

głości od jej końców

$$\sigma_x = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy - \alpha TE \quad [b]$$

Zakładając np., że temperatura ma przebieg paraboliczny i dana jest równaniem

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$$

otrzymujemy z [b]

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \alpha T_0 E - \alpha T_0 E \left( 1 - \frac{y^2}{c^2} \right) \quad [c]$$

Przebieg tych naprężeń pokazano na rys. 222b. W pobliżu końców rozkład naprężeń wywołany przez siły rozciągające nie jest równomierny i może być obliczony metodą opisaną w rozdziale 6. Nakładając te naprężenia na naprężenia ściskające [a], otrzymujemy naprężenia cieplne w pobliżu końców płyty.

Jeżeli rozkład temperatury  $T$  nie jest symetryczny w odniesieniu do osi  $x$ , rozpoczynamy znów od naprężeń ściskających [a], znoszących odkształcenie  $\epsilon_x$ . W przypadkach niesymetrycznych naprężenia te wywołują nie tylko siłę wypadkową —  $\int_{-c}^{+c} \alpha ET dy$ , lecz także wypadkowy moment —  $\int_{-c}^{+c} \alpha ETy dy$ . Dla spełnienia warunków równowagi musimy więc nałożyć na naprężenia ściskające [a] stan równomiernego rozciągania, określony jak poprzednio oraz stan naprężeń zginających  $\sigma_x'' = \sigma y/c$  określony z warunku równości zera momentu wypadkowego wszystkich sił działających w przekroju.

Wtedy

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sigma y^2}{c} dy - \int_{-c}^{+c} \alpha ETy dy = 0$$

skąd

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{3}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ETy dy; \quad \sigma_x'' = \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ETy dy$$

Tak więc naprężenie całkowite wyniesie

$$\sigma_x = -\alpha ET + \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \alpha ET dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^{+c} \alpha ETy dy \quad [d]$$

Przy omawianiu tego zagadnienia założono, że płyta jest cienka w kierunku  $z$ . Przypuśćmy teraz, że jej wymiar w kierunku  $z$  jest duży. Mamy więc płytę o płaszczyźnie środkowej  $xz$  i o grubości  $2c$ . Temperatura  $T$  jest, podobnie jak poprzednio, funkcją zmiennej  $y$ , niezależną od  $x$  i  $z$ .

Swobodne rozszerzanie się elementów płyty pod wpływem ogrzania może być zniesione przez przyłożenie naprężeń  $\sigma_x, \sigma_z$ , otrzymanych z równań [3] (wstęp) oraz przyjęcie  $\epsilon_x = \epsilon_z = -\alpha T, \sigma_y = 0$ . Z równań tych otrzymamy

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1-\nu} \quad [e]$$

Elementy płyty mogą być utrzymane w tym stanie przez przyłożenie do krawędzi  $x = \text{const}, z = \text{const}$  sił ściskających, określonych równaniem [e]. Naprężenia cieplne w płycie swobodnej od obciążeń zewnętrznych otrzymuje się przez nałożenie na naprężenia [e] naprę-

żeń, wynikających z przyłożenia na krawędzi sił równych, lecz przeciwnie skierowanych. Jeżeli  $T$  jest parzystą funkcją  $y$ , taką że jej wartość średnia w kierunku grubości płyty równa się zero, to siła wypadkowa na jednostkę długości krawędzi jest także równa zero i na podstawie zasady *Saint-Venanta* (par. 18) nie powstają w płycie żadne naprężenia w punktach dostatecznie odległych od krawędzi.

Jeżeli średnia wartość  $T$  nie równa się zero, to na naprężenia ściskające [e] należy nałożyć równomierne naprężenia rozciągające w kierunkach  $x$  i  $z$ , odpowiadające wypadkowej sile na krawędzi. Jeśli zaś dodatkowo temperatura nie jest symetryczna w stosunku do płaszczyzny  $xz$ , musimy dodać jeszcze naprężenia zginające. W ten sposób dochodzimy w końcu do równania

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha TE}{1-\nu} + \frac{1}{2c(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha TE dy + \frac{3y}{2c^3(1-\nu)} \int_{-c}^{+c} \alpha TEy dy \quad [f]$$

które jest analogiczne do otrzymanego poprzednio równania [d]. Opierając się na równaniu [f], możemy bez trudu obliczyć naprężenia termiczne w płycie, jeśli tylko jest znany rozkład temperatury  $T$  na grubości płyty.

Rozpatrzmy jako przykład płytę<sup>1)</sup> o temperaturze początkowej stałej i równej  $T_0$ , a następnie chłodzonej przez utrzymywanie powierzchni  $y = \pm c$  w stałej temperaturze  $T_1$ . Na podstawie teorii *Fouriera* rozkład temperatury w chwili  $t$  dany jest równaniem

$$T = T_1 + \frac{4}{\pi} (T_0 - T_1) \left( e^{-p_1 t} \cos \frac{\pi y}{2c} - \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \cos \frac{3\pi y}{2c} + \dots \right) \quad [g]$$

w którym  $p_1, p_3 = 3^2 p_1, \dots, p_n = n^2 p_1, \dots$  są pewnymi stałymi. Podstawiając do równania [f] otrzymujemy

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \left[ e^{-p_1 t} \left( \frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{3} e^{-p_3 t} \left( \frac{2}{3\pi} + \cos \frac{3\pi y}{2c} \right) + \frac{1}{5} e^{-p_5 t} \left( \frac{2}{5\pi} - \cos \frac{5\pi y}{2c} \right) + \dots \right] \quad [h]$$

Po upływie pewnego czasu pierwszy wyraz szeregu staje się dominujący i możemy przyjąć

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} \cdot e^{-p_1 t} \left( \frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} \right)$$

Dla  $y = \pm c$  mamy naprężenia rozciągające

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \frac{2}{\pi}$$

W płaszczyźnie środkowej  $y=0$  otrzymujemy naprężenia ściskające

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{4\alpha E(T_0 - T_1)}{\pi(1-\nu)} e^{-p_1 t} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

Punkty, w których naprężenia równają się zero, otrzymuje się z równania

$$\frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi y}{2c} = 0$$

z którego

$$y = \pm 0,560 c$$

<sup>1)</sup> Zagadnienie to omówił *Rayleigh*: „Phil. Mag.“, seria 6, t. 1, s. 169, 1901.

Jeżeli powierzchnie płyty  $y = \pm c$  utrzymywane są w dwu różnych temperaturach  $T_1, T_2$ , to po pewnym okresie czasu będziemy mieli do czynienia z ustalonym przepływem ciepła i rozkład temperatury wyrazi się funkcją liniową

$$T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) + \frac{1}{2} (T_1 - T_2) \frac{y}{c} \quad [i]$$

Wstawienie do równania [f] pokazuje, że naprężenia cieplne są równe zeru<sup>1)</sup> oczywiście w przypadku, gdy płyta nie jest utwierdzona na krawędziach. Jeśli krawędzie płyty nie mają możliwości przesunięcia ani obrotu, naprężenia wywołane ogrzaniem dane są równaniem [e].

Jeżeli np.  $T_2 = -T_1$ , otrzymujemy z [i]

$$T = T_1 \frac{y}{c} \quad [j]$$

a równanie [e] daje

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha T}{1 - \nu} T_1 \frac{y}{c} \quad [k]$$

Naprężenie maksymalne wynosi

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_z)_{\max} = \frac{\alpha E T_1}{1 - \nu}$$

Do równania tego nie wchodzi grubość płyty, lecz w przypadku grubszej płyty mamy zazwyczaj do czynienia z większą różnicą temperatur między obiema powierzchniami. Dlatego też gruba płyta wykonana z kruchego materiału łatwiej ulega zniszczeniu pod wpływem naprężeń cieplnych niż cienka.

Jako ostatni przykład rozpatrzmy kulę o dużym promieniu i założymy, że w małym kulistym elemencie o promieniu  $a$  w środku dużej kuli następuje wzrost temperatury o  $T$ . Ponieważ element ten nie ma możliwości swobodnego rozszerzania się, na jego powierzchni powstaje ciśnienie  $p$ . Spowodowane tym ciśnieniem naprężenia promieniowe i styczne w każdym punkcie kuli przy promieniu  $r > a$  można obliczyć z równań [197] i [198]. Zakładając, że zewnętrzny promień kuli jest bardzo duży w porównaniu z  $a$ , otrzymujemy z tych równań

$$\sigma_r = -\frac{pa^3}{r^3}; \quad \sigma_t = \frac{pa^3}{2r^3} \quad [m]$$

Przy  $r = a$  mamy

$$\sigma_r = -p; \quad \sigma_t = \frac{1}{2}p$$

i przyrost promienia wywołany ciśnieniem  $p$  wynosi

$$\Delta r = (a\varepsilon_t)_{r=a} = \frac{a}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_t)]_{r=a} = \frac{pa}{2E} (1 + \nu)$$

Przyrost ten musi być równy przyrostowi promienia podgrzanego elementu kulistego, spowodowanemu przez wzrost temperatury i ciśnienie  $p$ . W ten sposób otrzymujemy równanie

$$\alpha T a - \frac{pa}{E} (1 - 2\nu) = \frac{pa}{2E} (1 + \nu)$$

<sup>1)</sup> W ogólności, jeśli  $T$  jest liniową funkcją  $x, y, z$ , to odkształcenia odpowiadające swobodnemu rozszerzeniu się elementu pod wpływem ogrzania  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T, \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  czynią zadość równaniom ciągłości [129] i nie wywołują żadnych naprężeń cieplnych.

z którego

$$p = \frac{2}{3} \frac{\alpha T E}{1 - \nu} \quad [n]$$

Podstawiając tę wartość do równań [m], otrzymujemy związki, wyrażające naprężenia na zewnątrz podgrzanego elementu

$$\sigma_r = -\frac{2}{3} \frac{\alpha T E a^3}{(1 - \nu)r^3}, \quad \sigma_t = \frac{1}{3} \frac{\alpha T E a^3}{(1 - \nu)r^3} \quad [o]$$

**133. Pewne zagadnienia płaskiego stanu naprężeń cieplnych.** Przypuśćmy, że pasmo cienkiej płyty (rys. 223) zostało podgrzane nierównomiernie w ten sposób, że temperatura  $T$  jest wyłącznie funkcją odciętej  $x$  i jest stała wzdłuż każdego przekroju poprzecznego. Jeśliby płytę pociąć na paski, takie jak  $AB$  (rys. 223), podlegałyby one różnym wydłużeniom w kierunku pionowym. Ze względu jednak na ich wzajemne połączenie powstają w nich pewne naprężenia.

Wydłużenie nie połączonych ze sobą pasków w kierunku pionowym można sprowadzić do zera przez przyłożenie naprężeń ściskających

$$\sigma_y = -\alpha E T \quad [a]$$

na końcach  $A$  i  $B$  każdego paska. Wtedy paski są dopasowane do siebie tak jak w płycie nieogrzej. Aby dojść do naprężeń cieplnych, musimy nałożyć na [a] naprężenie odpowiadające przyłożeniu na krawędziach pasma  $y = \pm c$  obciążeń równych, lecz przeciwnie skierowanych o wielkości  $\alpha E T$ .

Jeżeli strefę ogrzania ograniczymy do odcinka pasma, krótkiego w porównaniu z jego szerokością  $2c$ , takiego jak  $CDFE$  (rys. 223), wpływ ciągnięć  $\alpha E T$  będzie dostrzegalny tylko w okolicy odcinka  $CD$  na górnym, a  $EF$  — na dolnym brzegu. Do obu tych obszarów zastosować można następnie rozważania, omówione w par. 34. Wykazano tam, że naprężenie normalne na brzegu prostoliniowym wywołuje na tym samym brzegu takie samo naprężenie w kierunku stycznym. Tak więc ciągnięcia  $\alpha E T$  wywołają naprężenia rozciągające  $\alpha E T$  w kierunku osi  $x$ . Oba te naprężenia normalne zanikają w miarę posuwania się w kierunku normalnym do krawędzi płyty. Po nałożeniu tych naprężeń na naprężenia [a] otrzymujemy krzywe<sup>1)</sup>, obrazujące przebieg naprężeń  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  wzdłuż prostych, takich jak  $AB$  w najbardziej ogrzanej obszarze płyty (rys. 223b). W pobliżu krawędzi dominuje naprężenie  $\sigma_x$  o wartości  $\alpha E T$ , które jest rozciągające przy  $T > 0$ , zaś blisko środka płyty przeważa naprężenie  $\sigma_y$ , które jest ściskające i wynosi  $\alpha E T$  przy  $T > 0$ . Największe naprężenia osiągają wartość  $\alpha E T_{\max}$ .

