

# POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział  
Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa



## ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Piotr Marek

**Naprężenia własne w statycznych  
i quasistatycznych zagadnieniach  
sprężysto-plastycznego kontaktu**

WARSZAWA

1995

**POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
WYDZIAŁ MECHANICZNY ENERGETYKI I LOTNICTWA**

mgr inż. Piotr MAREK

**NAPRĘŻENIA WŁASNE W STATYCZNYCH  
I QUASISTATYCZNYCH ZAGADNIENIACH  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO KONTAKTU**

ROZPRAWA DOKTORSKA

promotor: prof. dr hab. inż. Marek Bijak-Żochowski

**Warszawa 1995**

<b>Spis treści</b> .....	2
<b>Rozdział 1</b>	
Wprowadzenie.....	4
1.1. Znaczenie naprężeń własnych w wytrzymałości elementów maszyn; sposoby ich wyznaczania i pomiaru.....	4
1.1.1. Charakterystyka i klasyfikacja naprężeń własnych.....	4
1.1.2. Wpływ naprężeń własnych na wytrzymałość ustrojów.....	5
1.1.3. Metody badania naprężeń własnych.....	8
1.2. Naprężenia własne w zadaniach kontaktu: przegląd wyników dotychczasowych rozwiązań i metod analizy.....	9
1.3. Cel pracy.....	21
<b>Rozdział 2</b>	
Metoda elementów skończonych w zastosowaniu do analizy konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym.....	23
2.1. Podstawowe związki w MES.....	23
2.2. Sformułowanie związków konstytutywnych dla modelu sprężysto-plastycznego.....	25
2.2.1. Podstawowe związki teorii plastyczności.....	25
2.2.2. Sformułowanie macierzowe związków między naprężeniami a odkształceniami w zakresie sprężysto-plastycznym.....	29
<b>Rozdział 3</b>	
Analiza problemów kontaktu.za pomocą metody elementów skończonych.....	32
3.1. Sformułowanie zadania kontaktu.....	32
3.2. Sposoby rozwiązywania zadań kontaktu.....	37
3.3. Modelowanie tarcia.....	40

## **Rozdział 4**

Zadanie dwuwymiarowe kontaktu sprężysto-plastycznego w ujęciu MES. Algorytm obliczeniowy i analiza jego dokładności.....	43
4.1. Model kontaktu zbudowany dla zadania dwuwymiarowego.....	43
4.2. Element kontaktu.....	47
4.3. Algorytm dwuwymiarowego zadania sprężysto-plastycznego kontaktu z tarciami.....	48
4.4. Testy opracowanych algorytmów.....	50
4.4.1. Kontakt sztywnego stempla ze sprężystym podłożem.....	51
4.4.2. Kontakt sprężystego stempla ze sprężystym podłożem z uwzględnieniem tarcia.....	53
4.4.3. Osiosymetryczny kontakt wałka z piastą.....	59
4.4.4. Kulka wciskana w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną.....	63
4.4.5. Podsumowanie wyników przykładów testowych.....	65

## **Rozdział 5**

Uzyskane rozwiązania zagadnień dwuwymiarowych sprężysto-plastycznego kontaktu.....	66
5.1. Wciskanie stempla w półpłaszczyznę. Rozwój stref plastycznych i naprężeń własnych.....	66
5.1.1. Zakres przeprowadzonych badań.....	66
5.1.2. Analiza wyników badań.....	67
5.1.3. Dyskusja wyników i wnioski.....	73
5.2. Toczenie sprężystego walca po sprężysto-plastycznej półprzestrzeni.....	75
5.2.1. Budowa modelu dwuwymiarowego kontaktu walca z półprzestrzenią.....	76
5.2.2. Omówienie uzyskanych wyników.....	81

## **Rozdział 6**

Naprężenia własne w trójwymiarowym zadaniu kontaktu szyny z kołem.....	111
6.1. Uwagi wstępne.....	111
6.2. Algorytm obliczeniowy MES problemów trójwymiarowych kontaktu sprężysto-plastycznego.....	115
6.3. Model sprężysto-plastycznego kontaktu szyny z kołem.....	119
6.4. Wyniki analizy i ich dyskusja.....	122

## **Rozdział 7**

Podsumowanie i wnioski.....	148
<b>Spis literatury</b> .....	151

# Rozdział 1

## Wprowadzenie.

### 1.1. Znaczenie naprężeń własnych w wytrzymałości elementów maszyn; sposoby ich wyznaczania i pomiaru.

Isotnym czynnikiem decydującym o własnościach wytrzymałościowych i eksploatacyjnych elementów konstrukcyjnych są naprężenia własne. Są one pewnym stanem sił wewnętrznych panujących w obiekcie wolnym od działania czynników zewnętrznych.

Istnieje szereg przyczyn powstawania naprężeń własnych. Pojawiają się one w wyniku niekontrolowanych procesów takich jak np. spawanie, powstają podczas obróbki mechanicznej, cieplnej lub cieplno-chemicznej danego elementu. Dodając się z innymi naprężeniami mogą pogarszać stan obciążenia konstrukcji, mogą także być wprowadzane celowo dla poprawy własności wytrzymałościowych (np. nagniatanie powierzchniowe, kulowanie) lub zwiększenia nośności całej konstrukcji.

#### 1.1.1. Charakterystyka i klasyfikacja naprężeń własnych.

Z punktu widzenia mechaniki, naprężenia własne zdefiniować można jako samorzównoważone stany naprężenia, które występują w konstrukcjach bądź pewnych ich obszarach, nie poddanych aktualnie działaniu zewnętrznemu, a więc działaniu sił, temperatury, czynników fizykochemicznych itp. [7].

Istnieje kilka sposobów klasyfikacji naprężeń własnych w zależności od takich czynników jak np. obszar ich działania lub przyczyny powstania.

Biorąc za kryterium klasyfikacji naprężeń własnych obszar ich działania, możemy wyróżnić:

- naprężenia pierwszego rodzaju, które pochodzą od układu sił wewnętrznych równoważących się w objętościach porównywalnych co do wielkości z wymiarami zewnętrznymi ciała,
- naprężenia drugiego rodzaju, które określają siły równoważące się w elementach objętościowych o wymiarach rzędu kilku ziaren krystalicznych,
- naprężenia trzeciego rodzaju, które są związane z oddziaływaniami występującymi w sieci krystalicznej.

Naprężenia drugiego i trzeciego rodzaju mają odmienny charakter od naprężeń pierwszego rodzaju, a do ich opisu nie można używać modelu ciała jako continuum. Nie podlegają one zasadom sumowania z innymi naprężeniami, a ich istnienie może wynikać z innych przyczyn. Z tego powodu dzieli się często naprężenia własne na:

- makronaprężenia,
- mikronaprężenia.

Innym ważnym podziałem naprężeń własnych jest ich podział ze względu na przyczynę powstania. Możemy tu wyróżnić:

- naprężenia montażowe,
- naprężenia wywołane odkształceniami plastycznymi pewnych obszarów ustroju,
- naprężenia spawalnicze,
- naprężenia odlewnicze,
- naprężenia obróbcze (zgniot materiału podczas obróbki mechanicznej),
- naprężenia hartownicze (zmiany objętościowe wywołane obróbką cieplną),
- naprężenia spowodowane obróbką cieplno-chemiczną (azotowanie, nawęglanie, itp.).

### **1.1.2. Wpływ naprężeń własnych na wytrzymałość ustrojów.**

Pojawiające się w elemencie konstrukcyjnym naprężenia własne mają wpływ na jego wytrzymałość statyczną i dynamiczną. Mogą one powodować zmiany geometrii elementu, wpływać na jego stateczność i prowadzić do pojawienia się na jego powierzchni pęknięć, a także zwiększać prędkość korozji.

W zależności od budowy wewnętrznej, stanu naprężenia i temperatury dany materiał może, przy pewnym obciążeniu, pękać w sposób kruchy lub wykazywać odkształcenia plastyczne. Materiały konstrukcyjne, w większości przypadków, odkształcają się plastycznie, gdy naprężenie styczne w płaszczyznach zgodnych z kierunkiem osi kryształów osiąga dostatecznie dużą wartość, by spowodować poślizgi w tych płaszczyznach. Zniszczenie ustroju może nastąpić w dwojaki sposób:

- w wyniku ścięcia wzdłuż płaszczyzny poślizgu (zniszczenie poślizgowe),
- w postaci pęknięcia kruchego (zniszczenie rozdzielcze), gdy jedna ze składowych normalnych stanu naprężenia jest większa od siły kohezji między cząsteczkami materiału.

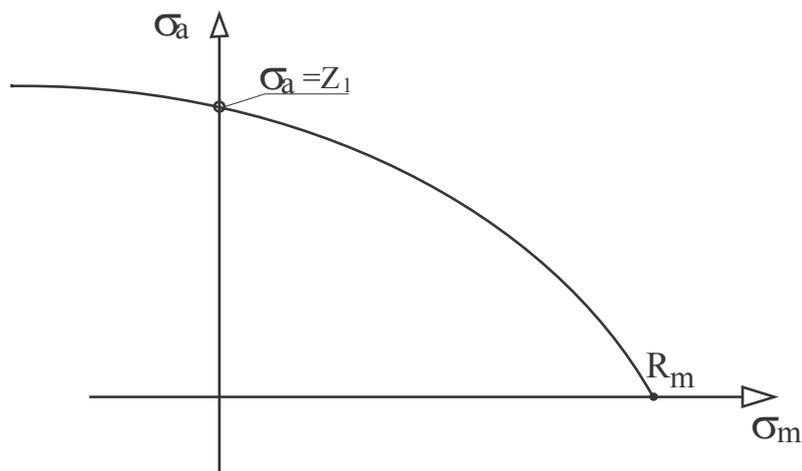
Hipoteza Mohra, stosowana głównie dla materiałów kruchych, wskazuje jako graniczne, niszczące wartości maksymalnych naprężeń stycznych, punkty leżące na obwiedniach zewnętrznych kół Mohra, odpowiadających stanom naprężeń powodujących zniszczenie ustroju. Jeśli wewnątrz ustroju panuje pewien stan naprężeń własnych, to zależnie od znaku tych naprężeń, złożenie go ze stanem naprężeń od sił zewnętrznych, może zwiększyć lub zmniejszyć niebezpieczeństwo zniszczenia. W konsekwencji tego można poprawić lub pogorszyć sytuację wytrzymałościową w elemencie konstrukcyjnym wywołując odpowiedni stan naprężeń własnych w materiale.

W materiałach sprężysto-plastycznych, naprężenia własne, w zależności od ich rozkładu i sposobu pracy ustroju, mogą przyspieszać lub opóźniać pojawienie się pierwszych odkształceń plastycznych, nie mając jednak wpływu na plastyczne zniszczenie. Mogą one też istotnie zmieniać przebieg rozwoju stref plastycznych.

Stan naprężeń własnych może wpływać wyraźnie na odkształcenia konstrukcji. Przykładem tego może być fakt, że naprężenia własne wprowadzone w ustrój podczas jego pierwszego kształtowania (obróbki plastycznej) mogą wywołać niekorzystne zjawiska podczas dalszej obróbki wiórowej. Usuwanie warstw materiału prowadzi do zakłóceń stanu równowagi naprężeń własnych i objawia się znacznym odkształceniem obrabianej części prowadząc czasem do zniszczenia elementu [21].

W przypadku obciążeń wysokocyklowych naprężenia własne wpływają istotnie na wytrzymałość zmęczeniową. Przedstawiony na rys.1.1 wykres Haigha, pokazujący typową zależność między średnim naprężeniem cyklu obciążenia  $\sigma_m$  a maksymalną wartością amplitudy naprężeń w cyklu  $\sigma_a$  odpowiadającą nieograniczonej trwałości zmęczeniowej, wskazuje, że im większe są naprężenia średnie (przyjmując, że naprężenia ściskające mają znak minus), tym mniejsza jest odporność na zmęczenie (mniejsze amplitudy określają trwałą wytrzymałość zmęczeniową). Z tego względu nałożenie dodatniego naprężenia  $\sigma_m$  (rozciąganie) na zewnętrzny cykl obciążeń zmniejsza wartość  $\sigma_a$  odpowiadającą nieograniczonej trwałości, podczas gdy nałożenie ujemnego naprężenia zwiększa tę wartość.

Wprowadzając zatem w warstwy powierzchniowe elementu odpowiedni stan naprężeń własnych (na przykład ściskanie) możemy w sposób efektywny wpływać na proces zmęczenia ustroju przedłużając żywotność elementu.



Rys.1.1. Wykres Haigha.

W przypadku obciążeń cyklicznych wychodzących poza zakres sprężysty możemy mieć do czynienia z:

- 1) redystrybucją sił wewnątrz konstrukcji, która może wytworzyć stan naprężeń własnych będący w równowadze ze zwiększonymi obciążeniami i w dalszym ciągu trwania cyklu, zapewnić czysto sprężystą pracę elementu (następuje proces adaptacji),
- 2) pojawianiem się w kolejnych cyklach wciąż nowych odkształceń plastycznych, a wtedy:
  - a) gdy odkształcenia plastyczne zmieniają znak, a przemieszczenia pozostają skończone, to po pewnej liczbie cykli nastąpi zniszczenie na skutek zmęczenia niskocyklowego,
  - b) gdy odkształcenia są jednego znaku i powodują pogłębianie się przemieszczeń, prowadzi to konstrukcję do zniszczenia w procesie postępującej deformacji plastycznej.

W przypadku adaptacji elementu do programu obciążenia redystrybucja naprężeń własnych stanowi istotę tego procesu.

Naprężenia własne w nieznacznym sposób zmieniają odporność ustroju na jednorazowe obciążenia dynamiczne o dużej prędkości narastania.

Podsumowując powyższe rozważania należy stwierdzić, że naprężenia własne mają w wielu przypadkach istotny wpływ na pracę przy obciążeniach statycznych, a zawsze na trwałość zmęczeniową ustroju. Decydują one często o prędkości propagacji pęknięcia: jeśli szczelina występuje w obszarze naprężeń ściskających jej rozwój zostaje ograniczony, albo całkowicie zakończony, rozciąganie natomiast wywołuje zasadnicze przyspieszenie tego rozwoju.

Wprowadzając naprężenia własne w sposób świadomy, celowo, możemy powodować bardziej racjonalną pracę konstrukcji. Jednak przypadkowy, niezamierzony rozkład naprężeń własnych, może spowodować obniżenie trwałości elementu, nadmierne odkształcenia, a czasem zniszczenie konstrukcji.

### **1.1.3. Metody badania naprężeń własnych.**

Zagadnienie pomiaru naprężeń własnych sprowadza się do określenia w dowolnym punkcie nieobciążonego ustroju lub elementu wszystkich składowych tensora naprężeń. W większości metod naprężenia własne określone są przez pomiar odkształceń (wyjątki stanowią np. metody magnetyczne i ultradźwiękowe), co jest powodem wielu ograniczeń i błędów [7]. Warto zaznaczyć, że nie ma jednej uniwersalnej metody, która pozwoliłaby wyznaczyć wszystkie składowe tensora naprężeń własnych wewnątrz obszaru badanego ciała bez dodatkowych informacji o sposobie rozkładu tych naprężeń.

Metody wyznaczania naprężeń własnych można klasyfikować w różny sposób, a więc z punktu widzenia rodzaju wyznaczanych naprężeń, z punktu widzenia miejsca pomiaru, ze względu na sposób dokonywania pomiaru, ze względu na charakter metody, ze względu na kształt obiektu. Jednak najbardziej funkcjonalnym jest podział ze względu na stopień wprowadzonego zniszczenia i wyróżnić tu możemy:

- metody niszczące, które prowadzą do całkowitego zniszczenia konstrukcji w trakcie pomiaru,
- metody półniszczące, które naruszają strukturę materiału jednak po ewentualnym dokonaniu naprawy ustrój może dalej pracować,
- metody nieniszczące, które nie naruszają struktury materiału lub naruszają ją tylko w bardzo nieznacznym stopniu.

Metody niszczące polegają zasadniczo na pomiarze odkształceń mających miejsce po "wyzwoleniu" naprężeń własnych poprzez podział badanego obiektu na mniejsze elementy (metoda Sachsa, metoda Stäbleina [97], metody trepanacji [6,90] ), pozwalają wyznaczyć stan naprężeń w całym badanym obiekcie.

Metody półniszczące bazują na pomiarze odkształceń na powierzchni obiektu w otoczeniu lokalnego odprężenia (metoda wiercenia otworu [68], metoda nacinania przykrawędziowego [81] itp.) i przy ich pomocy można wyznaczyć składowe stanu naprężenia w niewielkim obszarze, w okolicy powierzchni.

Metody nieniszczące polegają zwykle na pomiarze zmian fizycznych materiału wywołanych istnieniem naprężeń własnych (metoda promieni Roentgena,

metoda dyfrakcji neutronowej [106], metoda magnetyczna [1], metoda ultradźwiękowa) bądź też wykorzystują zależności między tak czy inaczej określoną twardością materiału, a stanem naprężeń własnych (metody penetratora [7,103,112]).

Spośród wymienionych metod, najbardziej pełnych i najdokładniejszych informacji dostarczają badaczom metody niszczące. Jednak szereg założeń upraszczających, które się wprowadza by uzyskać (obliczyć) z pomiaru odkształceń wartości naprężeń, może istotnie wpływać na ich dokładność. Innym źródłem błędów tych metod może być niewłaściwy sposób przeprowadzenia obróbki odprężającej (podziału ustroju na części), podczas której często dochodzi do wprowadzenia w materiał zgniotu i związanych z nim dodatkowych naprężeń własnych. Dużą wadą jest tu zniszczenie badanego ustroju co nie zawsze można dopuścić.

Metody półniszczące z racji swojego charakteru wiążą się ze znacznym ograniczeniem zakresu stosowania. Mogą one służyć tylko do określania pewnych składowych stanu naprężenia na powierzchni ustroju, bądź ich rozkładu na stosunkowo małej głębokości. Metody te wymagają stosowania bardzo czułych przyrządów pomiarowych. Zaletami są tu z kolei możliwość oceny naprężeń na małym obszarze i brak ograniczeń co do kształtu badanego elementu.

Metody nieniszczące, wykorzystujące pomiar odkształceń (np. metoda promieni Roentgena) poddają analizie bardzo niewielki obszar ustroju dając możliwość oceny stanu naprężeń w punkcie obszaru traktowanego jako continuum, jednak nie zawsze można odnieść wyniki pomiaru do stanu makro.

Metody nieniszczące wykorzystujące zmianę własności fizycznych materiału (metoda magnetyczna, ultradźwiękowa) mają charakter raczej jakościowy i są wciąż na etapie badań i udoskonaleń.

## **1.2 Naprężenia własne w zadaniach kontaktu: przegląd wyników dotychczasowych rozwiązań i metod analizy.**

Wśród zadań kontaktu możemy wyróżnić zasadniczo:

- zadania kontaktu konformistycznego, gdy powierzchnie styku obu ciał są do siebie dopasowane (np. kontakt sworznia z uchem),
- zadania kontaktu niekonformistycznego, gdy ciała stykają się w stanie wyjściowym punktowo (np. kulka z płaskim podłożem) lub wzdłuż linii (np. walce o różnych promieniach).

Zadania kontaktu obejmują kilka podstawowych grup zagadnień: problemy kontaktu normalnego, kontaktu z siłą poprzeczną i poślizgiem, kontaktu tocznego. W każdej z tych grup zagadnień w zależności od cech zadania ( m.in. sztywności ciał, wielkości odkształceń, rodzaju materiału) poszczególne obiekty biorące udział w kontakcie traktowane mogą być jako sztywne bryły, bryły sprężyste, sprężysto-plastyczne, czy wreszcie uwzględnione mogą być takie zjawiska jak np. lepkosprężystość, czy lepkoplastyczność materiału.

Ze względu na sposób rozwiązania można wskazać: zadania rozwiązywane analitycznie, doświadczalnie i zadania analizowane numeryczne.

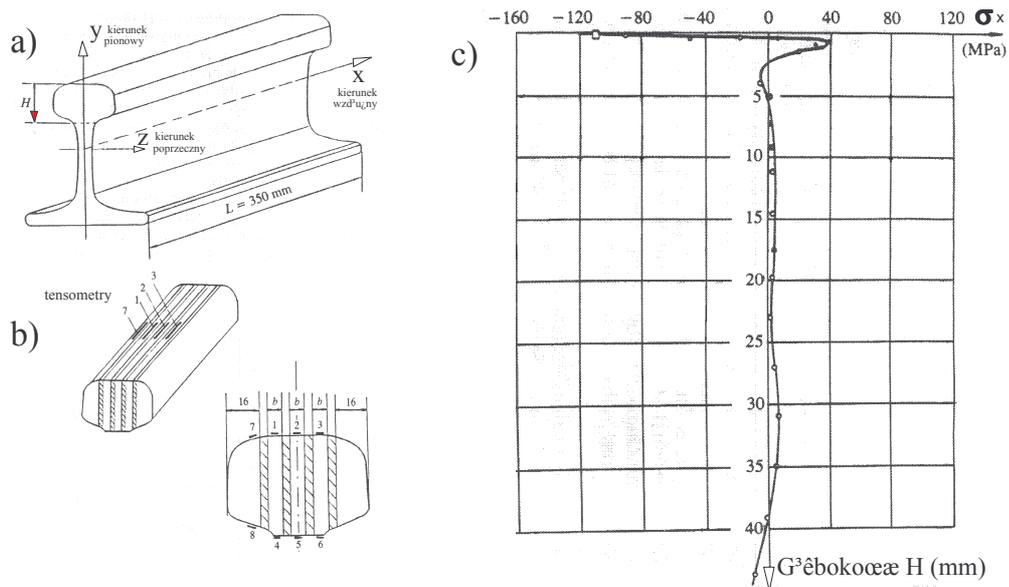
Istnieje szereg prac poświęconych problemom sprężysto-plastycznego kontaktu. Dużą ich liczbę stanowią prace analityczne. Inne to prace o charakterze doświadczalnym i wiele, powstających szczególnie w ostatnich latach, prac numerycznych.

#### *Badania doświadczalne*

Spośród wielu prac doświadczalnych dotyczących zadań kontaktu [46], te, które dotyczą bezpośrednio naprężeń resztkowych ograniczają się do przedstawienia nowych czy też zmodyfikowanych metod ich pomiaru (np.[8,9,87,106]), albo wyznaczenia naprężeń resztkowych w istniejących, rzeczywistych konstrukcjach (np.: w szynie kolejowej [13,58,86], w rurach [91]). Badane są elementy po pewnym okresie eksploatacji lub też poddane obciążeniom w warunkach laboratoryjnych (np.[100]).

Na rysunku 1.2 przedstawione zostały przykładowo wybrane wyniki pomiaru rozkładu naprężeń własnych w szynie (zastosowano niszczącą metodę zdejmowania warstw). Pokazano rozkład składowej w kierunku  $x$  naprężeń własnych wzdłuż głębokości pod powierzchnią toczenia w płaszczyźnie symetrii szyny. Badana szyna została poddana odprężającej obróbce cieplnej, a następnie obciążona  $2 \cdot 10^6$  cyklami przejazdów koła przy sile nacisku  $150kN$ . Zastosowana metoda niszcząca pozwoliła z dużą dokładnością ocenić rozkład naprężeń własnych w cienkiej warstwie przypowierzchniowej szyny.

Metody doświadczalne, ze względu na swoje ograniczenia (p.1.1.3), pozwalają na wyznaczenie naprężeń resztkowych post factum. Badając skutki nie pokazują przyczyn, które mogą je wywoływać. Nie pozwalają więc na analizę mechanizmów powstawania naprężeń własnych. Stanowią jednak ważny punkt odniesienia dla wyników zadań analitycznych i numerycznych, weryfikując jakość uzyskiwanych tam rozwiązań (np.[49] - rys.1.5). Są niezastąpione natomiast do oceny stanu naprężeń w rzeczywistych obiektach poddanych (często nie w pełni kontrolowanej) obróbce, wykańczającej lub w trakcie eksploatacji.



Rys.1.2. Wyniki badań naprężeń własnych w szynie przeprowadzonych niszczącą metodą zdejmowania warstw [13]: a) schemat wycinka szyny, b) schemat podziału główki szyny na płytki; rozmieszczenie tensometrów, c) rozkład składowej naprężenia w kierunku x wzdłuż głębokości pod powierzchnią toczenia.

### Rozwiązania analityczne

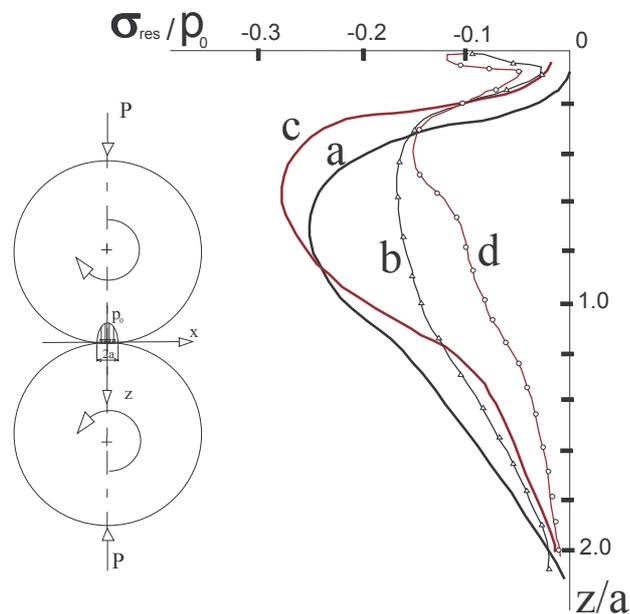
Metody analityczne zastosowano w wielu problemach sprężysto-plastycznego kontaktu. W szczególności rozwiązanie znalazły następujące zadania omówione np. w pracy [46]:

- Zadania kontaktu normalnego dla materiału sztywno-plastycznego: wciskanie w sztywno-plastyczną półprzestrzeń sztywnego klina (z tarciami i bez tarcia), kontakt sztywno-plastycznego klina ze sztywną półprzestrzenią, wciskanie bez tarcia sztywnego stożka w sztywno-plastyczną półprzestrzeń, wciskanie sztywnej kulki w sztywno-plastyczną półprzestrzeń.
- Zadania kontaktu normalnego wciskania w sprężysto-plastyczną półprzestrzeń sztywnego klina, stożka, kulki.
- Zadania kontaktu poślizgowego: przesuwania sztywno-plastycznego klina po sztywnej półprzestrzeni, przesuwanie sztywnego ostrza (klina) po sztywno-plastycznej półprzestrzeni.
- Zadania kontaktu toczonego: swobodne obtaczanie po sobie dwóch sprężysto-plastycznych walców o osiach równoległych (rys.1.3), toczenie sztywnego walca po sztywno-idealnie plastycznej

półprzestrzeni z siłą normalną i styczną, walcowanie sztywno-plastycznego pasma na rolkach.

- Zadania adaptacji przy wielokrotnym toczeniu swobodnym i z siłą wzdłużną [18,19,69].

Wspomniane rozwiązania analityczne opierają się zasadniczo albo na metodzie charakterystyk (jedno z ciał traktowane jest jako nieodkształcalne), albo wykorzystują zależności wynikające z teorii Hertza. W wielu z tych zadań ograniczono się do wyznaczenia stanu naprężeń w stanie obciążonym, brak jest wszakże często analiz odciążania i wyznaczenia naprężeń resztkowych. Wyniki jednej z prac zawierających pełną analizę naprężeń własnych, przedstawione w pracy [46], pokazane zostały na rys.1.3. Rysunek ten prezentuje rozkłady naprężeń własnych wywołanych obtaczaniem po sobie (bez sił stycznych) duraluminiowych rolek. Zwraca uwagę, że obie składowe naprężeń osiągają minimum (ściskanie) pod powierzchnią na głębokości równej ok.0.4a, by wyżej gwałtownie rosnąć. Autorzy nie podają wartości naprężeń na samej powierzchni: wyniki uzyskane analitycznie wskazują tendencję do zmiany tam znaku naprężeń na dodatni (rozciąganie), doświadczalne natomiast sugerują ponowny nieznaczny spadek. Powstaje wszakże tu wątpliwość co do dokładności pomiaru naprężeń własnych w cienkiej warstwie przypowierzchniowej (rzędu 0.05a).



Rys.1.3. Naprężenia własne powstałe w wyniku obtaczania po sobie duraluminiowych rolek w zakresie sprężysto-plastycznym [46], rozkłady składowej: naprężeń własnych w kierunku toczenia (x): a) obliczone, b) zmierzone doświadczalnie oraz składowej w kierunku poprzecznym do kierunku toczenia (y): c) obliczone, d) zmierzone doświadczalnie.

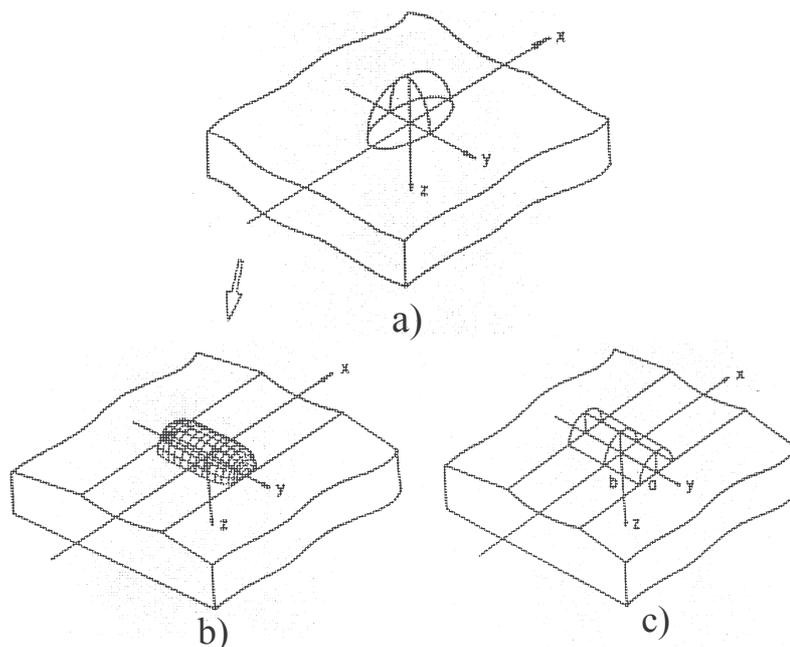
W niektórych pracach analitycznych wskazuje się na ograniczenia metod numerycznych w analizie cyklicznego, plastycznego płynięcia w kontakcie tocznym, przedstawiając alternatywne sposoby wyznaczeniem naprężeń resztkowych (np.[69]).

W szeregu problemów podejście analityczne okazuje się do tej pory bardzo efektywne, konkurując z rozwiązaniami numerycznymi. Wymienić tu należy pogłębioną analizę możliwych mechanizmów zniszczenia i charakteru stanu naprężeń resztkowych w kontakcie tocznym [47], czy też analizę wpływu umocnienia materiału na kumulowane odkształcenia plastyczne, które mają miejsce podczas wielokrotnego rolowania i poślizgu [18].

Warto też wspomnieć o analizie procesu powstawania okołopowierzchniowych odkształceń plastycznych spowodowanych przez powtarzany kontakt szyny z kołem [19].

Badaniu analitycznemu poddano też wpływ zmian geometrii powierzchni kontaktu na proces adaptacji przy rolowaniu z poślizgiem [48]. Analiza oparta była na spostrzeżeniu, iż podczas powtarzalnego kontaktu tocznego zmiany geometrii kontaktu spowodowane są wpływem plastycznym w kierunku wzdłużnym, a pole kontaktu zmienia się z eliptycznego na prawie prostokątne (rys.1.4). W pracy uwzględniono kontakt toczny z poślizgiem toczących się elementów łożysk, zębów przekładni zębatach i kontaktu szyny z kołem kolejowym.

Podstawową zaletą rozwiązań analitycznych jest uzyskanie pewnych zamkniętych i w miarę prostych wyników, pozwalających na formułowanie wniosków o charakterze ogólnym. Ograniczenia wypływają z uproszczonego modelowania zjawisk kontaktu, co nie pozwala na uwzględnienie takich czynników jak choćby dowolny kształt obu ciał, dowolna liczba ciał będących w kontakcie, uwzględnienie zmian parametrów kontaktu w trakcie procesu obciążania (efekty tarcia, zmiana geometrii strefy kontaktu, zmiany składowych obciążenia). Wszystko to sprawia, że analityczne rozwiązywanie zadań kontaktu sprężysto-plastycznego ustępuje w przypadku skomplikowanych analiz metodom numerycznym.



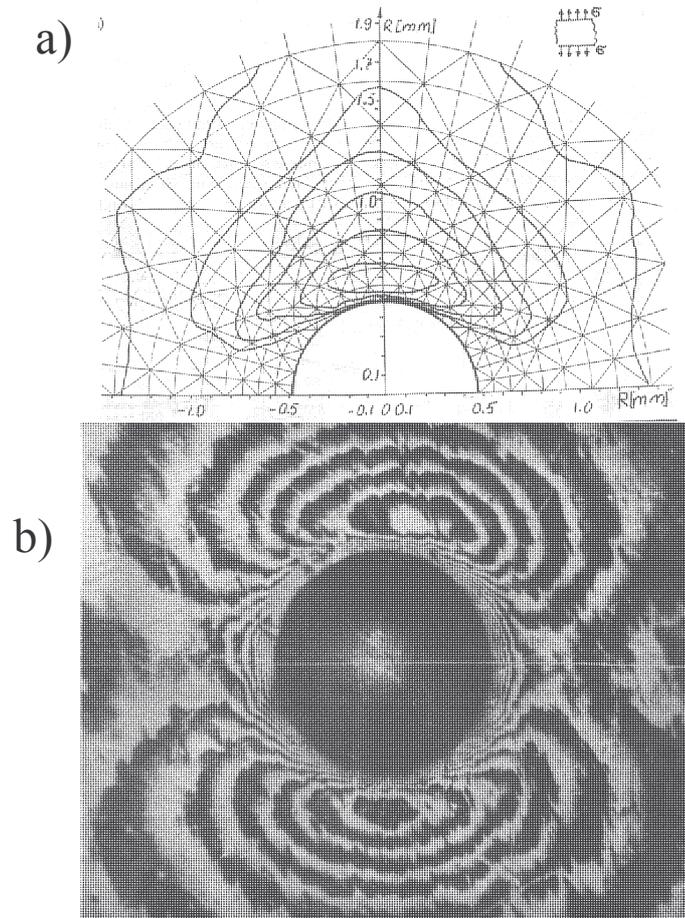
Rys.1.4. Zmiany rozkładu nacisków na powierzchni kontaktu w zadaniu obtaczania rolki po powierzchni walcowej dysku w zakresie sprężysto-plastycznym przedstawione w pracy [48]: a) rozkład początkowy nacisków (semi-elipsoidalny), b) rozkład nacisków na granicy dostosowania (prawie równomierny wzdłuż szerokości), c) graniczny rozkład nacisków (semi-eliptyczny w kierunku toczenia i stały w kierunku poprzecznym)

#### *Rozwiązania numeryczne.*

Zasadniczą część występujących w literaturze rozwiązań numerycznych stanowią analizy wykorzystujące MES (metodę elementów skończonych).

Stosując MES rozwiązano szereg problemów sprężysto-plastycznego kontaktu normalnego, między innymi wyznaczono strefy plastyczne w miarę zagłębiania sztywnego wgłębniaka (kulka, walec) w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną dla obciążeń nie przekraczających stukrotnej wartości siły pierwszego uplastycznienia [28,39,64,95,104] oraz rozwiązano zadanie wciskania sztywnej kulki w porzestrzeń sprężysto-plastyczną z umocnieniem w zakresie dużych obciążeń, aż do prawie pełnego uplastycznienia [31]. Dla tych zadań wyznaczono rozkłady naprężeń resztkowych po odciążeniu [28,39].

Uzyskano też rozwiązanie zadania wciskania sztywnej kulki w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną przy występowaniu w niej dowolnego dwuwymiarowego, równomiernie w głąb materiału rozłożonego stanu naprężeń własnych [49] (rys.1.5).



Rys.1.5. Wyniki zadania wciskania kulki (o średnicy  $D=5\text{mm}$ ) w sprężysto-plastyczną półprzestrzeń (materiał stal 45 (140HB)) w obecności rozciągania o wartości naprężeń  $\sigma=191\text{MPa}$  przedstawione w pracy [49]; obraz warstwiczny powierzchni uzyskany: a) numerycznie (MES), b) doświadczalnie (metodą penetratora).

Przeprowadzono numeryczną analizę grupy zadań kontaktu Hertza w zakresie sprężysto-plastycznym (kontakt dwóch kul, kula we wnęce kulistej i kula na półprzestrzeni) przedstawiając zależności, które pozwalają odnieść uzyskane rozwiązania do różnych wartości granicy plastyczności i różnych geometrii kontaktujących się ciał w przypadku niezbyt dużej strefy odkształceń plastycznych [30].

