

## TENSOMETRIA ELEKTROOPOROWA .

### 1. Związki podstawowe .

Metoda tensometrii rezystancyjnej jest bardzo prostym a zarazem dokładnym sposobem pomiaru odkształceń liniowych na powierzchni badanego ustroju . Pomiar odkształceń za pomocą tensometrów rezystancyjnych oparty jest o znane zjawisko zmiany rezystancji przewodnika na skutek jego wydłużenia . Punktem wyjścia jest powszechnie znany wzór :

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (1)$$

gdzie :  $R$  – rezystancja przewodnika,  $\rho$  – rezystancja właściwa materiału przewodnika,  $l$  – długość przewodnika,  $A$  – pole przekroju przewodnika. Podstawową zależność tensometrii łatwo uzyskać przekształcając wzór wyjściowy . W tym celu należy po pierwsze zlogarytmizować wyrażenie (1) :

$$\ln R = \ln \rho + \ln l - \ln A$$

Po zróżniczkowaniu otrzymuje się :

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A}$$

lub w przyrostach skończonych :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A} .$$

Jeśli symbolem  $\varepsilon$  oznaczyć odkształcenie liniowe wzdłuż przewodnika czyli tensometru w postaci pojedynczego drucika , powyższy wzór można zapisać w postaci :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon - 2\nu\varepsilon \quad \text{czyli :}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + (1 + 2\nu)\varepsilon .$$

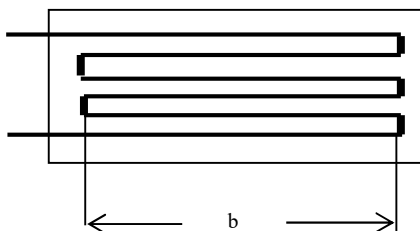
Dla większości stosowanych materiałów do wytwarzania tensometrów  $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 0$  . Tak więc

dla tensometru w postaci pojedynczego drucika otrzymuje się prostą formułę zwaną równaniem tensometrii :

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon , \quad \text{gdzie } k = 1 + 2\nu \text{ nazywa się stałą tensometryczną .} \quad (2)$$

### 2. Budowa i klejenie tensometrów .

Ponieważ dla większości stosowanych materiałów do wytwarzania tensometrów liczba Poissona zawiera się w przedziale  $0.24 < \nu < 0.42$  , więc  $1.48 < k < 1.84$  . W praktyce aby przyrost rezystancji  $\Delta R$  osiągnął możliwie duża , łatwą do zmierzenia wielkość , typowy tensometr ma postać nie pojedynczego drucika a pakietu drucików . Długi przewodnik zajmuje wtedy niewielki obszar w miejscu wybranym do pomiaru odkształcenia . Na rysunku poniżej pokazano schemat typowego tensometru :



Rys. 1. Schemat tensometru .

Wymiar „b” zwany bazą jest ważnym parametrem czujnika . Określa on wymiar (w kierunku mierzonego odkształcenia ) obszaru w którym pomiar jest uśredniony . Siatki tensometrów

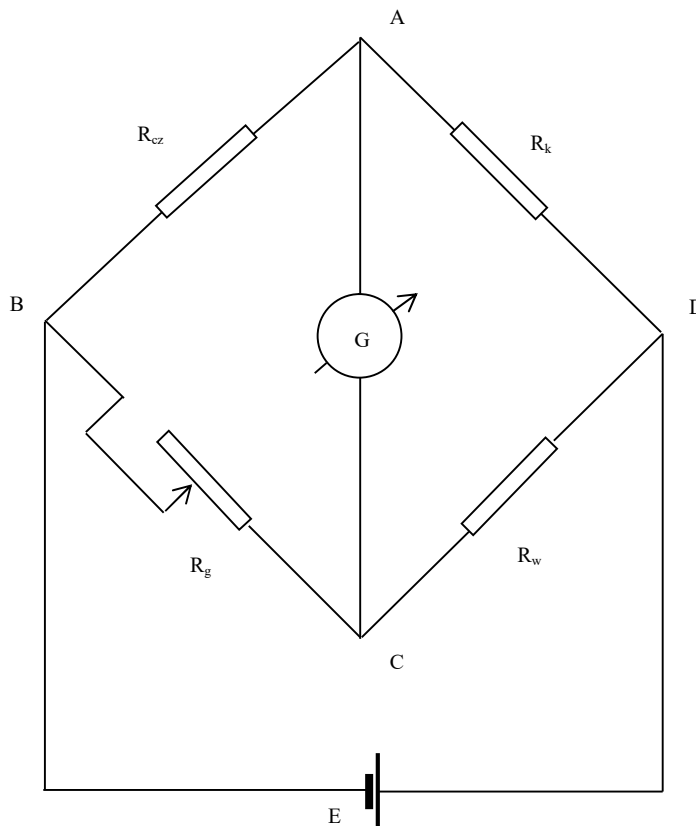
wytwarzane w postaci siatek drukowanych (trawionych) mają bazę w przedziale od 0.5 mm – (wybitnie lokalne pomiary) do 120 mm (pomiary na dużych konstrukcjach np. budowlanych). Tensometry powszechnie stosowane mają bazę 5 – 10 mm . Oczywiście siatki tensometryczne wklejone są między dwie podkładki zabezpieczające, tradycyjnie papierowe o grubości 0.02-0.05 mm a współcześnie z folii epoksydowej o grubości 3 – 10  $\mu\text{m}$  . Dla tak skonstruowanego w formie siatki czujnika stała „k” zmienia się w granicach 1.8 – 2.6 . Ze względu na utrzymanie w dużym zakresie temperatur ( -50°- 150° ) liniowości prawa tensometrii stosuje się na materiał siatki stop miedziowo niklowy w proporcjach 60%-40% zwany konstantanem . Typ tensometru określa jego wymiary, rezystancję i stałą tensometryczną „k” .