Jeśli temperatura  $T$  jest funkcją okresową zmiennej  $x$ , przyłożenie na brzegu obciążeń  $\alpha E T$  prowadzi do zagadnienia typu rozważonego w par. 23. Gdy

$$T = T_0 \sin \alpha x \quad [b]$$

<sup>1)</sup> J. N. Goodier: „Physics“, tom 7, str. 156, 1936.

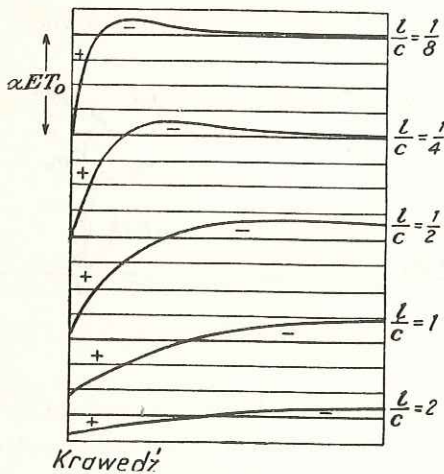
to, przyjmując zgodnie z równaniem [f]  $A = B = -\alpha ET_0$ , znajdujemy z równania [k] w par. 23

$$\sigma_x = -2\alpha ET_0 \frac{(\alpha c \cosh \alpha c - \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x$$

$$\sigma_y = 2\alpha ET_0 \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cosh \alpha y - \alpha y \sinh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x$$

$$\tau_{xy} = 2\alpha ET_0 \frac{\alpha c \cosh \alpha c \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \sinh \alpha c}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \cos \alpha x$$

Wraz z naprężeniami ściskającymi  $\sigma_y = -\alpha ET$  z równania [a] daje to naprężenia cieplne w płycie<sup>1)</sup>. Na rys. 224 pokazano rozkład  $\sigma_x$  wzdłuż linii najwyższej temperatury dla różnych długości fali  $2l = 2\pi/\alpha$ .



Rys. 224

Widać, że naprężenie maksymalne wzrasta wraz ze zmniejszaniem się długości fali zmierzając do wartości  $\alpha ET_0$ . Znajomość rozwiązania dla sinusoidalnego rozkładu temperatury pozwala rozwiązywać inne przypadki, w których temperatura jest funkcją okresową zmiennej  $x$ . Można także stwierdzić, że maksymalne naprężenie w płytach o skończonej długości tylko nieznacznie różni się od wartości  $\alpha ET_0$ , otrzymanej dla pasma nieskończonego.

**134. Cienka tarcza kołowa przy osiowo-symetrycznym rozkładzie temperatury.** Jeśli temperatura jest stała w kierunku grubości tarczy, możemy przyjąć, że naprężenia i przemieszczenia wywołane ogrzaniem są także

w tym kierunku niezmiennie. Naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  spełniają równanie równowagi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad [a]$$

które otrzymuje się z równania [40] (par. 26) przez przyjęcie  $R = 0$ . Naprężenie styczne  $\tau_{r\theta}$  jest równe zero ze względu na symetrię.

Zwykle zależności między naprężeniami i odkształceniami [52] par. 28 w płaskim stanie naprężenia wymagają modyfikacji, ponieważ teraz odkształcenia wywołane są częściowo rozszerzalnością cieplną, częściowo zaś naprężeniami. Jeśli  $\varepsilon_r$  oznacza rzeczywiste odkształcenie promieniowe, to część odpowiadająca naprężeniom wyniesie  $\varepsilon_r - \alpha T$  i otrzymamy

$$\varepsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad [b]$$

Podobnie

$$\varepsilon_\theta - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad [c]$$

Rozwiązując [b] i [c], ze względu na  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  będziemy mieli

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T] \quad [d]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T]$$

W ten sposób równanie [a] przybiera postać

$$r \frac{d}{dr} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) + (1-\nu) (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = (1+\nu)\alpha r \frac{dT}{dr} \quad [e]$$

Jeśli  $u$  oznacza przemieszczenie w kierunku promienia, to mamy na podstawie par. 28

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad [f]$$

Podstawiając te zależności do [e], otrzymujemy związek

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr}$$

który można przepisać w postaci

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} \quad [g]$$

Całkowanie tego równania daje

$$u = (1+\nu)\alpha \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad [h]$$

przy czym dolna granica całkowania może być przyjęta dowolnie. W przypadku tarczy pełnej obieramy  $a = 0$ , zaś w przypadku tarczy z otworem kołowym — równe promieniowi wewnętrznemu.

Składowe stanu naprężenia znajduje się za pomocą rozwiązania [h] przez jego wstawienie do [f] i następnie do [d]. Wtedy

$$\sigma_r = -\alpha E \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] \quad [i]$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr - \alpha ET + \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right] \quad [j]$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  określa się z warunków brzegowych.

Dla tarczy pełnej przyjmujemy  $a = 0$ , a ponieważ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r T r dr = 0$$

<sup>1)</sup> Zagadnienie to zostało omówione przez J. P. Den Hartoga, J. Franklin Inst., tom 222, str. 149, 1936, w związku z naprężeniami cieplnymi, powstającymi w procesie spawania.

to na podstawie równania [h] widzimy, że w środku tarczy  $u = 0$ , gdy także stała  $C_2 = 0$ . Na brzegu  $r = b$  powinno być  $\sigma_r = 0$  i dlatego z równania [i] mamy

$$C_1 = (1 - \nu) \frac{\alpha}{b^2} \int_0^b Tr dr$$

W związku z tym ostateczne równania na naprężenia mają postać

$$\sigma_r = \alpha E \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right) \quad [237]$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left( -T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right) \quad [238]$$

Stąd otrzymujemy skończone wartości w środku kuli, ponieważ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr = \frac{1}{2} T_0$$

gdzie  $T_0$  oznacza temperaturę w środku kuli.

**135. Długi walec kołowy.** Zakładamy, że przebieg temperatury jest osiowo-symetryczny i nie zależy od współrzędnej  $z$  w kierunku osiowym<sup>1)</sup>. Założymy na wstępie, że przemieszczenie osiowe  $w$  jest wszędzie równe zeru, a następnie wprowadzimy odpowiednie poprawki dla przypadku walca o końcach swobodnych.

Będziemy mieli do czynienia z trzema składowymi stanu naprężenia  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ , podczas gdy wszystkie odkształcenia i naprężenia styczne równają się zeru ze względu na osiową symetrię zagadnienia. Związki między naprężeniami i odkształceniami mają postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_r - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \end{aligned} \quad [239]$$

Ponieważ jednak  $w = 0$ , to  $\varepsilon_z = 0$  i z trzeciego równania [239] mamy

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET \quad [a]$$

Po podstawieniu do dwóch pierwszych równań [239] otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_r - (1 + \nu)\alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_r - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_\theta \right) \\ \varepsilon_\theta - (1 + \nu)\alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r \right) \end{aligned} \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Pierwsze rozwiązanie tego zagadnienia należy do *J. M. C. Duhamela*: „Memoires... par divers savants“, t. 5, str. 440, Paryż, 1838.

Można łatwo sprawdzić, że równania te otrzymać można z odpowiednich równań dla płaskiego stanu naprężenia ([b] oraz [c] poprzedniego paragrafu) przez podstawienie w nich  $E/(1 - \nu^2)$  zamiast  $E$ ,  $\nu/(1 - \nu)$  zamiast  $\nu$  oraz  $(1 + \nu)\alpha$  zamiast  $\alpha$ .

Równania [a] i [f] poprzedniego paragrafu zachowują dalej swoją ważność. Rozwiązanie dla  $u, \sigma_r, \sigma_\theta$  przebiega w ten sam sposób. Możemy więc zapisać wyniki końcowe stosując do równań [h], [i] i [j] omówione wyżej podstawienia. W ten sposób dla naszego zagadnienia otrzymujemy

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{r} \int_a^r Tr dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad [c]$$

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr + \frac{E}{1 + \nu} \left( \frac{C_1}{1 - 2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad [d]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr dr - \frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{E}{1 + \nu} \left( \frac{C_1}{1 - 2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right) \quad [e]$$

a z równania [a]

$$\sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{2\nu EC_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad [f]$$

Obciążenie normalne, rozłożone zgodnie z równaniem [f], należy przyłożyć na końcach walca w celu spełnienia warunku  $w = 0$ .

Przykładając równomierne naprężenie osiowe  $\sigma_z = C_3$  dobieramy  $C_3$  w ten sposób, aby wypadkowa siła na końcach była równa zeru. Powstały na każdym końcu samorzównoważony układ obciążeń wywołuje, zgodnie z zasadą *Saint-Venanta* (par. 18), jedynie efekty lokalne w pobliżu tych końców.

Naprężenia  $\sigma_r, \sigma_\theta$  dane są w dalszym ciągu za pomocą równań [d] i [e], zaś przemieszczenie  $u$  związane jest z naprężeniem osiowym  $C_3$ . Do prawej strony równania [c] należy dodać wyraz  $-\nu C_3 r/E$ . Przemieszczenie osiowe odpowiada rozłożonemu równomiernie naprężeniu  $C_3$ .

*Walec pełny.* W tym przypadku możemy przyjąć dolną granicę całek w równaniach [c], [d], [e]  $a = 0$ . Przemieszczenie  $u$  musi znikać przy  $r = 0$ , co prowadzi do  $C_2 = 0$ .

Stałą  $C_1$  znajduje się z warunku, aby zakrzywiona powierzchnia  $r = b$  była wolna od obciążeń:  $(\sigma_r)_{r=b} = 0$ . Tak więc z [d], po podstawieniu  $C_2 = 0$ ,  $a = 0$  otrzymujemy

$$\frac{C_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{\alpha}{1 - \nu} \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr \quad [g]$$

Wypadkowa naprężeń osiowych [f] wynosi

$$\int_0^b \sigma_z 2\pi r dr = -\frac{2\pi\alpha E}{1 - \nu} \int_0^b Tr dr + \frac{2\nu EC_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \pi b^2$$

a wypadkowa równomiernie rozłożonego naprężenia  $C_3$  jest równa  $C_3 \pi b^2$ . Wartość  $C_3$ , sprwadająca całkowitą siłę osiową do zera, dana jest więc równaniem

$$C_3 \cdot \pi b^2 = \frac{2\pi\alpha E}{1 - \nu} \int_0^b Tr dr - \frac{2\nu EC_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \pi b^2 \quad [h]$$

Ostateczne wyrażenia dla  $u$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  otrzymujemy z równań [c], [d], [e], [f], [g] i [h]:

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \left[ (1-2\nu) \frac{r}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r} \int_0^r Tr dr \right] \quad [240]$$

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr \right) \quad [241]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr - T \right) \quad [242]$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2\nu}{b^2} \int_0^b Tr dr - T \right) \quad [243]$$

Rozważmy dla przykładu długi walec o stałej temperaturze początkowej  $T_0$ . Jeśli, poczynając od chwili  $t=0$ , powierzchnia boczna walca utrzymywana jest w temperaturze zerowej<sup>1)</sup>, rozkład temperatury w dowolnej chwili  $t$  dany jest za pomocą szeregu<sup>2)</sup>

