TENSOMETRIA ELEKTROOPOROWA

1 Związki podstawowe

Metoda tensometrii rezystancyjnej jest bardzo prostym a zarazem dokładnym sposobem pomiaru odkształceń liniowych na powierzchni badanego ustroju. Pomiar odkształceń za pomocą tensometrów rezystancyjnych oparty jest o znane zjawisko zmiany rezystancji przewodnika na skutek jego wydłużenia. Punktem wyjścia jest powszechnie znany wzór:

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{1}$$

gdzie: R - rezystancja przewodnika, ρ - rezystancja właściwa materiału przewodnika, l - długość przewodnika, A - pole przekroju przewodnika. Podstawową zależność tensometrii łatwo uzyskać przekształcając wzór wyjściowy. W tym celu należy po pierwsze zlogarytmizować wyrażenie (1):

$$\ln R = \ln \rho + \ln l - \ln A. \tag{2}$$

Po zróżniczkowaniu otrzymuje się:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A}, \tag{3}$$

lub w przyrostach skończonych:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A}. \tag{4}$$

Jeśli symbolem ε oznaczyć odkształcenie liniowe wzdłuż przewodnika czyli tensometru w postaci pojedynczego drucika, powyższy wzór można zapisać w postaci:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon + 2\nu\varepsilon, \quad \text{gdzie podstawiono:} \quad \frac{\Delta A}{A} = -2\nu\varepsilon. \tag{5}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + (1 + 2\nu)\varepsilon. \tag{6}$$

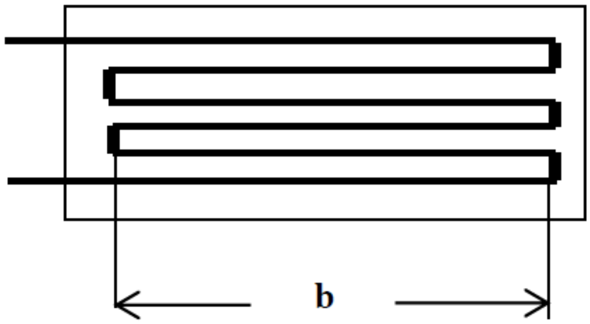
Dla większości stosowanych materiałów do wytwarzania tensometrów $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0$. Tak więc dla tensometru w postaci pojedynczego drucika otrzymuje się prostą formułę zwaną równaniem tensometrii:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon, \tag{7}$$

gdzie $k = 1 + 2\nu$ nazywa się stałą tensometryczną.

2 Budowa i klejenie tensometrów

Ponieważ dla większości stosowanych materiałów do wytwarzania tensometrów liczba Poissona zawiera się w przedziale $0.24 < \nu < 0.42$, więc $1.48 < k < 1.84$. W praktyce aby przyrost rezystancji ΔR osiągnął możliwie duża, łatwą do zmierzenia wielkość, typowy tensometr ma postać nie pojedynczego drucika a pakietu drucików. Długi przewodnik zajmuje wtedy niewielki obszar w miejscu wybranym do pomiaru odkształcenia . Na rysunku poniżej pokazano schemat typowego tensometru:



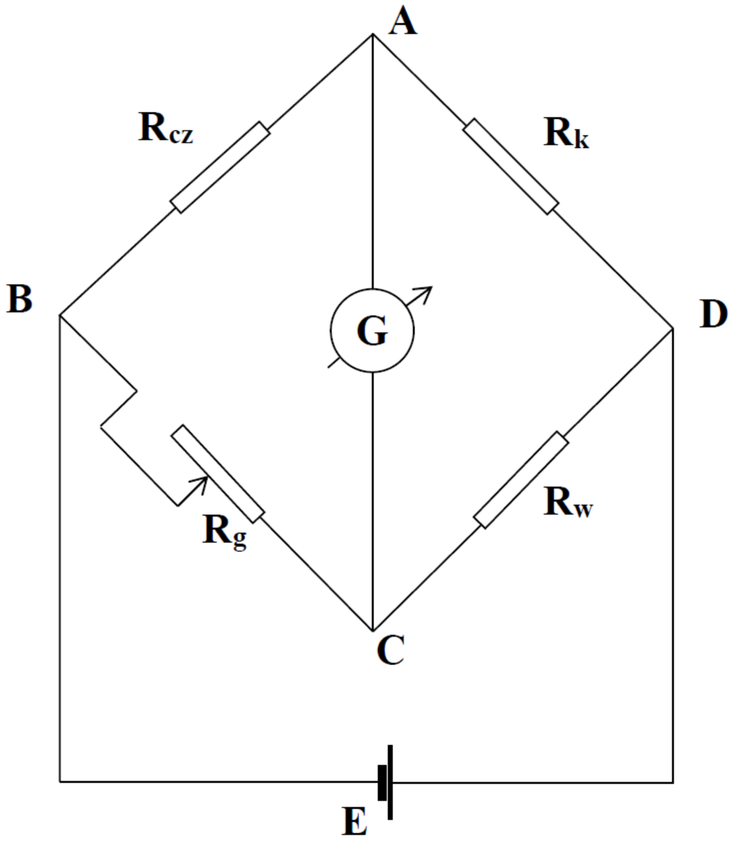
Rysunek 1: Schemat tensometru.

Wymiar „b” zwany bazą jest ważnym parametrem czujnika. Określa on wymiar (w kierunku mierzonego odkształcenia) obszaru w którym pomiar jest uśredniony. Siatki tensometrów wytwarzane w postaci siatek drukowanych (trawionych) mają bazę w przedziale od 0.5 mm - (wybitnie lokalne pomiary) do 120 mm (pomiary na dużych konstrukcjach np. budowlanych). Tensometry powszechnie stosowane mają bazę 5 - 10 mm. Oczywiście siatki tensometryczne wklejone są między dwie podkładki zabezpieczające, tradycyjnie papierowe o grubości 0.02 - 0.05 mm a współcześnie z folii epoksydowej o grubości 3 - 10 μm. Dla tak skonstruowanego w formie siatki czujnika stała „k” zmienia się w granicach 1.8 - 2.6. Ze względu na utrzymanie w dużym zakresie temperatur $(-50° - 150°)$ liniowości prawa tensometrii stosuje się na materiał siatki stop miedziowo niklowy w proporcjach 60% - 40% zwany konstantanem. Typ tensometru określa jego wymiary, rezystancję i stałą tensometryczną „k”. Do naklejenia tensometrów na powierzchni ustroju w wybranym punkcie i ustalonym kierunku służą specjalne kleje jedno lub dwuskładnikowe. Kleje muszą spełniać szereg warunków a przede wszystkim dawać cienką warstwę co eliminuje efekt odkształcalności samego spoiwa i trwałość połączenia w możliwie długim okresie czasu. Oczywiście powierzchnia materiału przed klejeniem musi być starannie przygotowana: oczyszczona chemicznie (głównie odtłuszczona), wyrównana ale najlepiej lekko szorstka. Zapewni to najlepsze przyjęcie kleju.

Tensometr gotowy do pomiarów musi mieć dwa wyprowadzenia: jedno masowe i drugie koniecznie odizolowane od powierzchni ustroju tzw. czynne. Po naklejeniu, wyschnięciu i wstępnym pomiarze sprawdzającym zabezpiecza się czujnik przed uszkodzeniem mechanicznym zalewając go silikonem.

3 Mostek tensometryczny i pomiar pojedynczym tensometrem

Powszechnym w laboratorium fizycznym przyrządem do pomiaru oporności jest mostek Wheatstona pokazany na rysunku poniżej:



Rysunek 2: Mostek tensometryczny Wheatstona.