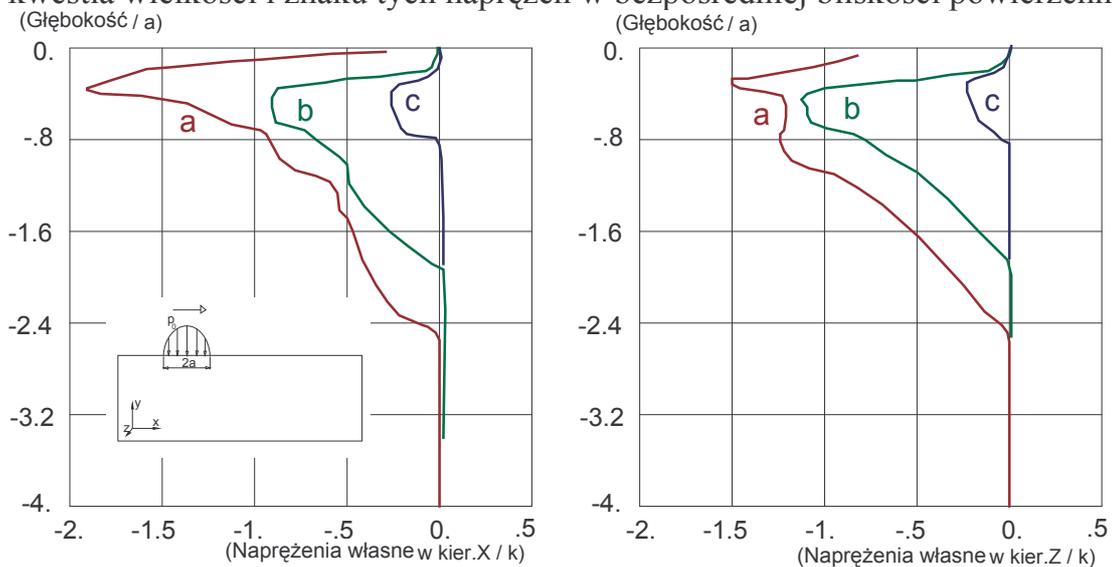
Analizowano także problem wciskania sprężystej kulki w sprężysto-plastyczną półprzestrzeń z uwzględnieniem utwardzenia powierzchniowego (np. warstwa chromu na powierzchni stali) [70,71] i zagadnienie kontaktu sprężysto-plastycznego walca ze sprężysto-plastyczną półpłaszczyzną w warunkach tarcia [34].

Rozwiązano zadanie wciskania sprężystego stempla w sprężysto-idealnie-plastyczną półprzestrzeń [63] i zadanie wciskania sprężysto-plastycznego

stempla w sprężysto-plastyczną półprzestrzeń w obecności tarcia [102]. Rozwiązania te mają jednak charakter niepełny i służą głównie sprawdzeniu wartości opracowanych algorytmów.

W grupie zagadnień kontaktu poślizgowego rozwiązane zostało zadanie przesuwania sztywnego stempla z zaokrąglonymi brzegami po miedzianej półprzestrzeni [75]. Użyto MES do wyznaczenia dużych odkształceń plastycznych spowodowanych przez tarcie, a obliczenia połączono z doświadczeniami nad zużyciem na skutek poślizgu.

Ważną grupę zagadnień kontaktu sprężysto-plastycznego stanowią zadania kontaktu tocznego. Rozwiązano tu między innymi zadanie dwuwymiarowe toczenia bez tarcia walca sprężystego po sprężysto-plastycznej półprzestrzeni, symulując kontakt toczny przez przemieszczanie semi-eliptycznego rozkładu Hertza [14,15]. Użyto zarówno rozkład Hertza jak i zmodyfikowany rozkład Hertza. Model sprawdzono pod kątem możliwości modelowania kontaktu przy zagłębianiu, pojedynczym rolowaniu i rolowaniu wielokrotnym. Rozkłady naprężeń własnych pokazane na rys.1.6 są podobne do tych, które określono analitycznie i doświadczalnie w przypadku obtaczania po sobie duraluminiowych rolek (rys.1.2). Również i tutaj nie jest całkowicie wyjaśniona kwestia wielkości i znaku tych naprężeń w bezpośredniej bliskości powierzchni.



Rys.1.6. Zadanie dwuwymiarowe toczenia bez tarcia; porównanie prezentowanych w pracy [14,15] znormalizowanych składowych naprężeń własnych w kierunku wzdłużnym (x) i poprzecznym (z) w funkcji znormalizowanej głębokości pod powierzchnią toczenia dla kolejnych poziomów obciążenia: a)  $p_0/k = 5.0$  (cztery przejazdy), b)  $p_0/k = 4.35$  (trzy przejazdy), c)  $p_0/k = 3.5$  (dwa przejazdy); ( $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ ,  $\sigma_0$  - granica plastyczności).

Zbudowany został model MES dla analizy zadań adaptacji w trójwymiarowym rolowaniu dla sprężystego-idealnie plastycznego modelu materiału [88].

Poddano numerycznej analizie zagadnienie kuli toczącej się po półnieskończonej półprzestrzeni sprężysto-idealnie plastycznej i sprężysto-plastycznej z umocnieniem kinematycznym [68,69]. Obliczenia przeprowadzono dla obciążenia na granicy i powyżej granicy przystosowania. Kontakt trójwymiarowy symulowany był przez kolejne przesuwanie semi-elipsoidalnego rozkładu ciśnień po powierzchni sprężysto-plastycznej półprzestrzeni. Przedstawiono rozkład naprężeń resztkowych, historię naprężenie-odkształcenie i zakresy cyklicznych plastycznych odkształceń w pobliżu kontaktu.

Wyodrębnionym zagadnieniem rolowania sprężysto-plastycznego są zadania dotyczące szyn kolejowych. Zagadnienie wyznaczenia naprężeń własnych w szynie kolejowej rozważane jest w szeregu prac [22,43,79,80], w których autorzy wykorzystując zmodyfikowaną przez siebie [78] teorię przystosowania, wyznaczyli naprężenia resztkowe poniżej granicy adaptacji. Zastosowano nowe podejście wykorzystujące minimalizację całkowitej energii komplementarnej z nieliniowymi ograniczeniami plastycznymi. Przedstawiono alternatywne sformułowanie hybrydowe MES [43], metodę różnic skończonych i metodę elementów brzegowych [22].

Podobny model kontaktu wykorzystano w pracy [85], gdzie pokazano rozkłady naprężeń resztkowych.

Bezpośrednią analizę sprężysto-plastyczną w zagadnieniu dwuwymiarowego kontaktu tocznego, polegającą na technice rozdzielania operatorów, które transformują zadanie sprężysto-plastyczne i zadanie residualne zawiera praca [109]. Zadanie residualne rozwiązane zostało analitycznie i przy pomocy MES.

Dokonano też trójwymiarowej, sprężysto-plastycznej analizy powtarzalnego (dwa cykle), uproszczonego toczenia koła po szynie bez tarcia [61], uzyskując rozkłady naprężeń własnych. Wykorzystano wspomniany wcześniej model MES kontaktu [59,60].

Przykładem rozwiązania zadania konformistycznego jest zadanie sprężysto-plastycznego kontaktu sworznia z uchem w warunkach płaskiego stanu naprężenia [63].

### *Podsumowanie przeglądu prac*

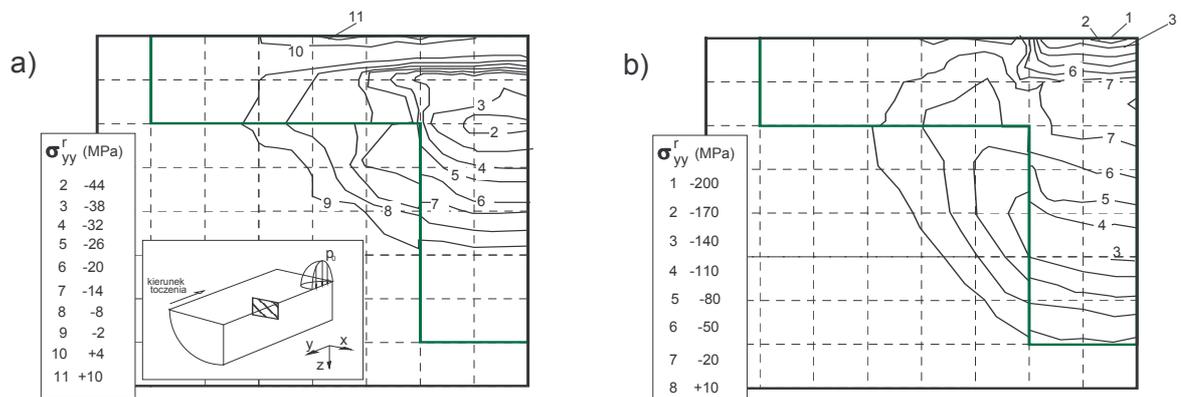
W zakresie sprężysto-plastycznego kontaktu normalnego znaleźć można wiele rozwiązań numerycznych. W szeregu prac brak jest jednak szerszej analizy procesu powstawania naprężeń własnych, a autorzy ograniczają się do prezentacji stref plastycznych [30,34,63,102,104]. Napotkać można rozwiązania o charakterze ograniczonym, które sprowadzają się jedynie do powierzchniowej analizy modeli mającej potwierdzić słuszność prezentowanych metod obliczeń (np.: [63,102]). W szczególności nie napotkano żadnej pracy, w której poddano by szerokiej analizie zadanie wciskania sprężysto-plastycznego płaskiego stempla w sprężysto-plastyczną półprzestrzeń.

W zadaniach kontaktu tocznego, a szczególnie w problemach cyklicznego kontaktu, proste modele analityczne (np.: [17,18,19]) wciąż konkurują z próbami rozwiązań numerycznych (np.: [14,15,16,59,60,61]). Daje się zauważyć brak zadań rozwiązanych "czystym" modelem kontaktu MES. W zadaniach analizowanych przy pomocy MES, nie mówiąc już o rozwiązaniach teoretycznych, jedno z ciał przyjmuje się jako sztywne [28,31,39,64,95,104] lub sprężyste, zastępując jego oddziaływanie na powierzchnię kontaktu przez z góry założony rozkład nacisków [14,15,16,22,43,59,60,61,79,80].

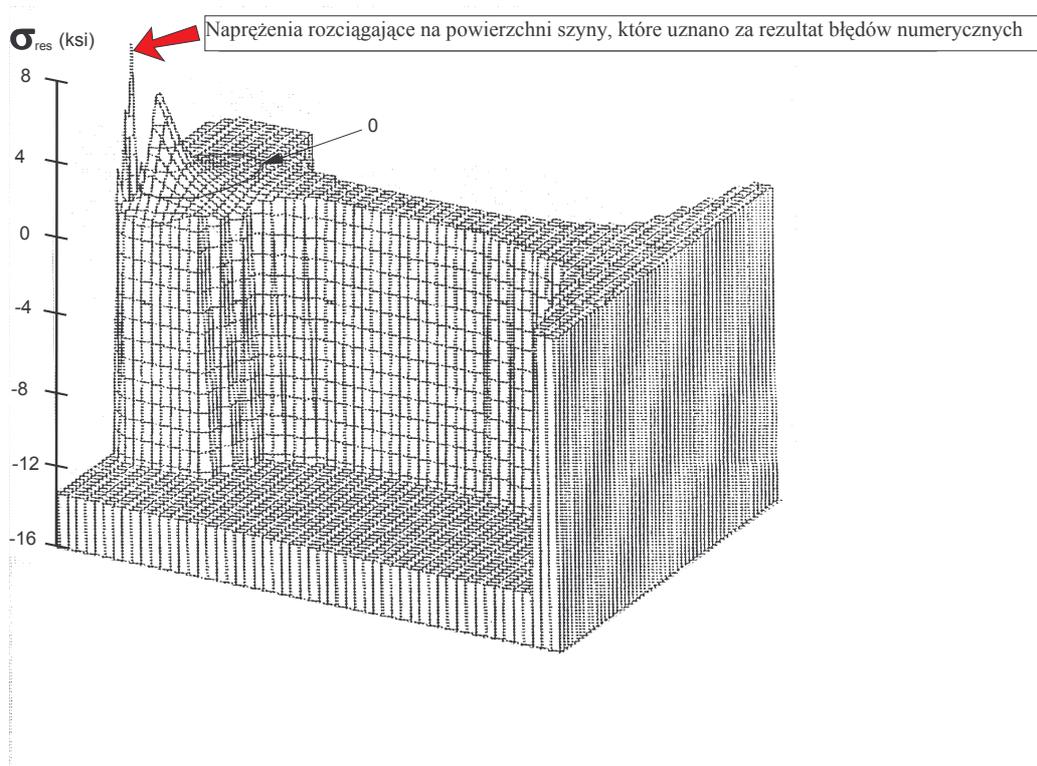
Takie uproszczenia mogą prowadzić do grubych błędów, szczególnie w złożonych zagadnieniach kontaktu. Naprężenia i odkształcenia, są wtedy wynikiem nakładania się stanów globalnych powstających jako rezultat odkształceń całego obiektu (np. zginanie i skręcanie odcinka szyny kolejowej od nacisku kół, globalny stan odkształceń wciskanego stempla) ze stanami lokalnymi powstałymi na skutek odkształceń o bardzo ograniczonym zasięgu (np. zgmiot plastyczny w warstwie przypowierzchniowej, czy gwałtowna koncentracja naprężeń w bezpośredniej bliskości naroży stempla). Rozkład nacisków i geometria kontaktu między stykającymi się ciałami zmienia się wtedy w trakcie procesu sprężysto-plastycznego, ich odkształcanie zależy od interakcji obydwu stanów, a zmiany te mogą mieć zasadniczy wpływ na ostateczne rozkłady stref plastycznych i powstałych po odciążeniu naprężeń własnych.

Analizując rezultaty przedstawionych zadań można napotkać na sprzeczne ze sobą wyniki. I tak wiele kłopotu zdaje się sprawiać analiza naprężeń własnych w cienkiej warstwie powierzchniowej będących wynikiem procesu toczenia walca czy kuli po sprężysto-plastycznym podłożu (tak czy inaczej ukształtowanym). Toczanie swobodne wywołuje stan naprężeń własnych składowej w kierunku toczenia mającej wartość dodatnią (rozciąganie) (np.: [14,15,59]), jednak rozwiązanie podobnego zadania rolowania szyny kolejowej [61] dało na powierzchni naprężenia resztkowe ściskające (patrz.

rys.1.7). Można odnieść wrażenie, że autorzy zasugerowali się tu wynikami doświadczeń: po pewnym czasie eksploatacji rozbudowują się na powierzchni szyny kolejowej naprężenia własne ściskające. Podobnie w analizie [85], uzyskane na powierzchni kontaktu naprężenia własne rozciągające, natomiast w pracy [79], autor tłumaczy otrzymanie takiego samego rezultatu na powierzchni szyny (rys.1.8) błędami numerycznymi. Istnieje zatem wyraźna niejasność dotycząca charakteru rozkładu naprężeń własnych w cienkiej warstwie przypowierzchniowej w zadaniach kontaktu z toczeniem (patrz również rysunki 1.3, 1.6). Postawić można zatem pytanie jakie czynniki odpowiedzialne są za powstanie na powierzchni kontaktu naprężeń własnych ściskających i czy możliwy jest w tym miejscu stan naprężeń rozciągających. Dodać tu należy, że zupełnie inne rozkłady naprężeń w warstwie przypowierzchniowej mogą być wynikiem oddziaływania sił normalnych (naciski) i sił stycznych (poślizg).



Rys.1.7. Trójwymiarowe toczenie swobodne; wybrane wyniki analiz przedstawionych w pracach [59] i [61]; rozkłady składowej naprężeń własnych w kierunku y (toczenia): a) po jednokrotnym "przetoczeniu" półprzestrzeni rozkładem nacisków odpowiadającym kontaktowi kuli, b) po jednokrotnym "przetoczeniu" szyny rozkładem nacisków odpowiadających kontaktowi z kołem. Rysunki pokazują mapy naprężeń w przekroju poprzecznym do kierunku toczenia.



Rys.1.8. Zagadnienie swobodnego toczenia szyny kolejowej rozwiązane numerycznie w pracy [79]: rozkład składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia w przekroju poprzecznym szyny (1ksi=6.895MPa).

Warto podkreślić, że w rozwiązaniach numerycznych przeważająca liczba prac wykorzystuje metodę elementów skończonych (MES), choć spotkać można rozwiązania wykorzystujące metodę elementów brzegowych (MEB) (np.: [22,50,78]). O powszechnym stosowaniu MES do rozwiązywania zadań kontaktu decydują jej niewątpliwe zalety wśród których wymienić należy: prostotę fizycznej interpretacji, możliwość badania obiektów o złożonym kształcie, zmieniającym się w trakcie obciążenia, złożonych warunkach brzegowych w złożonym stanie obciążenia, możliwość uwzględnienia różnych stanów (sprężysty, plastyczny, lepkosprężysty) i niejednorodnych własności mechanicznych materiału. Metoda ta posiada wiele gotowych algorytmów i dość bogatą dokumentację zbudowanych elementów, a szybki rozwój technik komputerowych zapewnia jej niezwykłą skuteczność.

### 1.3. Cel pracy.

Celem prezentowanej pracy jest

***Analiza mechanizmów powstawania naprężeń własnych w złożonych zagadnieniach sprężysto-plastycznego kontaktu.***

Przedstawione zostaną wyniki badań numerycznych sprężysto-plastycznej pracy obiektów, dla których analiza w zakresie sprężystym (w ujęciu klasycznej teorii sprężystości) wskazuje na występowanie geometrycznych osobliwości naprężeń. Podjęta zostanie próba odpowiedzi na pytanie co się dzieje z osobliwością naprężeń przy przyjęciu sprężysto-plastycznego modelu materiału, jaki jest przebieg procesów uplastycznienia, jakie są rozkłady powstałych po odciążeniu naprężeń własnych w takich zagadnieniach jak wciskanie płaskiego stempla z ostrym bądź zaokrąglonym narożem w półprzestrzeń i osiowo-symetrycznego zadania kontaktu pomiędzy wałem i tarczą.

Szczególne uwaga poświęcona będzie dalej takim problemom sprężysto-plastycznego kontaktu, gdzie naprężenia własne są wynikiem nakładania się szeregu efektów np.: odkształceń plastycznych od rolowania i poślizgu w warstwach przypowierzchniowych, złożonego stanu naprężeń sprężystych pochodzących od obciążenia ciała jako całości, naprężeń wstępnych. Przykładem są tu zadania płaskiego i przestrzennego rolowania pasma materiału. Nie jest dotychczas całkowicie wyjaśniony mechanizm powstawania naprężeń własnych i wpływ różnych rodzajów quasistatycznego kontaktu (czyste toczenie, czysty poślizg, toczenie z różnymi udziałami tarcia w kierunku zgodnym i przeciwnym do ruchu) na rozkład tych naprężeń w warstwie przypowierzchniowej.

W dalszej kolejności podjęta zostanie próba rozwiązania złożonego zadania kontaktu koła kolejowego z szyną z uwzględnieniem takich czynników jak przestrzenna, nieuroszczona geometria obydwu ciał, sprężysto-plastyczny model materiału, obciążenia globalne i lokalne, wynikające z oddziaływań normalnych i stycznych toczącego się koła.

Wszystkie analizowane w pracy zagadnienia łączy wspólna cecha: procesy uplastycznienia i powstawania naprężeń własnych są wynikiem nakładania się złożonych lokalnych i globalnych stanów odkształceń. Konieczne jest tu uwzględnianie zmian geometrii badanych obiektów w trakcie obciążenia i wpływu zmian tej geometrii na wielkość obciążeń. Rozwiązane zadania są zatem nieliniowe geometrycznie i materiałowo pomimo założenia małych przemieszczeń i odkształceń. Dodatkową nieliniowość wprowadza tarcie.

Przedstawiony w punkcie 1.2 przegląd literatury pokazał, że takie podejście nie było dotychczas stosowane w złożonych zadaniach kontaktu, a przedstawione w pracy problemy nie znalazły pełnego, a niekiedy nawet częściowego rozwiązania w dostępnej literaturze przedmiotu.

Analizę zaprezentowanych zagadnień przeprowadzono wykorzystując metodę elementów skończonych (MES) jako najbardziej wszechstronne i efektywne narzędzie numeryczne. MES posiada szereg opisanych już poprzednio zalet, które przy wykorzystaniu dostępnych obecnie komputerów o dużej mocy obliczeniowej zapewniają tej metodzie niezwykłą skuteczność.

Przedstawione rozwiązania uzyskane zostały w oparciu o statyczne lub quasistatyczne modele sprężysto-plastycznego kontaktu z tarciami w zakresie małych przemieszczeń i małych odkształceń. Tam gdzie było to możliwe wyniki analizy numerycznej porównano z rezultatami doświadczeń.

## Rozdział 2

### Metoda elementów skończonych w zastosowaniu do analizy konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym.

#### 2.1. Podstawowe związki w MES.

Metoda elementów skończonych jest, w chwili obecnej, powszechnie używanym narzędziem analiz numerycznych, a jej opis można napotkać w bardzo wielu źródłach (np.[4,52,113]). Poniżej przedstawione zostały podstawowe zależności potrzebne w dalszej części rozważań.

Rozważmy ciało zajmujące w przestrzeni obszar  $\Omega$ , obciążone układem sił masowych  $\mathbf{b}$  oraz powierzchniowych  $\mathbf{q}$  na części brzegu  $\partial\Omega_q$ . Zgodnie z zasadą prac przygotowanych możemy zapisać, że praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach przygotowanych spełniających odpowiednie warunki brzegowe równa jest pracy sił wewnętrznych na odkształceniach przygotowanych odpowiadających przemieszczeniom:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{q} \, d(\partial\Omega) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx} \right]^T$  oznacza wektor naprężenia,

$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \right]^T$  oznacza wektor odkształcenia,

$\delta \mathbf{w}$  jest przemieszczeniem przygotowanym,

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  jest odkształceniem przygotowanym związanym z  $\delta \mathbf{w}$ .

Jeśli obszar  $\Omega$  podzielimy na podobszary (elementy skończone), w których zadamy odpowiednie funkcje kształtu, to możemy przedstawić wektor przemieszczeń wewnątrz obszaru  $\Omega$  w postaci:

$$\mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad , \quad (2.2)$$

gdzie:

$\mathbf{N}$  jest globalną macierzą funkcji kształtu (utworzoną z funkcji kształtu kolejnych elementów),

$\mathbf{u}$  jest globalnym wektorem przemieszczeń węzłowych.

W zakresie małych przemieszczeń wektor odkształcenia w obszarze  $\Omega$  można przedstawić dalej w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad (2.3)$$

gdzie  $\mathbf{B}$  jest globalną macierzą odkształceń, zawierającą odpowiednie pochodne funkcji kształtu kolejnych elementów.

Po podstawieniu wyrażeń (2.2) i (2.3) do (2.1) otrzymamy:

$$\delta\mathbf{u}^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, d(\partial\Omega) \right) = 0. \quad (2.4)$$

Wyrażenie (2.4) musi być spełnione dla każdej dopuszczalnej wariacji  $\delta\mathbf{u}$ , zatem warunek (2.4) można sprowadzić do postaci:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, d(\partial\Omega) = 0. \quad (2.5)$$

Dla materiału liniowo-sprężystego w przypadku braku odkształceń początkowych zależność pomiędzy naprężeniem, a odkształceniem zapisać można jako:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (2.6)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest macierzą stałych sprężystych.

Warunek (2.5) można wtedy przedstawić w postaci:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} \, d\Omega \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, d(\partial\Omega) = 0 \quad (2.7a)$$

lub krócej:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{R} \quad , \quad (2.7b)$$

gdzie:

$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} \, d\Omega$  jest globalną macierzą sztywności,

$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_q} \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, d(\partial\Omega)$  jest globalnym wektorem obciążeń

zewnętrznych,

## 2.2. Sformułowanie związków konstytutywnych dla modelu sprężysto-plastycznego.

### 2.2.1. Podstawowe związki teorii plastyczności.

Przed pojawieniem się pierwszych odkształceń plastycznych zachowanie materiału można opisać prawem Hooke'a:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.8)$$

gdzie:

$\sigma_{ij}$  jest tensorem naprężeń,

$\varepsilon_{kl}$  jest tensorem odkształcenia,

$c_{ijkl}$  jest macierzą stałych sprężystych.

Gdy obciążenie przekroczy pewną wartość pojawią się pierwsze uplastycznienia.

Warunek plastyczności określa poziom naprężeń, przy których zaczynają się odkształcenia plastyczne. Możemy sformułować ten warunek w postaci:

$$f(\sigma_{ij}) = k(\chi) , \quad (2.9)$$

gdzie:

$f$  - jest funkcją naprężeń,

$k$  - jest funkcją parametru wzmocnienia  $\chi$  materiału.

Warunek plastyczności nie zależy od przyjętego układu współrzędnych i jest funkcją trzech niezmienników tensora naprężeń:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ii} , \\ J_2 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} , \\ J_3 &= \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

W przypadku metali odkształcenia plastyczne nie zależą od ciśnienia hydrostatycznego, w związku z czym warunek plastyczności daje się zapisać w postaci:

$$f(J_2, J_3) = k(\chi) , \quad (2.11)$$

gdzie  $J_2, J_3$  są odpowiednio drugim i trzecim niezmiennikiem dewiatora naprężeń:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} . \quad (2.12)$$

Dwa powszechnie używane warunki plastyczności to warunek Treski-Coulomba i warunek Hubera-Misesa-Henky'ego (HMH).

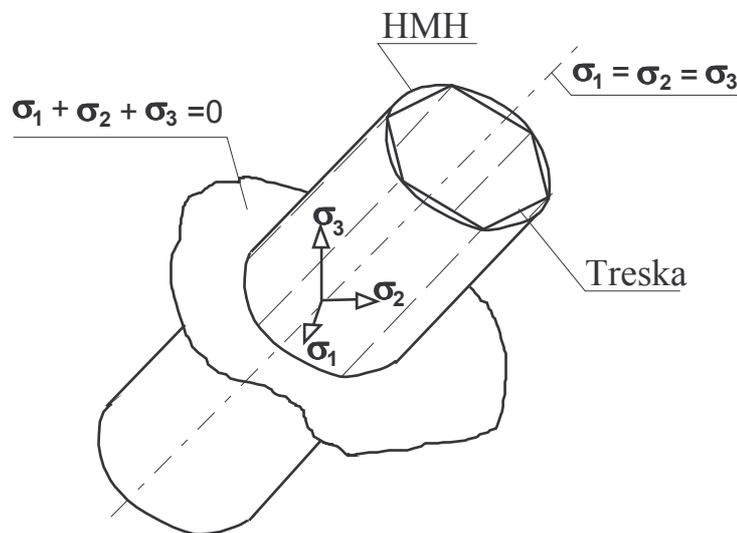
Warunek Treski stwierdza, że pierwsze odkształcenia plastyczne powstają wówczas, gdy maksymalne naprężenia tnące osiągają pewną określoną wartość. Dla naprężeń głównych  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , warunek ten zapisać można jako:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(\chi) , \quad (2.13)$$

gdzie:

$Y$  - jest parametrem materiału wyznaczanym doświadczalnie i może być funkcją parametru wzmocnienia.

W przestrzeni naprężeń głównych powierzchnia plastyczności opisana warunkiem Treski przedstawia graniastosłup o przekroju sześciokąta foremnego (rys.2.1).



Rys.2.1. Powierzchnie plastyczności w przestrzeni naprężeń głównych.

Warunek Hubera-Misesa-Henky`ego (HMH) stwierdza, że kryterium przejścia materiału w stan plastyczny zależy wyłącznie od drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia:

$$(J_2')^{1/2} = k(\chi) , \quad (2.14)$$

gdzie  $k$  jest parametrem materiału i w przestrzeni naprężeń głównych powierzchnia plastyczności przedstawia tu walec opisany na graniastosłupie Treski. Warunek (2.14) możemy zapisać dalej:

$$\sigma_{red} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{3}k , \quad (2.15)$$

gdzie  $\sigma_{red}$  są naprężeniami zredukowanymi.

Dla modelu materiału sprężysto-idealnie plastycznego powierzchnia plastyczności pozostaje niezmienna w trakcie procesu obciążenia. Warunek plastyczności zapisać można jako:

$$f(\sigma_{ij}) = k_0 = \text{const} . \quad (2.16)$$

Wprowadźmy funkcję plastyczności w postaci:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) - k_0 = 0 . \quad (2.17)$$

Poziom naprężeń, przy którym, po wstępnych odkształceniach sprężystych, następuje dalsza deformacja plastyczna, może zależeć od stopnia odkształcenia plastycznego. Tak więc powierzchnia plastyczności może się zmieniać na każdym etapie deformacji plastycznej [96]. Do opisu tych zmian możemy posłużyć się bądź modelem izotropowym, kiedy powierzchnia plastyczności rozszerza się równomiernie nie doznając przy tym przesunięć:

$$F(\sigma_{ij}, \chi) = 0 , \quad (2.18) ,$$

bądź też modelem kinematycznym, gdy powierzchnia plastyczności zachowuje swój kształt i orientację, jednak doznaje przemieszczenia w przestrzeni naprężeń jak ciało sztywne:

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 . \quad (2.19)$$

Tensor  $\alpha_{ij}$  oznacza przesunięcie, wyznaczające nowe położenie środka powierzchni neutralnej.

Proponuje się różne definicje tensora  $\alpha_{ij}$ , między innymi:

$$\begin{aligned} d\alpha_{ij} &= c d\varepsilon_{ij}^p , \\ d\alpha_{ij} &= d\sigma_{ij} , \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie:  $d\varepsilon_{ij}^p$  jest przyrostem odkształcenia plastycznego, a  $c$  jest stałą.

W przypadku obciążeń cyklicznych kinematyczny model umocnienia prowadzi do efektu Bauschingera. Połączenie obydwu modeli daje w wyniku wzmocnienie typu mieszanego, dla którego równanie powierzchni neutralnej przyjmuje postać:

$$F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \chi) = 0 \quad (2.21)$$

lub w innym sformułowaniu [96]:

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) = 0 . \quad (2.22)$$

Rozwój powierzchni plastyczności można opisać wiążąc naprężenia plastyczne  $k$  z deformacją plastyczną przy użyciu parametru wzmocnienia  $\chi$ . Dokonuje się

tego definiując ten parametr na dwa sposoby poprzez wzmocnienie energetyczne:

$$\chi = W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (2.23)$$

gdzie  $W_p$  jest pracą odkształceń plastycznych oraz wzmocnienie odkształceniowe:

$$\chi = \bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \int \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}, \quad (2.24)$$

gdzie  $\bar{\varepsilon}_p$  jest wskaźnikiem odkształcenia plastycznego.

Przyjmijmy równanie powierzchni plastyczności w postaci (2.21). W stanie plastycznym dla przyrostu naprężenia mamy:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \begin{cases} > 0 & \text{proces czynny} \\ = 0 & \text{proces neutralny} \\ < 0 & \text{proces bierny} \end{cases}. \quad (2.25)$$

Po wstępnym uplastycznieniu materiału, dalszy przyrost naprężeń wywołuje odkształcenia:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad (2.26)$$

gdzie

$d\varepsilon_{ij}^e$  - jest częścią sprężystą,

$d\varepsilon_{ij}^p$  - jest częścią plastyczną.

Przyrost odkształceń sprężystych opisany jest prawem Hooke'a. Natomiast przyrost odkształceń plastycznych możemy wyrazić przez prawo płynięcia:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.27)$$

gdzie:

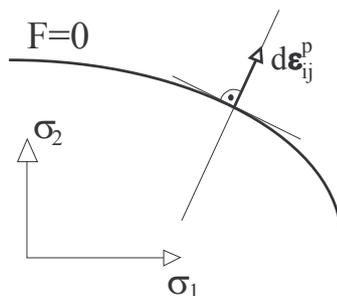
$Q$  jest potencjałem plastycznym,

$d\lambda$  jest stałym współczynnikiem.

Przyjęcie  $F \equiv Q$  prowadzi do prawa płynięcia stowarzyszonego z odpowiednim warunkiem plastyczności:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2.28)$$

Wyrażenie (2.28) przedstawia warunek normalności przyrostu odkształcenia plastycznego (rys.2.2)



Rys.2.2. Warunek normalności  $d\epsilon_{ij}^p$  do powierzchni plastyczności.

### 2.2.2. Sformułowanie macierzowe związków między naprężeniami a odkształceniami w zakresie sprężysto-plastycznym.

Istnieje szereg metod rozwiązywania zagadnień teorii plastyczności przy wykorzystaniu metody elementów skończonych, a ich bogatą bibliografię podano w pracy [52]. Wśród bardziej znanych należy wymienić metodę początkowych odkształceń, metodę zmiennej sztywności, metodę początkowych naprężeń, metodę perturbacji. Autor zdecydował się wybrać zmodyfikowaną metodę początkowych naprężeń przedstawioną szczegółowo w publikacjach [72] i [82]. O wyborze tej metody zadecydowały jej walory takie jak: bardzo dobrze przedstawiony w literaturze opis, pomyślne wyniki prób numerycznych przeprowadzonych na przykładach testowych (duża skuteczność algorytmu). Poniżej przedstawiono zatem sformułowanie macierzowe związków konstytutywnych w zakresie sprężysto-plastycznym pod kątem wybranej metody.

Przyrost odkształcenia w zakresie sprężysto-plastycznym ma postać:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p . \quad (2.29)$$

Warunek plastyczności w sformułowaniu modelu ze wzmocnieniem mieszanym (2.22) zapiszemy jako:

$$F(\sigma, \epsilon^p, \chi) = 0 , \quad (2.30)$$

gdzie:

- $\epsilon^p$  - akumulowane odkształcenie plastyczne,
- $\chi$  - wspomniany wcześniej parametr wzmocnienia.

Podczas deformacji plastycznej  $F = 0$ , zatem:

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \epsilon^p} \right\}^T d\epsilon^p = 0 . \quad (2.31)$$

Przyjmując

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{zx}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right], \quad (2.32)$$

oraz

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T d\varepsilon^p \right), \quad (2.33)$$

możemy sprowadzić (2.33) do postaci:

$$\mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} - A d\lambda = 0. \quad (2.34)$$

Na podstawie (2.28), (2.29) i (2.32), mamy:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \mathbf{a}. \quad (2.35)$$

Wykorzystując (2.34) i (2.35), uzyskamy po przekształceniach pełne wyrażenie na przyrost naprężenia w zakresie sprężysto-plastycznym:

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p) d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.36)$$

przy czym:

$$\mathbf{D}_p = \frac{\mathbf{d}_D \mathbf{d}_D^T}{A + \mathbf{d}_D^T \mathbf{a}}, \quad (2.37)$$

gdzie:

$$\mathbf{d}_D = \mathbf{D} \mathbf{a}. \quad (2.38)$$

Równanie (2.36) pozwala na wyznaczenie w sposób jednoznaczny przyrostu naprężeń, który powstaje w wyniku bardzo małego przyrostu  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ . Przewidywane przyrosty części sprężystej naprężenia wynoszą:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_e = \int_0^{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.39)$$

podczas gdy

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_p = \int_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}^{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D}_p d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.40)$$

są naprężeniem sprowadzającym naprężenie sprężyste do rzeczywistej wartości sprężysto-plastycznej ( $r$  określa część przyrostu odkształcenia, przy której zachodzą pierwsze uplastycznienia). Jak wspomniano poprzednio dokładny opis tego algorytmu znaleźć można w pracy [82]. Jego zachowanie w konkretnych przypadkach przedstawiono na schemacie całego algorytmu użytego dla zagadnień dwuwymiarowych sprężysto-plastycznego kontaktu (rys.4.7).

Zadania nieliniowe w zakresie sprężysto-plastycznym rozwiązuje się najczęściej jedną z metod przyrostowo-iteracyjnych. Podczas kolejnych iteracji w kolejnych krokach przyrostu obciążenia równania równowagi (2.5) nie są spełnione ściśle i wektor residualny sił węzłowych wyrazić można wzorem:

$$\Psi = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \mathbf{R} , \quad (2.41)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest wektorem węzłowych sił zewnętrznych, a  $\mathbf{B}$  jest wspomnianą wcześniej macierzą odkształceń.

W stanie sprężysto-plastycznym zachowanie się materiału opisuje zależność (2.36). Gdy przyjmiemy postać przyrostową wyrażenia (2.41), to korzystając z zależności (2.36), otrzymamy wyrażenie w postaci przyrostowej:

$$\Delta \Psi = \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{R} , \quad (2.42)$$

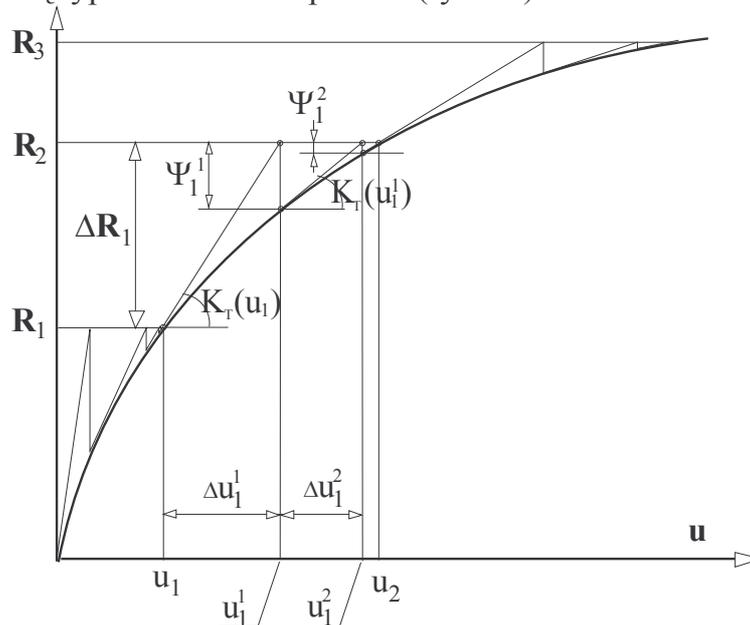
gdzie:

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.43)$$

jest macierzą styczną.