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \beta_n \frac{r}{b} \right) e^{-\beta_n t} \quad [i]$$

w którym  $J_0(\beta_n r/b)$  jest funkcją Bessela rzędu zerowego (par. 128), a  $\beta_n$  są pierwiastkami równania  $J_0(\beta) = 0$ . Współczynniki szeregu [i] podaje równanie

$$A_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)}$$

a współczynniki  $p_n$  oblicza się z równania

$$p_n = \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \frac{\beta_n^2}{b^2} \quad [j]$$

w którym  $\lambda$  oznacza współczynnik przewodzenia ciepła,  $c$  — ciepło właściwe materiału i  $\rho$  — gęstość. Podstawiając szereg [i] do równania [241] i biorąc pod uwagę fakt, że<sup>3)</sup>

$$\int_0^r J_0 \left( \beta_n \frac{r}{b} \right) r dr = \frac{br}{\beta_n} J_1 \left( \beta_n \frac{r}{b} \right)$$

otrzymujemy zależność

$$\sigma_r = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1[\beta_n(r/b)]}{J_1(\beta_n)} \right\} \quad [k]$$

W ten sam sposób, podstawiając szereg [i] do równania [242], otrzymujemy

$$\sigma_\theta = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n^2} \frac{b}{r} \frac{J_1[\beta_n(r/b)]}{J_1(\beta_n)} - \frac{J_0[\beta_n(r/b)]}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \quad [l]$$

Podstawiając szereg [i] do równania [243] otrzymujemy

$$\sigma_z = \frac{2\alpha ET_0}{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n t} \left\{ \frac{2}{\beta_n^2} - \frac{J_0[\beta_n(r/b)]}{\beta_n J_1(\beta_n)} \right\} \quad [m]$$

<sup>1)</sup> Zakłada się, że powierzchnia walca osiąga tę temperaturę w sposób nagły. Jeśli temperatura powierzchni wynosi nie zero a  $T_1$ , to należy do naszych równań zamiast  $T_0$  wstawić różnicę  $T_0 - T_1$ .

<sup>2)</sup> Por. Byerly: „Fourier Series and Spherical Harmonics“, str. 229. Naprężenia cieplne w tym przypadku obliczył A. Dinnik: „Applications of Bessel's Function to Elasticity Problems“, cz. 2, str. 95, Jekaterinosław, 1915. Patrz także C. H. Less: „Proc. Roy. Soc.“ (Londyn), 1922, t. 101, str. 411.

<sup>3)</sup> E. Jahnke i F. Emde: „Funktionentafeln“, Berlin 1909, str. 165.

Równania [k], [l] i [m] stanowią pełne rozwiązanie problemu. Kilka przykładów liczbowych znaleźć można w pracach A. Dinnika i C. H. Leesa, wspomnianych powyżej<sup>1)</sup>.

Na rys. 225 przedstawiono<sup>2)</sup> rozkład temperatury w walcu stalowym. Założono, że walec znajduje się początkowo w stałej temperaturze równej zero i, że poczynając od chwili  $t=0$  powierzchnia walca utrzymywana jest w temperaturze  $T_1$ . Rozkłady temperatury wzdłuż promienia przedstawiają krzywe dla różnych wartości ilorazu  $t/b^2$  ( $t$  mierzone jest w sekundach,  $b$  w centymetrach). Z równań [i] i [j] okaże się, że rozkład temperatury dla walców o różnych średnicach jest identyczny, jeśli tylko czas ogrzewania  $t$  będzie proporcjonalny do kwadratu średnicy. Z rysunku można obliczyć średnią temperaturę całego walca lub jego części wewnętrznej o promieniu  $r$ . Po otrzymaniu tych temperatur naprężenia cieplne znajdziemy z równań [241], [242], [243]. Dla bardzo małych wartości  $t$  wspomniane wyżej średnie temperatury zmierzają do zera i na powierzchni otrzymujemy

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = \sigma_z = -\frac{\alpha ET_1}{1-\nu}$$

Jest to maksymalna wartość naprężenia cieplnego, powstałego w walcu przy ogrzewaniu i równa się ona naprężeniu, koniecznemu dla całkowitego zniesienia odkształceń termicznych na powierzchni. Naprężenie to jest ściskające przy ogrzewaniu, a rozciągające przy oziębianiu. Aby zredukować maksymalne naprężenia, przyjęto w praktyce rozpoczynać ogrzewanie walców i wirników od nieco niższej temperatury niż temperatura końcowa  $T_1$  i zwiększać czas ogrzewania proporcjonalnie do ich średnicy.

Walec ze współśrodkowym otworem kołowym<sup>3)</sup>. Jeśli promienie wewnętrzny i zewnętrzny rury wynoszą odpowiednio  $a$  i  $b$ , a stałe  $C_1$  i  $C_2$  określone są w ten sposób, że naprężenie  $\sigma$ , jest równe zero na obu powierzchniach, otrzymamy

$$\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{a^2} = 0$$

$$-\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{b^2} \int_a^b Tr dr + \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{b^2} \right) = 0$$

i stąd

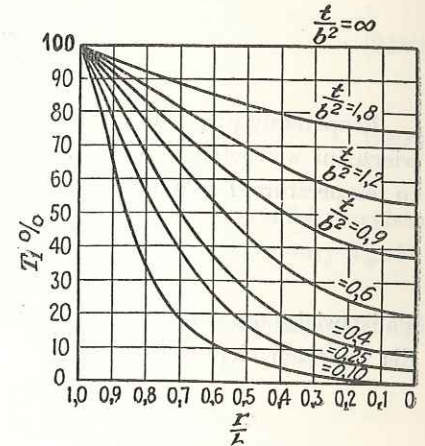
$$\frac{EC_2}{1+\nu} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr$$

$$\frac{EC_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr$$

<sup>1)</sup> Rozkład temperatury w ciałach stałych przy ogrzewaniu i ochładzaniu był omawiany przez Williamsona i Adamsa, Phys. Rev., seria 2, 1919, tom 14, str. 99. Badania doświadczalne nad wpływem ognia i wody na słupy zostały przeprowadzone przez Ingberga, Griffina, Robinsona i Wilsona: „U. S. Bur. Standarts“, Tech. Paper 184, 1921.

<sup>2)</sup> Rysunek zaczerpnięty z książki A. Stodola: „Dampf- und Gasturbinen“, wyd. 6, str. 961, 1924.

<sup>3)</sup> R. Lorenz: „Z. Ver. deutsch. Ing.“, 1907, t. 51, str. 743.



Rys. 225

Podstawiając te wartości do [d], [e] i [f] i dodając do ostatniego równania naprężenie osiowe  $G_3$  redukujące do zera wypadkową siłę osiową, otrzymujemy zależności

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - \int_a^r Tr dr \right) \quad [244]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left( \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr + \int_a^r Tr dr - Tr^2 \right) \quad [245]$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b Tr dr - T \right) \quad [246]$$

Rozpatrzmy przykład *ustalonego przepływu ciepła*. Jeśli  $T_w$  oznacza temperaturę na powierzchni wewnętrznej walca, a temperatura na powierzchni zewnętrznej jest równa zeru, to temperatura  $T$  w odległości  $r$  od środka wyraża się równaniem

$$T = \frac{T_w}{\log(b/a)} \log \frac{b}{r} \quad [n]$$

Podstawiając ten związek do równań [244], [245] i [246], otrzymujemy następujące wyrażenia dla naprężeń cieplnych<sup>1)</sup>

$$\sigma_r = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[ -\log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[ 1 - \log \frac{b}{r} - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right] \quad [247]$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu) \log(b/a)} \left[ 1 - 2 \log \frac{b}{r} - \frac{2a^2}{(b^2 - a^2)} \log \frac{b}{a} \right]$$

Jeśli  $T_w > 0$ , naprężenie promieniowe jest wszędzie ujemne z wyjątkiem wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni walca, gdzie równa się zeru. Naprężenia  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_z$  osiągają swe największe wartości przy  $r = a$  i  $r = b$ . Przyjmując  $r = a$ , mamy

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu) \log \frac{b}{a}} \left( 1 - \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \log \frac{b}{a} \right) \quad [248]$$

a przy  $r = b$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu) \log \frac{b}{a}} \left( 1 - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \log \frac{b}{a} \right) \quad [249]$$

Na rys. 226 pokazano przebieg naprężeń cieplnych na grubości ścianki rury w przypadku szczególnym  $a/b = 0,3$ . Przy dodatnich wartościach  $T_w$  naprężenia są ściskające przy powierzchni wewnętrznej, a rozciągające przy powierzchni zewnętrznej. W przypadku takich materiałów jak kamień, cegła lub beton, mających małą wytrzymałość na rozciąganie, pęknięcia powstają w tych warunkach zazwyczaj na zewnętrznej powierzchni walca.

Jeżeli grubość ścianki rury jest mała w porównaniu z jej średnicą zewnętrzną, to równania [248] i [249] można uprościć przez przyjęcie

$$\frac{b}{a} = 1 + m; \quad \log \frac{b}{a} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

i założenie, że  $m$  jest wielkością małą. Wtedy otrzymujemy

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = -\frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)} \left( 1 + \frac{m}{3} \right) \quad [248']$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)} \left( 1 - \frac{m}{3} \right) \quad [249']$$

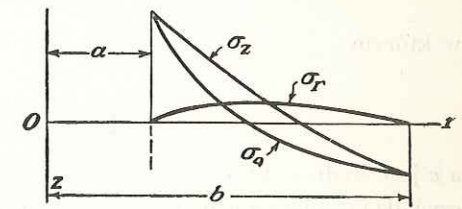
Jeśli temperatura na zewnętrznej powierzchni walca jest różna od zera, to wyniki powyższe można w pełni wykorzystać, wstawiając w naszych równaniach zamiast temperatury  $T_w$  różnicę temperatur wewnętrznej i zewnętrznej  $T_w - T_z$ .

W przypadku bardzo cienkiej ścianki możemy poczynić dalsze uproszczenie i pominąć wielkość  $m/3$  w stosunku do jedności w [248'] i [249']

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = -\frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)}$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)}$$

[250]



Rys. 226

Przebieg naprężeń na grubości ścianki jest tu taki sam, jak w przypadku płaskiej płyty o grubości  $2c = b - a$  przy rozkładzie temperatury (rys. 222)

$$T = \frac{T_w y}{(b - a)}$$

oraz o brzegach utwierdzonych w ten sposób, aby zapobiec zginaniu płyty przez nierównomierne ogrzanie (por. [k], par. 132).

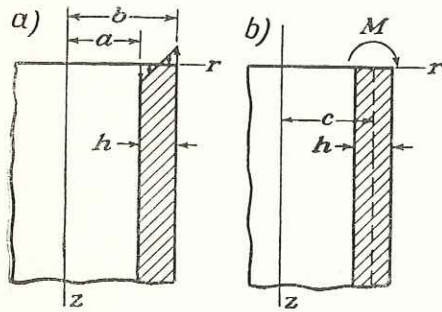
Jeśli na ustalony przepływ ciepła nałożymy wahania temperatury o wysokiej częstotliwości, to naprężenia wywołane przez te wahania można obliczyć w ten sam sposób, jak to zostało pokazane w przypadku płyt płaskich (par. 132<sup>1)</sup>).

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że walec jest bardzo długi i że rozpatrujemy w nim naprężenia daleko od jego końców. W pobliżu jego końców, w związku z miejscowymi zaburzeniami, zagadnienie rozkładu naprężeń cieplnych jest bardziej złożone. Rozpatrzmy to zagadnienie dla przypadku rury cienkościennej. Rozwiązanie [250] zakłada, że

<sup>1)</sup> Naprężenia cieplne w ściankach walców posiadają wielkie znaczenie przy projektowaniu silników Diesla. G. Eichelberg: „Forschungsarbeiten“, 1923, nr 263, podaje wykreślne rozwiązanie tego problemu dla przypadku, gdy grubość ścianki i temperatura jest zmienna wzdłuż jego długości. Pewne dane, dotyczące rozkładu temperatury w silnikach dieselskich można znaleźć w pracach: H. F. G. Letson: „Proc. Mech. Eng.“, Londyn 1925, str. 19; A. Nagel: Engineering, T. 127, str. 59, 179, 279, 466, 626, 1929.