Element oznaczony symbolem R_{cz} to właśnie podłączony do mostka tensometr mierzący odkształcenie na powierzchni ustroju – tensometr czynny . Również poza urządzeniem mostka znajduje się element oznaczony przez R_k – tzw. tensometr kompensacyjny identyczny z tensometrem czynnym . Zazwyczaj nakleja się go na kawałku materiału takiego samego jak materiał ustroju badanego i umieszcza w jego okolicy . Funkcją tensometru kompensacyjnego jest eliminacja wpływu na odkształcenie czujnika innego niż obciążenie założone , przede wszystkim wpływu zmian temperatury . Omawiany schemat jest nie jedynym ale najbardziej powszechnym sposobem wykorzystania mostka do pomiaru odkształcenia.

Powszechnie wyróżnia się dwie metody wykorzystania tego samego mostka . W dalszym ciągu zaprezentowano tzw. metodę zerową . Polega ona na równoważeniu mostka przy zmieniającej się na skutek odkształcenia rezystancji R_{cz} za pomocą potencjometru Rg czyli wyzerowaniu prądu I_{AC} płynącego przez galwanometr G. Wtedy przed obciążeniem ustroju dla prądów płynących w poszczególnych gałęziach spełnione są warunki $I_{AB} = I_{AD}$ oraz $I_{BC} = I_{DC}$. Uwzględniając to można zapisać warunek równości potencjałów $U_A = U_C$, czyli :

$$\begin{aligned} I_{AB} \cdot R_{cz} &= I_{BC} \cdot R_g, \quad \text{oraz} \\ I_{AB} \cdot R_k &= I_{BC} \cdot R_w. \end{aligned} \tag{8}$$

skąd wynika proporcja $\frac{R_{cz}}{R_k} = \frac{R_g}{R_w}$, a następnie wzór: $R_{cz} = \frac{R_k}{R_w} \cdot R_g$.

Po obciążeniu ustroju R_{cz} zmieni się na R'_{cz} i R_g na R_g' , zatem : $R'_{cz} = \frac{R_k}{R_w} \cdot R'_g$. Ostatecznie zmiana rezystancji tensometru czynnego zmienia się według wzoru :

$$\Delta R_{cz} = \frac{R_k}{R_w} \cdot (R'_g - R_g). \tag{9}$$

Wielkość $R'_g - R_g$ czyli różnicę rezystancji oporów wzorcowych mierzy się z bardzo dużą dokładnością . Profesjonalne mostki tensometryczne są tak skonstruowane , że można mierzyć względną zmianę oporności $\Delta R/R$ rzędu 10^{-6} . Poza tym na urządzeniu ustawia się wartość stałej „k" tensometru, co daje pomiar nie $\Delta R/R$ a ε w %, oczywiście nie bezpośrednio ale jako różnicę odczytu po obciążeniu ε_k i przed obciążeniem ε_0.

Współcześnie coraz częściej stosuje się nie metodę zerową opisaną powyżej, ale metodę wychyłową. Różnica w budowie mostka polega na zastosowaniu galwanometru o wielkiej oporności wewnętrznej co najmniej kilkunastu MΩ. W szczególności są to galwanometry cyfrowe. Do pomiarów dynamicznych stosuje się oczywiście zawsze metodę wychyłową. Wtedy zamiast galwanometru podłącza się oscyloskop lub inny rejestrator napięciowy.

Pomiary profesjonalne są skomputeryzowane. Wczytując wartości pomierzone na tensometrach dostaje się ostateczne wyniki w postaci na przykład wykresów naprężeń.

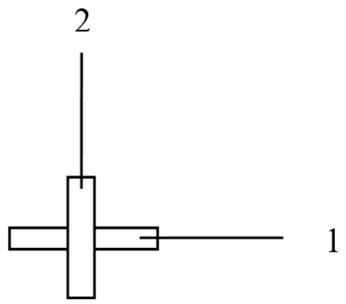
W ćwiczeniach stosuje się również inny, tzw. półmostkowy układ. Wtedy tensometr kompensacyjny również nakleja się na ustroju. W ogólności wynik takiego pomiaru daje różnicę odkształceń w punktach naklejenia tensometrów czynnego i kompensacyjnego.