Procedura rozwiązania takiego zadania polega na znalezieniu wektora  $\mathbf{u}$  takiego, by wektor reszkowy  $\Psi$  był jak najmniejszy.

W zadaniach sprężysto-plastycznych przyjmuje się na ogół metodę przyrostową, dla której każdy krok jest zadaniem nieliniowym, które rozwiązać można metodą typu Newtona-Raphsona (rys.2.3).



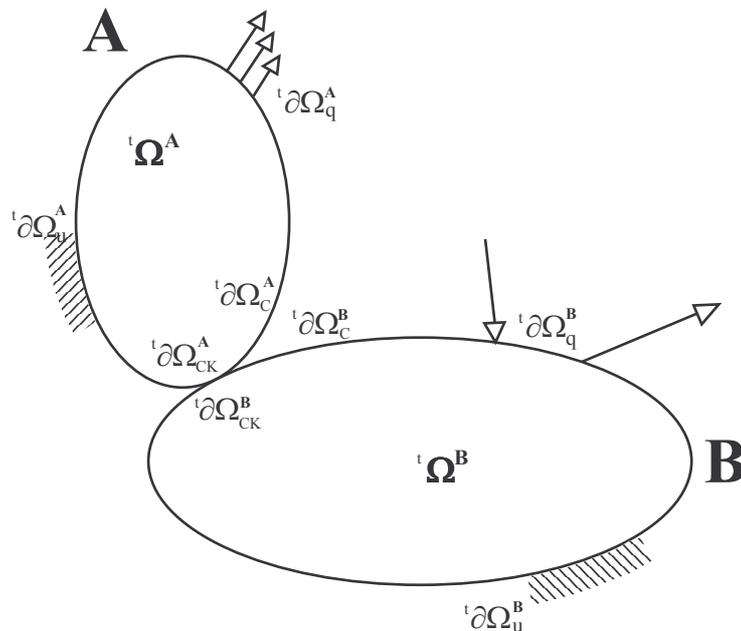
Rys.2.3. Schemat metody przyrostowej Newtona-Raphsona.

## Rozdział 3

### Analiza problemów kontaktu za pomocą metody elementów skończonych

#### 3.1. Sformułowanie zadania kontaktu.

Rozważmy układ ciał  $A$  i  $B$  będących ze sobą w kontakcie i zajmujących w chwili  $t$  obszary, odpowiednio  ${}^t\Omega^A$  i  ${}^t\Omega^B$  w globalnym układzie współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$  (rys.3.1).



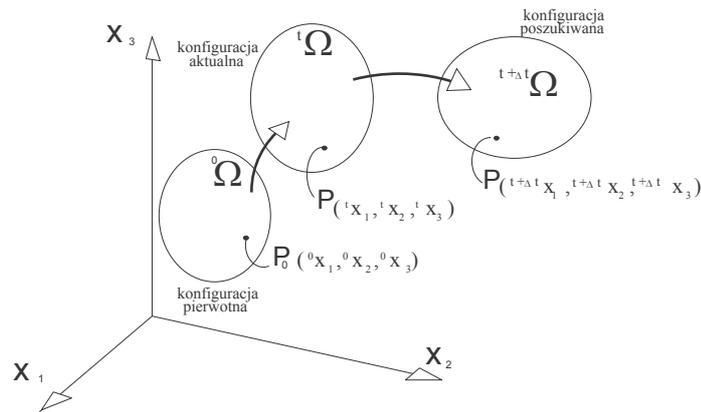
Rys.3.1. Schemat kontaktu dwóch ciał.

Brzozy obszarów  ${}^t\Omega^A$  i  ${}^t\Omega^B$  można opisać jako:

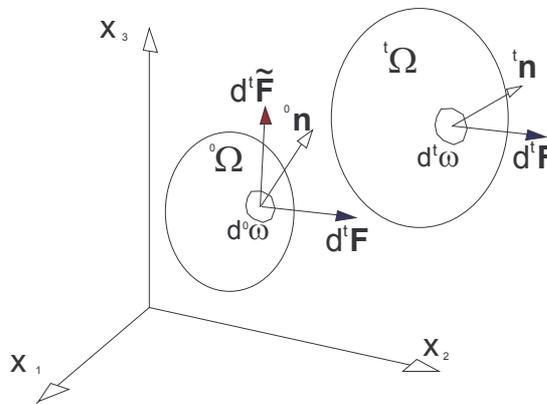
$$\begin{aligned} {}^t\partial\Omega^A &= {}^t\partial\Omega_u^A \cup {}^t\partial\Omega_q^A \cup {}^t\partial\Omega_c^A \\ {}^t\partial\Omega^B &= {}^t\partial\Omega_u^B \cup {}^t\partial\Omega_q^B \cup {}^t\partial\Omega_c^B, \end{aligned} \quad (3.1)$$

przy czym:

- ${}^t\partial\Omega_u^A, {}^t\partial\Omega_u^B$  oznaczają odpowiednie części brzozy, na których narzucone są więzy,
- ${}^t\partial\Omega_q^A, {}^t\partial\Omega_q^B$  - odpowiednie części brzozy, na których podane są siły zewnętrzne,
- ${}^t\partial\Omega_c^A, {}^t\partial\Omega_c^B$  - odpowiednie części brzozy, mogące potencjalnie wejść w kontakt,
- ${}^t\partial\Omega_{CK}^A, {}^t\partial\Omega_{CK}^B$  - odpowiednie części  ${}^t\partial\Omega_c^A, {}^t\partial\Omega_c^B$ , będące aktualnie w kontakcie.



Rys.3.2. Ruch ciała w stacjonarnym układzie współrzędnych.



Rys.3.3. Opis stanu naprężenia.

Pod wpływem oddziaływań zewnętrznych każde z rozważanych ciał (A i B) doznaje zmiany objętości i postaci. Dowolny punkt P ciała, który w początkowej chwili  $t_0=0$  zajmował położenie  ${}^0\mathbf{x}$ , zajmie nowe położenie  ${}^t\mathbf{x}$  w chwili  $t$  (rys.3.2). Całkowite przemieszczenie punktu P dowolnego z ciał od chwili początkowej 0 do chwili  $t$  można zapisać

$${}^0\mathbf{u} = {}^t\mathbf{x} - {}^0\mathbf{x} \quad (3.2)$$

Tensor naprężeń Cauchy'ego  ${}^t\boldsymbol{\sigma}$  zdefiniować można\* (rys.3.3) jako:

$$\frac{d^t\mathbf{F}}{d^t\omega} = {}^t\boldsymbol{\sigma} {}^t\mathbf{n} \quad (3.3)$$

przy czym  $d^t\mathbf{F}$  jest elementarną siłą działającą w chwili  $t$  na element powierzchni ciała  $d^t\omega$  o normalnej  ${}^t\mathbf{n}$ .

\* Według przyjętej konwencji zapisu [4]:  ${}^t_1\mathbf{a}$  oznacza wielkość  $\mathbf{a}$  w chwili  $t_2$  mierzoną w odniesieniu do konfiguracji  $t_1$ ,  ${}^t_1\mathbf{a} \equiv {}^t\mathbf{a}$

W opisie materialnym (Lagrange`a) zastosować można drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa  ${}^t_0\mathbf{S}$ , zdefiniowany (rys.3.3) w sposób:

$$\frac{d{}^t\tilde{\mathbf{F}}}{d{}^0\omega} = \frac{\partial {}^0\mathbf{x}}{\partial {}^t\mathbf{x}} \cdot \frac{d{}^t\mathbf{F}}{d{}^0\omega} = {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}^0\mathbf{n} . \quad (3.4)$$

Tensory Pioli-Kirchhoffa i Cauchy`ego związane są zależnością:

$${}^t_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^tx_k} {}^t\sigma_{kl} \frac{\partial {}^0x_l}{\partial {}^tx_j} , \quad (3.5)$$

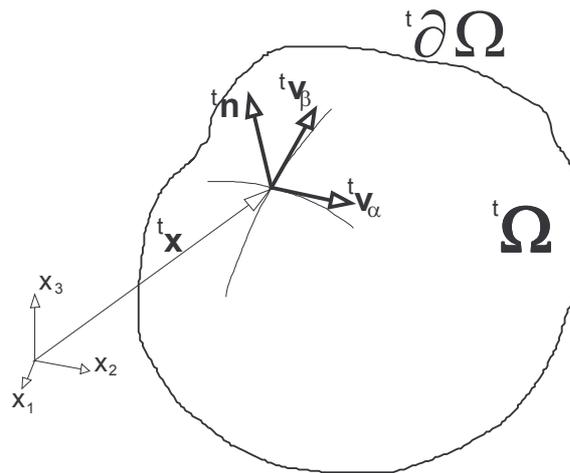
gdzie

${}^0\rho$ - jest gęstością materiału ciała w chwili 0 ,

${}^t\rho$  - jest gęstością materiału ciała w chwili  $t$  .

Miarą odkształcenia w układzie współrzędnych materialnych używaną wraz z drugim tensorem Pioli-Kirchhoffa jest tensor odkształceń skończonych Green`a-Lagrange`a:

$${}^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^tu_{j,i} + {}^tu_{i,j} + {}^tu_{k,j} {}^tu_{k,i}) , \quad (3.6)$$



Rys.3.4. Sposób oznaczenia wektorów jednostkowych w punkcie kontaktu.

W dowolnej chwili czasu  $t$  , dowolnemu punktowi  ${}^t\mathbf{x} \in \partial\Omega$  (ciała A lub B), przypiszemy jednostkowy wektor normalny  ${}^t\mathbf{n}$  oraz parę ortogonalnych, jednostkowych wektorów stycznych  ${}^t\mathbf{v}_\alpha, {}^t\mathbf{v}_\beta$  (rys.3.4). Dla każdego ciała możemy zapisać warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} {}^t_0\mathbf{u}^A &= 0 \text{ na } {}^t\partial\Omega_u^A \\ {}^t_0\mathbf{u}^B &= 0 \text{ na } {}^t\partial\Omega_u^B , \end{aligned} \quad (3.7)$$

oraz warunki sił na brzegu:

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{\sigma}^A {}^t\mathbf{n}^A &= {}^t\bar{\mathbf{q}}^A \text{ na } {}^t\partial\Omega_q^A \\ {}^t\boldsymbol{\sigma}^B {}^t\mathbf{n}^B &= {}^t\bar{\mathbf{q}}^B \text{ na } {}^t\partial\Omega_q^B , \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie:

${}^t\bar{\mathbf{q}}^A, {}^t\bar{\mathbf{q}}^B$  - oznaczają zadane siły na brzegu,

Zapiszemy teraz warunki kontaktu. W pewnej chwili  $t$ , dwa punkty brzegowe obu ciał  ${}^t\mathbf{x}_c^A, {}^t\mathbf{x}_c^B$ , są ze sobą w kontakcie. Przyjmijmy, ponadto:

$${}^t\mathbf{n}^A = -{}^t\mathbf{n}^B, \quad {}^t\mathbf{v}_\alpha^A = -{}^t\mathbf{v}_\alpha^B, \quad {}^t\mathbf{v}_\beta^A = -{}^t\mathbf{v}_\beta^B, \quad (3.9)$$

Oznaczmy siły oddziaływania powierzchniowego w punkcie kontaktu jako  ${}^t\mathbf{q}^A, {}^t\mathbf{q}^B$ . Warunek wzajemnego oddziaływania tych punktów jest:

$${}^t\mathbf{q}^A = -{}^t\mathbf{q}^B. \quad (3.10)$$

Po rozpisaniu tego wyrażenia na składowe w kierunku normalnym otrzymamy:

$${}^tq_n^A = {}^t\mathbf{q}^A \cdot {}^t\mathbf{n}^A = {}^t\mathbf{q}^B \cdot {}^t\mathbf{n}^B = {}^tq_n^B, \quad (3.11)$$

a dla kierunków stycznych odpowiednio:

$$\begin{aligned} {}^tq_\alpha^A &= {}^tq_\alpha^B \\ {}^tq_\beta^A &= {}^tq_\beta^B. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Postawmy teraz warunek kontaktu: składowa normalna oddziaływania powierzchniowego w punkcie kontaktu nie może mieć wartości dodatniej:

$${}^tq_n^A = {}^tq_n^B \leq 0. \quad (3.13)$$

Składowe styczne sił powierzchniowych w strefie kontaktu można z kolei związać ze składową normalną przez prawo tarcia:

$$\begin{aligned} {}^t f({}^tq_n^A, {}^tq_\alpha^A, {}^tq_\beta^A, {}^t\alpha) &= 0 \\ {}^t f({}^tq_n^B, {}^tq_\alpha^B, {}^tq_\beta^B, {}^t\alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie  $\alpha$  - jest zmienną stanu zależną od natury kontaktu.

Warunkiem kinematycznym kontaktu jest to, aby ciała wzajemnie się nie przenikały:

$${}^tV^A \cap {}^tV^B = \emptyset, \quad (3.15).$$

gdzie:  ${}^tV_A, {}^tV_B$  są odpowiednio objętościami obu ciał (bez brzegów).

Traktując problem jako quasi-statyczny (pominięcie efektów bezwładnościowych) zapiszemy warunki równowagi, które muszą być spełnione wewnątrz każdego z ciał:

$$\frac{\partial {}^t\sigma_{ij}}{\partial {}^tx_j} + {}^tb_i = 0, \quad (3.16)$$

gdzie:  ${}^tb_i$  - składowe sił masowych.

W zależności od rodzaju materiału można formułować związki konstytutywne. Dla materiałów sprężystych mamy ogólną zależność:

$${}^tS_{ij} = \frac{\partial W}{\partial {}^t\varepsilon_{ij}}, \quad (3.17),$$

gdzie  $W$  jest potencjałem sprężystym. Dla materiałów liniowo-sprężystych:

$${}^tS_{ij} = c_{ijkl} {}^t\varepsilon_{kl}, \quad (3.18)$$

gdzie operator wskaźnikowy  $c_{ijkl}$  uwzględnia stałe materiałowe.

Dla innych materiałów wyrażenie związków konstytutywnych staje się bardziej złożone. W literaturze spotyka się między innymi modele: sprężysto-plastyczny, lepkosprężysty, lepkoplastyczny. Model materiału sprężysto-plastycznego został omówiony w rozdziale 2 pracy.

Na podstawie powyższych zapisów zadanie kontaktu postawić można ogólnie w sposób następujący:

Dane jest obciążenie powierzchniowe  ${}^t\bar{\mathbf{q}}^A$  na  ${}^t\partial\Omega_q^A$  i  ${}^t\bar{\mathbf{q}}^B$  na  ${}^t\partial\Omega_q^B$  oraz siły masowe  ${}^t\mathbf{b}^A$  wewnątrz  ${}^t\Omega^A$  i  ${}^t\mathbf{b}^B$  wewnątrz  ${}^t\Omega^B$ . Dla każdej chwili czasu  $t \in (0, T)$  znaleźć  ${}^t\mathbf{u}(\mathbf{x})$  takie, że spełnione są:

- warunki brzegowe (3.7), (3.8),
- warunki kontaktu (3.13), (3.14), (3.15),
- warunki równowagi (3.16),
- równania konstytutywne.

Częstokroć mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem kontaktu, gdy jedno z ciał możemy potraktować jako sztywne. W takim przypadku mówimy o kontakcie jednostronnym [20,51,55].

W przypadku małych przemieszczeń, w zakresie sprężystym i w obecności tarcia Coulomba, gdy jedno z ciał można potraktować jako sztywne (kontakt jednostronny), możemy zadanie sformułować następująco:

dane jest obciążenie  $\bar{\mathbf{q}}$  na brzegu  $\partial\Omega_q$  i siły masowe  $\mathbf{b}$  wewnątrz  $\Omega$ ,

dla każdej chwili czasu  $t$  znaleźć  $\mathbf{u}$  takie, że:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})_{,j} + b_i = 0, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = e_{ijkl} u_{k,l} \quad na \quad \Omega, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad na \quad \partial\Omega_u, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{q}_i \quad na \quad \partial\Omega_q, \quad (3.21)$$

na brzegu  $\partial\Omega_c$  jest:

$$\left. \begin{array}{l} dla \quad u_n < s: \quad q_n = 0 \quad i \quad \mathbf{q}_t = \mathbf{0}, \\ dla \quad u_n = s: \quad q_n < 0 \quad i \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{0} \quad dla \quad |q_t| < \mu|q_n|, \\ \quad \quad \quad q_n < 0 \quad i \quad \mathbf{u}_t = -\lambda\mathbf{q}_t \quad dla \quad |q_t| = \mu|q_n|, \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

gdzie:

$u_n$  - jest przemieszczeniem w kierunku normalnym,  
 $s$  - wartością szczeliny w kierunku normalnym,  
 $u_t$  - przemieszczeniem stycznym do brzegu,  
 $\mathbf{q}_t = [q_\alpha q_\beta]$ ,  
 $\mu$  - współczynnik tarcia.

### 3.2. Sposoby rozwiązywania zadań kontaktu.

W większości praktycznych problemów nie jest możliwe znalezienie ścisłego rozwiązania analitycznego, dlatego też przedstawia się alternatywne podejście wariacyjne. W metodzie elementów skończonych (MES) spotykamy dwa sposoby sformułowania wariacyjnego w zastosowaniu do zadań kontaktu [116]. Pierwszym z nich jest minimalizacja z ograniczeniami (constrained minimization problem), prowadząca do nierówności wariacyjnej [20,40,51,54].

Zaletą tego podejścia jest to [116], że warunki brzegowe razem z warunkami kontaktu występują razem w jednej nierówności wariacyjnej i można użyć znanych metod minimalizacji do jej rozwiązania. Dowodzi się istnienia i jednoznaczność rozwiązania oraz wyznacza kryterium błędu [40,51].

Drugim sposobem jest zastosowanie zasady prac przygotowanych dla układu w konfiguracji odkształconej [5,114], stosowane powszechnie w pracach inżynierskich. Kłopotliwe przy takim podejściu jest to, że nie znamy na wstępie obszaru będącego w kontakcie i musimy poszukiwać go metodą prób i błędów [5]. Zaletą jest jego bezpośredniość, a algorytmy oparte na tym sformułowaniu są niezależne od modelu materiału. Można także w prosty sposób wprowadzić różne modele tarcia. Rzadko rozważa się tu istnienie, czy jednoznaczność rozwiązania, gdyż zapewnia to sama istota zjawiska.

W szeregu prac spotkać można również odmiany tego sformułowania, w których zmiennymi niezależnymi są zarówno przemieszczenia jak i naprężenia (np.[42]).

W budowanych algorytmach autor zastosował wspomniany wcześniej sposób podejścia wykorzystujący zasadę prac przygotowanych dla układu w konfiguracji odkształconej. Szczegóły realizacji tego podejścia przedstawione zostały w rozdziale 4. W dalszej części omówiono niektóre aspekty związane z rozwiązywaniem problemów kontaktu.

Jeśli w zadaniach ogólnego kontaktu uwzględnione zostaną nieliniowości geometryczne (duże przemieszczenia lub odkształcenia) lub materiałowe, trudniej jest wtedy osiągnąć zbieżność rozwiązania. Należy użyć wtedy procedur przyrostowo-iteracyjnych, rozwiązując zadanie poprzez kolejne linearyzacje

układu równań nieliniowych przy odpowiednio dobranej wielkości kroku. Można stosować ogólne procedury dla zadań nieliniowych (np.[41,52]), a w celu poprawienia zbieżności procesu iteracyjnego budować specjalne algorytmy [66]. W przypadku nieliniowości geometrycznych, czy materiałowych stosuje się wiele kroków obliczeniowych aby uzyskać rozwiązanie problemu.

Zjawisko kontaktu występuje na powierzchni styku dwóch kontaktujących się ze sobą ciał, MES natomiast pozwala na dyskretne wprowadzanie oddziaływań. Istnieją zatem w rozwiązaniach dwa różniące się podejścia w traktowaniu strefy kontaktu: podejście ciągłe, kiedy rozkład sił w strefie kontaktu aproksymuje się na podstawie sił węzłowych na brzegu [93,114] i podejście dyskretne, gdzie każdemu węzłowi, który wszedł w kontakt z sąsiednim ciałem przypisuje się wprost nieznane siły kontaktu.

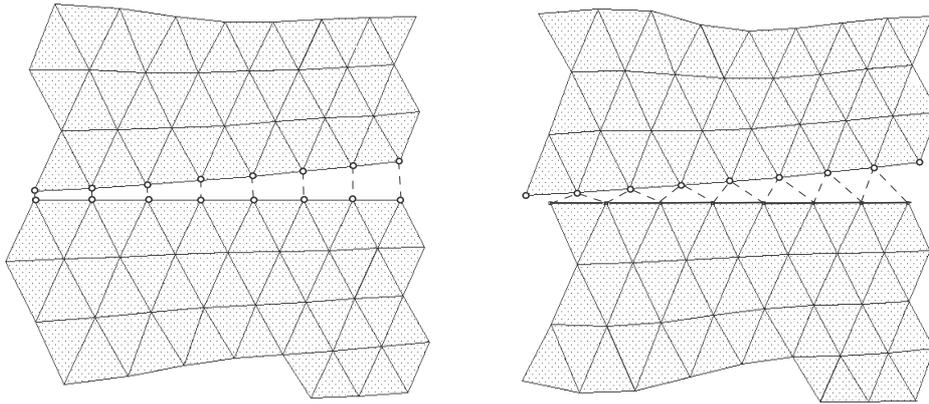
Bardziej naturalne jest podejście ciągłe, aczkolwiek podejście dyskretne jest bardziej efektywne i znajduje szerokie zastosowanie. Trzy sposoby wyznaczenia obciążenia rozłożonego można znaleźć np. w pracy [33], gdzie autor proponuje: założenie liniowego rozkładu nacisków pomiędzy węzłami i wyznaczenie nacisków na podstawie sił węzłowych, przy wykorzystaniu zasady prac przygotowanych, określenie oddziaływań w obszarze kontaktu ze składowych tensora naprężenia wewnątrz elementu, lub wyliczanie naprężeń kontaktu jako średniej dla dwóch sąsiednich elementów brzegu.

W algorytmach kontaktu wyróżnia się z reguły jedno ciało jako nadrzędne, będące celem kontaktu ("pan" - ang. master), a drugie, zamierzające wejść w kontakt, jako podrzędne - wchodzące w kontakt ("niewolnik" - ang. slave). Prowadzi to do uproszczenia analizy, w tak jednostronnie traktowanym kontakcie, tzn. narzuca się warunki kontaktu tylko na węzły powierzchni ciała podrzędnego (slave), nie pozwalając na ich wnikanie wgłąb ciała nadrzędnego (master). Tak więc węzły ciała wchodzącego w kontakt (slave) nie mogą penetrować ciała będącego celem (master), podczas gdy dopuszcza się by węzły powierzchni ciała będącego celem (master) penetrowały ciało wchodzące w kontakt (slave).

Możliwe jest też podejście, które nie wyróżnia żadnego z ciał i wtedy algorytm sprawdza warunek braku penetracji dla węzłów powierzchni obu ciał - tzw. podejście dwukrotne. Taki sposób podejścia jest dokładniejszy, choć wiąże się ze zwiększeniem nakładów obliczeń.

Istotnym zagadnieniem jest samo modelowanie strefy kontaktu. W przypadku małych przemieszczeń i małych obrotów można stosować tak proste modele jak kontakt typu węzeł-węzeł (rys.3.5a) [32,33]. Ogólnie lepiej jest wprowadzić kontakt typu węzeł-segment (rys.3.5b) [5,23,94]. W takim

przypadku węzły ciała podrzędnego (niewolnik) wchodzi w kontakt z segmentami utworzonymi przez węzły ciała nadrzędnego (pan). To drugie podejście pozwala na swobodę dyskretyzacji obu ciał, gdyż nie trzeba zapewniać dopasowania węzłów brzegowych jednego ciała do węzłów drugiego. Spełniony jednak musi być warunek, by węzły ciała podrzędnego były rozmieszczone nie rzadziej niż węzły ciała nadrzędnego.



Rys.3.5. Modele strefy kontaktu: a) model kontaktu węzeł-węzeł, b) model kontaktu węzeł-segment.

Węzły wchodzące w kontakt i węzły tworzące segmenty łączyć można, budując z nich nowe elementy [25,41,94]. Jest to podejście naturalne dla MES. Wtedy warunki kontaktu rozpatruje się w konkretnych elementach, można też dla tych elementów wyznaczać macierze sztywności, wektory sił itp. Jeśli nawet nie używa się elementów, to jednak można określić sztywność kontaktu badając wzajemne położenie węzła i segmentu.

Spotkać można dwa sposoby narzucania więzów w kontakcie:

- metoda mnożników Lagrange'a, która przyjmuje siły w kontakcie jako zmienne podstawowe i w sposób bezpośredni narzuca warunek braku penetracji [5,51,114],
- metoda funkcji kary [51], która dopuszcza pewną niedużą i kontrolowaną wartość penetracji wzajemnej punktów obu stykających się brzegów, wprowadzając siłę normalną oddziaływania  $f_n$  dla węzła wchodzącego w kontakt związaną z wartością penetracji  $p$  przez parametr kary  $\alpha$ :

$$f_n = \alpha p^k, \quad (3.23)$$

przy czym  $k > 0$ .

W oparciu o te dwie metody istnieją sformułowania mieszane [38,114].

Warto zaznaczyć, że metoda mnożników Lagrange'a rozszerza globalną macierz sztywności, nie zmieniając jej części pierwotnej, podczas gdy metoda funkcji kary zmienia profil globalnej macierzy powodując pewne trudności numeryczne.

### 3.3. Modelowanie tarcia

Zadania dotyczące kontaktu z tarciami są jednymi z trudniejszych. Obecność tarcia prowadzi do pojawienia się sił niekonserwatywnych i wynik zadania zależy istotnie od sposobu i kolejności działania poszczególnych sił. Ze względu na niekonserwatywność sił tarcia nie istnieje wyrażenie na energię potencjalną [20]. Użycie metod numerycznych do zadań z tarciami pozwala do pewnego stopnia pokonać te trudności.

Do tej pory w analizach numerycznych przeważają algorytmy wykorzystujące klasyczne prawo tarcia Coulomba [33,73,74]. Ma ono swoje wady, jednak ze względu na prostotę sformułowania jest powszechnie używane. Istnieją jednak próby bardziej wnikliwej analizy tego problemu zawierające opis tarcia oparty na analogii pomiędzy poślizgiem w tarciu, a plastycznym płynięciem (np.: [33]). Spotkać można też próby uwzględnienia nie tylko nieliniowości tarcia, ale także nieregularności powierzchni będącej w kontakcie. Przykładowo w pracy [73], definiuje się nieklasyczne prawa tarcia: nielocalne prawo tarcia, nieliniowe prawo tarcia czy wreszcie nieliniowe i nielocalne prawo tarcia.

Praca [26] stanowi próbę przedstawienia ogólnej teorii tarcia (w zakresie małych poślizgów) wzorowaną na teorii plastyczności (w zakresie małych odkształceń). Przedstawiona teoria opiera się na czterech podstawowych regułach.

1. Przemieszczenia w kontakcie rozłożyć można na:  $D^A$  - przyleganie (odwracalne) i  $D^S$  - poślizg (nieodwracalny). Przemieszczenie i poślizg są odpowiednikami części sprężystej i plastycznej odkształcenia w teorii plastyczności. Ponadto wprowadzić można skumulowany poślizg zdefiniowany zależnością:

$$D^C = \int \sqrt{dD_T^S dD_T^S} \quad (3.24)$$

gdzie  $D_T^S$  jest poślizgiem kierunkowym, który jest odpowiednikiem zredukowanych odkształceń plastycznych w teorii plastyczności.

2. Wprowadza się trzy prawa konstytutywne:

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{P} D^A \\ F^S &= \mathbf{Q} D^S, \\ F^C &= Q D^C \end{aligned} \quad (3.25)$$

gdzie:  $F$  - jest siłą tarcia związaną z przyleganiem  $D^A$

$F^S$  - jest siłą "zdzierania" związaną z poślizgiem  $D^S$ ,

$F^C$  - jest "siłą zużycia" związaną z kumulowanym poślizgiem  $D^C$ ,

$\mathbf{P}$  - jest "macierzą kary",

$\mathbf{Q}$  - jest "macierzą pomarszczenia" charakteryzującą kierunkowe zdzieranie koniuszków szorstkości powierzchni,

$Q$  - jest "modułem pomarszczenia".

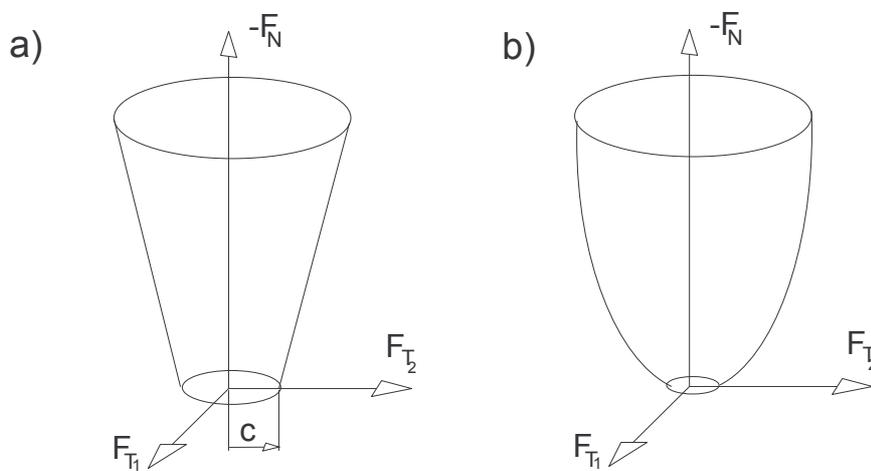
$F, F^S, F^C$  są tu kolejno odpowiednikami naprężenia, naprężenia kierunkowego i naprężenia zredukowanego, zaś związki konstytutywne (3.25) są odpowiednikami prawa Hooke'a, prawa kinematycznego i izotropowego osłabienia w plastyczności.

3. Formułuje się kryterium poślizgu:

$$Y(F, F^S, F^C) \leq 0, \quad (3.26)$$

i jest ono odpowiednikiem kryterium plastyczności.

Dwa przykładowe kryteria poślizgu pokazane zostały na rysunku 3.6.



Rys.3.6. Przykładowe kryteria poślizgu [26]: a) stożek Coulomb'a, b) paraboloida.

W przypadku idealnego tarcia (rys.3.6a) gdy siła tarcia zależy tylko od siły nacisku mamy:

$$Y(F) = \begin{cases} F_N \leq 0 & \text{- kontakt} \\ |F_T| + \mu F_N - C \leq 0 & \text{- poślizg.} \end{cases} \quad (3.27)$$

gdzie:  $|F_T| = \sqrt{F_{T1}^2 + F_{T2}^2}$ ,  $F_T$  jest składową styczną siły w kierunku poślizgu,  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia,

$C$  jest stałą charakteryzującą adhezję.

To kryterium jest odpowiednikiem kryterium Pragera-Druckera w plastyczności.

Uwzględniając mechanizm zdzierania i zużycia powierzchni (efekt podobny do plastycznego osłabienia) można sformułować kryterium poślizgu jako:

$$Y(F) = \begin{cases} F_N \leq 0 & \text{- kontakt} \\ (F_T - F_T^S)^2 + (\mu F_N - F^C) - C \leq 0 & \text{- poślizg.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Kryterium to przedstawia paraboloidę, której osie mogą przemieszczać się na skutek działania siły  $F_T^S$ , a której promień może zmniejszać się wraz z "siłą zużycia"  $F^C$ .

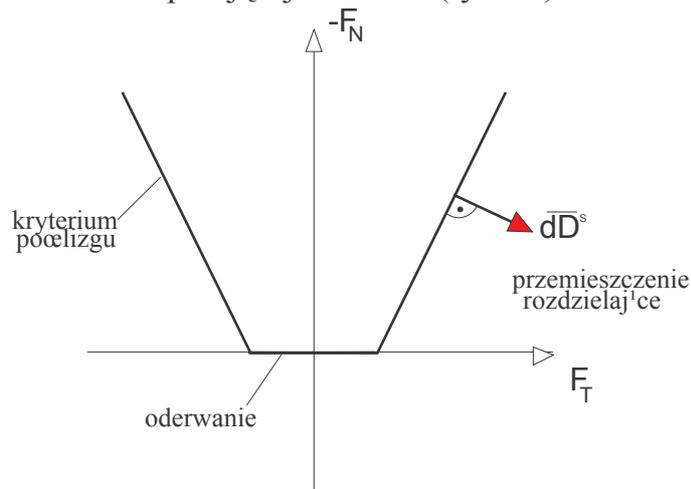
4. Można sformułować prawa poślizgu (analogicznie do praw płynięcia w plastyczności):

$$\begin{aligned} dD^S &= \lambda \frac{dZ}{dF} \\ -dD^S &= \lambda \frac{dZ}{dF^S}, \\ -dD^C &= \lambda \frac{dZ}{dF^C} \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie:  $Z(F, F^S, F^C)$  jest potencjałem,

$\lambda$  jest stałą.

W teorii tarcia nie można jednak się stowarzyszyć prawa poślizgu z odpowiednim kryterium poślizgu, ponieważ powodowałoby to pojawienie się składowej przemieszczenia separującej oba ciała (rys.3.7).



Rys. 3.7. Schemat prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem poślizgu dla tarcia idealnego.

W dalszych analizach zastosowano klasyczne prawo tarcia Coulomba.

## Rozdział 4

### **Zadanie dwuwymiarowe kontaktu sprężysto-plastycznego w ujęciu MES. Algorytm obliczeniowy i analiza jego dokładności.**

Budując aparat obliczeniowy do rozwiązywania zadań sprężysto-plastycznego kontaktu z tarcie, ze względu na ich skomplikowany charakter, najbezpieczniej jest zastosować możliwie prosty i niezawodny sposób modelowania kontaktu odpowiadający standardom typowego nieliniowego algorytmu MES.

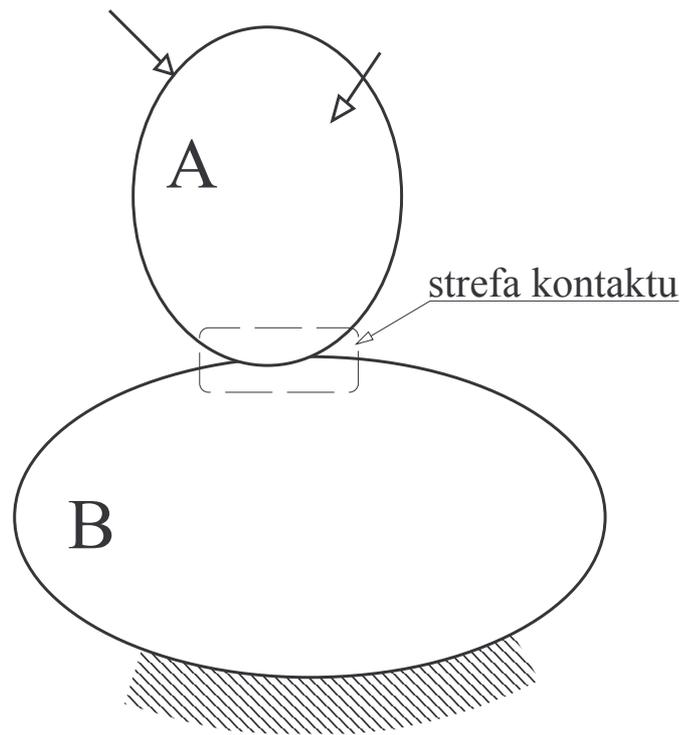
W rozdziale 3 przedstawiono różne aspekty dotyczące rozwiązywania zadań kontaktu. W szczególności pokazano sposoby narzucania warunku braku zachodzenia na siebie ciał wchodzących w kontakt.

Analiza dostępnych w literaturze rozwiązań (np.: [3,36,41,62,94]) i prowadzone przez autora próby numeryczne potwierdziły dużą efektywność podejścia opartego na użyciu elementów dystansowych. Podejście to jest korzystne, gdyż nie wymaga wprowadzania żadnych nowych niewiadomych, ani też stosowania specjalnych strategii rozwiązania, pozwalając na łatwą implementację w istniejących programach nieliniowych MES [94].

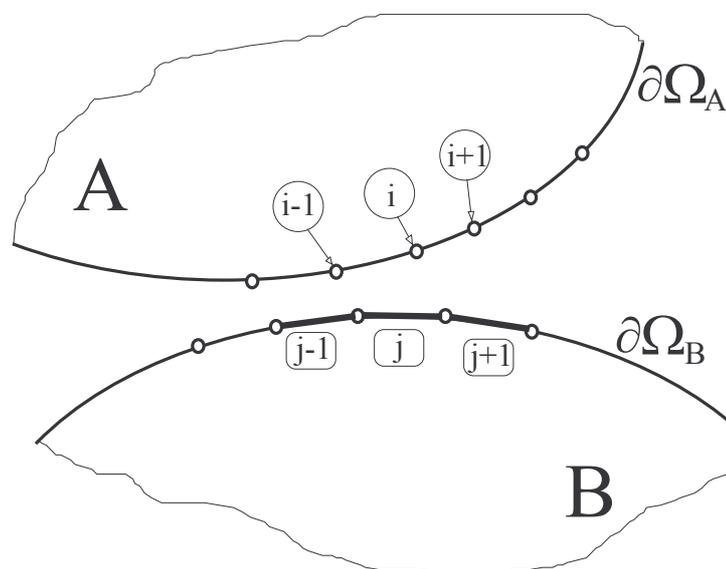
W oparciu o koncepcję elementu kontaktu trójwymiarowego przedstawioną w pracy [94], zbudowano algorytm kontaktu dwuwymiarowego i zaimplementowano do zbudowanych wcześniej przez autora, programów analizy MES [44,45,110].