Do naklejenia tensometrów na powierzchni ustroju w wybranym punkcie i ustalonym kierunku służą specjalne kleje jedno lub dwuskładnikowe . Kleje muszą spełniać szereg warunków a przede wszystkim dawać cienką warstwę co eliminuje efekt odkształcalności samego spoiwa i trwałość połączenia w możliwie długim okresie czasu . Oczywiście powierzchnia materiału przed klejeniem musi być starannie przygotowana : oczyszczona chemicznie (głównie odtłuszczona) , wyrównana ale najlepiej lekko szorstka . Zapewni to najlepsze przyjęcie kleju .

Tensometr gotowy do pomiarów musi mieć dwa wyprowadzenia : jedno masowe i drugie koniecznie odizolowane od powierzchni ustroju tzw. czynne . Po naklejeniu, wyschnięciu i wstępnym pomiarze sprawdzającym zabezpiecza się czujnik przed uszkodzeniem mechanicznym zalewając go silikonem .

### 3. Mostek tensometryczny i pomiar pojedynczym tensometrem .

Powszechnym w laboratorium fizycznym przyrządem do pomiaru oporności jest mostek Wheatstona pokazany na rysunku poniżej :



Rys. 2. Mostek tensometryczny Wheatstona .

Element oznaczony symbolem  $R_{cz}$  to właśnie podłączony do mostka tensometr mierzący odkształcenie na powierzchni ustroju – tensometr czynny . Również poza urządzeniem mostka znajduje się element oznaczony przez  $R_k$  – tzw. tensometr kompensacyjny identyczny z tensometrem czynnym . Zazwyczaj nakleja się go na kawałku materiału takiego samego jak materiał ustroju badanego i umieszcza w jego okolicy . Funkcją tensometru kompensacyjnego jest eliminacja wpływu na odkształcenie czujnika innego niż obciążenie założone , przede wszystkim wpływu zmian temperatury . Omawiany schemat jest nie jedynym ale najbardziej powszechnym sposobem wykorzystania mostka do pomiaru odkształcenia .

Powszechnie wyróżnia się dwie metody wykorzystania tego samego mostka . W dalszym ciągu zaprezentowano tzw. metodę zerową . Polega ona na równoważeniu mostka przy zmieniającej się na skutek odkształcenia rezystancji  $R_{cz}$  za pomocą potencjometru  $R_g$  czyli wyzerowaniu prądu  $I_{AC}$  płynącego przez galwanometr  $G$  . Wtedy przed obciążeniem ustroju dla prądów płynących w poszczególnych gałęziach spełnione są warunki  $I_{AB} = I_{AD}$  oraz  $I_{BC} = I_{DC}$  . Uwzględniając to można zapisać warunek równości potencjałów  $U_A = U_C$  , czyli :

$$I_{AB} \cdot R_{cz} = I_{BC} \cdot R_g$$

i

$$I_{AB} \cdot R_k = I_{BC} \cdot R_w$$

skąd wynika proporcja  $\frac{R_{cz}}{R_k} = \frac{R_g}{R_w}$  a następnie wzór  $R_{cz} = \frac{R_k}{R_w} \cdot R_g$  .

Po obciążeniu ustroju  $R_{cz}$  zmieni się na  $R_{cz}'$  i  $R_g$  na  $R_g'$  , zatem :  $R_{cz}' = \frac{R_k}{R_w} \cdot R_g'$  .