W szczególności taki układ stosuje się w przypadku zginania belek o przekrojach podwójnie symetrycznych. Tensometry czynny naklejony na włóknach górnych i kompensacyjny na dolnych w tym samym przekroju mierzą z osobna przeciwne sygnały. Zastosowane razem dają sygnał podwojony czyli dokładniejszy pomiar odkształcenia. Oczywisty jest też brak reakcji takiego układu w przypadku rozciągania osiowego a nie zginania.

4 Wyznaczanie płaskiego stanu naprężenia metodą tensometryczną

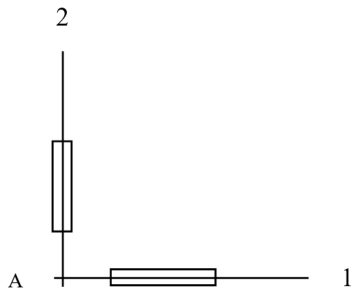
Wiadomości z punktu 3. dają podstawę do wyznaczania jednoosiowego stanu naprężenia. Jak wiadomo do obliczenia jedynej składowej naprężenia normalnego wystarcza znajomość odkształcenia liniowego w tym samym kierunku skoro obowiązuje prawo Hooke'a w postaci: $\sigma = E \cdot \varepsilon$. W stanie jednoosiowym położenie głównego kierunku szukanego naprężenia jest na ogół znane i wystarczy nakleić jeden tensometr właśnie w tym kierunku.

Płaski stan naprężenia wyznacza się w zależności od tego czy położenie kierunków głównych jest znane czy nie. Zawsze obowiązuje zasada, że liczba tensometrów równa się liczbie składowych stanu naprężenia do wyznaczenia. W pierwszym przypadku pomiar, a w szczególności opracowanie wyników jest bardzo proste. Dwa tensometry nakleja się wzdłuż dwóch znanych kierunków głównych w postaci tzw. rozety krzyżowej:



Rysunek 3: Rozeta krzyżowa.

Tensometry 1 i 2 nie muszą na siebie nachodzić:

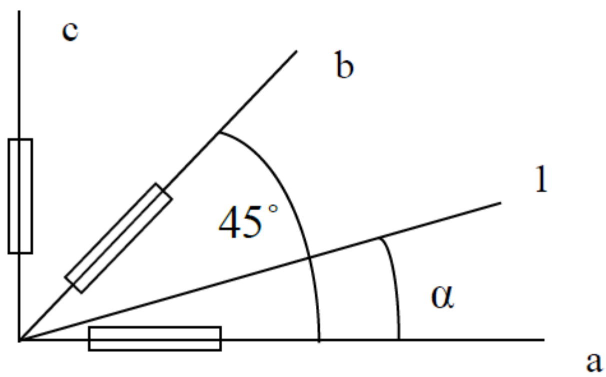


Rysunek 4: Rozeta krzyżowa.

Wtedy punkt A przecięcia kierunków 1 i 2 uważa się za punkt pomiarowy. Naprężenia główne wylicza się z prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężenia, podstawiając do wzorów bezpośrednio zmierzone wyniki pomiarów ε_1 i ε_2:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1). \tag{10}$$

W drugim przypadku, gdy nieznane są położenia kierunków głównych, do wyznaczenia stanu naprężenia w punkcie trzeba nakleić trzy tensometry. Ze względu na prostotę obróbki wyników pomiarowych najbardziej preferowany jest układ trzech tensometrów zwany rozetka prostokątną:



Rysunek 5: Rozeta prostokątna.

Tensometry „a" i „c" są do siebie prostopadłe a tensometr „b" leży na dwusiecznej kąta prostego. Kierunki trzech tensometrów przecinają się w jednym punkcie przyjętym za punkt pomiarowy.

