [19] względem x , a drugiego — względem y i dodaniu ich do siebie, znajdujemy

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Podstawienie do równania [b] sprowadza równanie ciągłości odkształceń wyrażone przez naprężenia do postaci

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad [24]$$

Postępując w ten sam sposób z ogólnymi równaniami równowagi [18], otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - (1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad [25]$$

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia (par. 8) mamy

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

a z prawa *Hooke'a* (równania [3]) wynika

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\nu^2) \sigma_x - \nu(1+\nu) \sigma_y] \quad [26]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1-\nu^2) \sigma_y - \nu(1+\nu) \sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad [27]$$

Podstawiając powyższe związki do równania [21] i korzystając, jak poprzednio z równań równowagi [19], dochodzimy do wniosku, że równanie ciągłości odkształceń obowiązuje także w przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Dla ogólnego przypadku sił masowych na podstawie równań [21] i [18] otrzymujemy równanie ciągłości odkształceń w następującej postaci

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad [28]$$

Równania równowagi [18] lub [19], łącznie z warunkami brzegowymi [20] i jednym z podanych wyżej warunków ciągłości odkształceń, dają nam układ równań, który wystarcza zwykle do całkowitego określenia rozkładu naprężeń w zagadnieniu dwuwymiarowym¹⁾. Przypadki szczególne, w których konieczne są pewne dodatkowe rozważania, będą omówione później (par. 39). Warto podkreślić, że w przypadku stałych sił masowych równania określające rozkład naprężeń nie zawierają stałych sprężystości materiału. Wynika stąd, że rozkład naprężeń jest taki sam dla wszystkich materiałów izotropowych, jeśli tylko układ równań wystarczy do całkowitego określenia naprężeń. Wniosek ten ma duże znaczenie praktyczne; zobaczymy później, że w przypadku materiałów przezroczystych takich, jak szkło lub celulozoid, można określić rozkład naprężeń metodą optyczną posługując się światłem spolaryzowanym (par. 42). Z powyższego omówienia wynika, że wyniki eksperymentalne otrzymane dla materiałów przezroczystych można w większości przypadków zastosować bezpośrednio do każdego innego materiału, takiego jak stal.

Należy również zauważyć, że przy stałych siłach masowych równanie ciągłości odkształceń [24] jest ważne dla obu przypadków: płaskiego stanu odkształcenia i płaskiego stanu naprężenia. Zgodnie z tym, rozkład naprężeń w obu tych przypadkach jest taki sam, pod warunkiem, że siły zewnętrzne i kształt brzegu są takie same²⁾.

16. Funkcja naprężeń. Pokazaliśmy, że rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego sprowadza się do całkowania równań różniczkowych równowagi łącznie z warunkiem ciągłości odkształceń i warunkami brzegowymi. Jeśli zaczniemy od przypadku, gdy jedyną siłą masową jest ciężar ciała, to należy spełnić następujące równania (patrz równania [19] i [24]):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad [a]$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad [b]$$

do których trzeba dodać warunki brzegowe [20]. Równania te rozwiązuje się zwykle przez wprowadzenie nowej funkcji, zwanej *funkcją naprężeń*³⁾. Jak łatwo sprawdzić, równania [a]

¹⁾ Dla płaskiego stanu naprężenia warunki ciągłości odkształceń są inne niż [21] i nie są spełnione na skutek naszych założeń. W par. 34 pokazano jednak, że mimo to metoda niniejszego rozdziału daje dobre przybliżenia w przypadku tarcz cienkich.

²⁾ Stwierdzenie to może ulec modyfikacji w przypadku, gdy tarcza lub walec mają otwory. Takie zagadnienie może być poprawnie rozwiązane jedynie przez łącznie rozważenie naprężeń i przemieszczeń. Patrz par. 39.

³⁾ Funkcje te były zastosowane do rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowych przez G. B. Airy: „Brit. Assoc. Advancement Sci. Rept.“, 1862 i nazywane są niekiedy *funkcjami naprężeń Airy'ego*.

spełnione są przez przyjęcie funkcji Φ zależnej od x i y oraz następujących wyrażań na składowe naprężenia:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \rho g y; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho g y; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad [29]$$

W ten sposób możemy otrzymać cały zbiór różnych rozwiązań równań równowagi [a]. Poprawnym rozwiązaniem zagadnienia jest to, które spełnia również równanie ciągłości odkształceń [b]. Podstawiając do równania [b] jako składowe naprężenia wyrażenia [29], dochodzimy do wniosku, że funkcja naprężeń Φ musi spełniać równanie

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad [30]$$

Tak więc rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego, gdy ciężar ciała jest jedyną siłą masową, sprowadza się do znalezienia takiego rozwiązania równania [30], które spełnia warunki brzegowe zagadnienia [20]. W następnym rozdziale powyższą metodę zastosujemy do rozwiązania kilku przykładów o znaczeniu praktycznym.