#### **4.1. Model kontaktu zbudowany dla zadania dwuwymiarowego.**

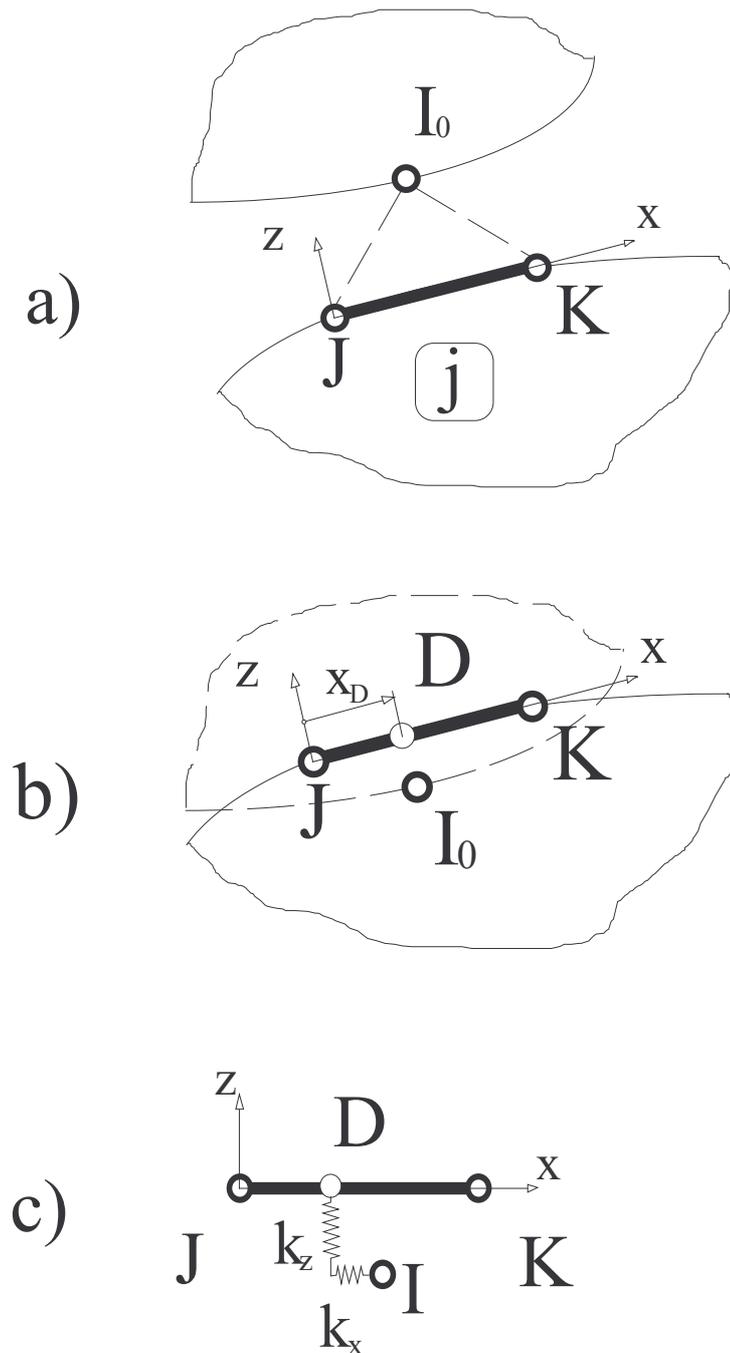
Na rysunku 4.1 przedstawiono sytuację kontaktu dwóch ciał: A - jest ciałem wchodzącym w kontakt, B jest celem kontaktu. To rozróżnienie dwóch ciał było już omówione w rozdziale 2. Decyzja, które ciało ma być obrane ciałem A, a które ciałem B jest arbitralna, zależy od typu zadania i niesie za sobą konsekwencje, które będą omówione dalej.



Rys.4.1. Sytuacja kontaktu dwóch ciał.



Rys.4.2. Strefa kontaktu.



Rys.4.3. Sposób wchodzenia w kontakt i powstanie nowego elementu: (a) faza zbliżania, (b) wejście w kontakt, (c) element kontaktu.

Rysunek 4.2 przedstawia sytuację w strefie kontaktu, którą opisać można w sposób następujący:

- Niech ciało A, wchodzące w kontakt, ma na swym brzegu  $\partial\Omega_c^A$  wyodrębnione węzły mogące potencjalnie wejść w kontakt z ciałem B; węzły te oznaczone zostały jako:  $\dots, i-1, i, i+1, \dots$
- Niech ciało B, będące celem kontaktu, ma na brzegu  $\partial\Omega_c^B$  segmenty mogące potencjalnie zetknąć się z węzłami brzegowymi ciała A:  $\dots, j-1, j, j+1, \dots$

- W każdej chwili czasu, każdemu węzłowi  $i$  brzegu  $\partial\Omega_c^A$  ciała A przypisany jest numer najbliższego mu segmentu  $j$  brzegu  $\partial\Omega_c^B$  ciała B mogącego potencjalnie wejść z nim w kontakt (rys.4.3.a).
- Współrzędne położenia węzła  $i$  ( $i \equiv I_0$ ) zostają sprawdzone w lokalnym układzie  $(x,z)$  segmentu  $j$  (rys.4.3.b).
- Jeśli węzeł  $i$  trafi w segment ( $z_{I_0} \leq 0$ ), wtedy punkt  $I_0$  zostaje związany z segmentem elementami sprężystymi w punkcie trafienia  $D$ .
- Założony zostaje nowy element:  $I, J, K$ , dla którego  $k_x, k_z$  są odpowiednimi sztywnościami tych elementów sprężystych (rys.4.3.c).
- Przesunięcie węzła  $I$  może odbywać się teraz stycznie do linii segmentu:  $\overline{JK}$ .

Związek pomiędzy siłami w "sprężynkach" elementu a przemieszczeniami w układzie lokalnym możemy zapisać jako:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} u_x \\ z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I \leq 0, |F_x| \leq \mu \cdot |F_z|, \quad (4.1)$$

gdzie:

$k$  - jest stałą sprężystą,

$u_x$  - jest przemieszczeniem punktu  $I$  względem punktu trafienia  $D$ ,

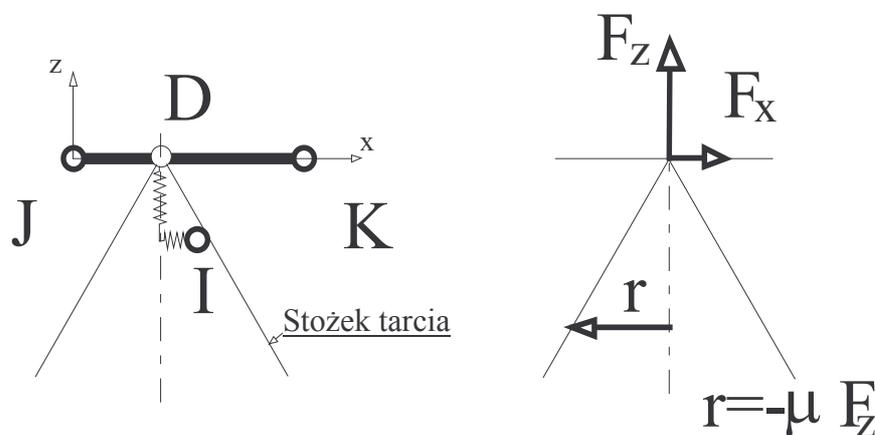
$z_I$  - jest współrzędną punktu  $I$  w układzie lokalnym segmentu,

$\mu$  - jest współczynnikiem tarcia.

Możliwe są następujące przypadki kontaktu:

1) Przyleganie ( brak poślizgu - (rys.4.4)); zmianę sił w "sprężynkach" elementu możemy wtedy zapisać jako:

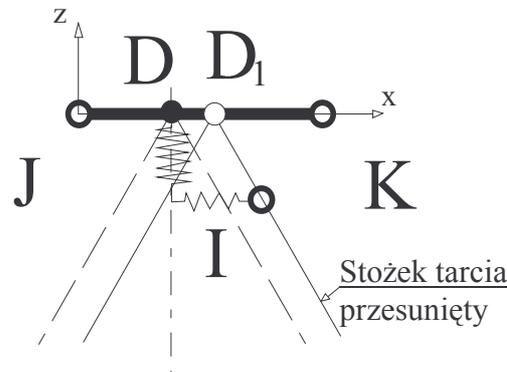
$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I \leq 0, |F_x| < \mu \cdot |F_z|. \quad (4.2)$$



Rys.4.4. Schemat elementu w sytuacji braku poślizgu.

2) Poślizg z tarcieniem (rys.4.5); punkt D zmienia swoje położenie z D na D<sub>1</sub> (poślizg), a siły w "sprężynkach" elementu są:

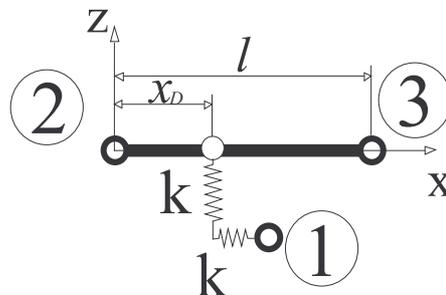
$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta z_I \end{Bmatrix} \text{ dla } z_I < 0, |F_x| = \mu^* |F_z| \quad (4.3)$$



Rys.4.5. Schemat elementu w sytuacji poślizgu.

## 4.2. Element kontaktu.

Schemat elementu kontaktu pokazany jest na rys.4.6.



Rys.4.6. Schemat elementu kontaktu.

Ugięcia "sprężynek" elementu kontaktu w układzie lokalnym segmentu są dane wektorem

$$\mathbf{u}_{spr}^T = [u_x, u_z] \quad (4.4)$$

natomiast przemieszczenia węzłów elementu kontaktu można opisać jako:

$$\mathbf{u}^T = [u_{1x}, u_{1z}, u_{2x}, u_{2z}, u_{3x}, u_{3z}] \quad (4.5)$$

Oba wektory można związać zależnością:

$$\mathbf{u}_{spr} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_1 & 0 & -L_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_1 & 0 & -L_2 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

jest macierzą funkcji kształtu, przy czym

$$\begin{cases} L_1 = 1 - \frac{x}{l} \\ L_2 = \frac{x}{l} \end{cases} \quad (4.7a)$$

są współrzędnymi barycentrycznymi.

Wektor sił w "sprężynkach" wyrazić można jako:

$$\mathbf{F} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ z_l \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

gdzie  $u_x$  jest przemieszczeniem punktu  $l$  liczonym od punktu ostatniego poślizgu.

Wektor sił węzłowych:

$$\mathbf{S}^T = [F_{1x} \quad F_{1z} \quad F_{2x} \quad F_{2z} \quad F_{3x} \quad F_{3z}] \quad (4.9)$$

związany jest z wektorem sił w sprężynkach zależnością

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}, \quad (4.10)$$

a macierz sztywności elementu ma postać:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}. \quad (4.11)$$

Macierz  $\mathbf{K}$  jest różna w przypadku przylegania i poślizgu; w przypadku przylegania jest

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

natomiast w przypadku poślizgu:

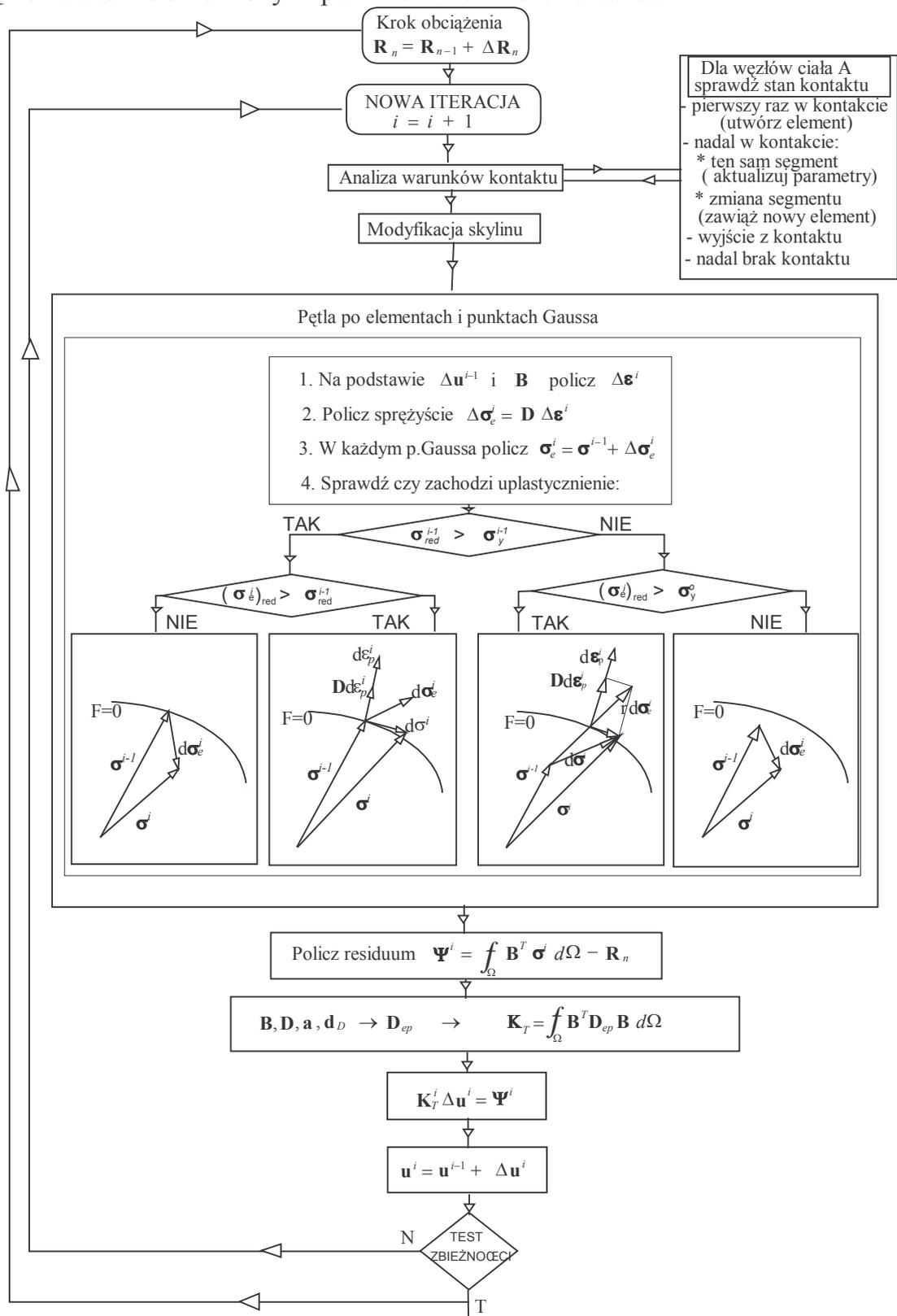
$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

W sytuacji braku kontaktu element przestaje istnieć (zostaje rozwiązany).

### 4.3. Algorytm dwuwymiarowego zadania sprężysto-plastycznego kontaktu z tarciem.

Zbudowany przez autora program analizy MES przeznaczony jest do rozwiązywania zagadnień liniowych i nieliniowych kontaktu z tarciem w zakresie zadań dwuwymiarowych (płaskiego stanu naprężenia -PSN, płaskiego stanu odkształcenia - PSO i osiowej symetrii) uwzględniając model sprężysto-plastyczny materiału i elementy mechaniki pęknięcia. Program współpracuje z

biblioteką elementów zawierającą izoparametryczne elementy: 3-, 4-, 6-, 8- i 9-węzłowe a także omówiony w punkcie 4.2 element kontaktu.



Rys.4.7. Schemat algorytmu dla zadania sprężysto-plastycznego kontaktu z tarcieniem (oznaczenia i wzory wyjaśniono w punkcie 2.2.2).

Algorytm wspomagany jest programem graficznym przygotowania danych (preprocesor) wyposażonym w automatyczny generator siatek, oraz programem graficznym prezentacji wyników (postprocesor). Wyniki wybranych wielkości prezentowane są w formie map izolinii lub przebiegów danej funkcji wzdłuż wybranej ścieżki.

W programie zaimplementowany został algorytm plastyczności [110], oparty na sformułowaniu przedstawionym w punkcie 3.2.2 [72,82,83], wykorzystującym prawo płynięcia Prandtla-Reussa stowarzyszone z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa-Henky`ego (HMH) (opcjonalnie także Coulomba-Treski). Uwzględniono izotropowe lub kinematyczne umocnienie materiału wykorzystując w tym ostatnim tzw. model warstwowy [72]. Przyjęto kontakt typu węzeł-segment, z tarciem Coulomba.

Algorytm kontaktu pozwala na automatyczne śledzenie strefy kontaktu reagując na wszelkie zmiany zawiązywaniem nowych lub rozwiązywaniem starych elementów kontaktu. Ponieważ procesor wykorzystuje technikę t.zw. skylinu, zatem w każdej iteracji, po ustaleniu sytuacji w strefie kontaktu, dokonywana jest jego modyfikacja. Jest to dużą zaletą programu, gdyż na bieżąco uwalnia się on od niepotrzebnych elementów kontaktu, które wiązałyby stopnie swobody.

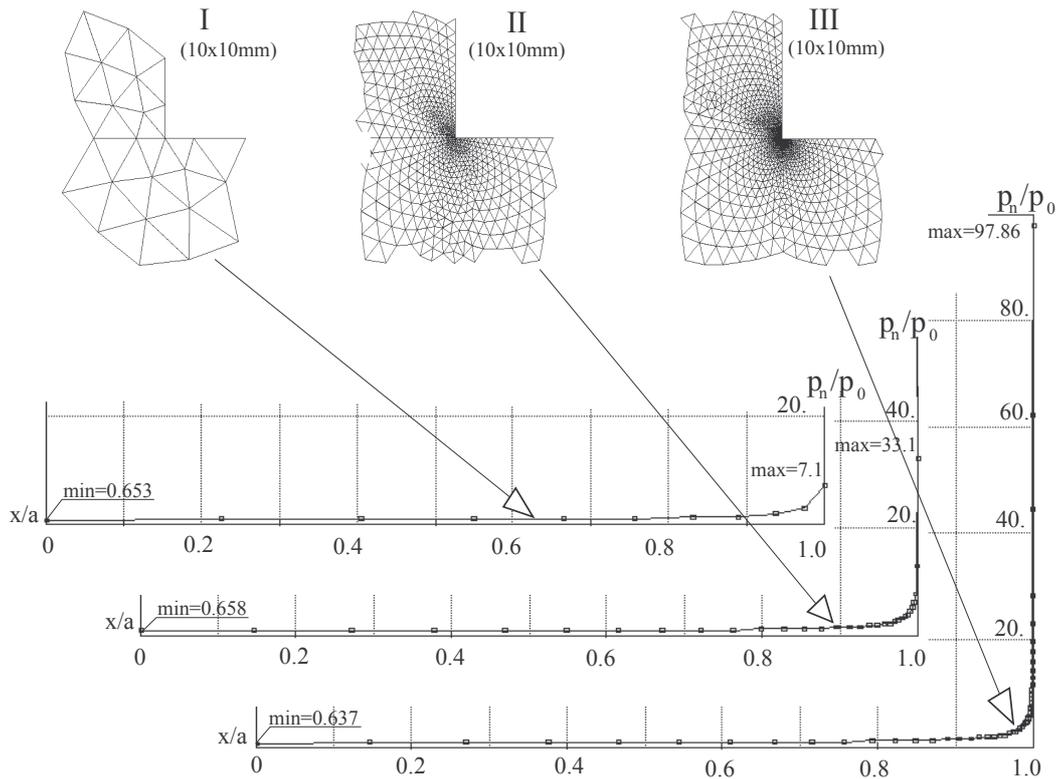
Możliwe jest sterowanie siłą, ciśnieniem, przemieszczeniem i temperaturą, co pozwala na swobodne modelowanie zadań. Schemat algorytmu pokazany jest na rysunku 4.7.

#### 4.4 Testy opracowanych algorytmów.

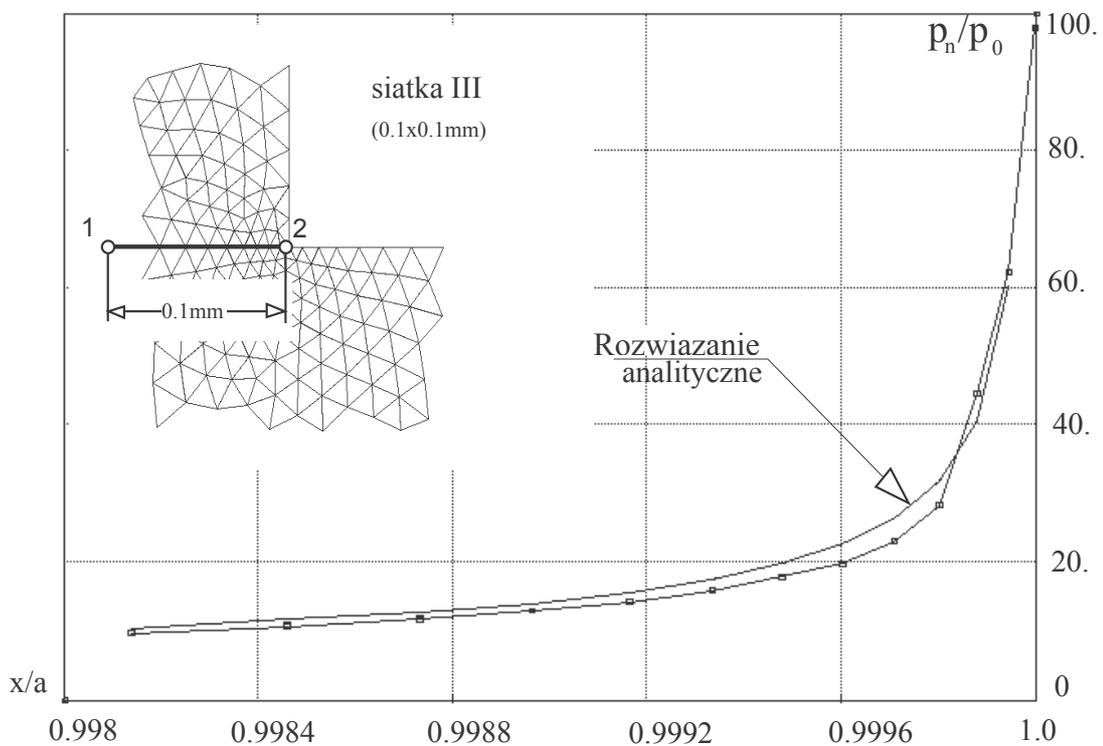
Omówiony w poprzednich punktach, opracowany przez autora algorytm i jego realizacja numeryczna (program MES), zostały poddane testom sprawdzającym ich poprawność i możliwości. Przedstawiono i porównano ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi i rezultatami doświadczeń wyniki analizy numerycznej następujących zagadnień:

- kontaktu sztywnego stempla ze sprężystą półprzestrzenią (p.4.4.1),
- kontaktu różnie ukształtowanych sprężystych stempli ze sprężystym podłożem w warunkach tarcia (p.4.4.2),
- kontaktu sprężystej tuleji ze sprężystym sworzniem (p.4.4.3),
- kontaktu sprężystej kulki wciskanej w sprężysto-plastyczne podłoże (p.4.4.4).





Rys.4.9. Rozkład bezwymiarowych nacisków pod stemplem ( $p_n/p_0$ ) dla kolejnych modeli MES.



Rys.4.10. Porównanie rozkładu bezwymiarowych nacisków w okolicy naroża dla modelu III (rys.4.9) z rozwiązaniem analitycznym.

#### 4.4.2. Kontakt sprężystego stempla ze sprężystym podłożem z uwzględnieniem tarcia.

Zadanie kontaktu nieskończonego sprężystego klina z półprzestrznią sprężystą zostało rozwiązane analitycznie w [24,29]. Uzyskany rozkład nacisków i naprężeń okazał się być funkcją kąta rozwarcia klina, stosunku modułu Younga klina i podłoża, współczynnika tarcia i kierunku poślizgu. Dla prostokątnego stempla wykonanego z tego samego materiału co podłoże, w ostrym narożu zawsze występuje geometryczna osobliwość naprężeń. Celem przedstawionego niżej testu numerycznego było sprawdzenie zachowania się przyjętego algorytmu w zadaniach kontaktu sprężystego w obecności tarcia.

Na rysunku 4.11. pokazany jest model obiektu i jego dyskretyzacja (około 4000 elementów i 4000 stopni swobody). W pobliżu naroża znacznie zagęszczono siatkę tak, że długość boku najmniejszego elementu wynosiła 0.0056mm (połowa szerokości stempla -  $a=50\text{mm}$ ). Obliczenia przeprowadzono dla współczynników tarcia:  $\mu = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  i  $0.4$ . Wyznaczone dla tych współczynników położenia punktu granicznego pomiędzy strefą tarcia rozwiniętego (poślizg), a strefą tarcia nierozwiniętego (przyleganie) pokazane są na wykresie z rysunku 4.12 razem z rezultatami badań numerycznych z pracy [33].

Uzyskane numerycznie typowe rozkłady izochrom w okolicy naroża stempla dla przypadku bez tarcia i z tarcielem przedstawione są kolejno na rysunkach 4.13c i 4.14c, natomiast rysunki 4.13a,b i 4.14a,b pokazują te same obrazy izochrom znalezione doświadczalnie [10]. Wyniki badań doświadczalnych i numerycznych są tu niemal identyczne.

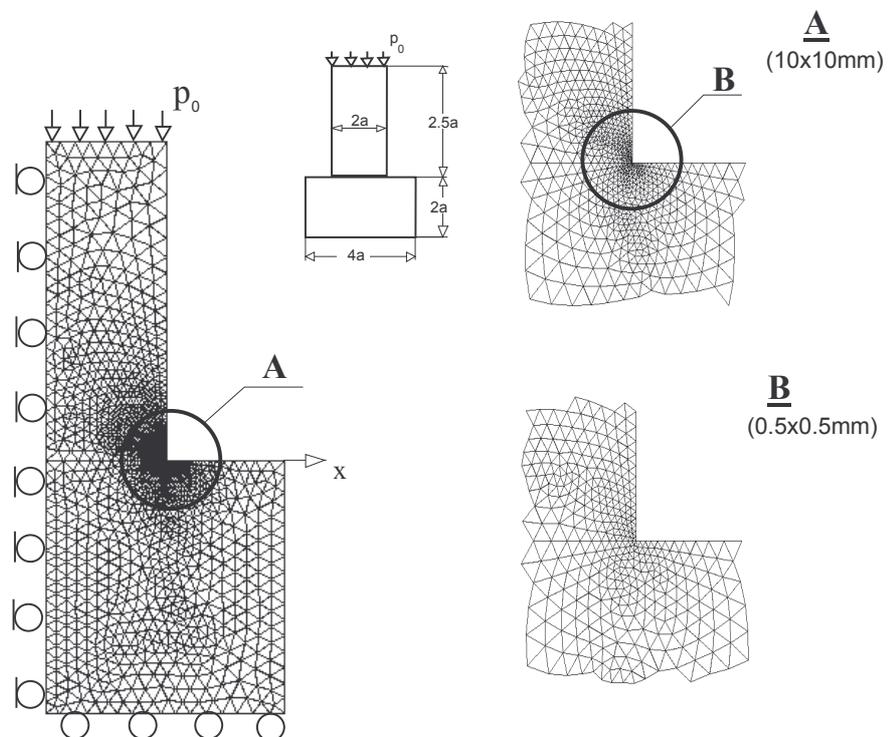
Analizie numerycznej poddano również różne sposoby ukształtowania stempla i podłoża (poprzez nacinanie rowków odciażających, zaokrąglanie naroża wypusty materiału itp.) tak, by całkowicie zlikwidować osobliwość, bądź w sposób znaczący ograniczyć jej siłę\*. Niektóre wyniki tych badań (zmiana potęgi osobliwości w zależności od położenia rowka odciażającego w stemplu i podłożu) porównano z rezultatami eksperymentów [10] na rysunkach 4.15 i 4.16. W przypadku, gdy podcięcie było wykonane w stemplu, potęga osobliwości  $p$  bardzo nieznacznie wzrasta (siła osobliwość maleje) wraz ze zmniejszaniem parametru  $\eta$  ( $\eta = l/D$ ), tzn. ze zbliżaniem podcięcia do powierzchni styku, natomiast gwałtownie spada (siła osobliwości rośnie) ze wzrostem

\* Zgodnie z [24], [29], przyjmując można, że naprężenia w obszarze bliskim narożu opisane być mogą potęgową zależnością  $\sigma = A\bar{r}^{(1-p)}$ , gdzie  $\bar{r}$  oznacza bezwymiarową odległość od punktu pierwszego kontaktu (naroża),  $p$ - potęgę osobliwości,  $A$  zaś jest stałą. Wielkość  $1-p$  zwykło się nazywać siłą osobliwości.

współczynnika tarcia  $\mu$ . Linia przerywana oddziela obszar, w którym nie tylko osłabienie, ale również koncentracja naprężeń w narożu praktycznie zanika na skutek gwałtownego spadku nacisków na powierzchni styku w okolicy naroża (w przypadku granicznym następuje rozdzielanie kontaktujących się ciał w tym rejonie).

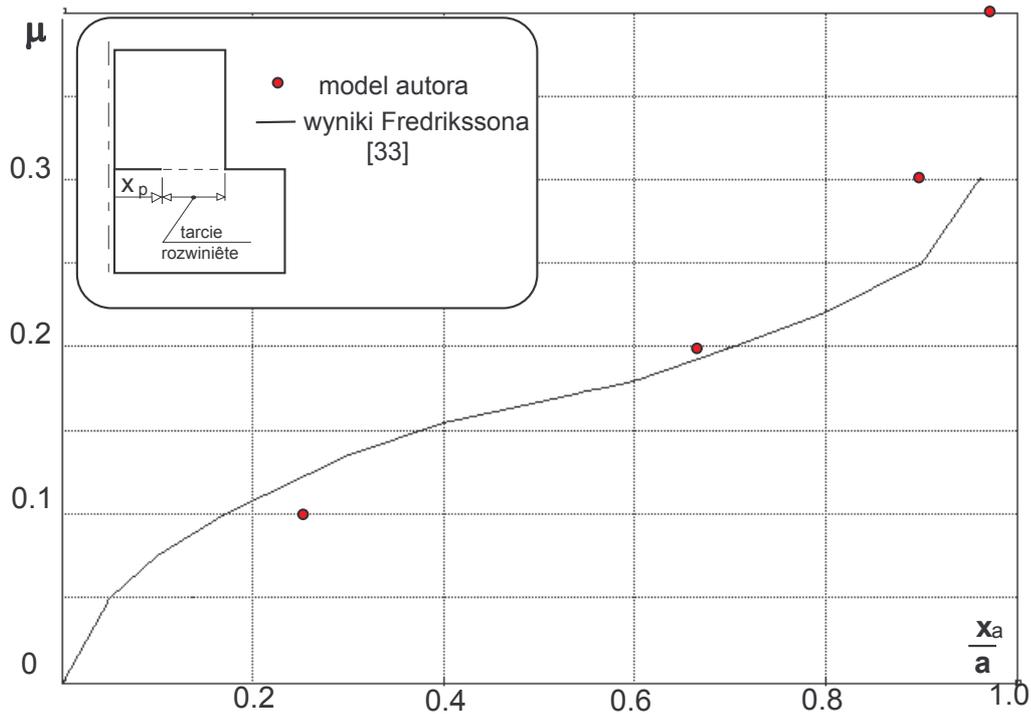
Wyniki eksperymentu potwierdzają analizę numeryczną - punkty doświadczalne układają się blisko wokół krzywych opisujących odpowiednie zależności uzyskane numerycznie dla tarcia  $\mu=0.2$  (zmierzony średni współczynnik tarcia na powierzchni styku dwóch elementów wykonanych z poliwęglanu wynosił 0.21). Wyraźnie gorsza zgodność zachodzi, gdy  $\mu=0$ . Wynika to stąd, że warstwa gęstego smaru stosowana do zlikwidowania tarcia działa w pewnej mierze jak podatna plastyczna przekładka między kontaktującymi się powierzchniami, powodując bardziej równomierny rozkład nacisków i w efekcie - podwyższenie potęgi osłabienia (zmniejszenie jej siły).

Uzyskana numerycznie wartość potęgi osłabienia dla układu stempel-podłoże bez podcięć i bez tarcia wyniosła  $p=0.775$ , podczas gdy jej wartość teoretyczna [46] jest 0.77.

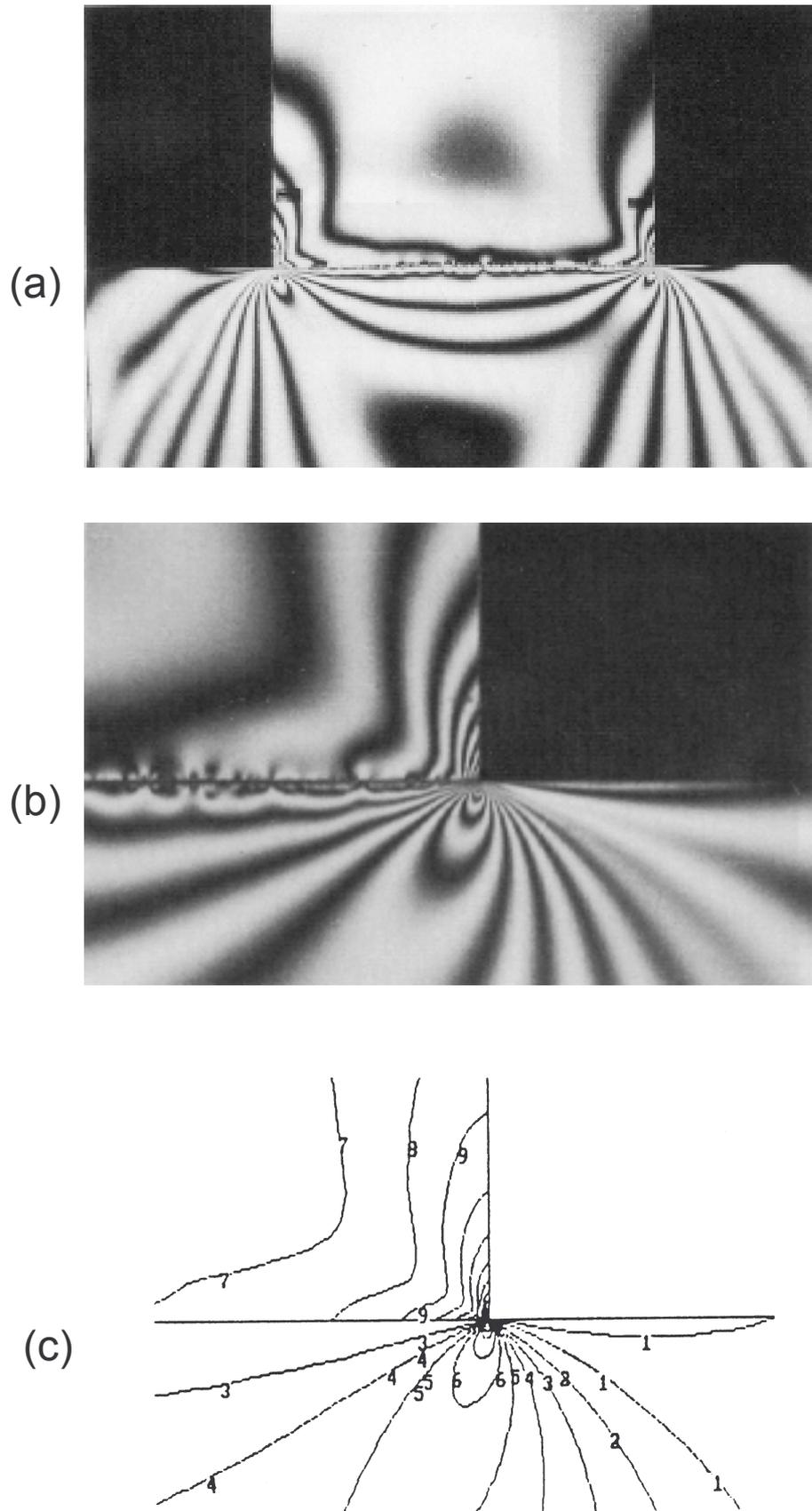


Rys.4.11. Model MES użyty w analizie [10].