<sup>1)</sup> Wykresy ułatwiające obliczenie naprężeń z równania [247] podaje L. Barker: „Engineering“, 1927, t. 124, str. 443.

siły normalne, pokazane na rys. 227a, rozłożone są na końcach walca. Aby znaleźć naprężenia w walcu o końcach swobodnych, musimy na naprężenia [250] nałożyć naprężenia, wywołane siłami równymi i przeciwnie skierowanymi do pokazanych na rys. 227a. W przypadku cienkiej ścianki o grubości  $h$  siły te sprowadzić można do momentów zginających  $M$ , jak pokazano na rys. 227b, rozłożonych równomiernie wzdłuż krawędzi walca i równych



Rys. 227

$$M = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{6} \quad [o]$$

na jednostkę długości krawędzi. Aby ocenić wielkość naprężeń wywołanych przez te momenty, rozpatrzmy podłużny pasek o jednostkowej szerokości, wycięty z powłoki cylindrycznej. Pasek

taki traktować można jako belkę na sprężystym podłożu. Linie ugięcia tego paska przedstawia związek<sup>1)</sup>

$$u = \frac{Mc^{-\beta z}}{2\beta^2 D} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad [p]$$

w którym

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{c^2 h^2}}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad [q]$$

a  $c$  jest średnim promieniem powłoki cylindrycznej. Znajomość tej linii pozwala nam obliczyć dla dowolnej wartości  $z$  odpowiednie naprężenia zginające  $\sigma_z$  i obwodowe  $\sigma_\theta$ . Maksymalne ugięcie paska występuje oczywiście na końcu  $z = 0$ , gdzie

$$(u)_{z=0} = \frac{M}{2\beta^2 D} = \frac{\alpha c T_w \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)}$$

Odpowiednia składowa stanu odkształcenia w kierunku stycznym jest równa

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{c} = \frac{\alpha T_w \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} \quad [r]$$

Naprężenie w kierunku stycznym, działające na powierzchni zewnętrznej walca, otrzymujemy, stosując prawo Hooke'a, z równania

$$\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta + \nu\sigma_z = \frac{\alpha ET_w \sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{3}(1-\nu)} - \frac{\nu\alpha ET_w}{2(1-\nu)}$$

Sumując te naprężenia z odpowiednimi naprężeniami, obliczonymi z [250], otrzymujemy maksymalne naprężenia obwodowe na końcach cienkościennej rury, wynoszące

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)} \left( \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{3}} - \nu + 1 \right) \quad [251]$$

Przyjmując  $\nu = 0,3$  otrzymamy

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 1,25 \frac{\alpha ET_w}{2(1-\nu)}$$

Tak więc maksymalne naprężenie rozciągające na swobodnych końcach walca jest o 25% większe od naprężenia w punktach oddalonych od końców, otrzymanego z równań [250]. Na podstawie [p] można stwierdzić, że wzrost naprężeń w okolicy końców swobodnych walca, zależny od ugięcia  $u$ , posiada charakter lokalny i że naprężenia maleją gwałtownie ze wzrostem odległości  $z$  od końca.

Przybliżony sposób obliczania naprężeń w rurach cienkościennej, oparty na wykorzystaniu linii ugięcia belki na sprężystym podłożu, można zastosować także w przypadku, gdy temperatura zmienia się wzdłuż osi powłoki cylindrycznej<sup>1)</sup>.

**136. Kula.** Rozpatrzmy tu prosty przypadek, gdy rozkład temperatury jest symetryczny względem środka i zależy wyłącznie od zmiennej<sup>2)</sup>  $r$ .

Ze względu na symetrię będziemy mieli tu do czynienia z trzema naprężeniami różnymi od zera: ze składową promieniową  $\sigma_r$  i z dwiema składowymi obwodowymi  $\sigma_t$  (podobnie jak w par. 121), które muszą spełnić warunek równowagi elementu w kierunku radialnym (rys. 202, równanie [m] par. 121)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_t) = 0 \quad [a]$$

Związki między naprężeniami i odkształceniami mają postać

$$\varepsilon_r - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_r - 2\nu\sigma_t) \quad [b]$$

$$\varepsilon_t - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] \quad [c]$$

i przy  $u$  oznaczającym przemieszczenie promieniowe mamy

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad [d]$$

Z [b] i [c] znajdujemy

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_t - (1+\nu)\alpha T] \quad [e]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \quad [f]$$

Podstawiając te związki do [a], a następnie zastępując  $\varepsilon_r$  i  $\varepsilon_t$  przez wartości podane w [d], dochodzimy do równania różniczkowego dla  $u$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \frac{dT}{dr} \quad [g]$$

<sup>1)</sup> S. Timoshenko i J. M. Lessells: „Applied Elasticity“, 1925 str. 147, i C. H. Kent: „Trans. A. S. M. E.“, Applied Mechanics Division, 1931, t. 53, str. 167.

<sup>2)</sup> Zagadnienie to zostało rozwiązane przez Duhamela, loc. cit.; F. Neuman: „Abhandl. Akad. Wiss.“, Berlin 1841; por. także jego „Vorlesungen ueber die Theorie der Elastizitaet der festen Koerper“ Lipsk, 1885; J. Hopkinson: „Messenger of Math.“, 8, s. 168, 1879. Niesymetryczne rozkłady temperatur rozważane były przez C. W. Borchardta: „Monatsber. Akad. Wiss.“, Berlin 1873, s. 9.

<sup>1)</sup> S. Timoshenko: „Strength of Materials“, wyd. 2, tom 2, str. 166.

które można napisać także w postaci

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \frac{dT}{dr}$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr^2 dr + C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad [h]$$

Tutaj  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi całkowania, które określimy później z warunków brzegowych, zaś  $a$  oznacza dowolną dolną granicę całkowania, którą przyjmujemy np. równą promieniowi wewnętrznemu wydrążonej kuli.

Równanie to możemy podstawić do [d], a następnie do wyrażeń [e] i [f]. Wtedy mamy

$$\sigma_r = -\frac{2\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \quad [i]$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} + \frac{EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{\alpha ET}{1-\nu} \quad [j]$$

Rozpatrzmy teraz kilka przypadków szczególnych.

*Kula pełna.* Tutaj za dolną granicę całkowania  $a$  przyjmujemy zero. Przy  $r=0$  musi być  $u=0$ , a więc na podstawie [h] także  $C_2=0$ , ponieważ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr^2 dr = 0$$

Naprężenia uzyskane z [i] i [j] będą skończone w środku kuli, gdyż

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr = \frac{T_0}{3}$$

gdzie  $T_0$  oznacza temperaturę w środku. Stałą  $C_1$  określa się z warunku, że powierzchnia zewnętrzna  $r=b$  jest wolna od obciążeń, czyli że  $\sigma_r=0$ . Następnie podstawiając w [i]  $\sigma_r=0$ ,  $a=0$ ,  $C_2=0$ ,  $r=b$ , otrzymujemy

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} = \frac{2\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr$$

a dla naprężeń uzyskujemy równanie

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr \right) \\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{2}{b^3} \int_0^b Tr^2 dr + \frac{1}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr - T \right) \end{aligned} \quad [252]$$

Średnia temperatura wewnątrz kuli o promieniu  $r$  wynosi

$$\frac{4\pi \int_0^r Tr^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} \int_0^r Tr^2 dr$$

Stąd płynie wniosek, że naprężenie  $\sigma_r$  w dowolnej odległości  $r$  od środka jest proporcjonalne

do różnicy między średnią temperaturą całej kuli i średnią temperaturą kuli o promieniu  $r$ . Naprężenie obwodowe w dowolnym punkcie równe jest iloczynowi wyrażenia

$$\frac{2\alpha E}{3(1-\nu)}$$

oraz wyrażenia

[Średnia temperatura całej kuli + ( $\frac{1}{2}$  średniej temperatury wewnątrz kuli o promieniu  $r$ ) -  $\frac{3}{2}T$ ].

Obliczenie naprężeń w każdym przypadku szczególnym może być przeprowadzone bez trudności, jeśli tylko znany jest rozkład temperatury<sup>1)</sup>. Interesujący przykład tego rodzaju obliczeń wykonał *G. Gruenberg*<sup>2)</sup> w związku z badaniem wytrzymałości materiałów izotropowych, poddanych równomiernemu rozciąganiu w trzech prostopadłych kierunkach. Jeśli pełną kulę o stałej temperaturze początkowej  $T_0$  umieścić w cieczy o wyższej temperaturze  $T_1$ , to zewnętrzna warstwa kuli rozszerza się i powoduje we wnętrzu równomierne rozciąganie we wszystkich kierunkach. Naprężenie to osiąga swoją wartość maksymalną po upływie czasu

$$t = 0,0574 \frac{b^2 c \rho}{k} \quad [k]$$

Tutaj  $b$  jest promieniem kuli,  $k$  — współczynnikiem przewodności cieplnej,  $c$  — ciepłem właściwym materiału i  $\rho$  — jego gęstością. Wielkość tych naprężeń maksymalnych wynosi<sup>3)</sup>

$$\sigma_r = \sigma_t = 0,771 \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} (T_1 - T_0) \quad [l]$$

Największe naprężenie ściskające powstaje na powierzchni kuli w momencie przyłożenia temperatury  $T_1$  i wynosi  $\alpha E(T_1 - T_0)/(1-\nu)$ , to jest tyle samo, ile w omówionym poprzednio przypadku walca (par. 135). Stosując [k] i [l] do przypadku stali i przyjmując  $b=10$  cm,  $T_1 - T_0 = 100^\circ\text{C}$ , otrzymujemy  $\sigma_r = \sigma_t = 1270$  kG/cm<sup>2</sup> i  $t = 33,4$  sek.

*Kula z otworem w środku.* Oznaczając przez  $a$  i  $b$  promienie zewnętrzny i wewnętrzny kuli, określamy stałe  $C_1$  i  $C_2$  w [i] i [j] z warunków, aby  $\sigma_r$  było równe zero na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej. Otrzymujemy wtedy z [i]

$$\begin{aligned} \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{a^3} &= 0 \\ -\frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^3} \int_a^b Tr^2 dr + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{b^3} &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując te równania ze względu na  $C_1$  i  $C_2$  oraz wstawiając wyniki do [i] i [j], będziemy mieli

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{r^3 - a^3}{(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b Tr^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r Tr^2 dr \right] \\ \sigma_t &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{2r^3 + a^3}{2(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b Tr^2 dr + \frac{1}{2r^3} \int_a^r Tr^2 dr - \frac{1}{2} T \right] \end{aligned} \quad [253]$$

Tak więc naprężenia można obliczyć łatwo, jeśli tylko znany jest przebieg temperatury.

<sup>1)</sup> Kilka przykładów takich obliczeń podano w pracy *E. Honeggera*: „Festschrift Prof. A. Stodola“, Zurych, 1929. Tablice do obliczania rozkładu temperatury w ochładzanej kuli podał *Adams i Williamson*, loc. cit.

<sup>2)</sup> *G. Gruenberg*: „Z. Physik“, t. 35, s. 548, 1925.

<sup>3)</sup> Założono tu, że powierzchnia kuli uzyskuje temperaturę  $T_1$  natychmiastowo.