Rozważmy obecnie ogólniejszy przypadek sił masowych, o których założymy, że posiadają potencjał. Wtedy składowe X i Y w równaniach [18] dane są związkami

$$\begin{aligned} X &= - \frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= - \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad [c]$$

w których V oznacza funkcję potencjału. Równania [18] przyjmują postać analogiczną do [a]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

i mogą być spełnione przez przyjęcie

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad [31]$$

gdzie Φ jest funkcją naprężeń. Podstawiając wyrażenia [31] do równania ciągłości odkształceń [25] dla płaskiego stanu naprężenia, znajdujemy

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad [32]$$

Analogiczne równanie można otrzymać dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia.

Gdy siły masowe są po prostu ciężarem, to potencjał $V = -\rho g y$ i prawa strona równania [32] sprowadza się do zera. Przyjmując rozwiązanie równania [32] lub [30] w postaci $\Phi = 0$ otrzymujemy na podstawie związków [31] lub [29] następujący rozkład naprężeń:

$$\sigma_x = -\rho g y; \quad \sigma_y = -\rho g y; \quad \tau_{xy} = 0 \quad [d]$$

Jest to jeden z możliwych stanów naprężenia wywołanych grawitacją i określa dwuwymiarowy rozkład ciśnienia hydrostatycznego $\rho g y$ z wartością zerową dla $y=0$. Stan ten może istnieć w płycie lub walcu pod warunkiem, że na brzegu są przyłożone odpowiednie siły. Z rozważań elementu brzegowego przedstawionego na rys. 12 wynika (na podstawie równań [13]), że na brzeg musi działać ciśnienie normalne $\rho g y$, a wartość naprężenia stycznego

musi być równa zero. Jeśli płyta lub walec podparte są w inny sposób, to musimy na ten stan nałożyć ujemne normalne ciśnienie brzegowe — $\rho g y$ i nowe siły podporowe. Oba układy sił będą w równowadze, a określenie ich wpływu jest zagadnieniem jedynie sił brzegowych, bez udziału sił masowych¹⁾.

ZADANIA

1. Pokazać, że równania [12] pozostają w mocy, gdy element pokazany na rys. 12 podlega przyśpieszeniu.
2. Wyznaczyć graficznie odkształcenia główne i ich kierunki na podstawie rozety pomiarów $\varepsilon_\phi = 2 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{\alpha+\phi} = 1,35 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{\alpha+\beta+\phi} = 0,95 \cdot 10^{-3}$ cm/cm, w której $\alpha = \beta = 45^\circ$.
3. Pokazać, że te elementy liniowe w punkcie x, y , które podlegają największemu i najmniejszemu obrotowi, położone są w dwóch prostopadłych kierunkach θ określonych równaniem

$$\operatorname{tg} 2\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

4. Naprężenia w obracającej się tarczy (o grubości jednostkowej) można uważać za wywołane siłami odśrodkowymi traktowanymi jako siły masowe w nieruchomej tarczy. Wykazać, że te siły masowe pochodzą od potencjału $V = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2)$, gdzie ρ oznacza gęstość, a ω — prędkość kątową obrotu (względem początku układu).

5. Tarcza o osi poziomej posiada naprężenia grawitacyjne opisane związkami [d] w paragrafie 16. Zrobić szkic, na którym uwidocznione będą siły brzegowe wywołane ciężarem tarczy. Na innym szkicu przedstawić pomocnicze zagadnienie sił brzegowych, które należy rozwiązać, gdy ciężar jest całkowicie przenoszony przez poziomą powierzchnię, o którą opiera się tarcza.

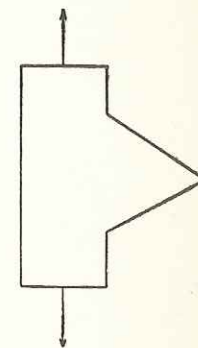
6. Walec o osi poziomej poddany jest działaniu naprężeń grawitacyjnych opisanych związkami [d] w par. 16. Jego końce umieszczone są między gładkimi sztywnymi płaszczyznami, które zapewniają istnienie płaskiego stanu odkształcenia. Naskicować siły działające na końcach i na powierzchni bocznej walca.

7. Posługując się związkami między odkształceniami i naprężeniami oraz zależnościami [a] z par. 15 pokazać (za pomocą równań równowagi [18]), że przy braku sił masowych przemieszczenia w zagadnieniach płaskiego stanu naprężenia muszą spełniać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

i drugie, podobne równanie.

8. Rysunek przedstawia trójkątny występ na tarczy znajdującej się w płaskim stanie naprężenia (płaszczyzna naprężeń pokrywa się z płaszczyzną karłki). Krawędzie występu wolne są od sił. Sprawdzić, że w wierzchołku trójkątnego występu nie działają żadne naprężenia. (Nie można wyciągnąć takiego samego wniosku dla wycięć w ciele)



¹⁾ To zagadnienie i ogólny przypadek potencjału, przy którym znika prawa strona [32], omówił M. Biot, J. Appl. Mech., 1935, str. A—41.