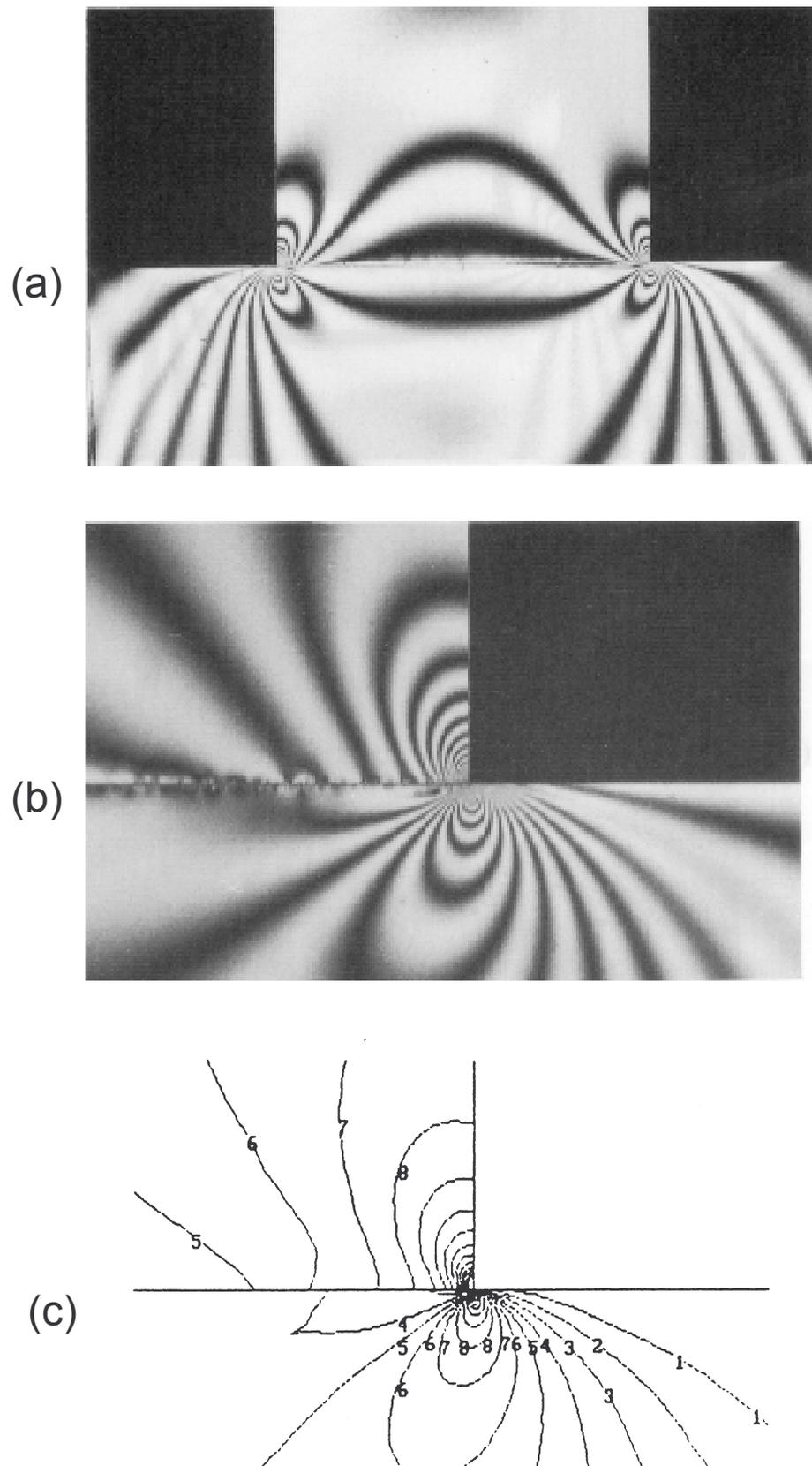
Wpływ wprowadzenia rowka odciążającego w półpłaszczyznę na potęgę osobliwości przedstawia wykres na rysunku 4.16. Potęga ta, początkowo praktycznie stała, zaczyna gwałtownie rosnąć, jeśli  $\xi$  zmniejsza się poniżej 0.6. Zgodność wyników doświadczalnych (naniesionych w postaci punktów na wykres) z wynikami analizy numerycznej jest dobra, podobnie jak w poprzednim przypadku.



Rys.4.12. Położenie granicy strefy poślizgu dla różnych współczynników tarcia porównane z rezultatami badań przedstawionych w pracy [33].

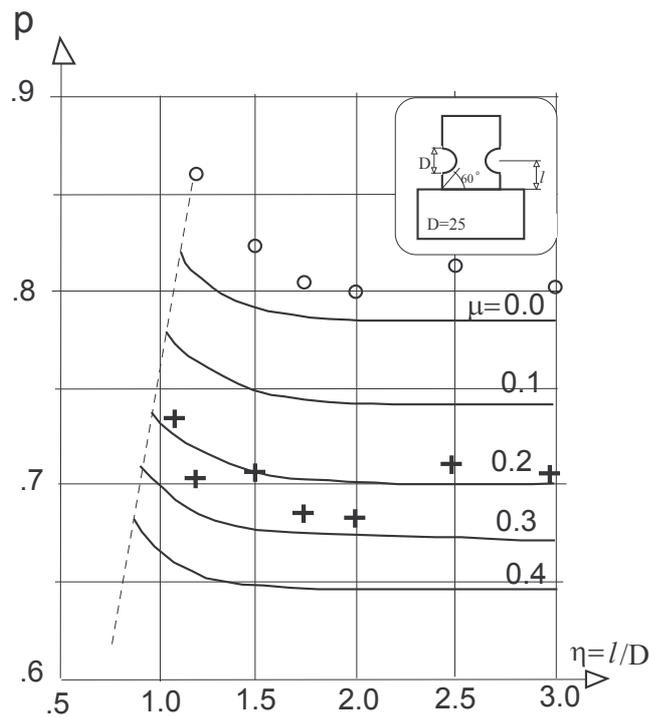


Rys.4.13. Układ izochrom dla przypadku kontaktu stempla z półpłaszczyzną bez tarcia: (a) obraz izochrom w całym modelu; (b) powiększenie okolicy prawego naroża; (c) wyniki analizy MES przeprowadzonej przez autora.

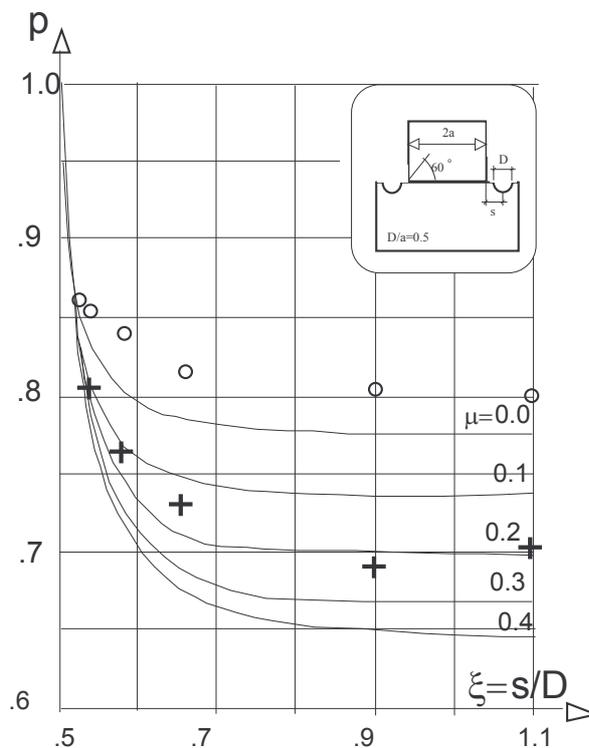


Rys.4.14. Układ izochrom dla przypadku kontaktu stempla z półpłaszczyzną w obecności tarcia: (a) obraz izochrom w całym modelu; (b) powiększenie

okolicy prawego naroża; (c) wyniki analizy MES przeprowadzonej przez autora.



Rys.4.15. Zależność pomiędzy potęgą osobliwości  $p$  i bezwymiarową odległością  $\eta$ : przypadek rowka w stemplu. (—) - wynik analizy MES; (○) - wyniki doświadczenia dla  $\mu \cong 0$ ; (+) - wyniki doświadczenia dla  $\mu_{sr} \cong 0.21$ .



Rys.4.16 Zależność pomiędzy potęgą osobliwości  $p$  i bezwymiarową odległością  $\xi$ : przypadek rowka w półprzestrzeni dla  $D/a=0.5$ . (—) - wynik analizy MES; (○) - wyniki doświadczenia dla  $\mu \cong 0$ ; (+) - wyniki doświadczenia dla  $\mu_{sr} \cong 0.21$ ; (---) - zależność dla  $D/a=0$ ,  $\mu = 0$ .

### 4.4.3. Osiosymetryczny kontakt wałka z piastą.

Geometryczne osobliwości naprężeń występują również w przypadku sprężystego kontaktu ciał osiosymetrycznych. Przykładem tu być może współpraca wałka z tarczą w sytuacji gdy wał jest dłuższy niż szerokość tarczy. W okolicy ostrej krawędzi otworu tarczy i w sąsiadującym z nim obszarze wału naprężenia mogą rosnać w sposób nieograniczony, przy czym siła tego wzrostu zależy od wielkości tarcia między kontaktującymi się ciałami i kierunku sił tarcia, który wynika ze sposobu obciążenia układu\*.

Znanym od dawna w praktyce, chociaż nie przeanalizowanym dotychczas ilościowo, sposobem osłabienia bądź eliminacji osobliwości jest nacinanie rowków odciążających w tarczy lub wale. Przedstawiona niżej numeryczna analiza tego zagadnienia i porównanie przedstawionych tu wyników z eksperymentem [11] posłużyła dodatkowo autorowi jako następny test sprawdzający zachowanie zbudowanego przez niego algorytmu MES.

Na rysunku 4.17 przedstawione zostały modele zadań: tarczy (grubej tulei) będącej w kontakcie z wałem z rowkami odciążającymi naciętymi bądź w tarczy, bądź w wale. Rozważono dwa przypadki obciążeń: a) obciążenie tarczy ciśnieniem na zewnętrznej powierzchni cylindrycznej (w kierunku promieniowym), b) osadzenie tarczy z wciskiem na wale. W obydwu przypadkach obciążenia ustalano średnią wartość nacisków na powierzchni kontaktu równą  $p_0 = 100 \text{ MPa}$ . Zbudowane modele MES, podobnie do modeli z p.4.4.2, posiadały około 4000 stopni swobody.

Wyniki analiz porównano z doświadczeniem\*\* [11]. Na rysunku 4.18, przedstawiono typowy rozkład izochrom w płaszczyźnie R-z dla przypadku obciążenia układu ciśnieniem. Wyniki analizy numerycznej i rezultaty doświadczeń są bardzo zbliżone. Warto podkreślić, że obszar koncentracji naprężeń w sąsiedztwie ostrej krawędzi otworu tarczy jest tu znacznie mniejszy niż w zadaniu płaskim (patrz p.4.4.2).

Wykresy przedstawione na rysunku 4.19 przedstawiają rozkład znormalizowanych nacisków na powierzchni kontaktu  $p_n/p_0$  i znormalizowanych naprężeń obwodowych w tarczy  $\sigma_{obw}/p_0$ . Rowek wywołuje większe odciążenie w przypadku wcisku. Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w tarczy wykazuje osobliwy charakter na krawędzi. W przypadku wcisku naprężenia obwodowe, które w tarczy są oczywiście dodatnie

\* Istnieją dwa zasadniczo różne, z uwagi na kierunek sił tarcia, sposoby obciążenia układu: połączenie wciskowe i połączenie suwliwe gdzie siły wewnętrzne są wywołane ciśnieniem przyłożonym na zewnętrznej powierzchni walcowej tarczy.

\*\* Badania doświadczalne przeprowadzono elastooptyczną metodą zamrażania naprężeń.

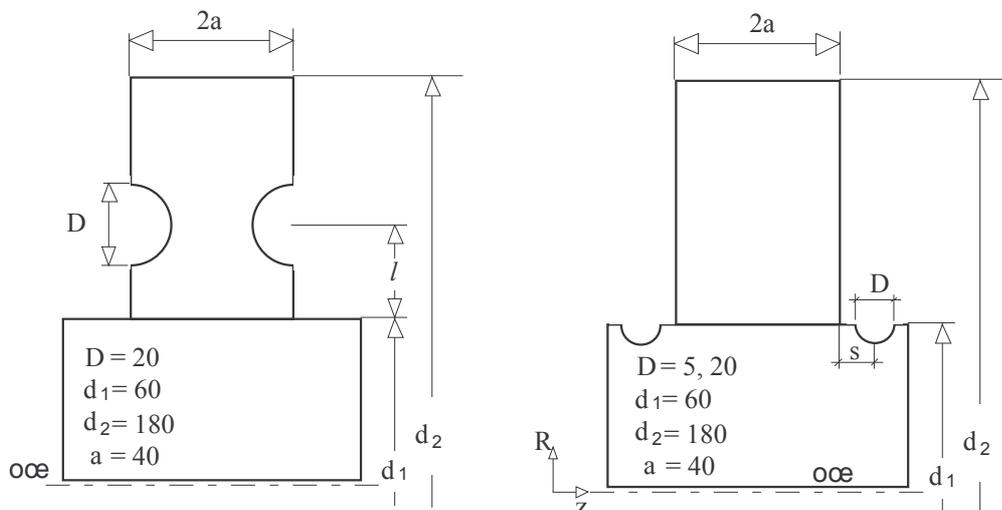
(rozciągające), zmierzają do wartości ujemnych (ściskanie), w miarę zbliżania się do tej krawędzi. Badanie modelu przy większej gęstości siatki elementów pokazały, że można uzyskać tu wysokie wartości ujemne.

Zmiana potęgi osobliwości  $p$  w funkcji parametru  $\eta = l/D$  i współczynnika tarcia  $\mu$  dla rowka w tarczy w obydwu przypadkach obciążenia pokazana jest na rys.4.20. Linie na wykresie prezentują wyniki analiz numerycznych, a naniesione punkty pokazują wyniki badań doświadczalnych. Jak widać zbliżenie podcięcia do wierzchołka, wywołując spadek nacisków, nie powoduje jednak znacznego wzrostu potęgi osobliwości (spadku siły osobliwości).

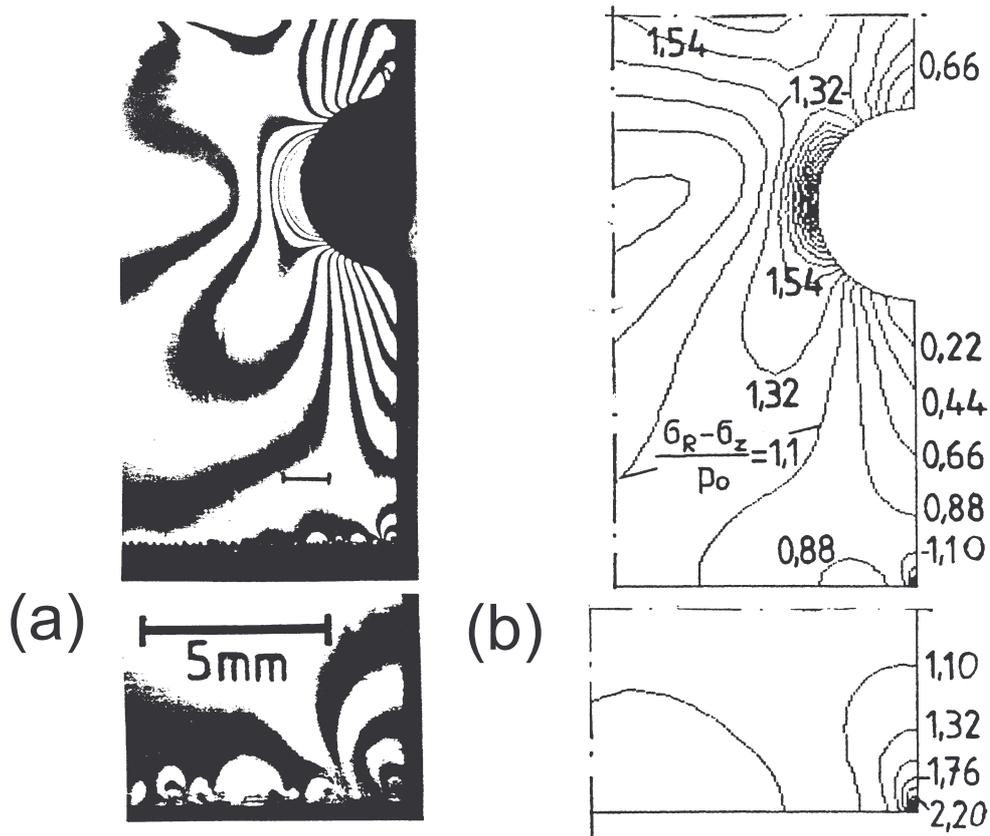
Można zauważyć istotną różnicę we wpływie tarcia na wyniki analizy: dla przypadku obciążenia ciśnieniem, wzrost współczynnika tarcia powoduje malenie potęgi osobliwości (wzrost siły osobliwości), podczas gdy dla przypadku wcisku wzrost współczynnika tarcia wywołuje wzrost potęgi osobliwości (spadek siły osobliwości). Zjawisko to należy (jak wspomniano już poprzednio) tłumaczyć tym, że w obu przypadkach obciążenia mamy przeciwny kierunek poślizgu tarczy po wale, a zatem przeciwny zwroty sił stycznych (tarcia).

Zmianę potęgi osobliwości dla przypadku rowka w wale pokazuje rys.4.21. Tarcie ma tu podobny wpływ na potęgę osobliwości jak poprzednio. W miarę zbliżania rowka do krawędzi otworu, gwałtownie rośnie potęga osobliwości, by dla  $\xi = 0.5$ , osiągnąć wartość 1. Oznacza to, że osobliwość znika.

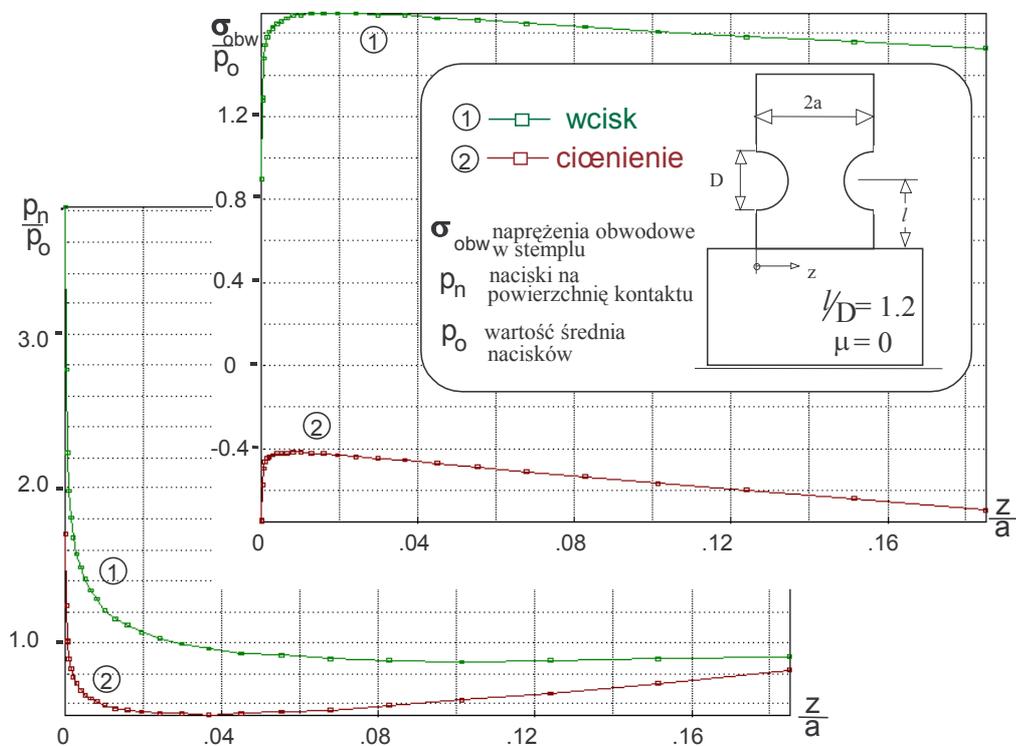
Przedstawione wyniki analizy MES z wykorzystaniem opracowanego przez autora programu wskazują na dużą precyzję pracy przyjętego algorytmu w badaniu kontaktu z osobliwościami w obecności tarcia. Badania doświadczalne potwierdzają całkowicie poprawność uzyskiwanych tu rezultatów.



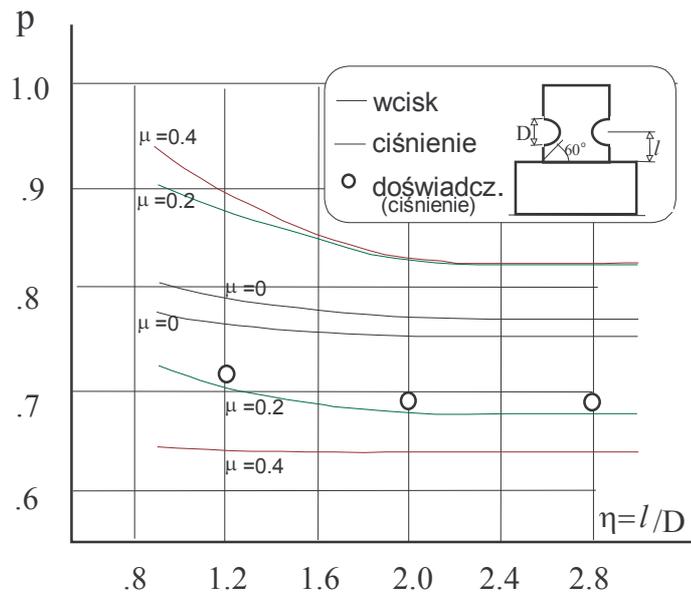
Rys.4.17. Analizowane modele.



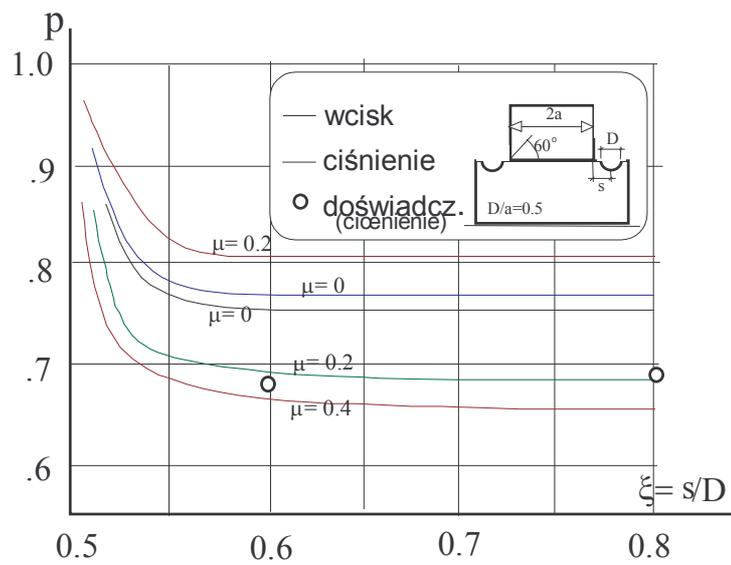
Rys.4.18. Rozkłady izochrom uzyskane: a) doświadczalnie [11], b) numerycznie.



Rys.4.19. Rozkłady nacisków i naprężeń obwodowych w tarczy dla połączenia wciskowego i obciążenia ciśnieniem ( $l/D = 1.2$  i  $\mu = 0$ ).



Rys.4.20. Potęga osobliwości  $p$  w funkcji parametru  $\eta = l/D$ .

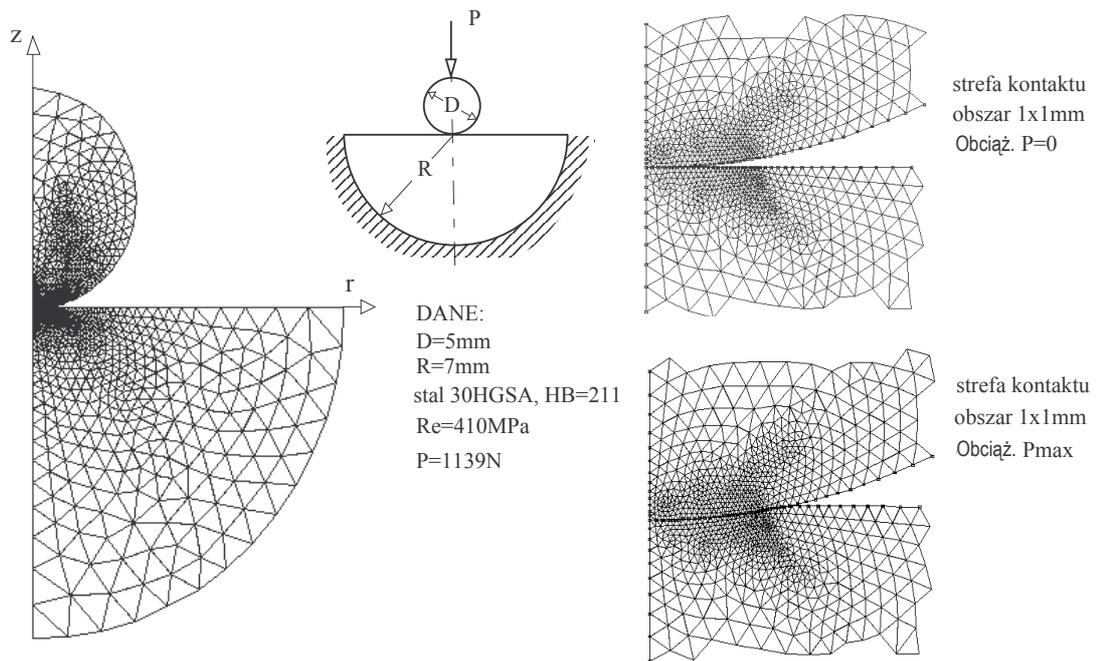


Rys.4.21. Potęga osobliwości  $p$  w funkcji parametru  $\xi = s/D$ .

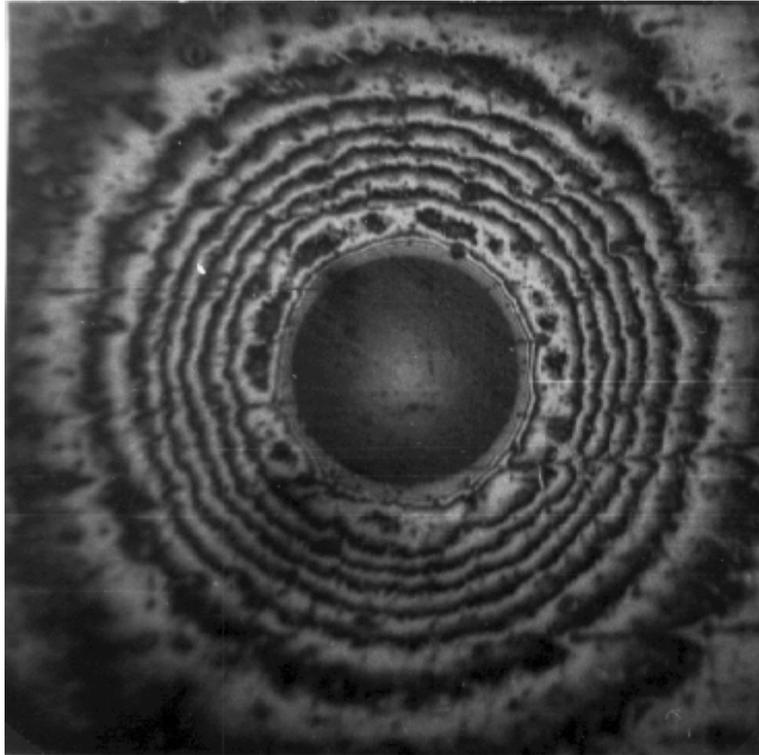
#### 4.4.4. Kulka wciskana w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną .

Dla sprawdzenia poprawności programu w zakresie sprężysto plastycznym przeprowadzono numeryczną analizę wciskania kulki w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną. Wyniki porównane tu zostały z rezultatami badań doświadczalnych [8]. Model MES pokazany na rys.4.22, wykorzystywał 3040 pierścieniowych elementów trójwęzłowych i około 3000 stopni swobody. Nie uwzględniono tarcia.

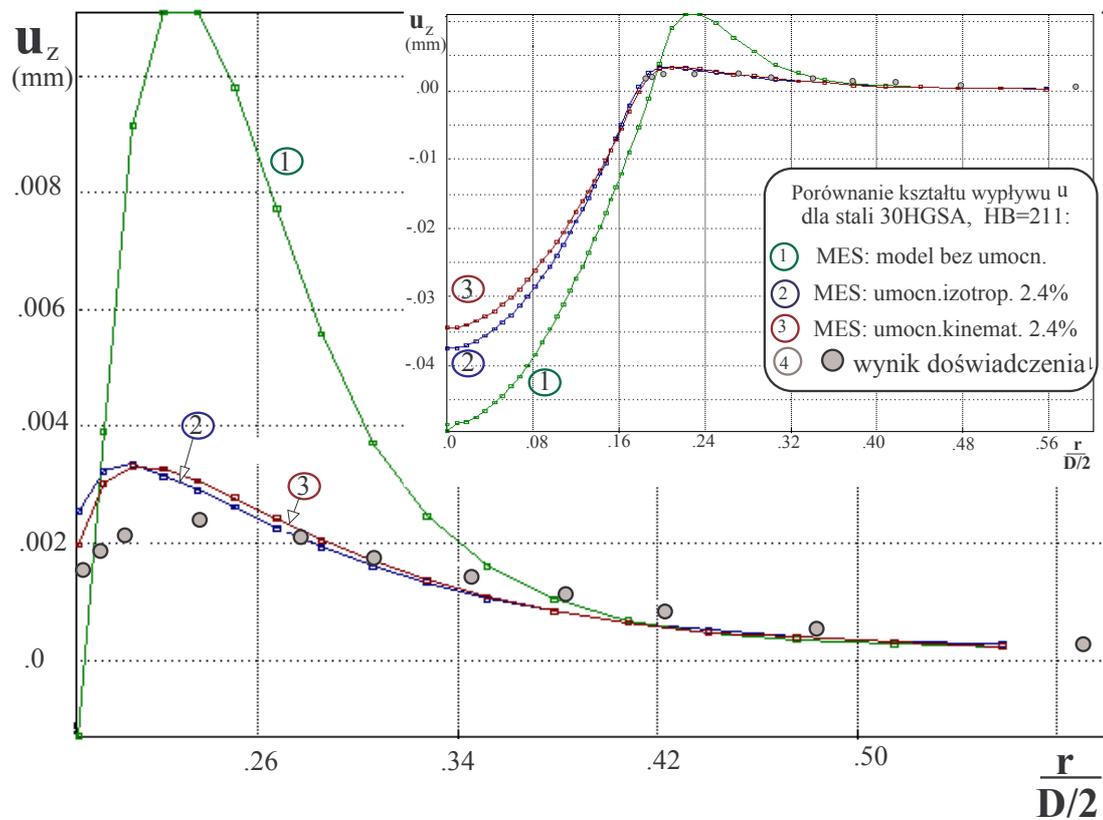
W doświadczeniu kulkę wciskano w stal 30HGSA o twardości HB=211. W analizie numerycznej własności materiału opisano w sposób przybliżony przyjmując wartość granicy plastyczności  $R_e = 410 MPa$  i umocnienie liniowe  $E_u = 2.4\% E$ . Dla porównania rozwiązano zadanie dla przypadku bez umocnienia oraz z umocnieniem izotropowym i kinematycznym.



Rys.4.22. Wciskanie kulki w półprzestrzeń sprężysto-plastyczną : model MES.



Rys.4.23. Uzyskany doświadczalnie obraz warstwicy powierzchni wokół odcisku wykonanego w stali 30HGSA (HB=211) [8].



Rys.4.24. Porównanie wyników kształtu wypływu dla modelu MES z wynikami badań doświadczalnych.

Kształtu trwałego (plastycznego) wypływu materiału wokół odcisku (przemieszczenia pionowe  $u_z$  punktów leżących na powierzchni półprzestrzeni) po odciążeniu uzyskany w wyniku obliczeń numerycznych i eksperymentu pokazane są na rys.4.24. Widoczny jest ogromny wpływ umocnienia materiału na przebieg procesu wciskania. Wyniki uzyskane dla modelu z umocnieniem kinematycznym są najbliższe doświadczeniu, natomiast nieuwzględnienie umocnienia w ogóle prowadzi tu do bardzo znaczących różnic. Niewielkie stosunkowo rozbieżności między wynikami doświadczenia i analizy numerycznej modeli z umocnieniem, wynikają głównie z przyjęcia uproszczeń w opisie charakteru i wielkości tego umocnienia. Modelowanie stosunkowo dużych odkształceń plastycznych w sposób liniowy geometrycznie (małe odkształcenia, małe przemieszczenia), wydaje się tu mieć mniejsze znaczenie.

#### 4.4.5. Podsumowanie wyników przykładów testowych.

Przedstawione wyniki badań numerycznych wykazują dużą skuteczność opracowanego algorytmu przy rozwiązywaniu złożonych zadań kontaktu. Weryfikacji poddano działanie tego algorytmu w zadaniu prostego kontaktu normalnego, gdy jedno z ciał (stempel) było sztywne (patrz p.4.4.1). Pokazano, że użycie prostych elementów trójwęzłowych może, przy dobrze zbudowanej siatce pozwolić na skuteczne modelowanie osobliwości pola naprężeń. Sprawdzono działanie algorytmu w zadaniach kontaktu ciał sprężystych (patrz p.4.4.2, 4.4.3); porównanie uzyskanych wyników z doświadczeniami [10,11] pokazuje, że jest on silnym narzędziem analizy płaskich i osiowosymetrycznych zadań kontaktu z tarciami, pozwalając na zastąpienie kosztownych badań doświadczalnych obliczeniami numerycznymi. Może być użyty do programowania doświadczeń.

Wyniki analizy sprężysto-plastycznego kontaktu (patrz p.4.4.4) porównane z rezultatami eksperymentu [8] wskazują, że pomimo nieuwzględnienia nieliniowości geometrycznych algorytm jest w stanie dać zadowalające rezultaty w zagadnieniach, w których występują znaczne uplastycznienia.

Reasumując zbudowany program MES nadaje się z powodzeniem do przeprowadzania złożonych obliczeń sprężysto-plastycznego kontaktu z tarciami, obliczeń, których wyniki zostaną zaprezentowane w dalszej części pracy.

## Rozdział 5

### Uzyskane rozwiązania zagadnień dwuwymiarowych sprężysto-plastycznego kontaktu

#### 5.1. Wciskanie stempla w półpłaszczyznę. Rozwój stref plastycznych i naprężeń własnych.

W zadaniach sprężystego kontaktu, takich jak wciskanie stempla w półpłaszczyznę, bądź współpraca grubej tarczy z wciśniętym w nią wałem pojawiają się osobliwości naprężeń. W obszarach bliskich ostrego naroża stempla i krawędzi otworu tarczy oraz przyległych do nich miejscach półpłaszczyzny lub wału naprężenia rosną w sposób nieograniczony. W punkcie 4.4.2 i 4.4.3 pokazano rozwiązania takich zadań sprawdzając skuteczność opracowanego algorytmu obliczeniowego.

W rzeczywistości osobliwości naprężeń nie mogą występować, gdyż ustrój doznaje odkształceń plastycznych w strefie dużych naprężeń, dostosowując się do istniejącego stanu obciążenia. Towarzyszy temu redystrybucja sił wewnętrznych, a po odciążeniu pozostaje w materiale stan naprężeń resztkowych.

W dostępnej autorowi literaturze, wśród wielu przedstawionych rozwiązań zadań sprężysto-plastycznego kontaktu (patrz p.1.2), brak jest pełnej analizy problemu sprężysto-plastycznego stempla wciskanego w sprężysto-plastyczną półprzestrzeń.

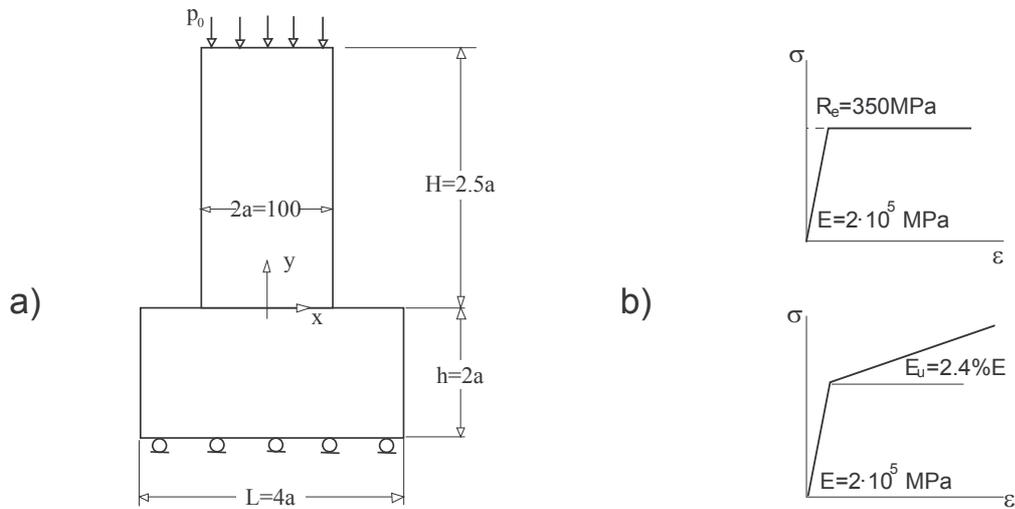
Celem autora jest tu zbadanie rozwoju stref plastycznych i analiza naprężeń resztkowych oraz wyznaczenie rozkładu nacisków między ciałami pozostającymi w kontakcie, przy przyjęciu sprężysto-plastycznej charakterystyki materiału i uwzględnieniu tarcia.

