Elementy rachunku macierzowego

Przedstawione poniżej informacje stanowią krótkie przypomnienie elementów rachunku macierzowego niezbędne dla zrozumienia podstaw metody elementów skończonych. Algorytmy obliczeniowe MES wymagają niejednokrotnie szerszej znajomości rachunku macierzy.

Macierzą prostokątną $[a_{ik}]$ o wymiarach $m \times n$ nazywamy funkcję, która każdej uporządkowanej parze zmiennych naturalnych (i,k), $i = 1,2,...,m$, $k = 1,2,...,n$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą a_{ik}. Macierz zapisujemy w postaci tablicy prostokątnej mającej *m* wierszy i *n* kolumn:

$$\underset{m\times n}{\left[A\right]} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{D.1}$$

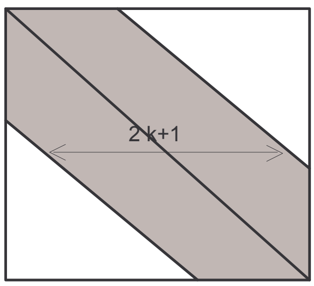
W przypadku, gdy $m = n$ macierz nazywamy kwadratową.

Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza leżącymi na głównej przekątnej (diagonali) są równe zeru $(a_{ij} = 0, i \neq j)$.

Macierz $\underset{m\times 1}{\left[A\right]}$ nazywać będziemy wektorem-kolumną i oznaczać $\{A\} = \{a_i\}$ $i = 1,2,...,m$.

Macierz $\underset{1\times n}{\left[A\right]}$ nazywać będziemy wektorem-wierszem i oznaczać $\lfloor A \rfloor = \lfloor a_i \rfloor$ $i = 1,2,...,n$.

Macierzą pasmową nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie niezerowe elementy leżą na przekątnej głównej (diagonali) i w *k* równoległych do diagonali liniach z każdej strony ($a_{jj} = 0$ jeśli $|i - j| > k$).

$[A] =$ 

Liczbę $(2k+1)$ nazywamy szerokością pasma, a liczbę $(k+1)$ – szerokością półpasma macierzy $[A]$.

Macierzą jednostkową o wymiarze *n* nazywamy macierz diagonalną o jednostkowych elementach niezerowych

$$[I]=[\delta_{ik}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{D.2}$$

gdzie δ_{ik} oznacza symbol Kroneckera: $\delta_{ik}=1$ gdy $i=k$, $\delta_{ik}=0$, gdy $i \neq k$.

Macierzą transponowaną macierzy $\underset{m\times n}{[A]}=[a_{ik}]$ nazywamy macierz $\underset{n\times m}{[A]^T}=[a_{ki}]$ powstałą przez przestawienie wierszy i kolumn. W szczególności mamy $\lfloor q \rfloor^T=\{q\}$ i $\{q\}^T=\lfloor q \rfloor$.

Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową, dla której $[A]^T=[A]$ $(a_{ik}=a_{ki})$.

Podstawowe działania na macierzach

Sumą macierzy $\underset{m\times n}{[A]}=[a_{ik}]$ i $\underset{m\times n}{[B]}=[b_{ik}]$ nazywamy macierz $\underset{m\times n}{[C]}=[a_{ik}+b_{ik}]$.

Operacja dodawania macierzy wymaga zgodności wymiarów macierzy składowych.

Iloczynem macierzy $\underset{m\times n}{[A]}=[a_{ik}]$ przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy macierz $\underset{m\times n}{[B]}=[\lambda a_{ik}]$.

Iloczynem macierzy $\underset{m\times n}{[A]}=[a_{ik}]$ przez macierz $\underset{n\times p}{[B]}=[b_{ik}]$ nazywamy macierz $\underset{m\times p}{[C]}=[c_{ik}]$ taką, że:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad \begin{matrix} i=1,2,...,m, \\ k=1,2,...,p. \end{matrix} \tag{D.3}$$

Mnożenie macierzy jest możliwe jedynie w przypadku, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.
Mnożenie macierzy nie jest przemienne $\left([A][B]\neq[B][A]\right)$.