Rozpatrzmy dla przykładu przypadek ustalonego przepływu ciepła. Oznaczmy temperaturę wewnętrzną powierzchni przez  $T_w$ , a temperaturę powierzchni zewnętrzną przyjmijmy równą zeru. Wtedy temperatura w dowolnej odległości  $r$  od środka wyniesie

$$T = \frac{T_w a}{b-a} \left( \frac{b}{r} - 1 \right) \quad [m]$$

Podstawiając ją do [253], otrzymamy

$$\sigma_r = \frac{\alpha E T_w}{1-\nu} \frac{ab}{b^3 - a^3} \left[ a + b - \frac{1}{r} (b^2 + ab + a^2) + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_w}{1-\nu} \frac{ab}{b^3 - a^3} \left[ a + b - \frac{1}{2r} (b^2 + ab + a^2) - \frac{a^2 b^2}{2r^3} \right]$$

Widzimy, że dla  $r = a$  i  $r = b$  jest  $\sigma_r = 0$ . Naprężenie to osiąga swe maksimum przy

$$r^2 = \frac{3a^2 b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

Dla  $T_w > 0$  naprężenie  $\sigma_t$  rośnie wraz ze zmienną  $r$ . Przy  $r = a$  mamy

$$\sigma_t = - \frac{\alpha E T_w}{2(1-\nu)} \frac{b(b-a)(a+2b)}{b^3 - a^3} \quad [n]$$

przy  $r = b$  zaś

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_w}{2(1-\nu)} \frac{a(b-a)(2a+b)}{b^3 - a^3} \quad [o]$$

W przypadku cienkiej powłoki kulistej oznaczamy

$$b = a(1+m)$$

gdzie  $m$  jest małe w stosunku do jedności. Przez podstawienie w [n] i [o] oraz pominięcie wyższych potęg  $m$  otrzymamy dla  $r = a$

$$\sigma_t = - \frac{\alpha E T_w}{2(1-\nu)} \left( 1 + \frac{2}{3} m \right)$$

dla  $r = b$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E T_w}{2(1-\nu)} \left( 1 - \frac{2}{3} m \right)$$

Pomijając wielkość  $\frac{2}{3} m$  otrzymujemy dla naprężeń obwodowych te same wartości, jakie uzyskaliśmy poprzednio dla cienkiej powłoki cylindrycznej (patrz [250]) i dla cienkiej płyty utwierdzonej na krawędziach.

**137. Równania ogólne.** Równania różniczkowe [132] równowagi w przemieszczeniach można rozszerzyć na przypadek naprężeń i odkształceń cieplnych. Związki między naprężeniami i odkształceniami dla zagadnień trójwymiarowych mają postać

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y - \alpha T &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \end{aligned} \quad [a]$$

$$\epsilon_z - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad [b]$$

Równania [b] nie są zależne od temperatury, ponieważ swobodna rozszerzalność cieplna nie wywołuje w materiale izotropowym żadnych odkształceń postaciowych.

Dodając do siebie równania [a] i używając oznaczeń, podanych w [7], otrzymujemy

$$e = \frac{1}{E} (1 - 2\nu)\Theta + 3\alpha T$$

Wstawiając tę zależność do równań [a], rozwiązanych względem naprężeń, mamy

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\epsilon_x - \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} \quad [c]$$

Podstawiając zależności [c] i [6] do równań równowagi [127], znajdziemy, pomijając siły masowe, że

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad [254]$$

Równania te zastępują związki [131] przy obliczaniu naprężeń cieplnych. Warunki brzegowe [128], po podstawieniu zależności z [c] i [6] i pominięciu sił powierzchniowych, przekształcają się na

$$\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} l = \lambda e l + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) \quad [255]$$

Porównując [254] i [255] z [131] i [134] widzimy, że wyrazy

$$- \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}$$

zajął miejsce składowych  $X, Y, Z$  sił masowych, a wyrazy

$$\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} l; \quad \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} m; \quad \frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} n$$

zastąpiły składowe  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  sił powierzchniowych. Tak więc przemieszczenia  $u, v, w$ , wywołane przez zmianę temperatury  $T$ , są takie same, jak przemieszczenia wywołane przez siły masowe

$$X = - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Z = - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad [d]$$

i normalne naprężenia rozciągające

$$\frac{\alpha E T}{1 - 2\nu} \quad [e]$$

rozłożone na powierzchni ciała.

Po znalezieniu rozwiązania równania [254], spełniającego warunki brzegowe [255], za pomocą obliczonych przemieszczeń  $u, v, w$  oraz równań [b] i [c] wyrazimy łatwo naprężenia

styczne i normalne. Z równań tych widzimy, że naprężenia normalne składają się z dwóch części: a) części uzyskanej w zwykły sposób za pomocą składowych stanu odkształcenia i b) ciśnienia „hydrostatycznego” o wielkości

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad [f]$$

proporcjonalnego w każdym punkcie do zmiany temperatury w tym punkcie. W ten sposób całkowite naprężenie spowodowane nierównomiernym ogrzaniem otrzymuje się przez superpozycję ciśnienia hydrostatycznego [f] oraz naprężeń, wywołanych przez siły masowe [d] i powierzchniowe [e].

Do tego samego wniosku dojść można inną drogą. Wyobraźmy sobie, że ciało poddane nierównomiernemu ogrzaniu zostało podzielone na nieskończenie wiele małych elementów i założmy, że odkształcenia cieplne  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T$  tych elementów zostały zniesione przez przyłożenie do tych elementów ciśnienia  $p$  o wielkości, podanej na podstawie [8] przez [f]. W ten sposób odkształcenia cieplne znikają, a poszczególne elementy ciała, przylegając do siebie, tworzą z powrotem ciało ciągle o kształcie początkowym. Rozkład ciśnień [f] można zrealizować przez przyłożenie do ciała zbudowanego z tych elementów pewnych sił masowych i powierzchniowych. Siły te spełniać muszą równania równowagi [127] i warunki brzegowe [128]. Podstawiając w tych równaniach

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -\frac{\alpha ET}{1-2\nu}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad [g]$$

dochodzimy do wniosku, że siły masowe, potrzebne dla utrzymania ciała złożonego z elementów w postaci wyjściowej, mają postać

$$X = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Z = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad [h]$$

oraz że ciśnienie [f] powinno być przyłożone na powierzchni.

Założymy teraz, że elementy ciała są ze sobą połączone i usuniemy siły [h] i ciśnienie na powierzchni [f]. Wtedy, oczywiście, otrzymuje się naprężenia przez nałożenie na ciśnienie [f] naprężeń, wywołanych w ciele sprężystym przez siły masowe

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}$$

i normalne obciążenia rozciągające na powierzchni

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu}$$

Otrzymane w ten sposób naprężenia spełniają równania równowagi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad [256]$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} l \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} m \\ \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= \frac{\alpha ET}{1-2\nu} n \end{aligned} \quad [257]$$

a także warunki ciągłości omówione w par. 77. Rozwiązanie tych równań, po nałożeniu ciśnienia [f], daje wywołane zmianami temperatury naprężenie cieplne w ciele.

Z płaskim stanem odkształcenia w walcu pryzmatycznym będziemy mieli do czynienia wtedy, gdy temperatura zmieniać się będzie jedynie w przekroju poprzecznym, a będzie stała w kierunku osiowym. W ten sposób temperatura  $T$  nie zależy od zmiennej  $z$ .

Rozpoczynamy znów od naprężeń [g] nie wywołujących żadnych odkształceń, przy czym odpowiednie siły masowe dane są przez [h] przy  $Z=0$ , a ciśnienie [f] przyłożone należy na całej powierzchni, łącznie z podstawami walca.

Następnie przy założeniu, że elementy są ze sobą połączone, odrzucamy siły masowe oraz ciśnienie na powierzchni, ale wyłącznie na poboczniczy, pozostawiając odkształcenia osiowe  $\varepsilon_z=0$ . Wynikiem odrzucenia tych sił będzie rozwiązanie zagadnienia z siłami masowymi

$$X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad [i]$$

i siłami rozciągającymi na powierzchni zakrzywionej walca

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \quad [j]$$

stanowiącego zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia ( $\varepsilon_z=0$ ). Problem tego rodzaju rozpatrywany był przy końcu par. 16 z tym, że równanie [32] należałoby przekształcić z płaskiego stanu naprężenia do płaskiego stanu odkształcenia, podstawiając w nim  $\nu/(1-\nu)$  zamiast  $\nu$ . Zamiast równań [31] i [32] otrzymamy więc

$$\sigma_x - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y - \frac{\alpha ET}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad [k]$$

oraz

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad [l]$$

Poszukiwana funkcja naprężeń powinna spełniać [l] i prowadzić do obciążenia powierzchniowego [j]. Wtedy obliczamy naprężenia z [k] i nakładamy je na naprężenia [g].

Naprężenie osiowe składać się będzie z wyrażenia, wziętego z [g] oraz z sumy  $\nu(\sigma_x + \sigma_y)$ , otrzymanej z [k]. Wyпадkowa siła osiowa oraz momenty zginające na podstawach walca można usunąć przez przyłożenie prostego rozciągania i zginania.

Z płaskim stanem naprężenia w cienkiej płycie będziemy mieli do czynienia, jeśli temperatura będzie stała na grubości płyty. Przyjmując układ współrzędnych  $x, y$  w płaszczyźnie obojętnej płyty, możemy przyjąć  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Możemy także przyjąć, że każdy element płyty ma swobodę rozszerzenia się w kierunku  $z$ . Dla wzajemnego dopasowania elementów wystarczy więc znieść ich odkształcenia w kierunku  $x$  i  $y$ . Pociąga to za sobą

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\alpha ET}{1-\nu}; \quad \tau_{xy} = 0 \quad [m]$$

Postawiając te naprężenia do równań równowagi [18], znajdujemy poszukiwane siły masowe

$$X = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad [n]$$

Na krawędziach płyty należy przyłożyć obciążenia normalne  $\alpha ET/(1-\nu)$ .

Usuwanie te siły dochodzimy do wniosku, że naprężenia cieplne składają się z [m] oraz z płaskiego stanu naprężenia odpowiadającego siłom masowym

$$X = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad [o]$$

oraz normalnym naprężeniem rozciągającym  $\alpha ET/(1-\nu)$ , przyłożonym wzdłuż brzegów. Określenie tych naprężeń stanowi znów zagadnienie typu omówionego w par. 16. Wystarczy jedynie w równaniach [31] i [32] wstawić wartość potencjału odpowiadającego siłom [o]

$$V = \frac{\alpha ET}{1-\nu}$$

Jeśli krawędzie są utwierdzone, zagadnienie sprowadza się do znalezienia naprężeń odpowiadających siłom masowym [o]. W par. 48 omówiony jest sposób rozwiązania tego zagadnienia w przypadku płyty prostokątnej.

**133. Naprężenia wstępne.** Powyżej przedstawiona metoda może być użyta przy rozwiązywaniu ogólniejszego zagadnienia *naprężeń wstępnych*. Wyobraźmy sobie ciało, podzielone na małe elementy i przypuśćmy, że każdy z tych elementów podlega pewnemu plastycznemu odkształceniu lub zmianie postaci, spowodowanej przez przekształcenie siatki krystalicznej. Niechaj odkształcenie to określają jego składowe

$$\epsilon'_x, \quad \epsilon'_y, \quad \epsilon'_z, \quad \gamma'_{xy}, \quad \gamma'_{xz}, \quad \gamma'_{yz} \quad [a]$$

Zakładamy, że odkształcenia są małe i przedstawić je można za pomocą ciągłych funkcji współrzędnych. Jeśli spełniają one także warunki ciągłości [129], to elementy, na które ciało zostało podzielone, pasują do siebie po odkształceniach [a] i nie ma powodu, aby powstały naprężenia wstępne.