##### 5.1.1. Zakres przeprowadzonych badań

Badania przeprowadzono [12] dla płaskiego stanu naprężenia (PSN) i płaskiego stanu odkształcenia (PSO), przy różnych charakterystykach umocnienia materiału (materiał sprężysto-idealnie plastyczny i materiał sprężysto-plastyczny z liniowym umocnieniem izotropowym - rys.5.1)

W analizie numerycznej wykorzystano siatkę elementów zbudowaną dla zadania przedstawionego w punkcie 4.4.2. Obliczenia przeprowadzono dla współczynników tarcia  $\mu = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . W kolejnych krokach zwiększano wartość obciążenia (ciśnienia), aż do wielkości  $p_0$  (rys.5.1), a

następnie dokonywano stopniowego odciążania. Przyjęto warunek plastyczności Hubera-Misesa-Henck`ego (HMH), a w pewnych przypadkach warunek Treski-Cuolomba.



Rys.5.1. Sprężysto-plastyczny kontakt stempla z półpłaszczyzną:  
a) model obiektu, b) modele materiału.

### 5.1.2. Analiza wyników badań

Wyniki badań przedstawione są na rysunkach 5.2÷5.9.

Rysunek 5.2 pokazuje rozkład nacisków pod stemplem w płaskim stanie naprężenia (PSN) dla obu modeli materiału i współczynników tarcia  $\mu = 0$  i  $\mu = 0.4$ . Podobny przebieg dla płaskiego stanu odkształcenia (PSO) przedstawia rysunek 5.3. Widać wyraźnie różnicę w rozkładzie nacisków zależną od modelu materiału i wielkości tarcia.

W płaskim stanie naprężenia dla materiału bez umocnienia i gdy  $\mu = 0$  naciski w strefie uplastycznionej stabilizują się na wartości  $p_n/p_0 = 1.75$  odpowiadającej granicy plastyczności ( $R_e = 350 \text{ MPa}$ ) dla obciążenia  $p_0 = 200 \text{ MPa}$ . Wprowadzenie do strefy kontaktu tarcia o współczynniku  $\mu = 0.4$  nieznacznie podwyższa maksymalne naciski ( $p_n/p_0 = 1.85$ ) jednakże w wierzchołku naroża naciski spadają do wartości równej granicy plastyczności materiału.

W przypadku materiału z umocnieniem izotropowym o wartości 2.4% i dla  $\mu = 0$  uzyskujemy maksimum nacisków w pobliżu naroża stempla. Wprowadzenie tarcia ( $\mu = 0.4$ ) sprawia, że naciski w narożu gwałtownie rosną, a rozkład ich ma charakter wyraźnie osobliwy. Ta osobliwość rozkładu nacisków możliwa ze względu na liniowy charakter umocnienia, występuje nawet przy bardzo nieznacznym tarcia ( $\mu = 0.1$ ).

W płaskim stanie odkształcenia (PSO) we wszystkich przypadkach niezależnie od wielkości tarcia i charakteru umocnienia naciski na powierzchnię kontaktu osiągają ograniczone wartości chociaż krzywe ich rozkładu nie mają charakterystycznego załamania w miejscu, gdzie następuje pierwsze uplastycznienie materiału (jak w PSN - wykresy C i D na rys.5.2). Dzieje się tak dlatego, że PSO wywołuje stan trójwymiarowego ściskania w strefie kontaktu i materiał ulega uplastycznieniu przy większej wartości naprężeń normalnych. Podobnie jak w przypadku PSN obecność tarcia powoduje podwyższenie nacisków w strefie bliskiej naroża.

Rozkład naprężeń zredukowanych i rozwój stref plastycznych dla obu przypadków (PSN, PSO) w warunkach braku tarcia oraz dużego tarcia ( $\mu = 0.4$ ) pokazany jest w obszarze bliskim naroża (o rozmiarach 10x10mm), kolejno na rysunkach 5.4 i 5.5. Warto zwrócić uwagę na różnice kształtu stref plastycznych. W przypadkach bez tarcia strefa plastyczna istnieje tylko w stemplu (zarówno dla PSO i PSN, przy przyjęciu kryterium uplastycznienia HMH), podczas gdy przy istnieniu tarcia uplastycznia się zarówno stempel jak i podłoże, chociaż inaczej w PSN niż w PSO.

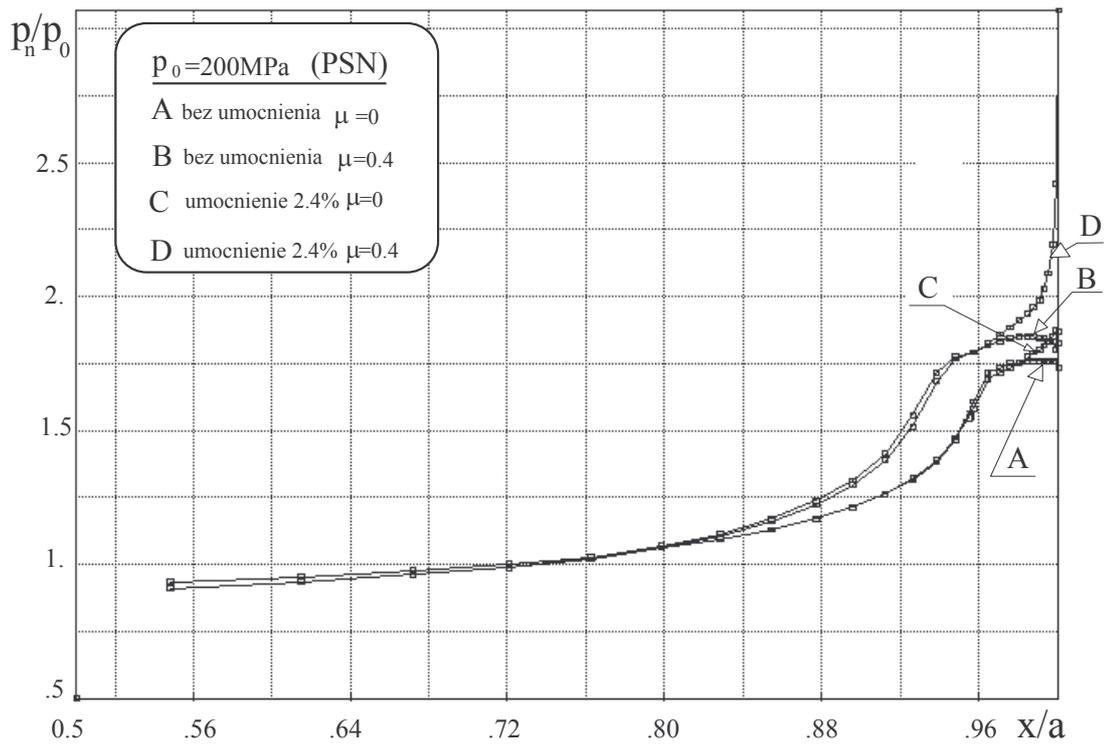
Przy przyjęciu kryterium plastyczności Treski-Coulomba nie uzyskano żadnego uplastycznienia półpłaszczyzny w przypadku bez tarcia dla PSO, uzyskano zaś nieznaczne dla PSN. Ten ostatni przypadek leży zatem w tym wąskim zakresie, gdzie obydwa kryteria (HMH i Treski) dają różne wyniki.

Rozkłady naprężeń własnych zredukowanych (po odciążeniu) w strefie naroża (5x5mm) oraz przebiegi naprężeń własnych w kierunku  $x$  ( $\sigma_x^{res}$ )\* wzdłuż krawędzi kontaktu dla zadania PSN pokazano na rys.5.6, natomiast dla PSO na rys.5.7; współczynnik tarcia we wszystkich przypadkach wynosił  $\mu = 0.4$ .

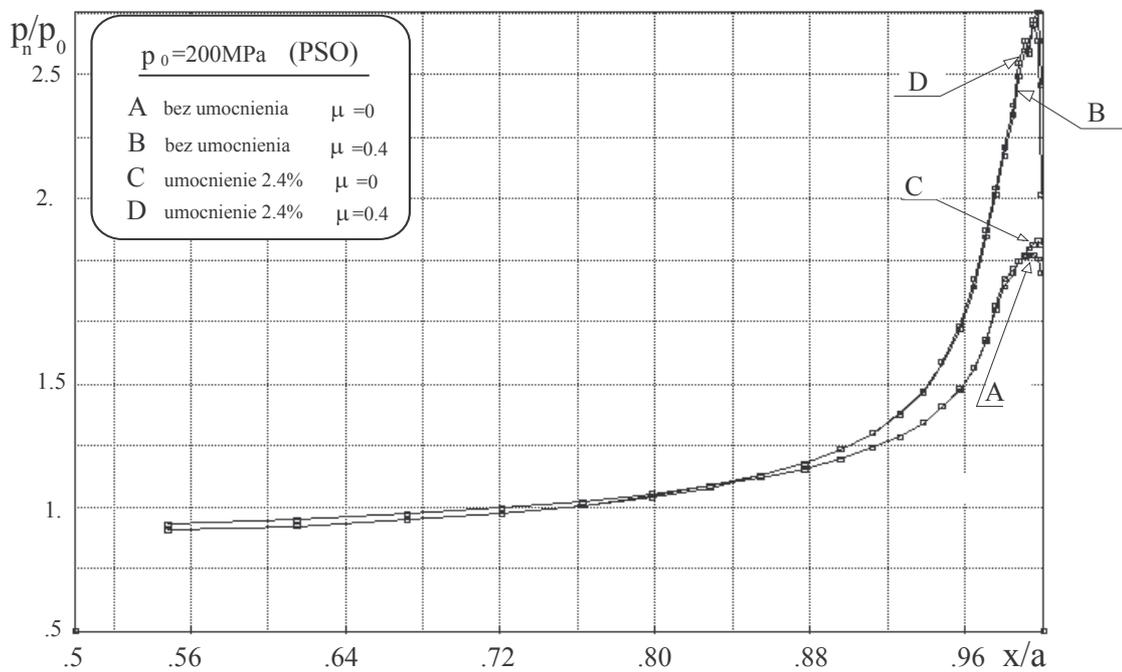
Naprężenia własne osiągać mogą bardzo znaczne wartości (równe przyłożonemu ciśnieniu  $p_0$ ) i są zawsze rozciągające w półprzestrzeni i ściskające w stemplu, większe dla materiału bez umocnienia niż dla wykazującego umocnienie. Na krawędzi stempla ( $x/a = 1$ ) winny one spaść do zera, a ich skończone wartości w tym miejscu na wykresach (rys.5.6b i 5.7b) wskazują wielkość błędów obliczeń numerycznych. Warto zauważyć, że wartość naprężeń własnych w stemplu jest znacznie większa dla PSO niż PSN, co wynika z innego kształtu stref plastycznych (rys.5.4 i 5.5) w obydwu przypadkach. Naprężenia własne w półpłaszczyźnie nie istnieją natomiast dla sytuacji bez tarcia, wtedy bowiem półpłaszczyzna nie ulega uplastycznieniu.

---

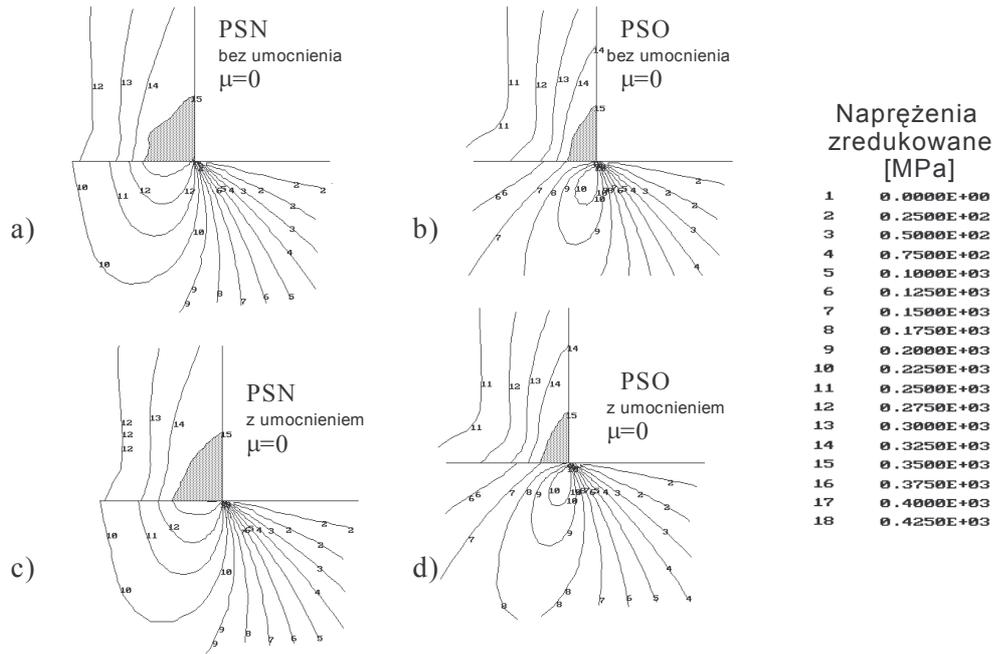
\* Składowa w kierunku  $x$  naprężeń własnych ( $\sigma_x^{res}$ ) jest wielokrotnie większa od składowej w kierunku  $y$  i dlatego tylko jej zmienność została pokazana.



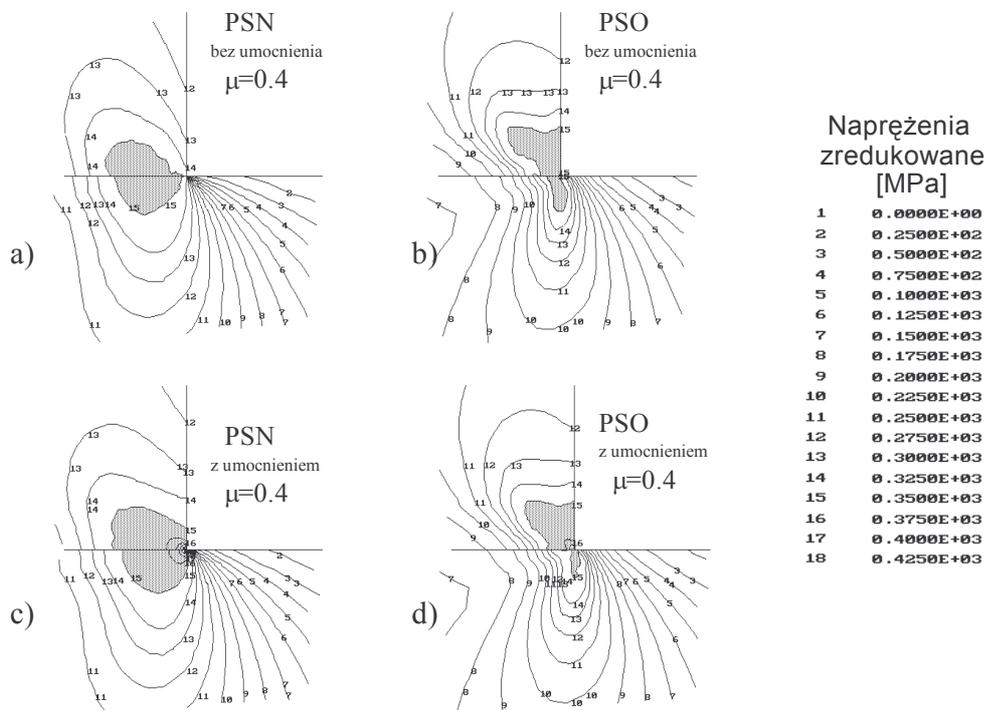
Rys.5.2. Rozkład nacisków pod stemplem w płaskim stanie naprężenia (PSN).



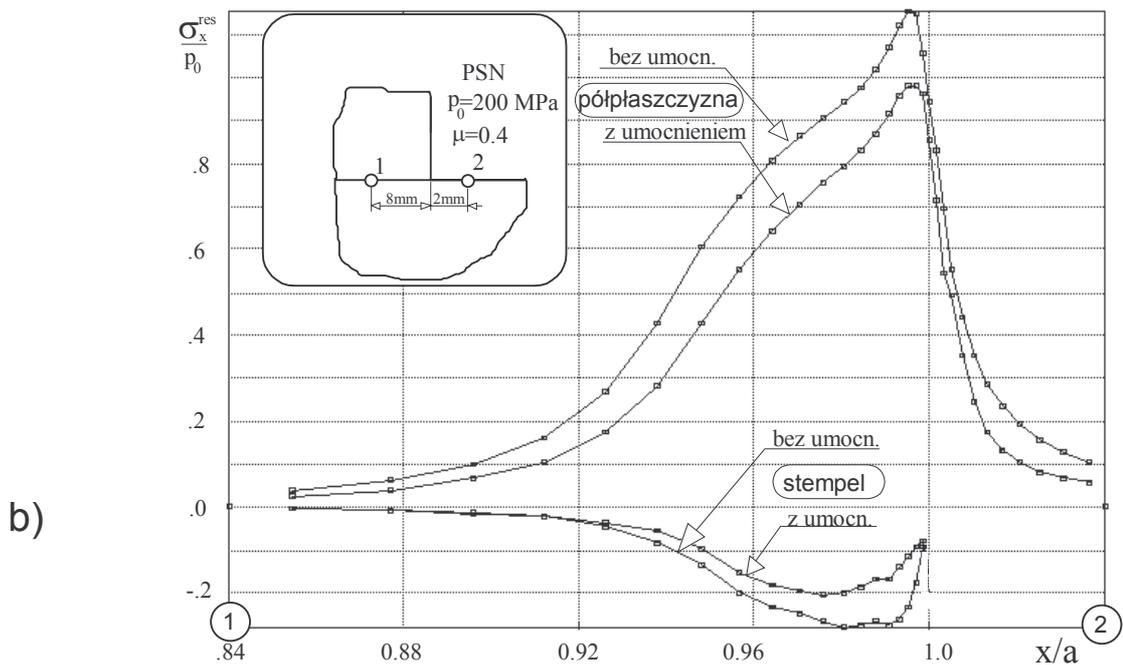
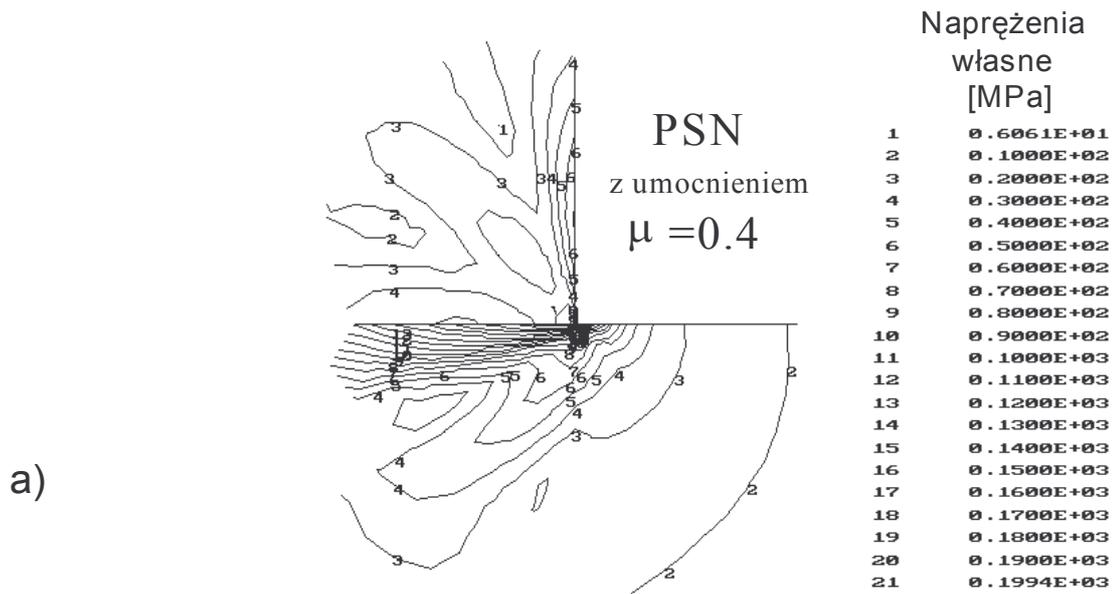
Rys.5.3. Rozkład nacisków pod stemplem w płaskim stanie odkształcenia (PSO).



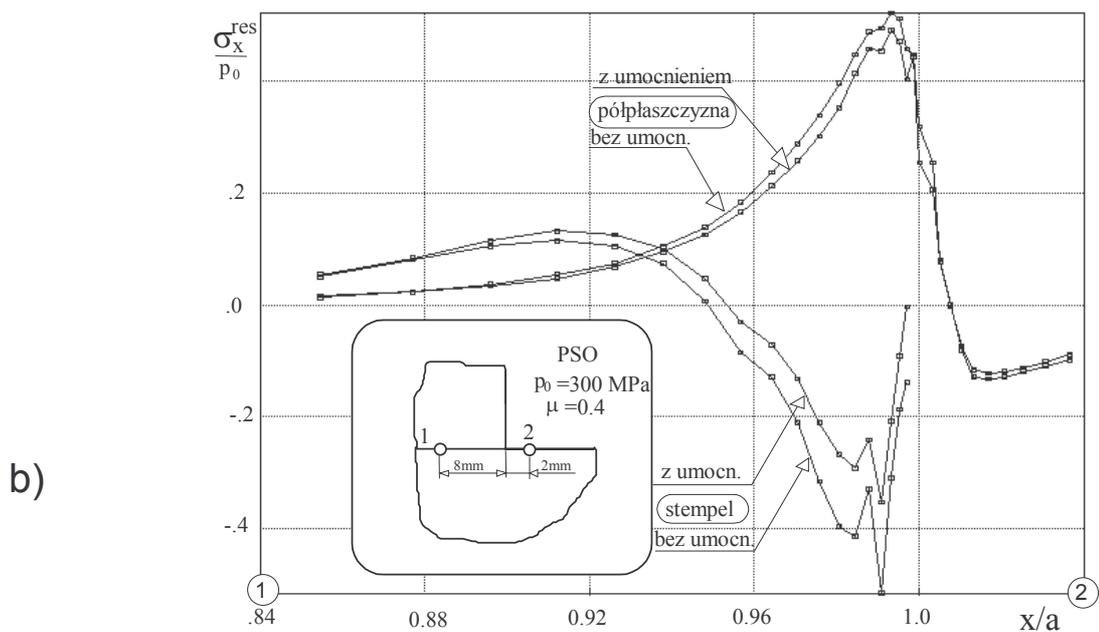
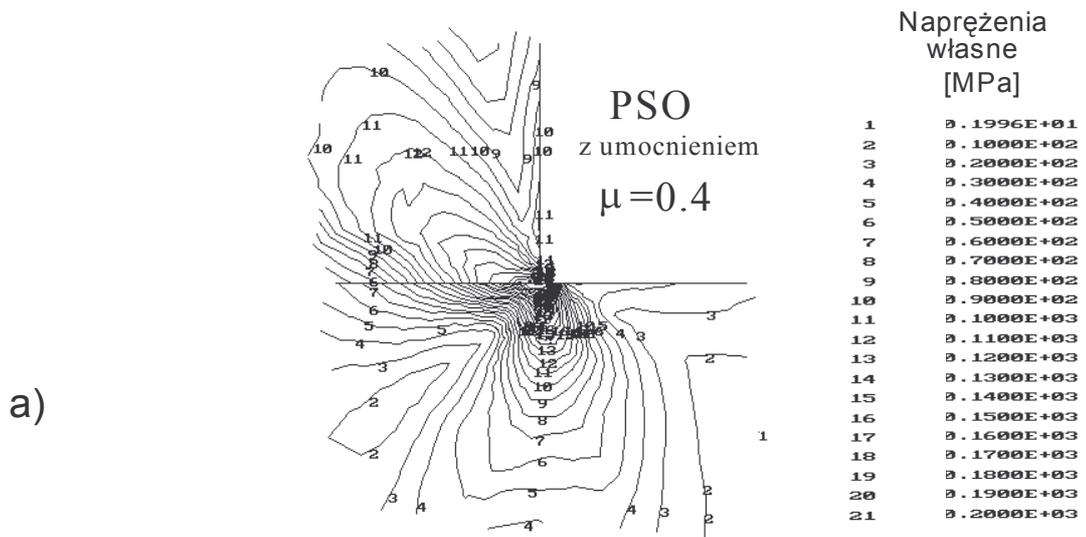
Rys.5.4. Wciskanie stempla w podłoże: rozkład naprężeń zredukowanych w obszarze 10x10mm i zakres stref plastycznych ( $p_0 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0$ ).



Rys.5.5. Wciskanie stempla w podłoże: rozkład naprężeń zredukowanych w obszarze 10x10mm i zakres stref plastycznych ( $p_0 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.4$ ).



Rys.5.6. Stan naprężeń własnych w stempelu i półprzestrzeni po odciążeniu z  $p_0 = 200 \text{ MPa}$  (PSN,  $\mu = 0.4$ ): a) rozkład naprężeń własnych zredukowanych w obszarze  $5 \times 5 \text{ mm}$ , b) rozkłady naprężeń własnych (składowej w kierunku równoległym do powierzchni kontaktu -x), wzdłuż powierzchni kontaktu.



Rys.5.7. Stan naprężeń własnych w stemple i półprzestrzeni po odciążeniu z  $p_0 = 300 \text{ MPa}$  (PSO,  $\mu = 0.4$ ): a) rozkład naprężeń własnych zredukowanych w obszarze  $5 \times 5 \text{ mm}$ , b) rozkłady naprężeń własnych (składowa w kierunku równoległym do powierzchni kontaktu - x) wzdłuż powierzchni kontaktu.

Bardziej pełną zależność pomiędzy bezwymiarową wartością naprężeń własnych  $\sigma^{res}/p_0$  i współczynnikiem tarcia (dla obciążenia  $p_0 = 200 \text{ MPa}$  i płaskiego stanu naprężenia) pokazano na rysunku 5.8. Zbadano naprężenia w trzech charakterystycznych punktach: w stemple na krawędzi bocznej składową naprężeń własnych w kierunku równoległym do krawędzi  $\sigma_y^{res}$ , w stemple na powierzchni kontaktu w odległości  $\bar{x} = 0.028$  od naroża ( $\sigma_x^{res}$ ) oraz w półpłaszczyźnie na powierzchni kontaktu w odległości  $\bar{x} = 0.005$  od naroża ( $\sigma_x^{res}$ ) składowe normalne w kierunku równoległym do powierzchni styku. We wszystkich tych miejscach wspomniane naprężenia osiągają wartości maksymalne. Bezwzględna wartość naprężeń resztkowych szybko rośnie wraz ze wzrostem współczynnika tarcia, największe wartości osiągając w półpłaszczyźnie.

### 5.1.3. Dyskusja wyników i wnioski

Przedstawiona analiza sprężysto-plastycznego wciskania stempla w półnieskończoną płaszczyznę pozwala na śledzenie krok po kroku rozwoju stref plastycznych dając informacje o stanie naprężeń i odkształceń w dowolnym miejscu programu obciążenia.

Uzyskano odpowiedź na pytanie co dzieje się z osobliwością naprężeń występującą w stanie sprężystym w ostrym narożu stempla i sąsiadującym z nim obszarze półpłaszczyzny, w przypadku gdy uwzględnimy sprężysto-plastyczny model materiału. Odpowiedź ta jednak nie jest jednoznaczna i zależy od kilku czynników.

Dla PSN i w przypadku materiału z umocnieniem liniowym, krzywa gwałtownego wzrostu naprężeń czy też nacisków na powierzchnię kontaktu, w miarę zbliżania się do ostrego naroża, załamuje się nagle w punkcie, w którym naprężenia zredukowane osiągają granicę plastyczności. Rozkład naprężeń wewnątrz strefy sprężystej odpowiada rozwiązaniu dla przypadku sprężystego. Od punktu załamania w kierunku naroża, naprężenia dalej wzrastają, początkowo powoli, a potem znowu gwałtownie. W przypadku obecności tarcia (rys.5.2, krzywa D) rozkład naprężeń osiąga w okolicy naroża charakter osobliwy (osobliwość typu potęgowego), a siła osobliwości wzrasta wraz ze wzrostem współczynnika tarcia. Materiał uplastyczniając się zachowuje się tu jak materiał liniowy o mniejszej sztywności wynikającej z modułu umocnienia liniowego.

W przypadku braku tarcia naciski zawsze osiągają wartości skończone. Porównanie rozkładu nacisków (rys.5.2, 5.3) wskazuje brak skłonności do

powstawania tej osobliwości w zakresie plastycznym dla płaskiego stanu odkształcenia: maksymalne naprężenia osiągają skończone wartości i często następuje pewne odciążenie naroża (nawet przy istnieniu tarcia).

Ostatecznym wnioskiem jest, że może istnieć w obszarze plastycznym rozkład naprężeń wykazujący cechy rozkładu osobliwego. Ta konkluzja jest prawdziwa w takim zakresie, w jakim można założyć liniową charakterystykę umocnienia materiału i do takiej odległości od naroża do jakiej jest możliwe prowadzenie obliczeń MES-em, używając najmniejszych elementów. Nie znaleziono wpływu dużych odkształceń na rozkład naprężeń w pobliżu naroża, które mogłyby wyeliminować osobliwość, chociaż program obciążenia prowadzono aż do wartości ciśnienia równej granicy plastyczności ( $p_0 = Re$ ).

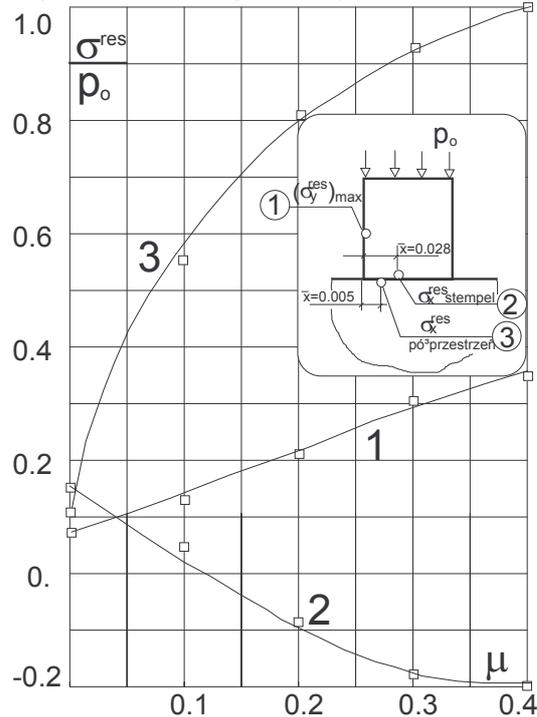
Rozkład naprężeń (czy nacisków na powierzchni kontaktu) ma odmienny charakter jeśli przyjmiemy sprężysto-idealnie-plastyczny model materiału. Po początkowym wzroście nacisków odpowiadającym strefie sprężystej ich wartość ustala się na prawie stałym poziomie w zakresie sprężysto-plastycznym. Osobliwość pola naprężeń zanika. W obecności tarcia maksimum nacisków znajduje się w pewnej odległości od naroża, a w narożu naciski osiągają wartość równą granicy plastyczności.

Ciekawym zjawiskiem jest brak uplastycznienia półpłaszczyzny w przypadkach bez tarcia (rys.5.4), zarówno w PSN jak i PSO. Te przypadki poddano ponownej analizie, przyjmując kryterium Treski-Coulomba i uzyskano niewielkie uplastycznienia w PSN. Brak uplastycznienia półpłaszczyzny można tłumaczyć faktem, że naroże stempla nie mając podparcia (swobodna krawędź) ulega uplastycznieniu wcześniej niż podłoże, a to z kolei obniża naciski na półprzestrzeń. To spostrzeżenie zdają się potwierdzać kształty stref plastycznych pokazane na rys.5.4: uplastycznienie naroża stempla postępuje równomiernie od jego wierzchołka w głąb materiału. Inaczej jest dla przypadku z tarciami kiedy w płaskim stanie naprężenia strefa plastyczna rozwija się wzdłuż linii kontaktu w stemplu i w półprzestrzeni (rys.5.5.a,c).

Obecność tarcia ma wpływ na rozkład naprężeń w trakcie obciążania jak i na rozkład naprężeń własnych. W obydwu modelach (PSN i PSO) wartości maksymalnych nacisków i naprężeń własnych wzrastają wraz ze wzrostem wartości współczynnika tarcia.

Zredukowane naprężenia własne osiągają większą wartość w półpłaszczyźnie niż w stemplu w przypadku  $\mu \neq 0$ . Wartość naprężeń normalnych do powierzchni kontaktu są wszędzie niewielkie, natomiast składowa w kierunku równoległym do powierzchni kontaktu  $\sigma_x^{res}$ , osiąga

największe wartości na powierzchni kontaktu (rys.5.8), przy czym w stemplu - ściskanie, w półpłaszczyźnie - rozciąganie (rys.5.6.b, 5.7.b).



Rys.5.8. Naprężenia własne w funkcji współczynnika tarcia:  $p_o = 200 \text{ MPa}$ ,  $E_u = 2.4\% E$ ,  $R_e = 350 \text{ MPa}$ , PSN.

## 5.2. Toczenie sprężystego walca po sprężysto-plastycznej półprzestrzeni.

Spośród zadań sprężysto-plastycznego kontaktu, są takie, w których naprężenia własne są wynikiem nakładania się szeregu efektów np.: odkształceń plastycznych od rolowania i poślizgu w warstwach przypowierzchniowych, naprężeń sprężystych pochodzących od obciążenia ciała jako całości, naprężeń wstępnych. Przykładem takiego złożonego stanu jest np. toczenie koła po szynie kolejowej. Uwzględnienie tu takich czynników jak złożona geometria obydwu ciał, sprężysto-plastyczne własności materiału, obciążenie siłą nacisku i siłami poprzecznymi (np. od hamowania, czy przyspieszania), odkształcenie lokalne w obszarze kontaktu i odkształcenia globalne szyny jako całości jest zadaniem trudnym i wymagającym wcześniejszej analizy wstępnej. Pozwala ona m.innymi wyjaśnić wpływ obciążeń normalnych i stycznych na rozkłady powstających naprężeń własnych. Nie jest całkowicie jasne jak kształtują się te rozkłady, a w dostępnych pracach istnieją niezgodności, o których była mowa w rozdziale 1.

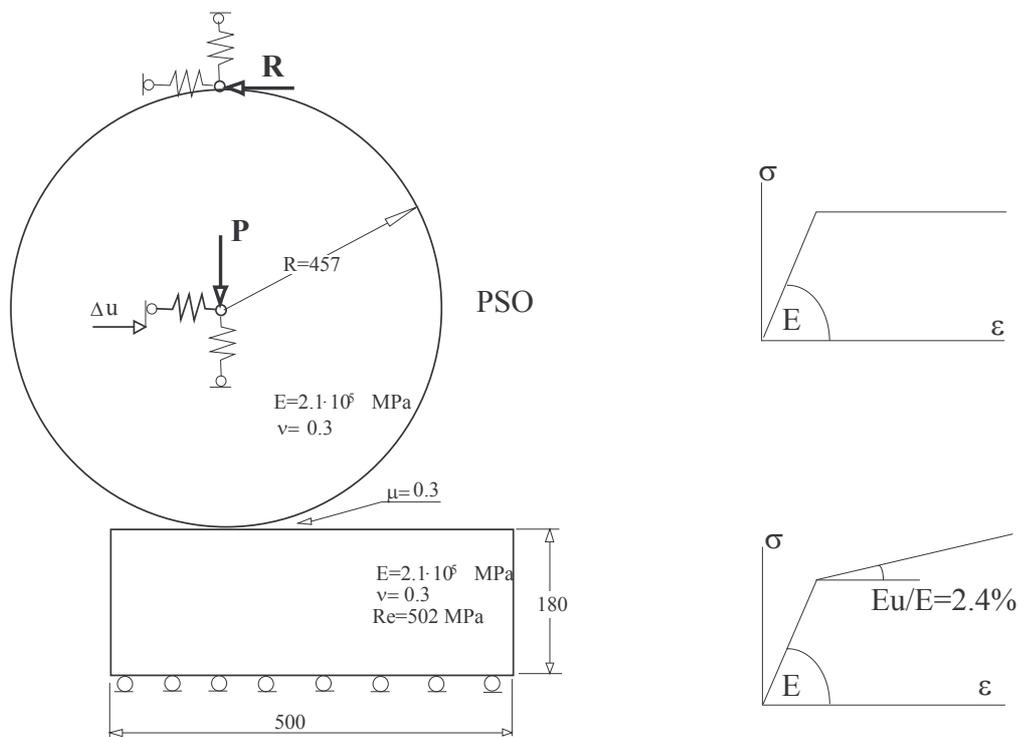
Przedstawiona zostanie tu zatem dwuwymiarowa analiza rolowania sprężysto-plastycznego podłoża przez sprężyty walec w warunkach

oddziaływania sił normalnych i stycznych (hamowanie, przyspieszanie, poślizg). Celem jej jest próba znalezienia odpowiedzi na pytanie jaki jest wpływ sposobu obciążenia układu na proces rozbudowy i ostateczny rozkład naprężeń własnych. Analiza ta stanowić będzie wstęp do analizy przestrzennej.