Ostatecznie zmiana rezystancji tensometru czynnego zmienia się według wzoru :

$$\Delta R_{cz} = \frac{R_k}{R_w} \cdot (R_g' - R_g) .$$

Wielkość  $R_g' - R_g$  czyli różnicę rezystancji oporów wzorcowych mierzy się z bardzo dużą dokładnością . Profesjonalne mostki tensometryczne są tak skonstruowane , że można mierzyć względną zmianę oporności  $\Delta R/R$  rzędu  $10^{-6}$  . Poza tym na urządzeniu ustawia się wartość stałej „k” tensometru co daje pomiar nie  $\Delta R/R$  a  $\epsilon$  w % , oczywiście nie bezpośrednio ale jako różnicę odczytu po obciążeniu  $\epsilon_k$  i przed obciążeniem  $\epsilon_0$  .

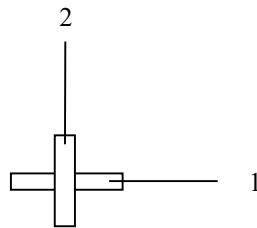
Współcześnie coraz częściej stosuje się nie metodę zerową opisaną powyżej ale metodę wychyłową . Różnica w budowie mostka polega na zastosowaniu galwanometru o wielkiej oporności wewnętrznej co najmniej kilkunastu  $M\Omega$  . W szczególności są to galwanometry cyfrowe . Do pomiarów dynamicznych stosuje się oczywiście zawsze metodę wychyłową . Wtedy zamiast galwanometru podłącza się oscyloskop lub inny rejestrator napięciowy . Pomiarów profesjonalne są skomputeryzowane . Wczytując wartości pomierzone na tensometrach dostaje się ostateczne wyniki w postaci na przykład wykresów naprężeń .

W ćwiczeniach stosuje się również inny, tzw. półmostkowy układ . Wtedy tensometr kompensacyjny również nakleja się na ustroju . W ogólności wynik takiego pomiaru daje różnicę odkształceń w punktach naklejenia tensometrów czynnego i kompensacyjnego . W szczególności taki układ stosuje się w przypadku zginania belek o przekrojach podwójnie symetrycznych . Tensometry czynny naklejony na włóknach górnych i kompensacyjny na dolnych w tym samym przekroju mierzą z osobna przeciwne sygnały . Zastosowane razem dają sygnał podwojony czyli dokładniejszy pomiar odkształcenia . Oczywiście jest też brak reakcji takiego układu w przypadku rozciągania osiowego a nie zginania .

4. Wyznaczanie płaskiego stanu naprężenia metodą tensometryczną .

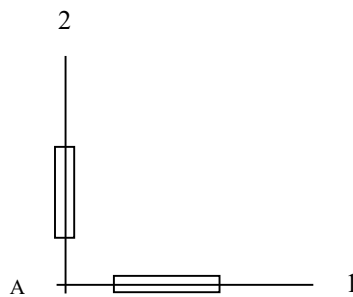
Wiadomości z punktu 3. dają podstawę do wyznaczania jednoosiowego stanu naprężenia . Jak wiadomo do obliczenia jedynej składowej naprężenia normalnego wystarcza znajomość odkształcenia liniowego w tym samym kierunku skoro obowiązuje prawo Hooke'a w postaci :  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  . W stanie jednoosiowym położenie głównego kierunku szukanego naprężenia jest na ogół znane i wystarczy nakleić jeden tensometr właśnie w tym kierunku .

Płaski stan naprężenia wyznacza się w zależności od tego czy położenie kierunków głównych jest znane czy nie . Zawsze obowiązuje zasada , że liczba tensometrów równa się liczbie składowych stanu naprężenia do wyznaczenia . W pierwszym przypadku pomiar a w szczególności opracowanie wyników jest bardzo proste . Dwa tensometry nakleja się wzdłuż dwóch znanych kierunków głównych w postaci tzw. rozety krzyżowej :



Rys. 3. Rozeta krzyżowa .

Tensometry 1 i 2 nie muszą na siebie nachodzić :

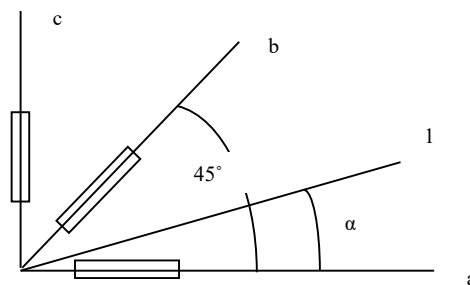


Rys. 4. Rozeta krzyżowa .