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólniejszy, gdy składowe stanu odkształcenia [a] nie spełniają warunków ciągłości i w związku z tym elementy, na które ciało zostało podzielone, nie pasują do siebie po odkształceniu trwałym, tak że dla spełnienia równań ciągłości należy na powierzchniach tych elementów przyłożyć pewne siły. Zakładając, że po odkształceniach trwałych [a] materiał pozostaje doskonale sprężysty i stosując prawo *Hooké'a*, znajdujemy z równań [11] i [6], że odkształcenia [a] można wyeliminować przez przyłożenie do każdego elementu sił powierzchniowych

$$\sigma'_x = -(\lambda e' + 2G\epsilon'_x), \dots, \quad \tau'_{xy} = -G\gamma'_{xy}, \dots \quad [b]$$

gdzie

$$e' = \epsilon'_x + \epsilon'_y + \epsilon'_z$$

Siły powierzchniowe [b] można wprowadzić przez przyłożenie do ciała złożonego z małych elementów pewnych sił masowych i powierzchniowych. Siły te muszą spełniać równania równowagi [127] i warunki brzegowe [128]. Podstawiając do tych równań naprężenia [b], otrzymujemy poszukiwane siły masowe

$$X = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda e' + 2G\epsilon'_x) + \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma'_{xz}) \quad [c]$$

i siły powierzchniowe

$$\bar{X} = -(\lambda e' + 2G\epsilon'_x)l - G\gamma'_{xy}m - G\gamma'_{xz}n \quad [d]$$

Przez przyłożenie sił masowych [c] i powierzchniowych [d] znosimy początkowe odkształcenia trwałe [a] tak, że elementy pasują znów do siebie i tworzą ciało ciągłe. Zakładamy teraz, że elementy, na które ciało jest podzie-

lone, są połączone ze sobą oraz usuwamy siły [c] i [d]. Wtedy, oczywiście naprężenia wstępne otrzymamy przez superpozycję naprężeń [b] i naprężeń, które w ciele sprężystym wywołają siły masowe

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda e' + 2G\epsilon'_x) - \frac{\partial}{\partial y} (G\gamma'_{xy}) - \frac{\partial}{\partial z} (G\gamma'_{xz}) \quad [e]$$

i siły powierzchniowe

$$\bar{X} = (\lambda e' + 2G\epsilon'_x)l + G\gamma'_{xy}m + G\gamma'_{xz}n \quad [f]$$

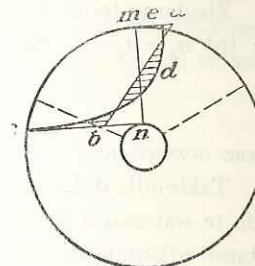
Tak więc zagadnienie określenia naprężeń wstępnych sprowadzone zostało do zwykłego układu równań teorii sprężystości, w których wielkość fikcyjnych sił masowych i powierzchniowych jest całkowicie określona, jeśli tylko dane są odkształcenia trwałe [a].

W przypadku szczególnym, gdy  $\epsilon'_x = \epsilon'_y = \epsilon'_z = \alpha T$  oraz  $\gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0$ , równania powyższe pokrywają się z równaniami, otrzymanymi poprzednio dla naprężeń cieplnych.

Rozważmy teraz zagadnienie odwrócone, gdy przy zadanych naprężeniach wstępnych określić chcemy układ odkształceń [a], które te naprężenia wywołują. W przypadku materiałów przezroczystych, takich jak szkło, naprężenia wstępne określić można metodami elastooptyki (rozd. 5). W innych przypadkach naprężenia te znaleźć można przez pocięcie ciała na małe elementy i zmierzenie odkształceń, jakie powstają w wyniku oswobodzenia ich od sił powierzchniowych, stanowiących naprężenia wstępne w ciele nierozciętym. Z poprzednich rozważań wiadomo, że odkształcenia wstępne wywołują naprężenia tylko w tym przypadku, gdy składowe stanu odkształcenia [a] nie spełniają warunków ciągłości; w przeciwnym razie odkształcenia te mogą istnieć bez wywoływania naprężeń wstępnych. Wynika stąd, że znajomość naprężeń wstępnych nie wystarcza dla określenia odkształceń [a]. Do każdego układu odkształceń, stanowiących rozwiązanie tego zagadnienia dodać można dowolny układ odkształceń trwałych, spełniających warunki ciągłości, nie wywołując przy tym dodatkowych naprężeń wstępnych<sup>1)</sup>.

Naprężenia wstępne dzięki którym szkło nabiera własności polaryzujących stwarzają duże trudności przy produkcji instrumentów optycznych. Dla zmniejszenia tych naprężeń stosuje się zwykle w praktyce wyżarzanie szkła. Ze względu na niską granicę sprężystości szkła przy wysokich temperaturach, materiał ulega uplastycznieniu pod wpływem naprężeń wstępnych. Po upływie dostatecznie długiego czasu płynięcie materiału w wysokiej temperaturze prowadzi do znacznego zmniejszenia naprężeń wstępnych. Podobne efekty daje wyżarzanie w przypadku różnych metalowych odlewów i odkuwek.

Rozcięcie ciała na mniejsze części prowadzi do uwolnienia od naprężeń wzdłuż powierzchni przecięcia i zmniejsza ogólną wartość energii odkształcenia odpowiadającej naprężeniom wstępnym, choć nie zawsze zmniejsza maksymalne naprężenie wstępne. Przypuśćmy na przykład, że pierścień kołowy (rys. 228) posiada naprężenia wstępne rozłożone kołowo-symetrycznie, przy czym  $\sigma'_\theta$  zmienia się w przekroju poprzecznym  $mn$  liniowo (prosta  $ab$  na rysunku). Przecięcie pierścienia wzdłuż promienia, jak to zostało pokazane na rysunku linią przerywaną, uwalnia ten przekrój od naprężeń  $\sigma'_\theta$ . Jest to równoważne przyłożeniu do każdego wycinka pierścienia dwóch równych i przeciwnie skierowanych momentów, prowadzących do czystego zginania. Odpowiadający temu zginaniu rozkład naprężeń  $\sigma_\theta$  wzdłuż  $mn$  jest w przybliżeniu hiperboliczny (par. 27), jak wskazuje krzywa  $cde$ . Naprężenie wzdłuż  $mn$  pozostałe po przecięciu równa się wtedy sumie  $\sigma_\theta + \sigma'_\theta$  i przedstawione jest na rysunku obszarem zakreskowanym. Jeśli promień wewnętrzny pierścienia jest mały, to na brzegu wewnętrznym powstaje wysoka koncentracja naprężeń, i maksymalne naprężenie wstępne po przecięciu, przedstawione na rys. 228 odcinkiem  $bc$ , może być większe od maksymalnego naprężenia wstępnego przed przecięciem. Tego rodzaju rozumowanie może tłumaczyć zjawisko pęknięcia szkła po jego przecięciu<sup>2)</sup>.



Rys. 228

<sup>1)</sup> Fakt, że układ odkształceń wstępnych [a] nie jest w pełni określony przez wielkości naprężeń wstępnych, został omówiony szczegółowo w pracy *H. Reissnera*: „Z. A. M. M.“, t. 11, s. 1, 1931.

<sup>2)</sup> Kilka przykładów obliczenia naprężeń wstępnych w wycinkach tarczy kołowej omówił w swej pracy *M. V. Laue*: „Z. tech. Physik“, 11, s. 385, 1930. Różne metody obliczania naprężeń szczytkowych w rurach wyciąganych na zimno omówił *N. Dawidenkow*: „Z. Metallkunde“, 24, s. 25, 1932.

**139. Zagadnienie dwuwymiarowe ustalonego przepływu ciepła.** Przy ustalonym przepływie ciepła równoległym do płaszczyzny  $xy$ , jak to na przykład ma miejsce w cienkiej płycie lub w długim walcu o stałej temperaturze w kierunku osiowym  $z$ , temperatura  $T$  spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [a]$$

Rozpatrzmy walec (niekoniecznie kołowy) w płaskim stanie odkształcenia przy  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Związki między naprężeniami i odkształceniami w kartezjańskim układzie współrzędnych są analogiczne do równań [a] i [b] par. 135 dla płaskiego stanu odkształcenia. Odpowiednio do równań [b] będziemy mieli

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - (1 + \nu)\alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right) \\ \varepsilon_y - (1 + \nu)\alpha T &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right) \end{aligned} \quad [b]$$

Zbadamy teraz, czy jest możliwe, aby naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  były równe zeru. Wstawiając w [b]  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , znajdujemy

$$\varepsilon_x = (1 + \nu)\alpha T; \quad \varepsilon_y = (1 + \nu)\alpha T \quad [c]$$

oraz oczywiście  $\gamma_{xy} = 0$ .

Takie odkształcenia możliwe są tylko wtedy, gdy spełniają równania ciągłości [129]. Wszystkie te warunki z wyjątkiem pierwszego są spełnione, ponieważ  $\varepsilon_z = 0$ , a pozostałe składowe stanu odkształcenia są niezależne od  $z$ .

Pierwszy warunek sprowadza się do równania

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0$$

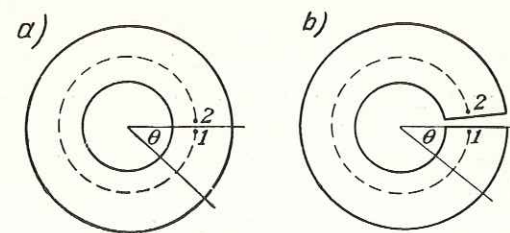
które jest także spełnione ze względu na [c] i [a]. Dochodzimy więc do wniosku, że, jeśli tylko powierzchnie zakrzywione walca są wolne od obciążeń, to równania równowagi i ciągłości spełnić można przez przyjęcie

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_z = -\alpha ET \quad [d]$$

Powyższe równania i warunki są w przypadku walca pełnego kompletne i możemy wyciągnąć wniosek, że w dwuwymiarowym, ustalonym przepływie ciepła nie powstają naprężenia cieplne z wyjątkiem naprężenia osiowego  $\sigma_z$ , danego równaniem [d] i potrzebnego dla zachowania warunku  $\varepsilon_z = 0$ . W przypadku długiego walca o końcach nieutwierdzonych otrzymujemy rozwiązanie przybliżone, ważne w dostatecznej odległości od końców przez dodanie prostego rozciągania lub ściskania oraz zginania w ten sposób, aby sprowadzić do zera wypadkowe siły i momenty na podstawach walca.

W przypadku walca wydrążonego nie możemy jednak stwierdzić, że zagadnienie płaskie zostało rozwiązane za pomocą równań [d]. Trzeba jeszcze sprawdzić odpowiednie przemieszczenia. Może się okazać, że będą one posiadały pewne nieciągłości — podobnie, jak to zostało omówione w par. 29 i par. 39.

Rozważmy dla przykładu rurę z wyciętą podłużną szczeliną (rys. 229b). Jeśli wnętrze rury jest bardziej nagrzane od powierzchni zewnętrznej, rura będzie miała tendencję do odwijania się i szczelina rozszerzy się. Między powierzchniami rozcięcia powstanie nieciągłość przemieszczeń. Tak więc przemieszczenie powinno być opisane przez nieciągłą funkcję zmiennej  $\theta$ . Przekrój poprzeczny jest jednospójny, a równania [d] opisują naprężenia w płaskim stanie odkształcenia w sposób ścisły. Lecz jeśli rura nie posiada szczeliny (rys. 229a), powstanie



Rys. 229

nieciągłości w przemieszczeniach jest fizycznie niemożliwe. Wskazuje to na fakt, że założony rozkład temperatury wywoła rzeczywiście naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , będące wynikiem odpowiedniego przyciągnięcia do siebie rozdzielonych powierzchni szczeliny i połączenia ich ze sobą (par. 39 i rys. 82). Czynność ta wpłynie także na składową  $\sigma_z$ .