### 5.2.1. Budowa modelu dwuwymiarowego kontaktu walca z półprzestrzenią.

#### Geometria obiektu i model materiału

W analizie posłużono się modelem dwuwymiarowym kontaktu tocznego, wykorzystując zbudowany uprzednio algorytm (rozdział 4). Wygodnie było rozpatrzyć sytuację kontaktu w płaszczyźnie walca (rys.5.9), gdyż taki "naturalny" model pozwalał na rozważenie lokalnych stanów sprężysto-plastycznych z uwzględnieniem tarcia i sił hamowania lub przyspieszania i dawał możliwość symulowania przetaczania koła. Zadanie rozwiązywano dla płaskiego stanu odkształcenia (PSO), gdyż w rzeczywistym, trójwymiarowym kontakcie sytuacja w płaszczyźnie środkowej jest zbliżona do PSO, a w stanie sprężystym naprężenia zredukowane osiągają wartość maksymalną na pewnej głębokości pod powierzchnią kontaktu (punkt Bielajewa). Model płaskiego stanu naprężenia (PSN) nie zapewniałby podparcia w kierunku normalnym do płaszczyzny koła, powodując swobodę odkształceń plastycznych w tym kierunku.

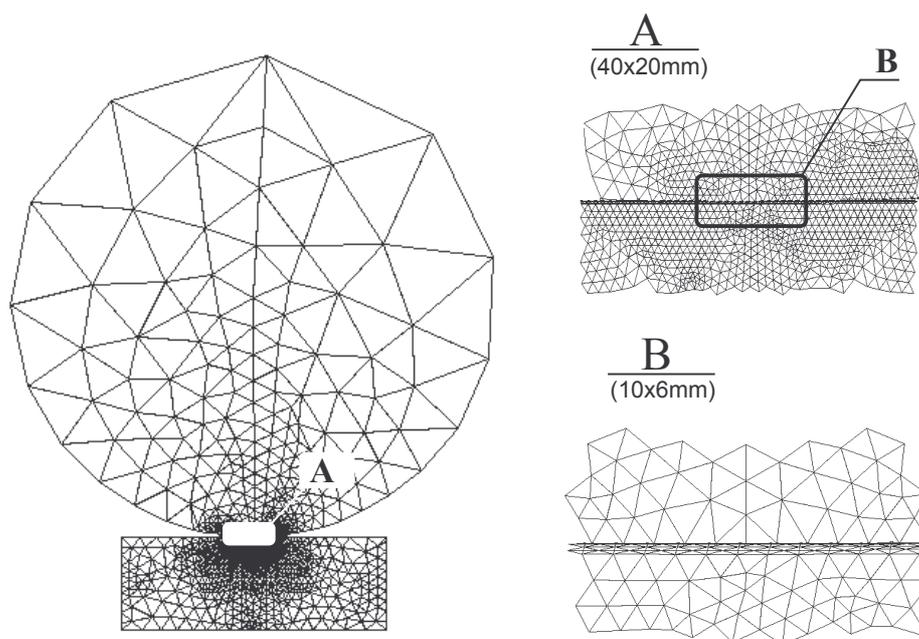


Rys.5.9. Model dwuwymiarowego kontaktu walca z półprzestrzenią.

Badania modelu dwuwymiarowego są wstępem do analizy przestrzennego kontaktu koła z szyną, dlatego też przyjęto tu wymiary, stałe materiałowe i obciążenia takie jakie występują w rzeczywistym obiekcie.

Płaski model układu walec-półprzestrzeń pokazany jest na rys.5.9. Obszar walca i "płaskiej" półprzestrzeni jest "pokryty" siatką elementów trójwęzłowych (CST), przy czym została ona silnie zagęszczona w obszarze strefy kontaktu i spodziewanych odkształceń plastycznych (rys.5.10). Walec utrzymywany jest w równowadze za pomocą elementów sprężystych o regulowanej sztywności (rys.5.9). Na powierzchni kontaktu, w razie potrzeby, generowane są automatycznie omówione wcześniej elementy kontaktu (patrz p.4.1).

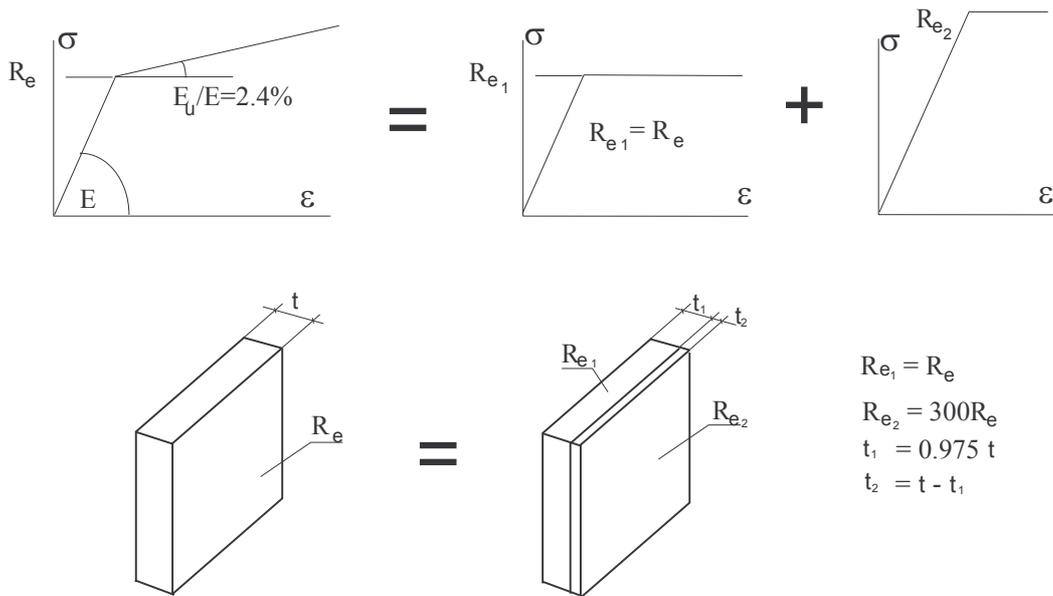
Model zawiera około 6700 elementów (w tym elementy zawiązywane i rozwiązywane automatycznie), 111 węzłów mogących wejść w kontakt i 120 segmentów gotowych utworzyć z tymi węzłami elementy kontaktu. Cały model posiada około 6900 stopni swobody.



Rys.5.10. Siatka elementów skończonych przyjęta do analizy numerycznej.

Przyjęty model winien realizować proces toczenia sprężystego walca po sprężysto-plastycznej półprzestrzeni. Materiałem walca i półprzestrzeni jest stal. Półprzestrzeń "zbudowano" z materiału bez umocnienia o granicy plastyczności  $R_e = 502 \text{ MPa}$ , jednak w ważniejszych przypadkach porównano uzyskane wyniki z uzyskanymi dla materiału z kinematycznym i izotropowym umocnieniem

liniowym ( $E_u = 2.4\% E$ ). Umocnienie kinematyczne zrealizowano stosując wspomniany poprzednio model warstwowy [72], którego idea polega na zastąpieniu badanego materiału sprężysto-plastycznego z umocnieniem kinematycznym o granicy plastyczności  $R_{e1}$ , przez szereg złożonych warstw materiałów sprężysto-idealnie-plastycznych o różnych wartościach granicy plastyczności (np.  $R_{e1}, R_{e2}$ ) i odpowiednich grubościach (np.:  $t_1, t_2$ ) - rys.5.11.

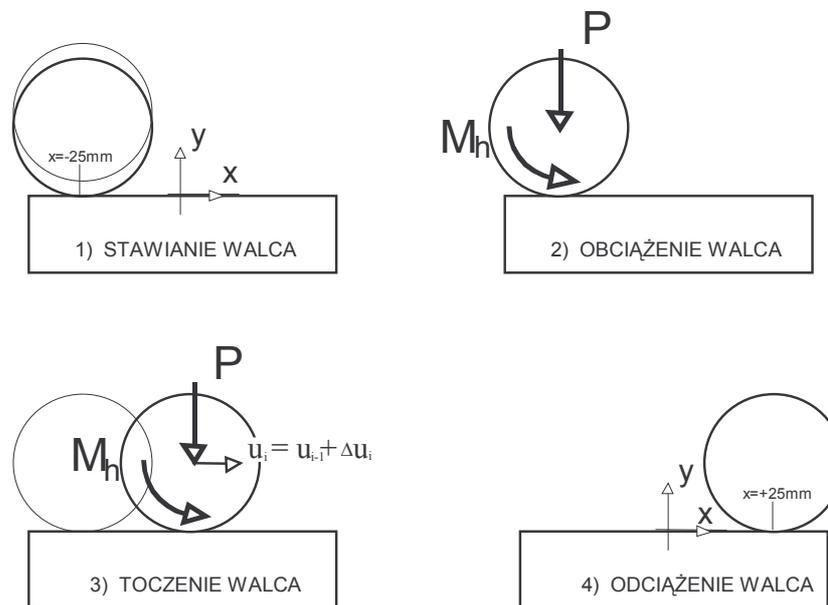


Rys.5.11. Realizacja kinematycznego umocnienia materiału przy pomocy modelu warstwowego.

### Realizacja procesu toczenia i wyznaczenie obciążeń

Toczenie przeprowadzono na odcinku o długości 50mm; sposób jego realizacji pokazany jest na rysunku 5.12. W trakcie kolejnych faz, sterowanie walcem odbywało się przemieszczeniowo (przemieszczanie walca za pomocą elementu sprężystego o dużej sztywności (rys.5.9)) i siłowo (regulacja siły nacisku i momentu). Po przyłożeniu obciążenia toczenie odbywało się małymi krokami  $\Delta u$ .

W trakcie toczenia walec doznawał obrotu o kąt około  $10^\circ$ . Ze względu na to, że moment hamujący  $M_h$  realizowany był za pomocą siły poprzecznej  $R$  (rys.5.9), (analiza zakładała małe przemieszczenia), siła nacisku była korygowana odpowiednio w miarę obrotu walca, aby wyeliminować zwiększanie  $R$  o składową poziomą siły  $P$ .

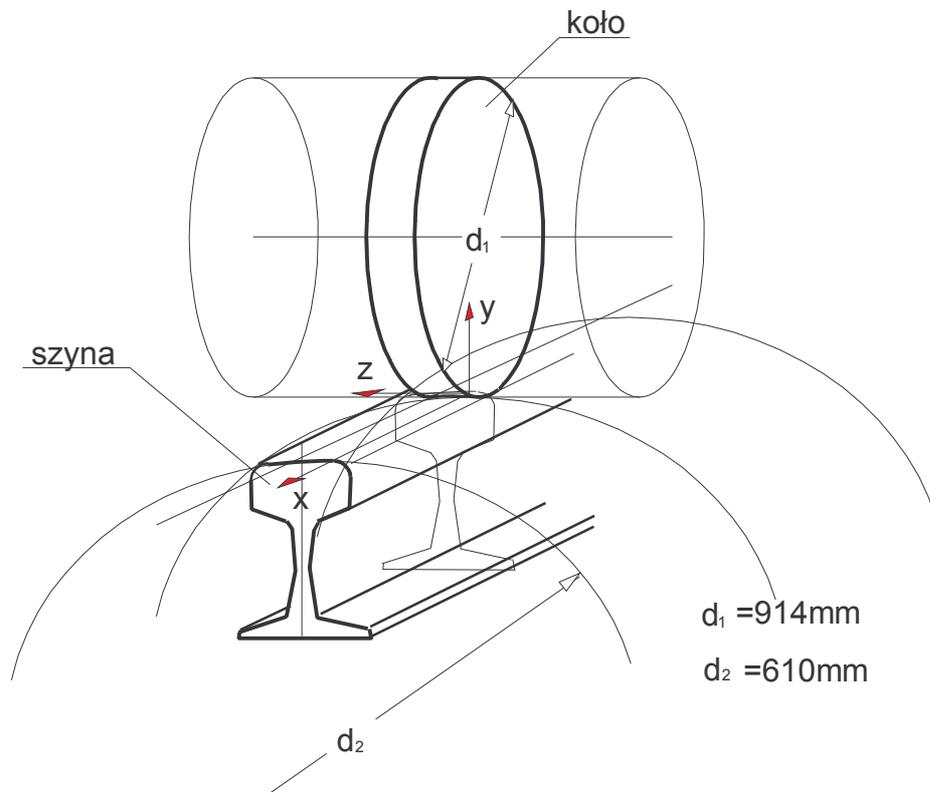


Rys.5.12. Schemat realizacji procesu toczenia.

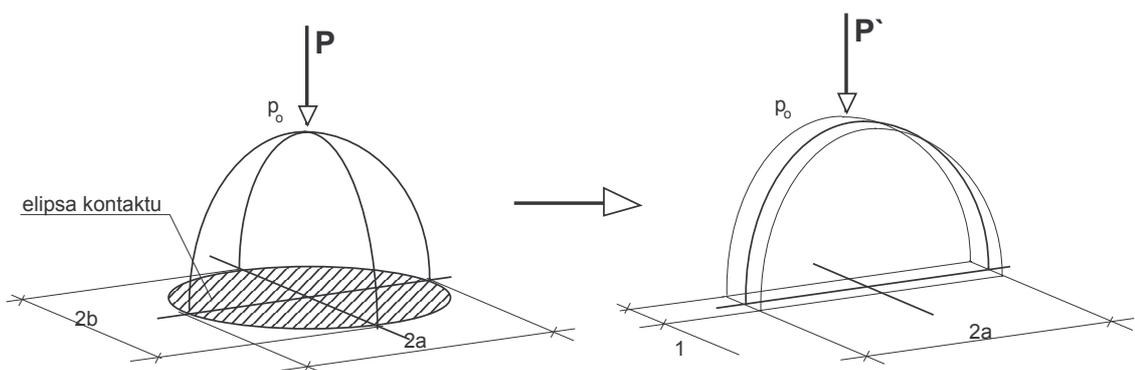
Zastępczą siłę obciążającą walec wyznaczono tak, by możliwie dokładnie odpowiadała rzeczywistej sytuacji kontaktu trójwymiarowego koła i szyny. Na podstawie danych z literatury [99], przyjęto przeciętną wartość eksploatacyjną obciążenia normalnego równą 150kN/koło. Modelując kontakt koła i szyny, w uproszczeniu jako kontakt dwóch walców o osiach prostopadłych\* [80,85], wyznaczono zastępczą siłę nacisku ze wzorów Hertza [76] w sposób pokazany na rys.5.13 i 5.14. Po prostych przeliczeniach uzyskano eliptyczną strefę kontaktu o rozmiarach  $a = 8.29mm$ ,  $b = 6.34mm$  i maksymalne naciski o wartości  $p_o = 1360MPa$ . Trójwymiarowy rozkład nacisków Hertza dla walców o osiach prostopadłych zastąpiono ostatecznie rozkładem Hertza dla walca i półpłaszczyzny (rys.5.14) tak, aby zachowane zostały maksymalne wartości nacisków  $p_o$ , oraz szerokość strefy kontaktu  $2a$ . Stąd też wyznaczono zastępczą siłę obciążenia walca:  $P' = 17.7kN/mm$ .

To przeliczenie opierające się na rozkładzie Hertza przeprowadzono jedynie dla określenia zastępczej siły  $P'$ . Rozkład rzeczywistych nacisków w modelu walec - półpłaszczyzna ustalany był samoczynnie na każdym etapie obliczeń i wynikał z aktualnej konfiguracji elementów kontaktu.

\* Pominięto tu podwójną krzywiznę koła



Rys.5.13. Kontakt koła z szyną jako kontakt dwóch cylindrów o osiach prostopadłych.



Rys.5.14. Schemat wyznaczenia zastępczej siły kontaktu w zadaniu płaskim.

### Zakres badań

Przeprowadzono analizę szeregu różnych przypadków toczenia. Zostały one zestawione w tabelicy 5.1.

TABLICA 5.1. Rozwiązane dwuwymiarowe przypadki toczenia walca.

Numer	Liczba przejazdów	Obciążenie wzdłużne	Materiał
T1	2	BRAK	BEZ UMOCN.
T2	1	HAMOW. 30%	BEZ UMOCN.
T3	2	HAMOW 75%	BEZ UMOCN.
T4	1	POŚLIZG 100%	BEZ UMOCN.
T6	1	PRZYSP .30%	BEZ UMOCN.
T6	1	PRZYSP. 75%	BEZ UMOCN.
T7	1	BRAK	UMOCN.KINEMAT. 2.4%
T8	1	BRAK	UMOCN.IZOTR.2.4%
T9	1	HAMOW 75%	UMOCN.KINEMAT. 2.4%
T10	1	PRZYSP. 75%	UMOCN.KINEMAT. 2.4%

Obciążenie we wszystkich przypadkach stanowiła siła  $P' = 17,7 \text{ kN/mm}$ , współczynnik tarcia wynosił  $\mu = 0.3$ . Hamowanie i przyspieszanie podano w procentach w odniesieniu do wartości, która wywołuje tarcie rozwinięte na całej powierzchni kontaktu (poślizg)..

### 5.2.2. Omówienie uzyskanych wyników.

Wyniki analiz przedstawione zostały na mapach izolinii, pokazujących przebiegi wybranych wielkości w kolejnych fazach procesu przetaczania. Przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych  $\sigma_{red}$ , zredukowanych odkształceń plastycznych  $\varepsilon^{pl}$ , naprężeń wzdłużnych  $\sigma_x$  oraz naprężeń poprzecznych  $\sigma_z$  w strefie kontaktu o wymiarach 100x80mm (rysunki 5.15÷5.25). Zmienności naprężeń własnych (resztkowych) i odkształceń plastycznych wzdłuż głębokości mierzonej od powierzchni toczenia w głąb półprzestrzeni zostały pokazane na wykresach zbiorczych (rysunki 5.26÷5.37).

#### Toczenie swobodne (T1, T7, T8)

Izolinie naprężeń zredukowanych i rozwój stref plastycznych przy przyjęciu, że materiał szyny jest sprężysto-idealnie plastyczny (bez umocnienia) przedstawione są w kolejnych fazach toczenia swobodnego na rysunkach 5.15÷5.19. We wszystkich przypadkach uwzględniono tarcie na powierzchni kontaktu. Maksymalne naprężenia zredukowane osiągają granicę plastyczności w strefie punktu Bielajewa (pod powierzchnią), czemu towarzyszy rozwój strefy

plastycznej pokazany przez izolinie odkształceń plastycznych. W miarę przemieszczania się walca strefa odkształceń plastycznych rozbudowuje się w kierunku toczenia, a maksymalna wartość odkształceń plastycznych stabilizuje się na głębokości około 4mm pod powierzchnią. Rozkład izolinii składowych naprężeń w kierunku  $x$  i  $z$  pokazuje, że w niedużej odległości za walcem, w okolicy powierzchni ujawniają się naprężenia własne (reszkowe) (rys.5.17c,d). Sytuację po odciążeniu przedstawia rysunek 5.19: pokazane są na nim rozkłady naprężeń własnych. Naprężenia te w kierunku  $x$  i  $z$  osiągają na pewnej głębokości pod powierzchnią maksymalne wartości ujemne (ściskanie), podczas gdy na powierzchni obie składowe naprężeń są dodatnie (rozciąganie). Zmienność odkształceń plastycznych i składowych naprężenia wzdłuż głębokości mierzonej od powierzchni w trzech kolejnych miejscach wybranych wzdłuż drogi toczenia przedstawiają wykresy na rysunku 5.26. Jak widać pomimo dość krótkiego odcinka przemieszczenia walca (50mm) uzyskane przebiegi są bardzo zbliżone. Składowa naprężeń własnych w kierunku toczenia ( $x$ ) osiąga wyraźne minimum (ściskanie) o wartości ok. -220MPa na głębokości około 5mm, by następnie szybko wzrosnąć do wartości 250MPa na samej powierzchni toczenia (rys.5.26b). Podobnie składowa naprężeń w kierunku poprzecznym ( $z$ ) wzrasta od -300MPa (minimum) na głębokości 4mm do 90MPa (maksimum) na powierzchni toczenia( rys.5.26c).

Zbadano jakie zmiany może wprowadzić powtórne przetoczenie (powrotne), a uzyskane tu rozkłady izolinii przedstawiono na rys.5.19. Odkształcenia plastyczne i naprężenia własne uzyskane dla obydwu przejazdów porównano na rys.5.27. Wyniki obliczeń wskazują tu na nieznaczną tylko redystrybucję naprężeń wywołaną niewielkim zwiększeniem się wartości maksymalnych odkształceń plastycznych. Minimum (ściskanie) przemieściło się nieznacznie w głąb ( $y = -6mm$ ), jednak charakterystyczny rozkład naprężeń nie został zmieniony. Należy sądzić że półprzestrzeń bliska jest przystosowaniu się do panującego obciążenia.

W dalszym ciągu analizy zbadano wpływ umocnienia materiału na przebieg uplastycznienia w półprzestrzeni. Wyniki porównawcze rozkładu odkształceń plastycznych i naprężeń własnych wzdłuż głębokości dla materiałów: bez umocnienia, z umocnieniem kinematycznym (2.4%) i umocnieniem izotropowym (2.4%) przedstawiono na rysunku 5.28.

Umocnienie materiału nie zmieniło charakteru rozkładu odkształceń i naprężeń, zmieniając nieznacznie wartości ekstremalne. Model z umocnieniem kinematycznym dał wyniki ilościowe bardzo zbliżone do modelu bez umocnienia. Umocnienie wpłynęło na zmniejszenie maksymalnych

zredukowanych odkształceń plastycznych (ok. 20% dla umocnienia kinematycznego), a co za tym idzie, niewielkie obniżenie bezwzględnych wartości ekstremalnych naprężeń własnych (ok.10% dla umocnienia izotropowego).

#### Toczenie z hamowaniem ( $T_2, T_3, T_4$ )

W kolejnym etapie poddano analizie wpływ hamowania na przebieg zjawisk podczas procesu toczenia. Przykładane momenty hamujące dawały na powierzchni kontaktu wypadkowe siły wzdłużne (styczne) o wartościach:

$$T = \begin{cases} 0.30 \\ 0.75 \\ 1.00 \end{cases} \cdot T_h, \quad \text{gdzie} \quad T_h = \mu \cdot P'$$

Na rysunkach 5.20÷5.22 pokazane są izolinie naprężeń zredukowanych, odkształceń plastycznych i dwóch składowych naprężeń w kolejnych fazach toczenia z udziałem siły wzdłużnej  $T = 0.75 \cdot T_h$ .

Zmiana rozkładów naprężeń i odkształcenia w porównaniu z przypadkiem toczenia swobodnego jest zasadnicza. Przy toczeniu z hamowaniem strefa odkształceń plastycznych szybko dociera do powierzchni i tam te odkształcenia plastyczne osiągają maksymalną wartość. Uplastycznienie przebiega tu jakby dwutorowo:

- tak jak w toczeniu swobodnym, powstają pierwsze uplastycznienia w warstwie "punktów" Bielajewa,
- dodatkowo silnemu uplastycznieniu ulega cienka warstwa powierzchniowa w strefie za walcem, tzn. tam, gdzie walec wychodzi z kontaktu.

Rezultat tego procesu można znakomicie zaobserwować na wywołanych pierwszym przejazdem rozkładach zredukowanych odkształceń plastycznych i naprężeń własnych wzdłuż głębokości mierzonej od powierzchni kontaktu (rys.5.29). Widoczny tam jest lokalny wzrost zredukowanych odkształceń plastycznych na głębokości około 3mm, oraz wyraźne ich maksimum na samej powierzchni, gdzie przekraczają 3%. Tym dużym odkształceniom powierzchniowym towarzyszą odpowiednie zmiany w przebiegu naprężeń zredukowanych. Naprężenia własne mają charakter zbliżony do wywołanych toczeniem swobodnym tylko do pewnej głębokości: silne uplastycznienie warstwy wierzchniej powoduje, że naprężenia własne od lokalnego minimum (ściskanie) na tej głębokości wzrastają wyżej do wartości dodatnich (rozciąganie), by znowu na powierzchni kontaktu przejść na ściskanie. W efekcie

na powierzchni toczonej obie składowe naprężeń własnych (resztkowych) mają znak ujemny (ściskanie).

Powtórne przetoczenie (zachowując ten sam kierunek przemieszczania walca) znacznie zmieniło sytuację. Porównanie rezultatów pierwszego i drugiego przejazdu pokazuje rysunek 5.31. Wprawdzie obraz odkształceń plastycznych pozostaje jakościowo podobny, jednakże następuje ich znaczny wzrost (ok 100%). Naprężenia własne zachowują swój charakterystyczny rozkład, ale zostają one przesunięte w kierunku wartości ujemnych (o około 10%). Można postawić tu hipotezę, że konstrukcja stara się dramatycznie przystosować do obciążenia, jednak drugi przejazd wydaje się wskazywać na to, że w następnych zachodzić będzie dalsze pogłębienie odkształceń plastycznych. Po drugim przejeździe składowa naprężeń własnych w kierunku "x" zmienia się od wartości -207MPa (ściskanie) na głębokości ok. 10mm do wartości +115MPa na głębokości 2mm (lokalne maksimum), by osiągnąć -140MPa (ściskanie) na powierzchni (rys.5.31b). Składowa naprężeń własnych w kierunku poprzecznym "z" zmienia się od -307MPa (ściskanie) na głębokości ok. 6mm, do lokalnego maksimum (-230MPa) na głębokości 1mm (rys.5.31c), dalej następuje spadek naprężeń. Lekkie odgięcie wykresu przy samej powierzchni może być efektem błędów numerycznych (wpływ dużych gradientów odkształceń plastycznych i naprężeń wzdłużnych).

Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych i naprężeń własnych wzdłuż głębokości mierzonej od powierzchni toczenia po jednym przejeździe przedstawiono dla różnych sił hamowania na wykresach z rysunku 5.32.

Toczenie z małą siłą hamowania (np.30%), powoduje nieznaczne tylko uplastycznienia w warstwie wierzchniej. Przebiegi zredukowanych odkształceń plastycznych i naprężeń własnych są tu bardzo zbliżone do przypadku rolowania swobodnego. Przesuwanie walca po półprzestrzeni z pełnym poślizgiem (walec zablokowany) prowadzi z kolei do bardzo dużych odkształceń warstwy powierzchniowej.

Ostatecznie zatem można stwierdzić, że:

1. wraz ze wzrostem siły hamowania odkształcenia plastyczne pod powierzchnią toczenia stają się mało znaczące, a zasadnicze uplastycznienie pojawia się na powierzchni,
2. wraz ze wzrostem siły hamowania, coraz większe uplastycznienie warstwy wierzchniej powoduje przesunięcie minimum składowej wzdłużnej (x) naprężeń własnych w głąb (pod powierzchnię) i powstanie bliżej powierzchni lokalnego maksimum naprężeń: w efekcie przy samej powierzchni naprężenia znowu zmieniają znak na ujemny.

3. Naprężenia ściskające na powierzchni mają związek z dużymi uplastycznieniami warstwy wierzchniej.

Toczenie z przyspieszeniem ( $T5$ ,  $T6$ ,  $T10$ )

Rozpatrzono z kolei przypadek toczenia z momentem przyspieszającym (o znaku przeciwnym do hamującego), który wywoływał siłę:

$$T = \begin{Bmatrix} -0.30 \\ -0.75 \end{Bmatrix} \cdot T_h, \quad \text{gdzie} \quad T_h = \mu \cdot P'$$

Izolinie naprężeń zredukowanych, zredukowanych odkształceń plastycznych i składowych wzdłużnych (x) oraz poprzecznych (z) naprężeń dla przypadku przyspieszania  $T = -0.75 \cdot T_h$  przedstawione są na rysunkach 5.23÷5.25. Strefa dużych odkształceń plastycznych rozbudowuje się tu, podobnie jak w przypadku hamowania, w dwóch warstwach: na pewnej głębokości pod powierzchnią i na powierzchni w strefie najazdu walca. Na rysunku 5.33 pokazany jest rozkład odkształceń plastycznych i naprężeń własnych wzdłuż głębokości mierzonej od powierzchni w kolejnych miejscach drogi toczenia. Widoczna jest strefa dużych uplastycznień na głębokości około 3mm (lokalne maksimum) i gwałtowny wzrost odkształceń na powierzchni. Wyraźnej zmianie uległ rozkład składowej wzdłużnej (x) naprężeń własnych (rys.5.33b): spadają one wraz ze zbliżaniem się do powierzchni kontaktu, na samej powierzchni osiągając wartość ujemną (ściskanie) równą aż granicy plastyczności materiału (-502MPa). Naprężenia poprzeczne (z) mają przebieg bardzo zbliżony i dochodzą do wartości około -400MPa (rys.5.33c).

Porównanie toczenia z różnymi przyspieszeniami przedstawiają wykresy na rysunku 5.35.

Podsumowanie wyników analizy.

Rezultaty toczenia z hamowaniem (75%), swobodnego i z przyspieszaniem (75%) porównane zostały na rysunku 5.36. Wyraźne różnice w rozkładzie zredukowanych odkształceń plastycznych prowadzą do zupełnie odmiennych przebiegów naprężeń własnych. I tak wartości składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x) osiągają po jednym przejeździe, na powierzchni (5.36b):

- dla przypadku czystego toczenia około +250MPa (rozciąganie),
- dla przypadku toczenia z hamowaniem (75%) -70MPa (ściskanie),
- dla przypadku toczenia z przyspieszaniem (75%) -470MPa (ściskanie).

Podobnie składowa naprężeń własnych w kierunku poprzecznym osiąga na powierzchni (rys.5.36c):

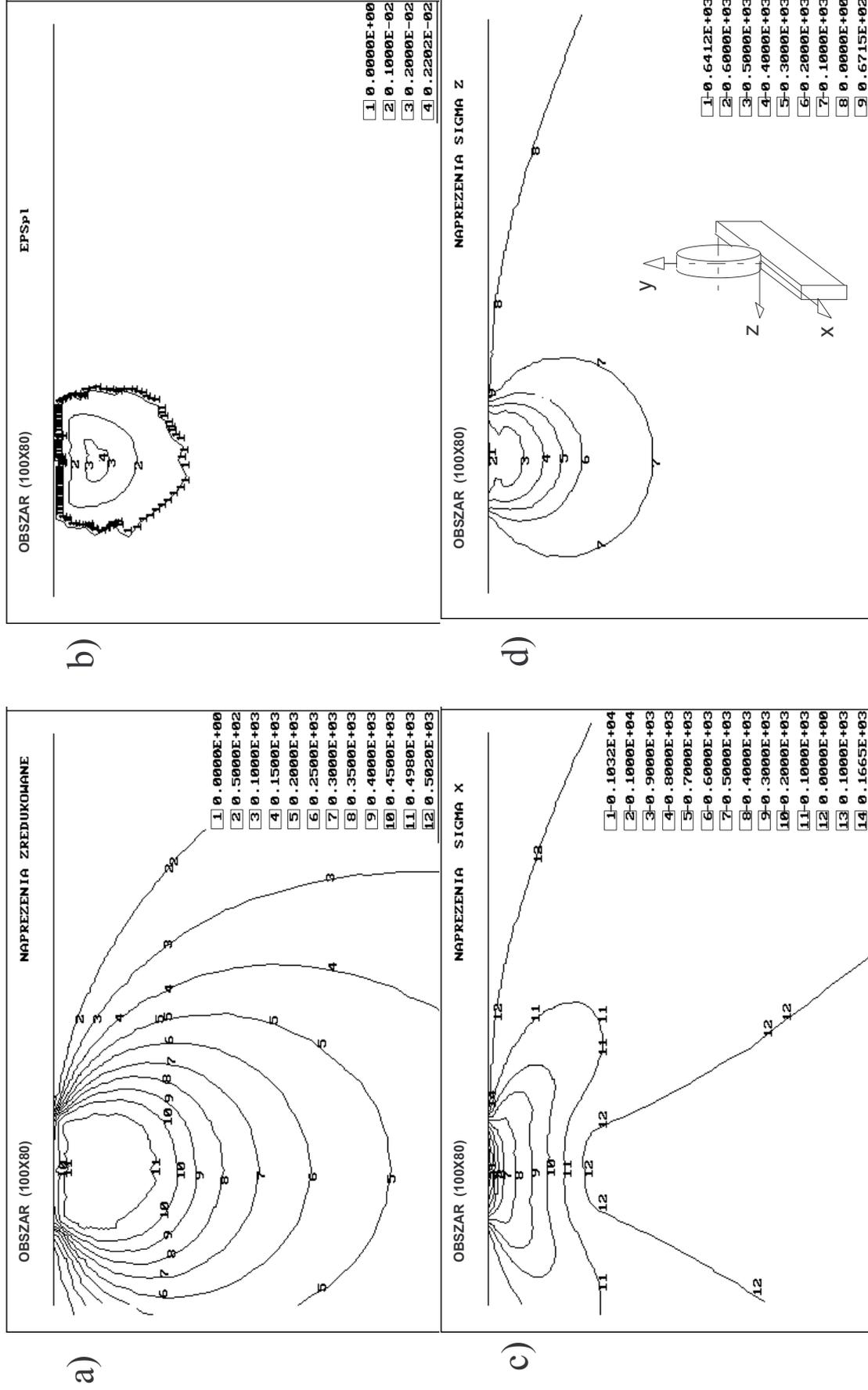
- dla przypadku czystego toczenia około +75MPa (rozciąganie),
- dla przypadku toczenia z hamowaniem (75%) -220MPa (ściskanie),
- dla przypadku toczenia z przyspieszaniem (75%) -415MPa (ściskanie).

Widać zatem, że uwzględnienie tarcia w analizie sprężysto-plastycznego toczenia zmienia bardzo istotnie uzyskiwane wyniki. Nasuwają się wnioski:

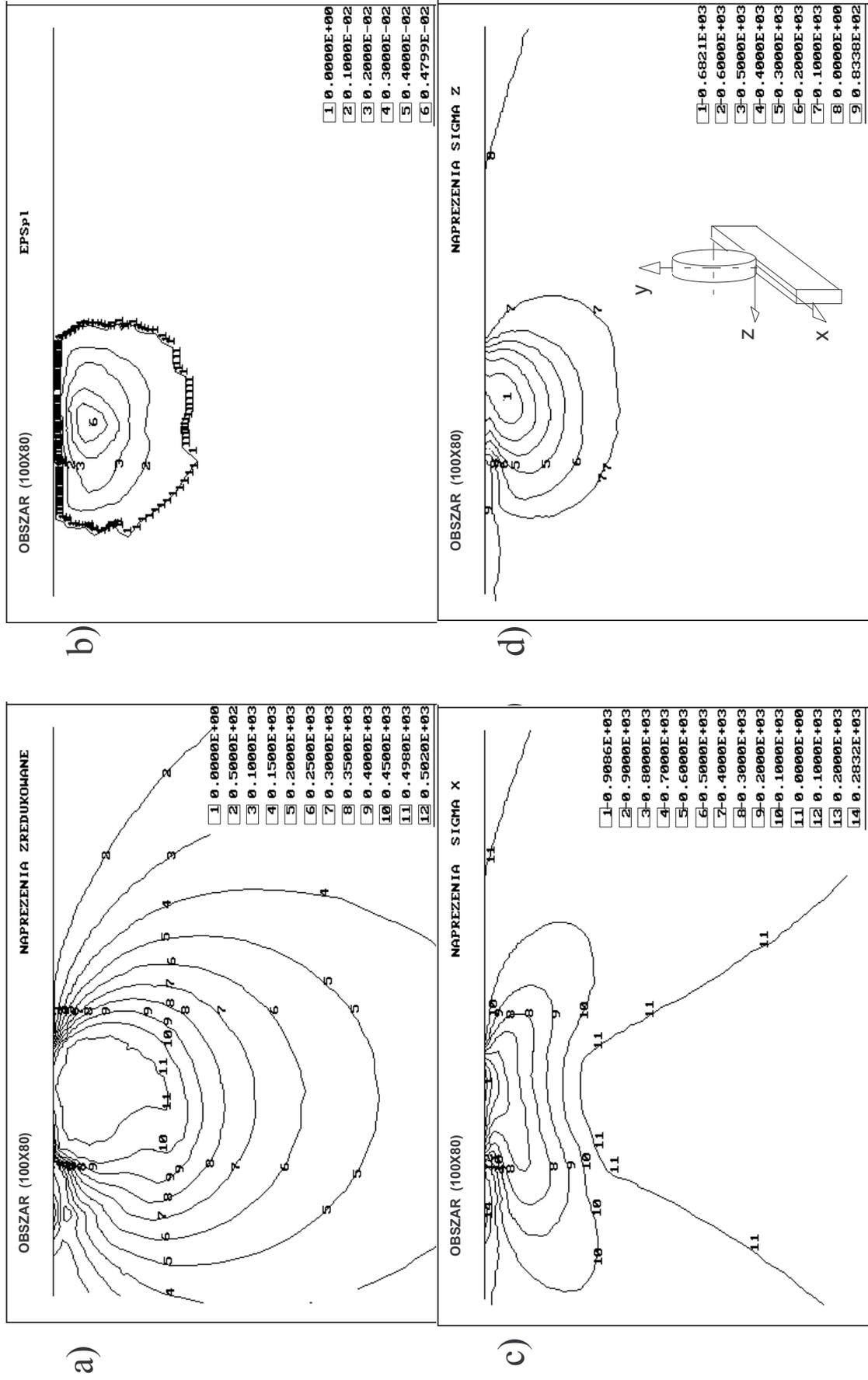
1. Naprężenia własne ściskające w warstwie powierzchniowej powstają przy toczeniu w wyniku istnienia dużych wartości odkształceń w tej warstwie i mogą je wywoływać jedynie efekty tarcia w strefie kontaktu.
2. Przyspieszanie prowadzi do powstawania znacznie większych naprężeń własnych ściskających w warstwie powierzchniowej (w porównaniu z hamowaniem).
3. Duże wartości odkształceń plastycznych w warstwie powierzchniowej oznaczają potencjalną możliwość ścierania materiału, a w efekcie szybszego zużycia.
4. Istnienie powierzchniowych naprężeń ściskających o dużych wartościach jest korzystne z punktu widzenia inicjacji i rozwoju pęknięć.