W podręcznych obliczeniach iloczyn macierzy oblicza się często za pomocą tak zwanego schematu Falka:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & c_{ik} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$

Wybrane własności działań na macierzach

1. $[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] \cdot [B]) \cdot [C]$ (D.4)
2. $\alpha[A] \cdot [B] = (\alpha[A]) \cdot [B] = [A] \cdot (\alpha[B])$ (D.5)
3. $([A] \cdot [B])^T = [B]^T [A]^T$ (D.6)

Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $\underset{n \times n}{[A]} = [a_{ik}]$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\det[A]$, która zdefiniowana jest przez związki

1) dla $n = 1$ $\det \underset{1 \times 1}{[A]} = a_{11}$
2) dla $n = 2$ $\det \underset{2 \times 2}{[A]} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ (D.7)
3) dla $n \geq 3$ wyznacznik obliczyć można wybierając dowolny wiersz r i stosować tzw. rozwinięcie Laplace'a

$$\det[A] = a_{r1}\alpha_{r1} + a_{r2}\alpha_{r2} + \cdots + a_{rn}\alpha_{rn} = \sum_{j} a_{rj}\alpha_{rj} \qquad \text{(D.8)}$$

a_{rj} nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{rj} macierzy [A] i obliczamy wg wzoru

$$\alpha_{rj} = (-1)^{r+j} \det\left[M_{rj}\right] \qquad \text{(D.9)}$$

gdzie $[M_{rj}]$ jest podmacierzą macierzy [A] powstałą przez wykreślenie r-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy $[A]$.

W szczególności dla $n = 3$ otrzymamy wybierając $r = 1$

$$\begin{aligned} \det[A] = {} & a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + \\ & + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \end{aligned} \qquad \text{(D.10)}$$

Wyznacznik obliczyć można również stosując analogiczne rozwinięcie Laplace'a względem wybranej kolumny.

Macierz, której wyznacznik jest równy zeru nazywamy macierzą osobliwą.

Rzędem macierzy A nazywamy największy wymiar podmacierzy kwadratowej powstałej przez wykreślenie części wierszy i kolumn, dla której wyznacznik jest różny od zera. Rzędem macierzy nieosobliwej o wymiarze n jest więc n. Rząd macierzy osobliwej jest mniejszy niż jego wymiar.

Wybrane własności wyznacznika:

1. Jeżeli jakiekolwiek dwa wiersze (kolumny) są liniowo zależne (dają się przedstawić w postaci liniowej kombinacji pozostałych) to wartość wyznacznika jest równa zeru.

2. $\det[A] = \det[A]^T$.
3. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych.
4. $\det([A]\cdot[B]) = \det[A]\cdot\det[B]$.

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną nieosobliwej macierzy $\underset{n\times n}{[A]}$ nazywamy macierz $[A]^{-1}$ taką, że

$$[A]\cdot[A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I] = [\delta_{ik}].$$

Istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna macierzy nieosobliwej

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A}[\alpha_{ik}]^T,$$

gdzie a_{ik} są dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ik} macierzy [A].

Układ równań liniowych. Zagadnienie własne

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

zapisać można w postaci macierzowej

$$\underset{m\times n}{[A]}\underset{n\times 1}{\{x\}} = \underset{m\times 1}{\{b\}}$$

Układ nazywamy sprzecznym, gdy nie posiada żadnego rozwiązania, oznaczonym - gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie, albo nieoznaczonym, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Twierdzenie Kroneckera-Cappelliego uzależnia istnienie rozwiązania układu od rzędów macierzy układu

$$\underset{m\times n}{[A]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i macierzy rozszerzonej

$$\underset{m\times(n+1)}{[C]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Rzędem macierzy [A] nazywamy największy wymiar kwadratowej podmacierzy macierzy [A] mającej różny od zera wyznacznik i oznaczamy $R([A])$.

Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Cappelliego

a) układ równań jest sprzeczny, gdy $R(A) \neq R(C)$
b) układ równań jest oznaczony, gdy $R(A) = R(C) = n$
c) układ jest nieoznaczony, gdy $R(A) = R(C) < n$

W przypadku macierzy kwadratowej $(m = n)$ układ jest więc oznaczony jedynie w przypadku, gdy $\det[A] \neq 0$. Rozwiązaniem układu jest wtedy

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$$

Rozwiązywanie układów równań metodą poszukiwania macierzy odwrotnej jednak zazwyczaj nie jest stosowane. Inne, bardziej efektywne metody poszukiwania rozwiązania wymagają zwykle mniejszej liczby operacji arytmetycznych.
W przypadku jednorodnego układu *n* równań z *n* niewiadomymi

$$[A]\{x\} = \{0\}$$

istnieje zawsze rozwiązanie trywialne $\{x\} = \{0\}$.