Wtedy punkt A przecięcia kierunków 1 i 2 uważa się za punkt pomiarowy . Naprężenia główne wylicza się z prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężenia , podstawiając do wzorów bezpośrednio zmierzone wyniki pomiarów  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (3)$$

W drugim przypadku , gdy nieznane są położenia kierunków głównych , do wyznaczenia stanu naprężenia w punkcie trzeba nakleić trzy tensometry . Ze względu na prostotę obróbki wyników pomiarowych najbardziej preferowany jest układ trzech tensometrów zwany rozetką prostokątną :



Rys. 4. Rozeta prostokątna .

Tensometry „a” i „c” są do siebie prostopadłe a tensometr „b” leży na dwusiecznej kąta prostego . Kierunki trzech tensometrów przecinają się w jednym punkcie przyjętym za punkt pomiarowy .

Zadanie polega teraz na wykonaniu następujących etapów . Po pierwsze wyznacza się dla punktu pomiarowego składowe odkształcenia w płaszczyźnie „ac” . Można to zrobić metodą analityczną , wykreślną lub analityczno-wykreślną . Dla omawianej rozetki najwygodniejsza jest metoda analityczno-wykreślna czyli za pomocą koła Mohr’a narysowanego na podstawie prostych obliczeń . Odkształcenie postaciowe względem kierunków „a” , „c” wyraża się wzorem :

$$\gamma_{ac} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c) . \quad (4)$$

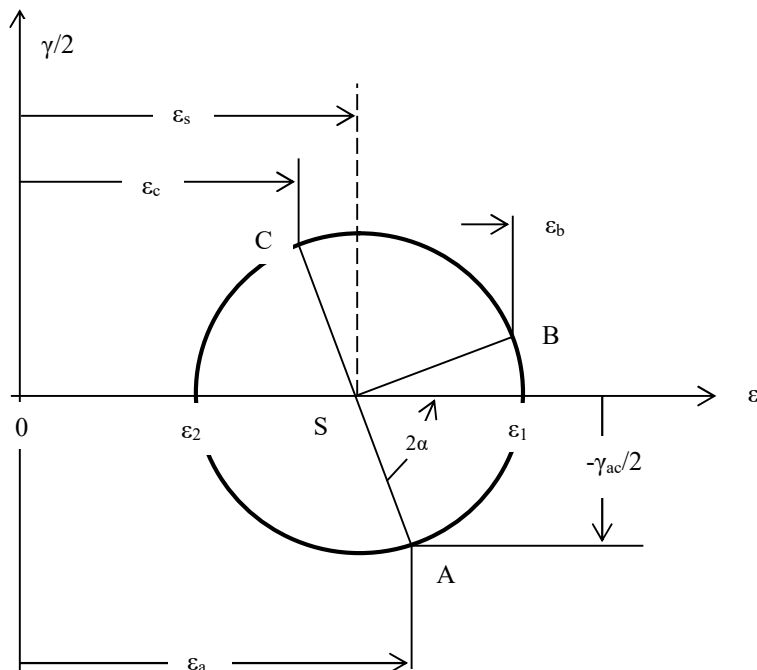
Już teraz mając stan odkształcenia na płaszczyźnie można wyliczyć składowe płaskiego stanu naprężenia :

$$\sigma_a = E(\varepsilon_a + \nu\varepsilon_c)/(1-\nu^2) , \quad \sigma_c = E(\varepsilon_c + \nu\varepsilon_a)/(1-\nu^2) \quad \text{i} \quad \tau_{ac} = G \cdot \gamma_{ac} , \quad \text{gdzie} \quad G = E/2(1+\nu) . \quad (5)$$

Niemniej jednak zaleca się narysować koło Mohr’a dla kontroli obliczeń .

Środek szukanego koła ma odciętą  $\varepsilon_s = (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$  . Teraz można nanieść punkt A o współrzędnych  $(\varepsilon_a, -\gamma_{ac}/2)$  oraz punkt C o współrzędnych  $(\varepsilon_c, \gamma_{ac}/2)$  . Punkty te powinny leżeć na wspólnej średnicy . Punkt B nanosi się w celu skontrolowania prawidłowości obliczeń . Jeśli dalsze polecenia dotyczą wyznaczenia naprężeń głównych i kierunków głównych lub maksymalnych naprężeń stycznych i położenia ich płaszczyzn , odpowiednie składowe odkształceń liczy się ze wzorów transformacyjnych albo odczytuje z precyzyjnie wykreślonego koła Mohr’a . Potem podstawia się je do wzorów prawa Hooke’a :

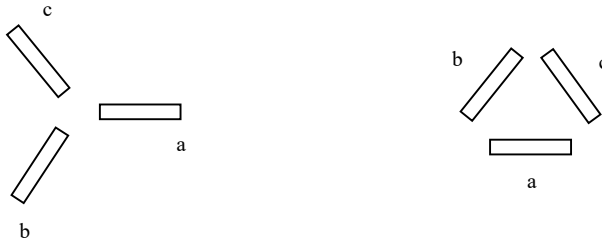
$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad \text{lub} \quad \tau_{\max} = G \cdot \gamma_{\max} = G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) . \quad (6)$$



Rys. 5. Koło Mohra dla odkształceń – pomiar rozetą prostokątną .