Zadanie polega teraz na wykonaniu następujących etapów. Po pierwsze wyznacza się dla punktu pomiarowego składowe odkształcenia w płaszczyźnie „ac”. Można to zrobić metodą analityczną, wykreślną lub analityczno-wykreślną. Dla omawianej rozetki najwygodniejsza jest metoda analityczno-wykreślna czyli za pomocą koła Mohr'a narysowanego na podstawie prostych obliczeń. Odkształcenie postaciowe względem kierunków „a”, „c” wyraża się wzorem:

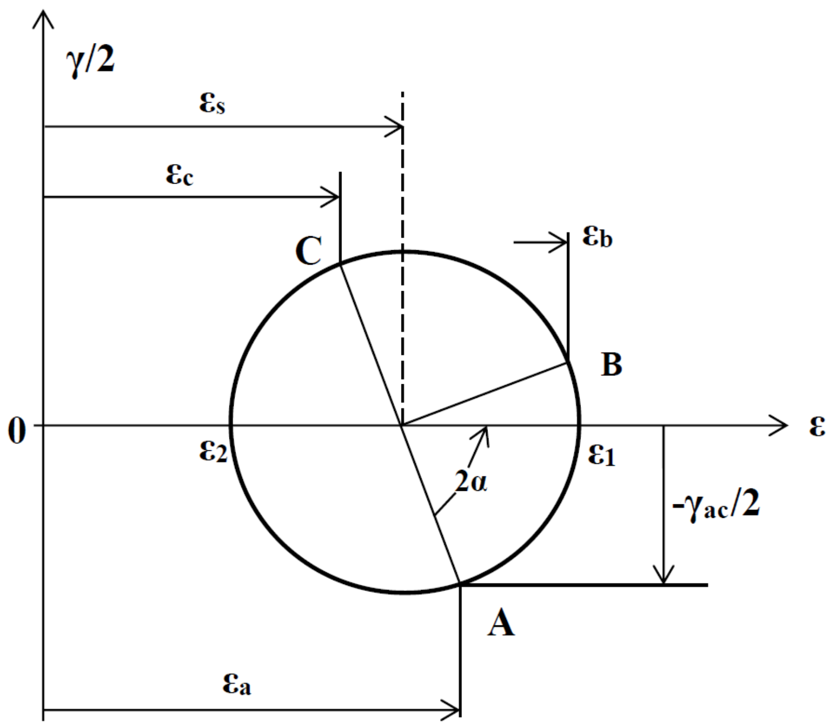
$$\gamma_{ac} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c). \tag{11}$$

Już teraz mając stan odkształcenia na płaszczyźnie można wyliczyć składowe płaskiego stanu naprężenia:

$$\sigma_a = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_a + \nu\varepsilon_c), \quad \sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_c + \nu\varepsilon_a) \quad \text{i} \quad \tau_{ac} = G \cdot \gamma_{ac}, \\ \text{gdzie } G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{12}$$

Niemniej jednak zaleca się narysować koło Mohr'a dla kontroli obliczeń. Środek szukanego koła ma odciętą $\varepsilon_s = (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$. Teraz można nanieść punkt A o współrzędnych $(\varepsilon_a, -\gamma_{ac}/2)$ oraz punkt C o współrzędnych $(\varepsilon_c, \gamma_{ac}/2)$. Punkty te powinny leżeć na wspólnej średnicy. Punkt B nanosi się w celu skontrolowania prawidłowości obliczeń. Jeśli dalsze polecenia dotyczą wyznaczenia naprężeń głównych i kierunków głównych lub maksymalnych naprężeń stycznych i położenia ich płaszczyzn, odpowiednie składowe odkształceń liczy się ze wzorów transformacyjnych albo odczytuje z precyzyjnie wykreślonego koła Mohr'a. Potem podstawia się je do wzorów prawa Hooke'a:

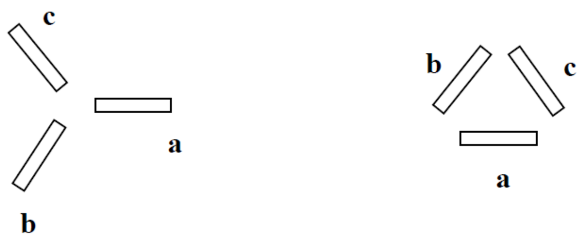
$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1) \quad \text{lub} \quad \tau_{max} = G\cdot\gamma_{max} = G(\varepsilon_1-\varepsilon_2). \tag{13}$$



Rysunek 6: Koło Mohra dla odkształceń - pomiar rozetą prostokątną.