Rozwiązania nietrywialne istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy $R([A]) < n$, a więc w przypadku, gdy $\det[A] = 0$.

Wartości własne i wektory własne

Liczbę λ i nieznany wektor $\{x\}$ nazywamy odpowiednio wartością własną i wektorem własnym macierzy $\underset{n\times n}{[A]}$, jeśli spełniają równość

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\}.$$

Wektor własny może być wyznaczony jedynie z dokładnością do mnożnika, tzn. jeśli $\{x\}$ jest wektorem własnym to $c\{x\}$ jest nim również.

Po przekształceniu równania własnego do postaci:

$$([A] - \lambda[I])\{x\} = \{0\}$$

stwierdzić można, że wartości własne λ_i są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy [A]

$$p(\lambda) = \det([A] - \lambda[I]) = \lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \beta_2\lambda^{n-2} + \ldots + \beta_n = 0$$

Numeryczne rozwiązanie zagadnienia własnego nie polega jednak na rozwiązaniu wielomianu charakterystycznego.
Stosowane są zwykle inne, przeważnie iteracyjne techniki obliczeniowe.

Forma kwadratowa. Dodatnia określoność

Wyrażenie typu

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \lfloor x \rfloor [A]\{x\},$$

gdzie [A] jest macierzą symetryczną nazywamy formą kwadratową zmiennych x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Jeśli dla dowolnego niezerowego wektora $\{x\}$ $Q > 0$ to formę kwadratową nazywamy dodatnio określoną.

Jeśli $Q < 0$ – formę nazywamy ujemnie określoną. Te same określenia stosowane są w stosunku do macierzy [A] definiującej funkcję kwadratową (dodatnia i ujemna określoność).

Uogólnioną formą kwadratową nazywamy wyrażenie typu:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \lfloor x \rfloor [A]\{x\} + \lfloor x \rfloor \{b\}$$

Ekstremum formy kwadratowej jest określone przez warunki

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots n$$

Powyższe warunki zapisane w postaci macierzowej przyjmują w przypadku symetrycznej macierzy $[A]$ postać

$$2[A]\{x\}+\{b\}=0\,.$$

Otrzymany układ równań liniowych stanowi warunek konieczny i dostateczny ekstremum formy kwadratowej $Q(\{x\})$ a w przypadku, gdy macierz [A] jest dodatnio określona stanowi warunek minimum.
Szczególne własności macierzy typowego układu równań w MES (symetria, pasmowość, dodatnia określoność) są wykorzystywane w procedurach obliczeniowych dla zwiększenia efektywności obliczeń.

PRZYKŁADY

PRZYKŁAD 1

Niech $[A]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$. Obliczmy $[A]\cdot[A]^T$.

Według schematu Falka:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5 & 11 & 17\\ 11 & 25 & 39\\ 17 & 39 & 61\end{bmatrix}\end{array}$$

czyli $[C]=[A]\cdot[A]^T=\begin{bmatrix}5 & 11 & 17\\ 11 & 25 & 39\\ 17 & 39 & 61\end{bmatrix}$.

PRZYKŁAD 2

Wykazać, że macierz sztywności elementu belki [k] jest osobliwa

$$[k]=\frac{2EJ}{l^3}\begin{bmatrix}6 & 3l & -6 & 3l\\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2\\ -6 & -3l & 6 & -3l\\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2\end{bmatrix}$$

W macierzy [k] zauważyć można liniową zależność między wierszami (i kolumnami), stąd wniosek, że wyznacznik musi być zerowy. Na przykład wiersz pierwszy jest wynikiem przemnożenia wiersza trzeciego przez –1. Wiersz pierwszy może być też otrzymany przez sumowanie wierszy drugiego i czwartego i podzielenie wyniku przez l.

PRZYKŁAD 3

Niech $[A]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Wyznaczyć $[A]^{-1}$.

Wyznaczamy najpierw wartość wyznacznika:

$$\det[A]=2\cdot(-1)^2\cdot(1\cdot1-0\cdot0)+1\cdot(-1)^3\cdot(1\cdot1-0\cdot0)+1\cdot(-1)^4\cdot(1\cdot0-1\cdot0)=2-1=1$$

$\det[A]=1$.

Oznacza to, że istnieje macierz odwrotna. Macierz dopełnień algebraicznych jest w tym przypadku równa:

$$[\alpha_{ik}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Stąd $[A]^{-1}=\dfrac{1}{\det[A]}\left[\alpha_{ik}\right]^T$

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$[A]\cdot[A]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[I].$$