Na koniec nanosi się jeden z kierunków głównych na rysunku rozetki , na przykład kierunek „1” obrócony o znany już kąt  $\alpha$  od kierunku A , o zwrocie zgodnym ze zwrotem kąta  $2\alpha$  na kole Mohr’a .

Następnie omówiono skrótowo inną równie powszechną rozetkę równokątną .



Rys. 6. Rozeta równokątna .

Opis kierunków tensometrów :  $\epsilon_a = \epsilon_{0^\circ}$  ,  $\epsilon_b = \epsilon_{60^\circ}$  ,  $\epsilon_c = \epsilon_{120^\circ}$  .

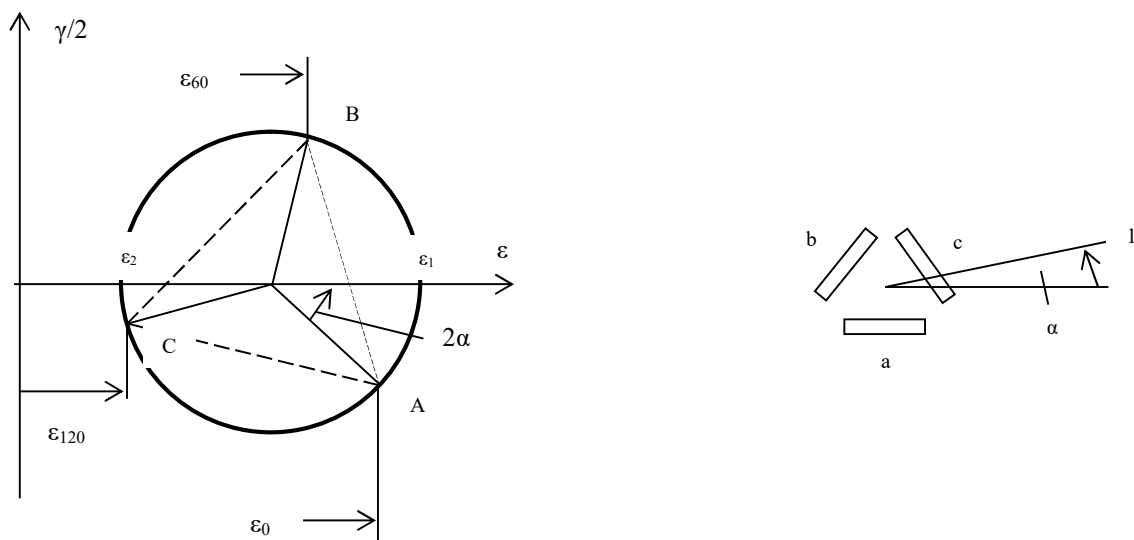
Bez wchodzenia w szczegóły , do wyznaczenia odkształceń głównych i kierunków głównych służą następujące wzory transformacyjne :

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_o + \epsilon_{60} + \epsilon_{120}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_o - \epsilon_{60})^2 + (\epsilon_{60} - \epsilon_{120})^2 + (\epsilon_{120} - \epsilon_o)^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_o + \epsilon_{60} + \epsilon_{120}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_o - \epsilon_{60})^2 + (\epsilon_{60} - \epsilon_{120})^2 + (\epsilon_{120} - \epsilon_o)^2} \quad (7)$$

$$\text{tg}2\alpha = \sqrt{3} \frac{\epsilon_{120} - \epsilon_{60}}{2\epsilon_o - (\epsilon_{60} + \epsilon_{120})} .$$

Ponieważ tensometry  $\epsilon_{0^\circ}$  ,  $\epsilon_{60^\circ}$  i  $\epsilon_{120^\circ}$  usytuowane są co  $60^\circ$  , punkty na kole Mohr'a odpowiadające tensometrom a, b i c leżą co  $120^\circ$  jak na poniższym rysunku a trójkąt ABC jest oczywiście równoboczny .



Rys. 7. Koło Mohra dla odkształceń - pomiar rozetą równokątną .