Aby rozważyć to zagadnienie bliżej, przepiszemy [c] w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon'; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon' \quad [e]$$

gdzie  $\varepsilon' = (1 + \nu)\alpha T$ . Ponieważ  $\gamma_{xy} = 0$ , możemy napisać

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad [f]$$

oraz

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z \quad [g]$$

przy czym  $\omega_z$  oznacza składową obrotu (por. par. 75). Z równań [f] i [g] otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega_z; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \omega_z \quad [h]$$

a dalej za pomocą [e]

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial x} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varepsilon'}{\partial y} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad [i]$$

Równania [i] są równaniami *Cauchy-Riemanna*, które zostały omówione w par. 55. Wskazują one, że  $\varepsilon' + i\omega_z$  jest funkcją analityczną zmiennej zespolonej  $x + iy$ . Oznaczając tę funkcję przez  $Z$ , mamy

$$Z = \varepsilon' + i\omega_z \quad [j]$$

Jeśli  $u_1, v_1, u_2, v_2$  są wartościami  $u, v$  w dwóch punktach 1, 2 przekroju poprzecznego walca, to różnice  $u_2 - u_1, v_2 - v_1$  można wyrazić jako

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right); \quad v_2 - v_1 = \int_1^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

gdzie całkowanie wykonać należy wzdłuż dowolnej krzywej, leżącej całkowicie wewnątrz obszaru i łączącej oba punkty. Mnożąc drugie równanie przez  $i$  oraz dodając do pierwszego otrzymujemy

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = \int_1^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \right] \quad [k]$$

a z równań [e] i [h] łatwo sprawdzimy, że całka po prawej stronie równa jest  $\int_1^2 (\varepsilon' + i\omega_z)(dx + idy)$  lub  $\int_1^2 Z dz$ . W ten sposób [k] przekształca się na

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = \int_1^2 Z dz \quad [l]$$

Przemieszczenia będą funkcjami jednoznaczными, jeśli całka ta znika przy pełnym obiegu dowolnej krzywej zamkniętej, zawartej całkowicie wewnątrz przekroju, na przykład linii kreskowanej (rys. 229a). Z wyniku tego skorzystamy później przy rozwiązywaniu zagadnienia naprężeń cieplnych w wydrążonym walcu kołowym.

Poza naprężeniami także i obrót  $\omega_z$  powinien być funkcją ciągłą. Ponieważ

$$(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1 = \int_1^2 \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} dy \right)$$

to, wykorzystując [i], otrzymamy

$$(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1 = \int_1^2 \left( -\frac{\partial \varepsilon'}{\partial y} dx + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x} dy \right)$$

Ponieważ zaś  $\varepsilon'$  jest proporcjonalne do  $T$ , to otrzymana całka jest proporcjonalna do ilości ciepła, przepływającej w jednostce czasu wzdłuż jednostkowego odcinka o kierunku, równoległym do osi walca przez krzywą, łączącą punkty 1 i 2. Jeśli krzywa ta jest zamknięta, różnica  $(\omega_z)_2 - (\omega_z)_1$  musi zniknąć i dlatego całkowity przepływ ciepła przez krzywą równy jest zeru. Jeśli w rurze ma miejsce przepływ ciepła z wnętrza na zewnątrz lub odwrotnie, warunek ten nie jest spełniony i zależność [d] nie podaje ściślej wartości naprężeń.

Jeśli jednak rura jest rozcięta (rys. 229b), to przemieszczenie lub obrót punktów 1 i 2 mogą się różnić między sobą, np. wtedy, gdy ogrzewanie powoduje otwieranie się szczeliny. Związek [d] podaje wtedy prosty stan naprężenia w sposób ścisły. Aby otrzymać rozkład naprężeń dla przypadku gdy nie ma szczeliny, musimy teraz dodać naprężenia powodujące jej zamknięcie. Określenie tych naprężeń dyslokacyjnych prowadzi do zagadnień<sup>1)</sup> typu przedstawionego na rys. 45 i 82.

Rozpatrzmy dla przykładu przypadek wydrążonego walca kołowego o promieniu zewnętrznym  $b$  i promieniu współśrodkowego otworu  $a$ . Przy równomiernym rozkładzie temperatury równej  $T_w$  na powierzchni wewnętrznej i zeru na powierzchni zewnętrznej temperaturę w dowolnym punkcie odległym o  $r$  od środka podaje związek [n] par. 135. Możemy go zapisać jako

$$T = -A \log b + A \log r \quad [m]$$

gdzie

$$A = -\frac{T_w}{\log(b/a)} \quad [n]$$

Stały wyraz  $-A \log b$  w równaniu [m] można pominąć, gdyż równomierna zmiana temperatury nie wywołuje żadnych naprężeń. Ponieważ zaś  $\log z = \log r + i\theta$ , mamy

$$\begin{aligned} Z &= \varepsilon' + i\omega_z = (1 + \nu)\alpha T + i\omega_z = \\ &= (1 + \nu)\alpha A \log r + i\omega_z = (1 + \nu)\alpha A \log z \end{aligned}$$

Oznaczając  $(1 + \nu)\alpha A$  przez  $B$ , otrzymujemy z [l]

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = B \int_1^2 \log z dz = B \left[ z(\log z - 1) \right]_1^2 \quad [o]$$

<sup>1)</sup> Związek między naprężeniami cieplnymi przy ustalonym przepływie ciepła a naprężeniami dyslokacyjnymi ustalił *N. I. Muschelišwili*: „Bull. Elec. Techn. Inst.“, Petersburg 1916, 13, s. 23 oraz niezależnie *M. A. Biot*: „Phil. Mag.“ cz. 7, 19, s. 540. Naprężenia cieplne w walcu o przekroju kołowym i kwadratowym z kołowym wydrążeniem obliczał w ten sposób na drodze elastooptycznej *E. E. Weibel*: „Proc. Fifth Intern. Congr. Applied Mechanics“, Cambridge, Mass., 1938, s. 213.

Równanie to stosuje się do każdej krzywej łączącej punkty 1 i 2 i leżącej całkowicie w obrębie materiału. Podaje ono przesunięcie względne tych punktów przy zadanej temperaturze [m] i naprężeniach [d].

Wybierając drogę całkowania po obwodzie koła o promieniu  $r$  z początkiem w punkcie 1 (rys. 229) oraz z końcem w punkcie 2 po okrążeniu otworu mamy, przy  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi$ ,

$$[z(\log z - 1)]_1^2 = rei^{2\pi} (\log r + i \cdot 2\pi) - rei^0 (\log r + i \cdot 0) = i \cdot 2\pi r$$

Wstawiając to do [o], otrzymujemy

$$u_2 - u_1 = 0; \quad v_2 - v_1 = B \cdot 2\pi r \quad [p]$$

Ponieważ przemieszczenie względne nie znika, wałec należy rozpatrywać jako rozcięty, aby punkt 2 miał możliwość pionowego przesunięcia się względem punktu 1 o odcinek  $2\pi Br$  (rys. 229b). Przesunięcie górnej krawędzi szczeliny w stosunku do krawędzi dolnej jest równoważne obrotowi w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara wokół środka. Ponieważ jednak przy  $T_w$  dodatnim  $B$  jest ujemne, szczelina po otwarciu się zawiera kąt środkowy  $-2\pi B$ . Zagadnienie zamknięcia takiej szczeliny zostało rozwiązane dla przypadku płaskiego stanu naprężenia w par. 29. Dla płaskiego stanu odkształcenia wystarczy to rozwiązanie przekształcić zgodnie z par. 19. Otrzymane naprężenia wraz z naprężeniem osiowym  $\sigma_z = -\alpha ET$  z równania [d] są identyczne z [247].

Temperatura wewnętrzna i zewnętrzna, zmieniająca się wzdłuż obwodów ograniczających rurę, może być przedstawiona za pomocą szeregów *Fouriera*

$$\begin{aligned} T_w &= A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + \dots + B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + \dots \\ T_z &= A_0' + A_1' \cos \theta + A_2' \cos 2\theta + \dots + B_1' \sin \theta + B_2' \sin 2\theta + \dots \end{aligned} \quad [q]$$

Naprężenia cieplne odpowiadające poszczególnym wyrazom szeregu można traktować osobno; np. wpływ wyrazów stałych  $A_0, A_0'$  omówiony został właśnie powyżej, przy założeniu  $T_w = A_0 - A_0'$ . Funkcja  $Z$ , odpowiadająca wyrazom  $\cos \theta, \sin \theta; \cos 2\theta, \sin 2\theta$ ; itd., zawierać będzie wyrazy proporcjonalne do

$$z, z^{-1}; \quad z^2, z^{-2}; \quad \text{etc.} \quad [r]$$

Teraz całka  $\int z^n dz$  obliczona po pełnym obwodzie koła o promieniu  $r$  znika, jeśli tylko  $n \neq -1$ , gdyż

$$\int z^n dz = \int r^n e^{in\theta} r e^{i\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta] d\theta$$

Wyrażenie to jest oczywiście zerem z wyjątkiem  $n + 1 = 0$ ; w tym przypadku mamy bowiem

$$\int \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad [s]$$

Tak więc jedynym wyrazem w [r], który prowadzi do niezerowej całki po prawej stronie równania [l] jest wyraz  $z^{-1}$ . Wynika stąd, że wyrazy  $z \cos 2\theta, \sin 2\theta$  oraz wyższe harmoniczne w szeregu [q] dla temperatury nie wywołują żadnych przemieszczeń względnych obu krawędzi rozciętej rury. Ogólny przepływ ciepła ze środka na zewnątrz rury, odpowiadający tym wyrazom, jest równy zeru i jedynymi naprężeniami, jakie przy tym powstają, są naprężenia [d].

Wyraz  $z^{-1}$  w funkcji  $Z$  wywodzi się z wyrazów w [q], zawierających  $\cos \theta$  i  $\sin \theta$ . Wystarczy rozważyć tylko  $\cos \theta$ , ponieważ wpływ wyrazu  $\sin \theta$  może być z niego wyprowadzony przez prostą zmianę odniesienia  $\theta = 0$ . Rozpatrzmy więc tylko

$$T_w = A_1 \cos \theta; \quad T_z = A_1' \cos \theta \quad [t]$$

Zagadnienie określenia ustalonego rozkładu temperatury, odpowiadającego tym wartościom brzegowym, rozwiązuje się przez przyjęcie, że temperatura  $T$  stanowi część rzeczywistą funkcji

$$\frac{C_1}{z} + C_2 z \quad [u]$$

i przez określenie stałych  $C_1$  i  $C_2$  w ten sposób, aby spełnione były warunki [t]. Wartości tych stałych wynoszą

$$C_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{A_1}{a} - \frac{A_1'}{b} \right); \quad C_2 = \frac{A_1' b - A_1 a}{b^2 - a^2} \quad [v]$$

$$(1 + \nu)\alpha \frac{C_1}{z}$$

funkcji  $Z$ . Wstawiając ją do [1] i posługując się [s], dochodzimy do wyrażenia na nieciągłość odkształceń w postaci

$$u_2 - u_1 + i(v_2 - v_1) = i \cdot 2\pi(1 + \nu)\alpha C_1$$

i dlatego

$$u_2 - u_1 = 0; \quad v_2 - v_1 = 2\pi(1 + \nu)\alpha C_1$$

Oznacza to, że górna krawędź szczeliny (rys. 229) przesuwa się na dół o  $2\pi(1 + \nu)\alpha C_1$  do wnętrza obszaru, zajętego przez krawędź dolną i znajdujący się poniżej materiał rury. Oczywiście jest to fizycznie niemożliwe wskutek działania sił, które powstają między powierzchniami rozcięcia i wywołują przemieszczenia o przeciwnym znaku. Naprężenia, potrzebne do wywołania tych przemieszczeń, określone są w sposób omówiony na końcu par. 39; w naszym przypadku mamy oczywiście do czynienia z płaskim stanem odkształcenia. Podajemy naprężenia, które należy nałożyć na naprężenia osiowe [d]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K \cos \theta \cdot r \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) \\ \sigma_\theta &= K \cos \theta \cdot r \left(\frac{a^2 b^2}{r^4} + \frac{a^2 + b^2}{r^2} - 3\right) \\ \tau_{r\theta} &= K \sin \theta \cdot r \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Tutaj oznaczono

$$K = \frac{-\alpha E}{2(1 - \nu)} \left(\frac{A_1}{a} - \frac{A_1'}{b}\right) \frac{a^2 b^2}{b^4 - a^4}$$

Jeśli tylko walec nie ma możliwości wydłużania się lub skracania w kierunku podłużnym, naprężenie osiowe otrzymujemy z [d] przez podstawienie  $T$  z równań  $u$  i  $v$ . W przypadku końców swobodnych uwzględnić należy dodatkowo naprężenia odpowiadające siłom i momentom na krańcach walca.