Na koniec nanosi się jeden z kierunków głównych na rysunku rozetki, na przykład kierunek „1” obrócony o znany już kąt α od kierunku A, o zwrocie zgodnym ze zwrotem kąta 2α na kole Mohr'a.

Następnie omówiono skrótowo inną równie powszechną rozetkę równokątną.



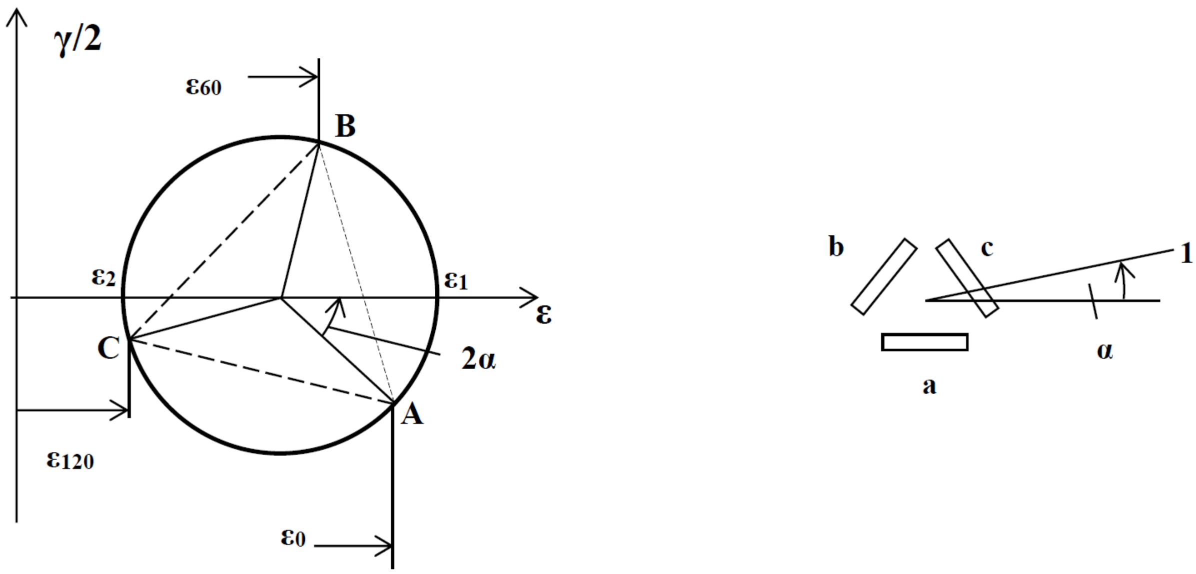
Rysunek 7: Rozeta równokątna.

Opis kierunków tensometrów: $\varepsilon_a = \varepsilon_{0^\circ},\ \varepsilon_b = \varepsilon_{60^\circ},\ \varepsilon_c = \varepsilon_{120^\circ}$.

Bez wchodzenia w szczegóły, do wyznaczenia odkształceń głównych i kierunków głównych służą następujące wzory transformacyjne:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{0^\circ} + \varepsilon_{60^\circ} + \varepsilon_{120^\circ}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ})^2 + (\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})^2 + (\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{0^\circ})^2}, \\
\varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{0^\circ} + \varepsilon_{60^\circ} + \varepsilon_{120^\circ}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{60^\circ})^2 + (\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})^2 + (\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{0^\circ})^2}, \qquad (14) \\
tg2\alpha &= \sqrt{3}\frac{\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{60^\circ}}{2\varepsilon_{0^\circ} - (\varepsilon_{60^\circ} + \varepsilon_{120^\circ})}.
\end{aligned}
$$

Ponieważ tensometry ε_{0°, ε_{60° i ε_{120° usytuowane są co 60° , punkty na kole Mohr'a odpowiadające tensometrom a, b i c leżą co 120° jak na poniższym rysunku, a trójkąt ABC jest oczywiście równoboczny.



Rysunek 8: Koło Mohra dla odkształceń - pomiar rozetą równokątną.