**140. Rozwiązania równań ogólnych.** Każde rozwiązanie szczególne równań [254] sprowadza zagadnienie naprężeń cieplnych do zwykłego zagadnienia sił powierzchniowych. Otrzymane z równań [a] i [b] par. 139 przemieszczenia  $u, v, w$  prowadzą za pomocą [2] do wartości naprężeń. Konieczne do utrzymania tych naprężeń siły powierzchniowe i nierównomierny rozkład temperatury znajdujemy z równań [128]. Usunięcie tych sił w celu uwolnienia powierzchni od naprężeń, tak by naprężenia odpowiadały wyłącznie nierównomiernemu rozkładowi temperatury, stanowi już zwykle zagadnienie brzegowe.

Jednym ze sposobów znalezienia rozwiązania szczególnego równań [254] jest przyjęcie

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{a}$$

gdzie  $\psi$  jest funkcją  $x, y, z$  oraz czasu  $t$ , jeżeli temperatura zmienia się w czasie.

Stosując [5] i [10], możemy napisać [254] w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} + (1 - 2\nu)\nabla^2 u &= 2(1 + \nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{b}$$

Równanie [a], wobec  $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  prowadzi do  $e = \nabla^2 \psi$  i [b] przybiera postać

$$(1 - \nu)\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi = (1 + \nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \tag{c}$$

przy czym w drugim i trzecim z tych równań należy zastąpić  $\partial/\partial x$  przez  $\partial/\partial y$  i  $\partial/\partial z$ . Wszystkie trzy równania spełnione są jeśli  $\psi$  będzie rozwiązaniem równania<sup>1)</sup>

$$\nabla^2 \psi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha T \tag{d}$$

Rozwiązanie równań tego typu rozważa się w teorii potencjału<sup>2)</sup>. Rozwiązanie można napisać jako potencjał grawitacyjny rozkładu materii o gęstości  $-(1 + \nu)\alpha T/4\pi(1 - \nu)$ , który wynosi<sup>3)</sup>

$$\psi = -\frac{(1 + \nu)\alpha}{4\pi(1 - \nu)} \iiint T(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r'} d\xi d\eta d\zeta \tag{e}$$

gdzie  $T(\xi, \eta, \zeta)$  jest temperaturą punktu  $\xi, \eta, \zeta$ , w którym znajduje się element o objętości  $d\xi d\eta d\zeta$ , a  $r'$  jest odległością tego punktu od punktu  $x, y, z$ . Równanie [e] stanowi pełne rozwiązanie zagadnienia naprężeń cieplnych w ciele nieskończonym o temperaturze równej zeru, z wyjątkiem obszarów ogrzanych (lub ochłodzonych)<sup>4)</sup>. Przypadki takich obszarów o postaci elipsoidy obrotowej i półnieskończonego walca kołowego, równomiernie nagrzanych, są opracowane<sup>5)</sup>. Maksymalne naprężenie dla elipsoidy wynosi  $\alpha ET/(1 - \nu)$  i jest prostopadłe do jej powierzchni w punktach o największej krzywiznie. Naprężenie to występuje jedynie w dwóch przypadkach granicznych: bardzo spłaszczonej lub bardzo wydłużonej elipsoidy obrotowej. Przypadki pośrednie charakteryzują się mniejszymi naprężeniami maksymalnymi, dochodząc w przypadku obszaru kulistego do dwóch trzecich wymienionej wielkości.

Jeśli  $T$  nie zależy od  $z$  i  $w=0$ , mamy do czynienia z płaskim stanem odkształcenia, a  $\psi, u$  i  $v$  nie zależą także od  $z$ . Równanie [d] przekształca się na

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \alpha T \tag{f}$$

Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest potencjał logarytmiczny

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \alpha \iint T(\xi, \eta) \log r' d\xi d\eta \tag{g}$$

gdzie

$$r' = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

W płycie cienkiej o temperaturze  $T$  nie zmieniającej się wzdłuż grubości możemy przyjąć płaski stan naprężenia z  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  i  $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , niezależnymi od  $z$ . Otrzymujemy wtedy związki między naprężeniami i odkształceniami (równania [d] par. 134)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (1 + \nu)\alpha T \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (1 + \nu)\alpha T \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{h}$$

Podstawiając je do dwóch równań równowagi [18], otrzymujemy przy braku sił masowych równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 2\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{i}$$

<sup>1)</sup> Funkcji tego rodzaju używał *E. Almansi* w zagadnieniu kuli. Por. 1) „Atti rea. e acad. sci. Torino“, 1896 — 1897, 32, s. 963; 2) „Mem. reale acad. sci. Torino“, cz. 2, 47, 1897.  
<sup>2)</sup> Por. np. „Theory of the Potential“, *W. D. Mac Millan*, Nowy Jork, 1930.  
<sup>3)</sup> Funkcją tą posługiwał się *C. W. Borchardt*, badając zagadnienia kuli. „Monatsber. Koenigl. Preuss. Akad. Wiss.“, Berlin, 1873, s. 9.  
<sup>4)</sup> *J. N. Goodier*: „Phil. Mag.“ 1937, 23, s. 1017. Ciało półnieskończone rozważa *R. D. Mindlin* i *D. H. Cheng*: „J. Applied Phys.“ 1950, 21, s. 926, 931.  
<sup>5)</sup> *N. O. Myklestad*: „J. Applied Mechanics“, (Trans. A.S.M.E.), 1942, s. A-131.

Będą one spełnione przez

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad [j]$$

jeśli tylko  $\psi$  jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = (1 + \nu) \alpha T \quad [k]$$

Porównując je z [f] widzimy, że jego rozwiązaniem będzie potencjał logarytmiczny [g] z pominięciem w mianowniku wyrażenia  $1 - \nu$ . Jest to pełne rozwiązanie dla lokalnego ogrzania nieskończonej płyty, w której naprężenia i odkształcenia muszą w nieskończoności zmierzać do zera.

Jako pierwszy przykład tego rodzaju rozważymy płytę nieskończoną o temperaturze równej zeru wszędzie z wyjątkiem prostokątnego obszaru  $ABCD$  o bokach  $2a, 2b$  (rys. 230), wewnątrz którego temperatura jest stała<sup>1)</sup> i równa  $T$ . Poszukiwany potencjał logarytmiczny ma postać

$$\psi = \frac{1}{2\pi} (1 + \nu) \alpha T \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{2} \log [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] d\xi d\eta \quad [l]$$

Przemieszczenia otrzymuje się przez różniczkowanie zgodnie z [j], a naprężenia znajdujemy następnie z [h]. Wartości  $\sigma_x$  i  $\tau_{xy}$  w punktach leżących na zewnątrz ogrzanego prostokąta, takich jak  $P$ , można sprowadzić do

$$\sigma_x = E\alpha T \frac{1}{2\pi} (\psi_1 - \psi_2); \quad \tau_{xy} = E\alpha T \frac{1}{4\pi} \log \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad [m]$$

przy czym kąty  $\psi_1, \psi_2$  i odległości  $r_1, r_2, r_3, r_4$  zostały zaznaczone na rys. 230. Kąty te oparte są na dwóch bokach  $AD, BC$  prostokąta, równoległych do osi  $x$ . Wyrażenie dla  $\sigma_y$  otrzymuje się z pierwszego równania [m] przez wstawienie zamiast  $\psi_1$  i  $\psi_2$  kątów opartych na pozostałych dwóch bokach  $AB, DC$  prostokąta.

Wartość  $\sigma_x$  tuż poniżej  $AD$  i tuż na lewo od  $A$  wynosi

$$E\alpha T \cdot \frac{1}{2\pi} \left( \pi - \arctg \frac{a}{b} \right)$$

i jest największa w przypadku prostokąta nieskończenie długiego w kierunku osi  $y$ , gdy staje się równa  $\frac{1}{2} E\alpha T$ . Oba naprężenia normalne zmieniają się gwałtownie w okolicy naroża prostokąta, a naprężenie styczne  $\tau_{xy}$  przy zbliżeniu się do naroża zmierza do nieskończoności. Osobliwości te są oczywiście konsekwencją przyjęcia doskonale ostrych naroży ogrzanego prostokąta.

Jeśli ogrzany obszar nie jest prostokątny, lecz posiada kształt elipsy<sup>2)</sup>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

to wartość naprężenia  $\sigma_y$  tuż poza elipsą, w pobliżu końca osi wielkiej wynosi

$$\frac{E\alpha T}{1 + (b/a)}$$

i dla elipsy bardzo wydłużonej dąży do  $E\alpha T$ , zaś dla koła równa jest  $\frac{1}{2} E\alpha T$ . Naprężenie  $\sigma_x$  tuż poza końcem mniejszej osi ma wartość

$$\frac{E\alpha T}{1 + (a/b)}$$

i przy bardzo wydłużonej elipsie zmierza do zera.

<sup>1)</sup> Goodier, loc. cit.

<sup>2)</sup> Goodier, loc. cit.

Metoda przedstawiona w tym paragrafie staje się szczególnie prosta w przypadku, gdy temperatura zmienia się z czasem i spełnia równanie różniczkowe przewodzenia ciepła<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad [n]$$

dzie  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, podzielonym przez ciepło właściwe i gęstość. Różniczkując [d] względem  $t$  i podstawiając następnie  $\partial T / \partial t$  z równania [n] dochodzimy do wniosku, że funkcja  $\psi$  powinna spełniać równanie

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \lambda \nabla^2 T$$

Możemy więc przyjąć

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \lambda T$$

Całką tego równania w przypadku, gdy temperatura zmierza z upływem czasu do zera, jest

$$\psi = - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \lambda \int_t^\infty T dt \quad [o]$$

jak można sprawdzić przez podstawienie w [d], korzystając z [n].

Rozpatrzmy np. długi walec kołowy (płaski stan odkształcenia), który ochładza się lub jest ogrzewany do stanu ustalonego przewodzenia ciepła. Przebieg temperatury nie jest osiowo-symetryczny, lecz nie zależy od współrzędnej osiowej  $z$ . Temperaturę można więc przedstawić za pomocą szeregu, składającego się z wyrazów o postaci

$$T_{sn} = c^{-\lambda s^2 t} J_n(sr) e^{in\theta} \quad [p]$$

przy czym dla otrzymania  $\cos n\theta$  lub  $\sin n\theta$  można tu brać pod uwagę część rzeczywistą lub urojoną wyrazu  $e^{in\theta}$ . Z [o] otrzymamy funkcję  $\psi$ , odpowiadającą temu wyrazowi w szeregu dla temperatury

$$\psi_{sn} = - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \lambda \frac{1}{s^2} T_{sn} \quad [q]$$

Szereg złożony z takich funkcji, odpowiadający szeregowi dla  $T$ , stanowić będzie rozwiązanie szczególne równania ogólnego [b]. Przemieszczenia obliczać można zgodnie z równaniami [a] lub z równoważnymi im równaniami dla biegunowego układu współrzędnych

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

przy czym  $u$  i  $v$  są tu odpowiednio składową promieniową i styczną przemieszczenia. Składowa  $w$  w kierunku osi jest w płaskim stanie odkształcenia równa zeru.

Odkształcenia otrzymujemy następnie zgodnie z par. 28. Naprężenia obliczać należy z zależności dla płaskiego stanu odkształcenia [a] i [b] par. 135 wraz z ostatnim z równań [52] dla naprężenia stycznego  $\tau_{r\theta}$ .

Po otrzymaniu takiego rozwiązania okazuje się w ogólności, że na zakrzywionej powierzchni walca pozostały niezerowe obciążenia  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ . Dla ich usunięcia wystarczy rozwiązać zwykły problem płaskiego stanu odkształcenia, posługując się ogólną funkcją naprężeń we współrzędnych biegunowych, podaną w par. 39<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Por. np. „Theory of Heat Conduction“, Ingorsoll i Zobel.

<sup>2)</sup> Problem ten został omówiony w cytowanej wyżej pracy J. N. Goodiera dotyczącej przypadku walca wydrążonego o temperaturze, odpowiadającej zależności [p].