Na rysunku 5.37 przedstawiono zbiorcze rozkłady nacisków, sił stycznych i naprężeń zredukowanych w momencie, gdy walec tocząc się osiąga połowę dystansu ( $x = 0$ ,  $u = 25\text{mm}$ ). Warto zauważyć, że toczenie powoduje pewną asymetrię nacisków, gdyż wznios powierzchni przed walcem wywołuje bardziej "ostry" ich rozkład. Sytuacja staje się szczególnie widoczna gdy walec ślizga się po powierzchni (duży wypływ materiału). Widać też, że poślizg na powierzchni kontaktu występuje w strefie spływu (tzn. w tylnej części).

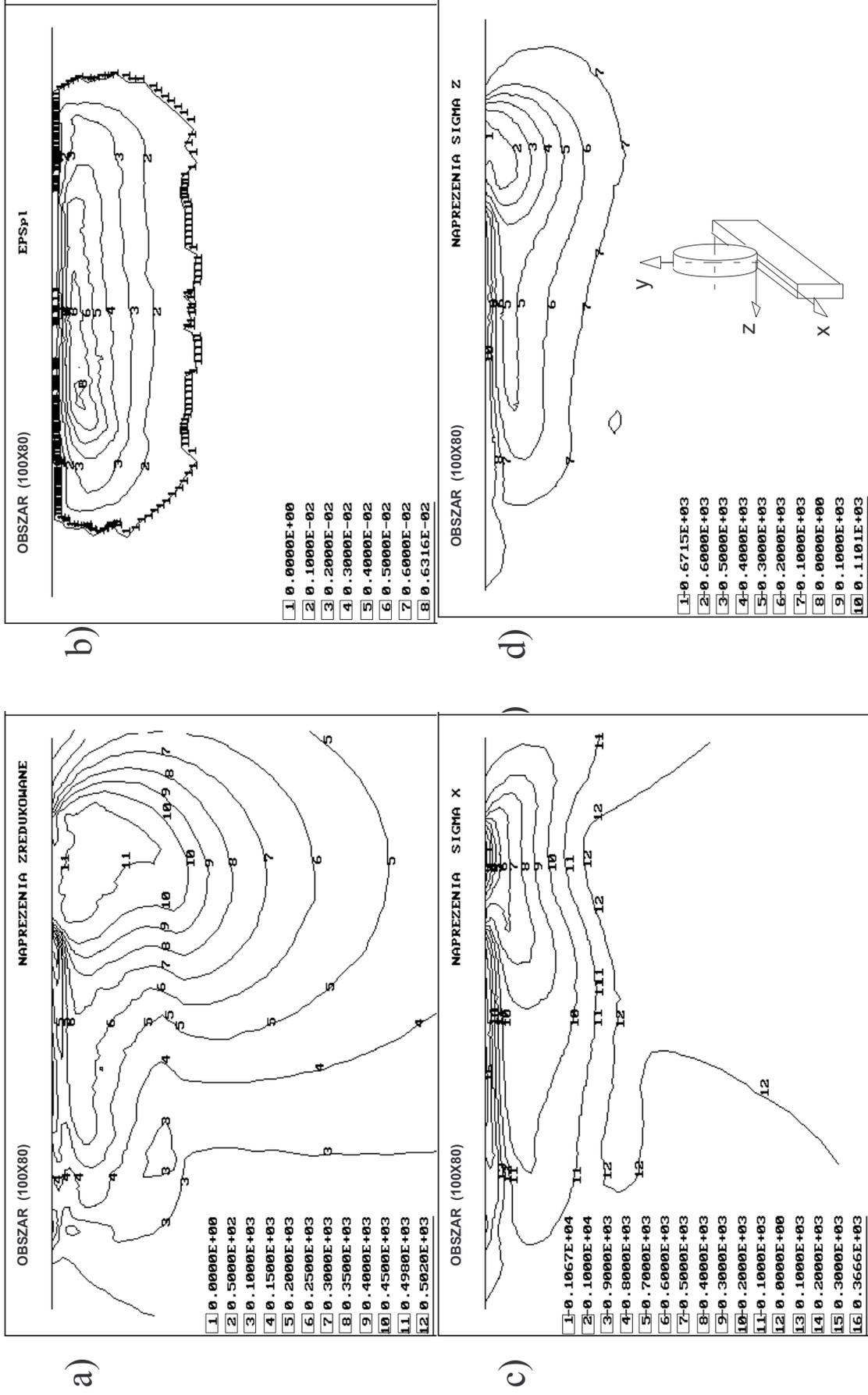
Ciekawe jest porównanie hamowania i przyspieszania o wartości  $T = \pm 0.75 \cdot T_h$ . Rozkłady sił stycznych wyglądają tu podobnie (różnią się znakiem). Rozkład naprężeń zredukowanych wskazuje jednak, że dla przyspieszania strefa uplastycznienia jest znacznie szersza i obejmuje prawie całą strefę kontaktu. Dodatkowych informacji dostarcza rozkład naprężeń wzdłużnych i poprzecznych. Hamowanie wprowadza w strefę najazdu walca naprężenia wzdłużne ściskające, co ze względu na fakt, że pozostałe składowe naprężenia mają też znak ujemny powoduje obniżenie naprężeń zredukowanych. Przyspieszanie z kolei wprowadza w strefę najazdu składową rozciągającą, zwiększając wartość naprężeń zredukowanych. Rzecz ma się odwrotnie w strefie spływu. Potwierdza to wcześniejsze obserwacje (patrz rozkład izolinii zredukowanych odkształceń plastycznych), że przy hamowaniu odkształcenia powierzchniowe powstają w śladzie walca, podczas gdy przy przyspieszaniu duże odkształcenia plastyczne występują w strefie najazdu.



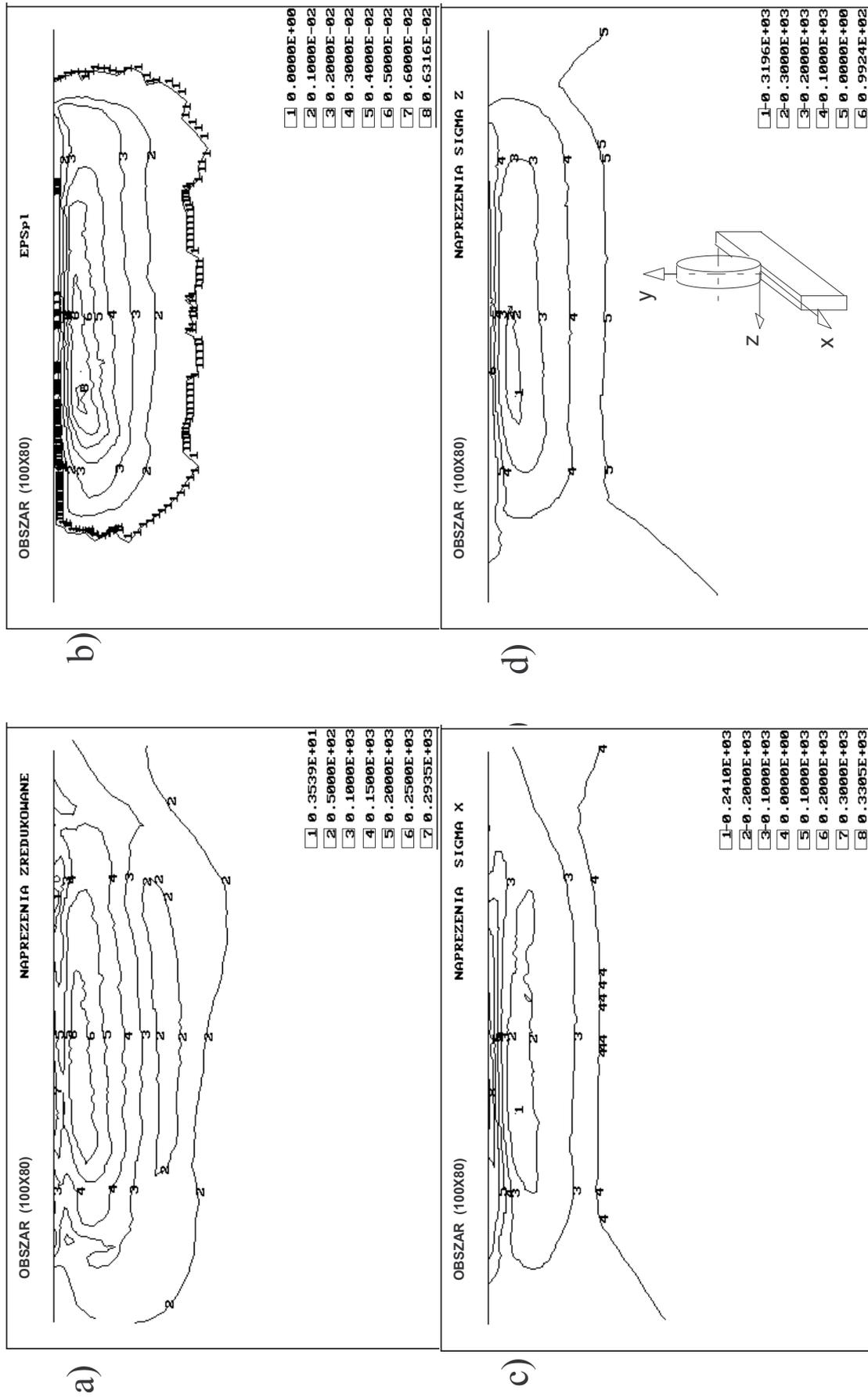
Rys.5.15. Toczenie swobodne z tarcielem - początek toczenia; rozkład: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z), dla przypadku toczenia swobodnego.



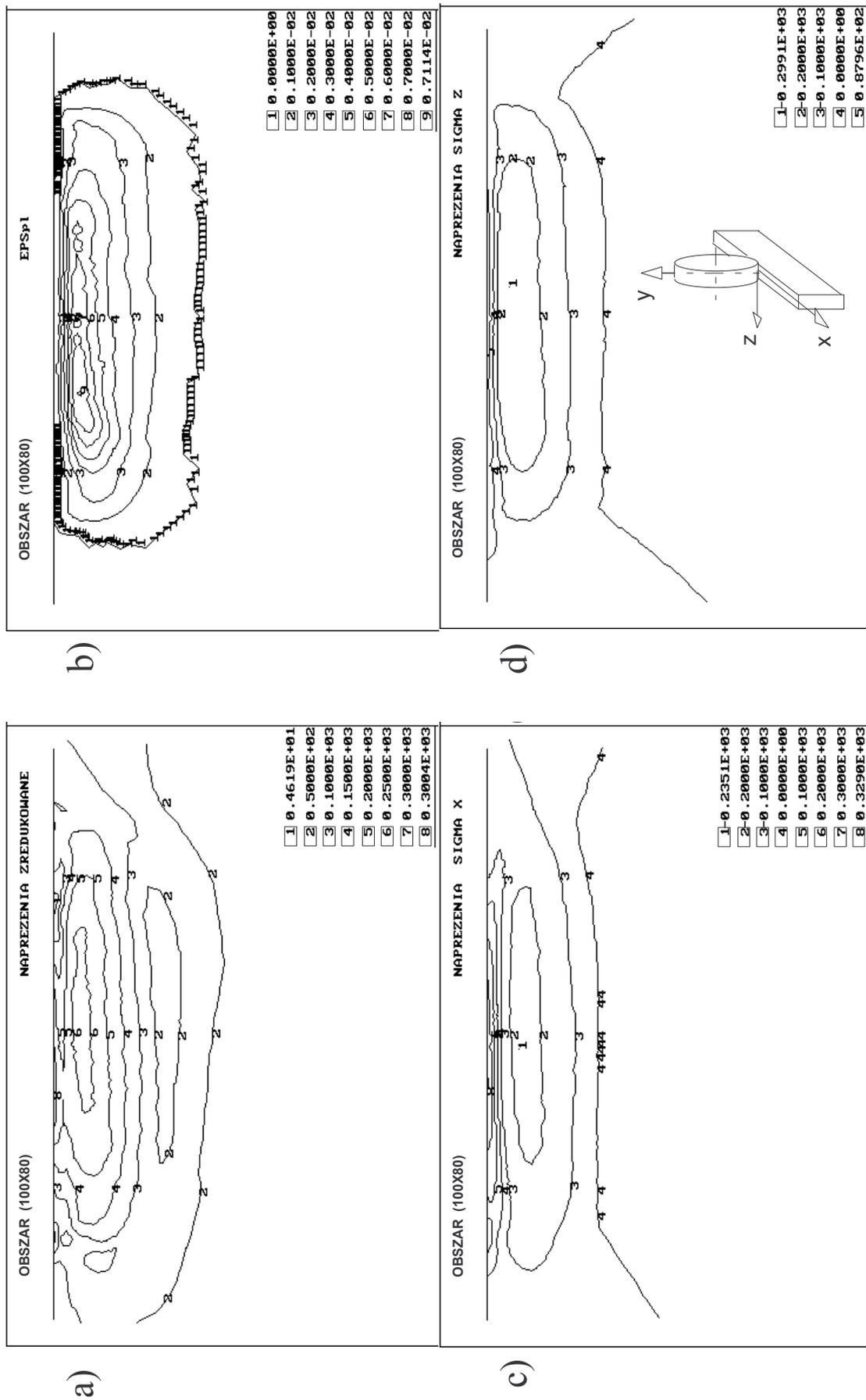
Rys.5.16. Toczzenie swobodne - stan po przemieszczeniu walca o 10mm; rozkład: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



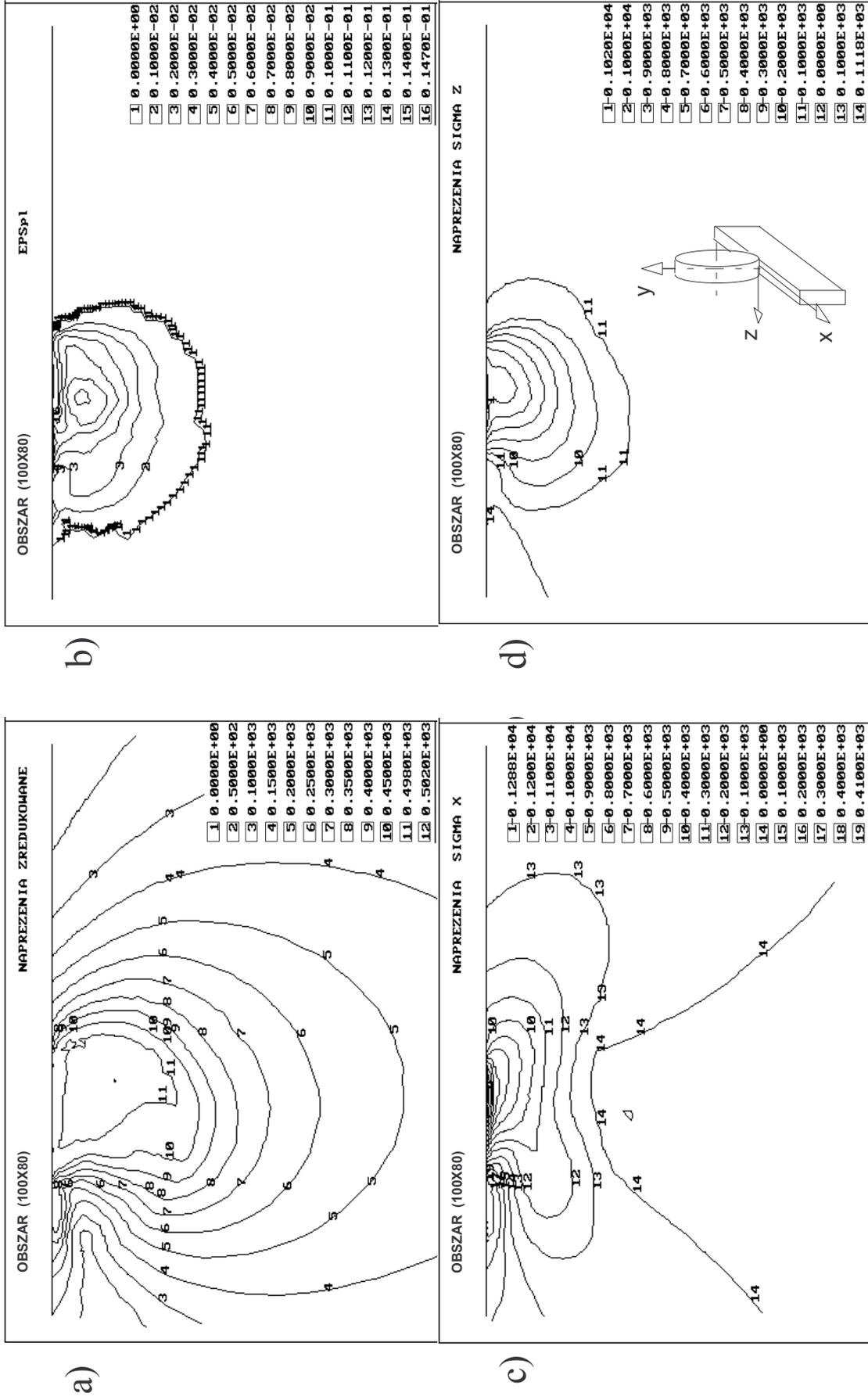
Rys.5.17. Toczzenie swobodne - stan po przemieszczeniu walca o 50mm; rozkład: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



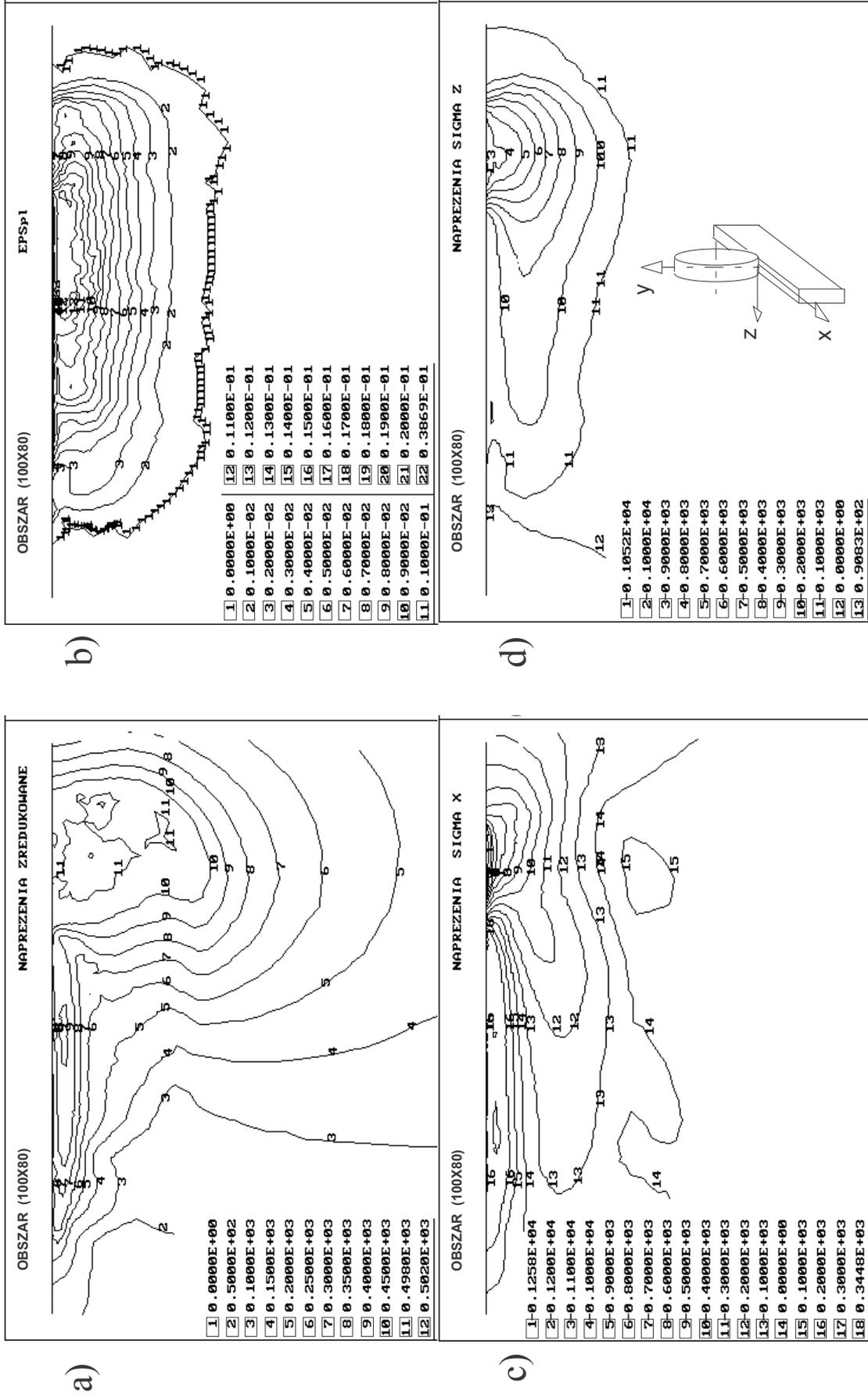
Rys.5.18. Toczenie swobodne z tarcielem - stan po odciążeniu; rozkład: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



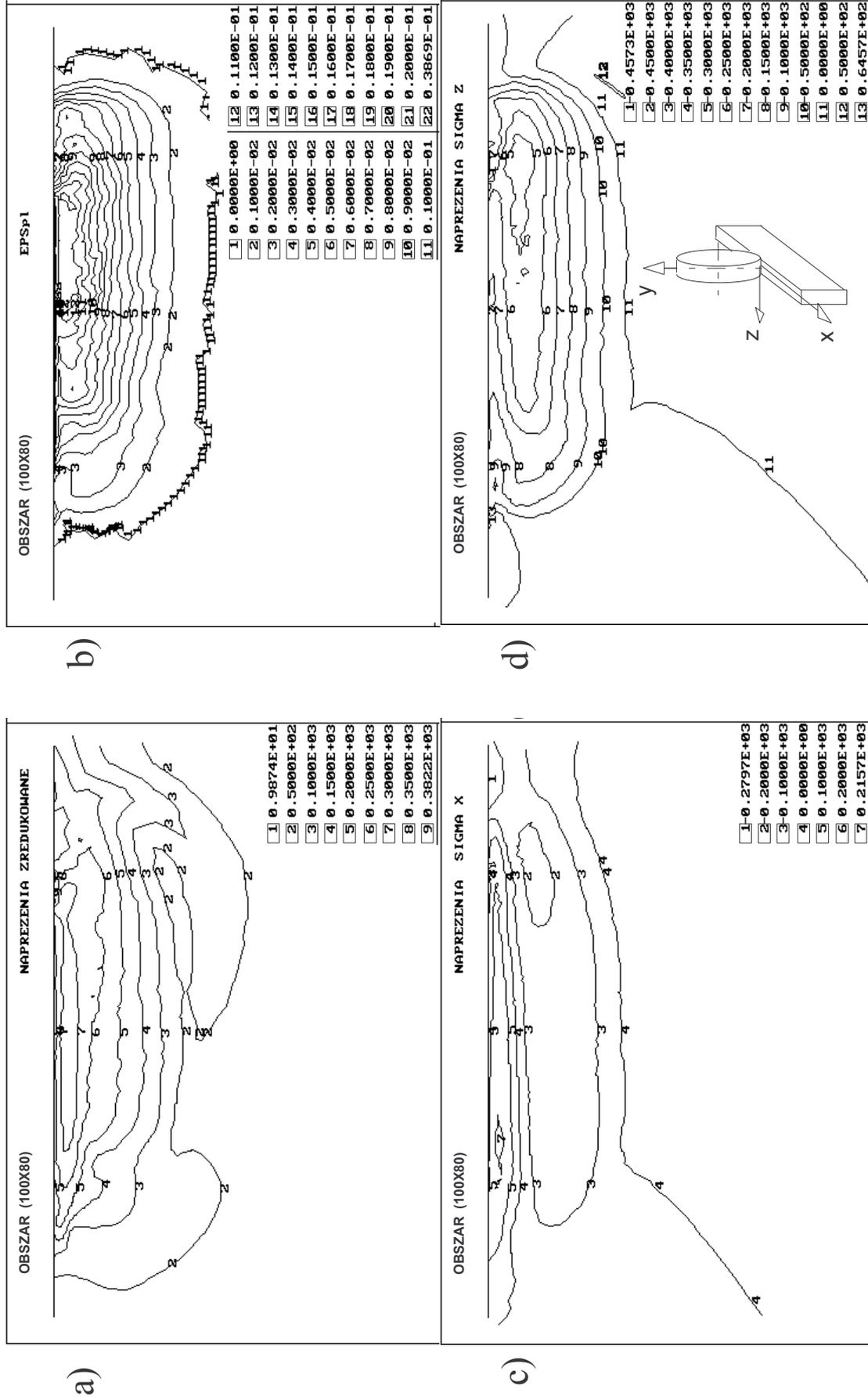
Rys.5.19. Tocznie swobodne z tarcielem - stan po drugim przetoczeniu (i odciążeniu); rozkład: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



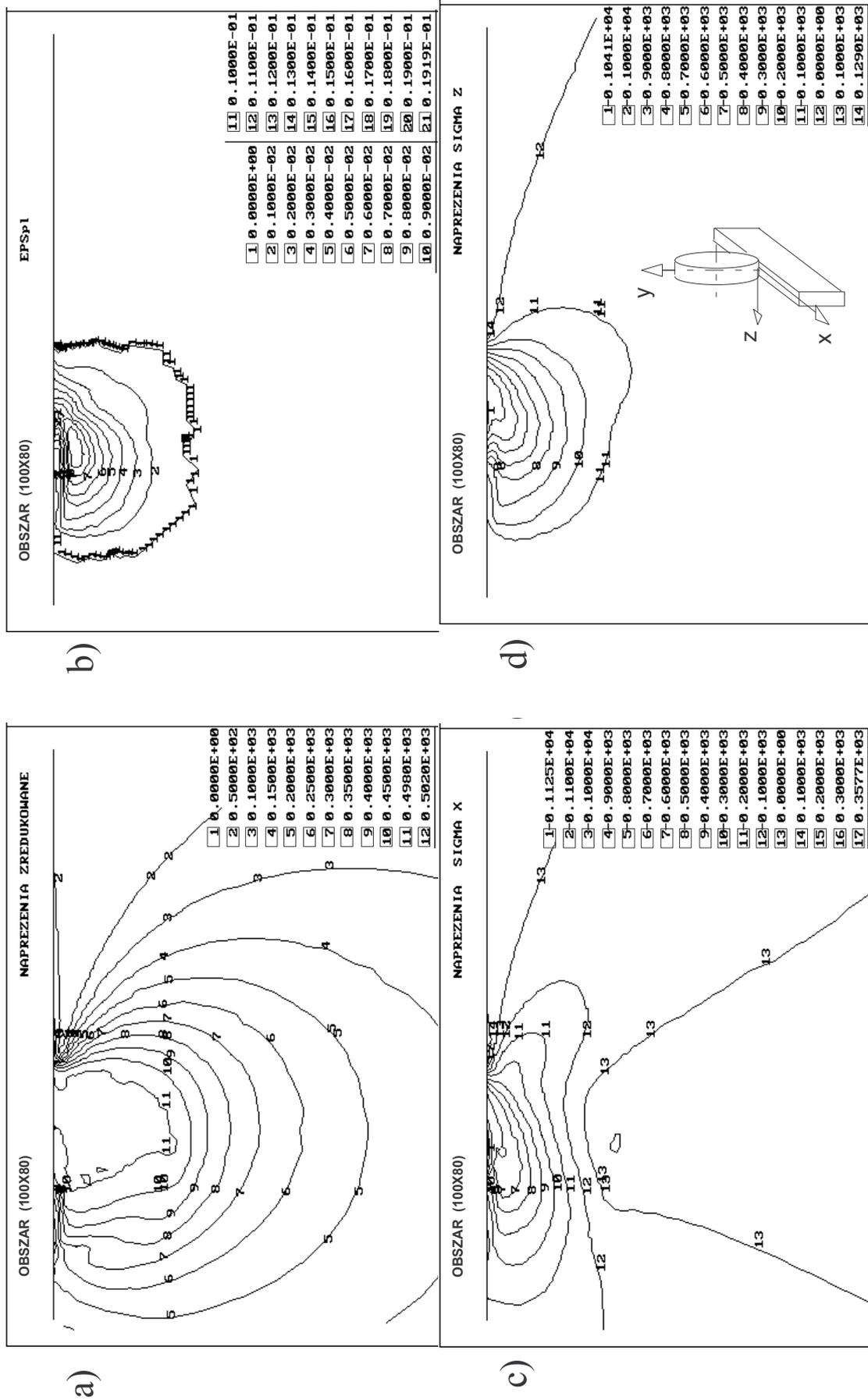
Rys.5.20. Toczenie z hamowaniem  $T = 0.75T_h$ , stan po przemieszczeniu walca o 10mm; izolinie: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



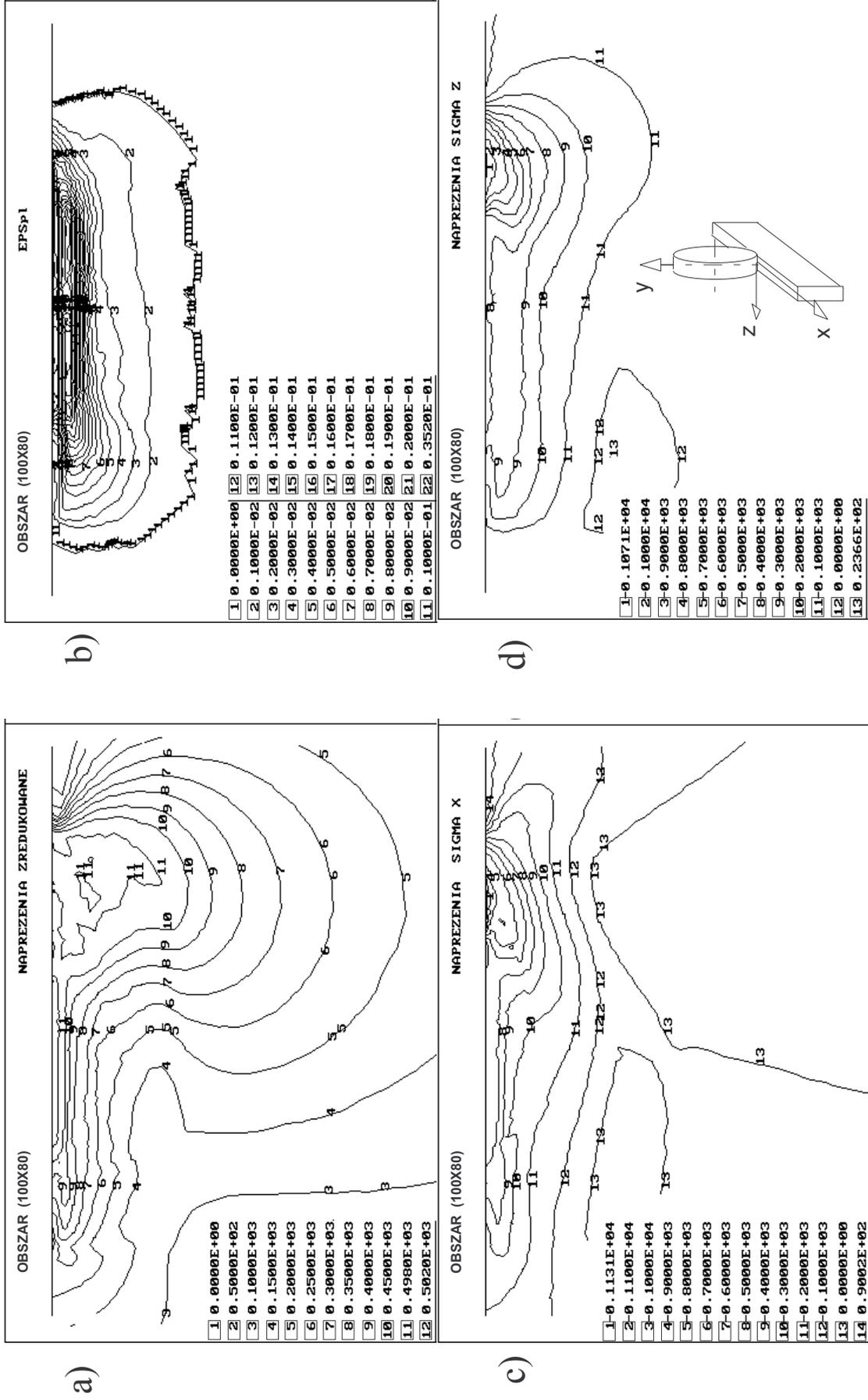
Rys.5.21. Toczenie z hamowaniem  $T = 0.75T_h$ , stan po przemieszczeniu walca o 50mm; izolinie: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



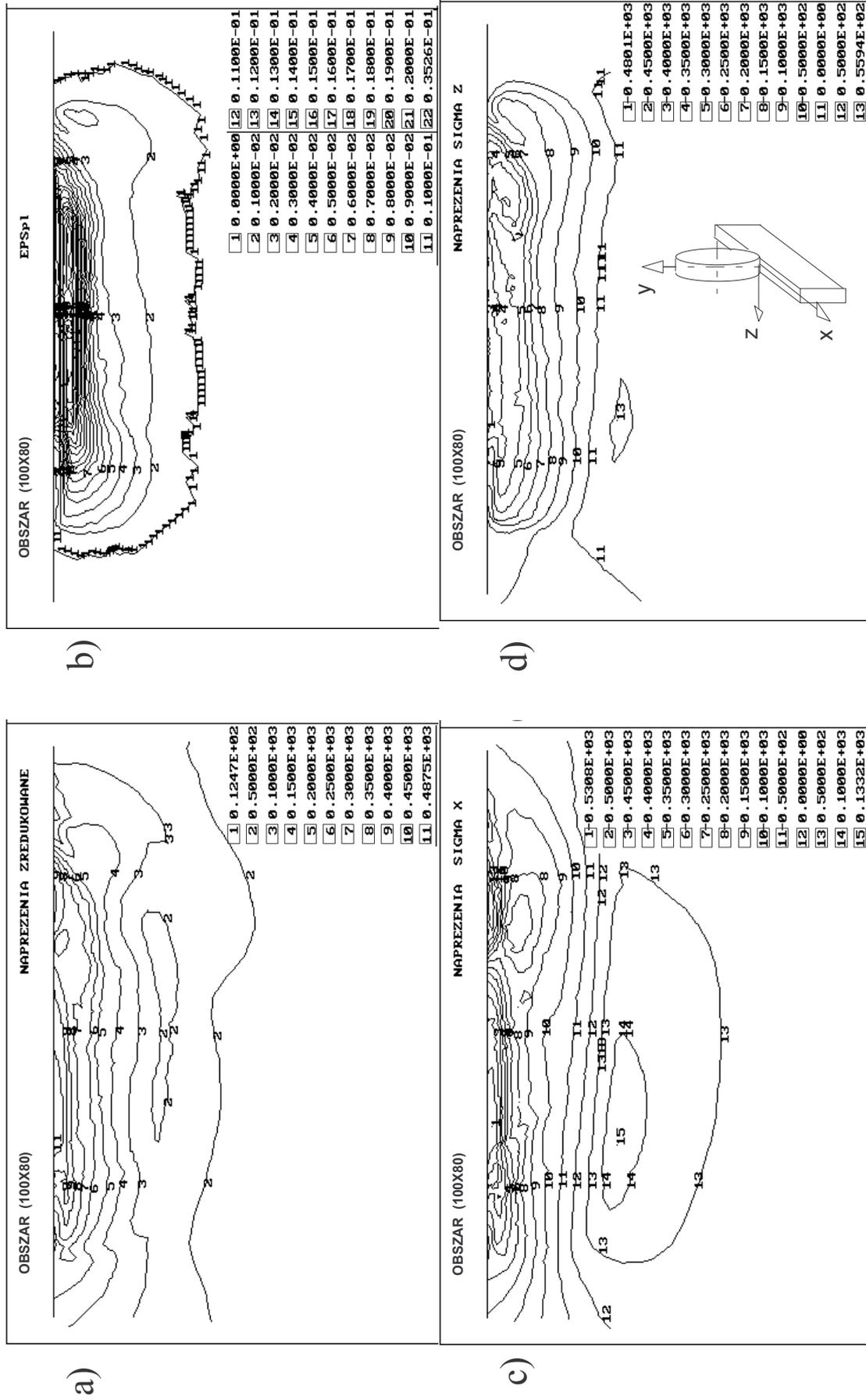
Rys.5.22. Toczenie z hamowaniem  $T = 0.75T_h$ , stan po odciążeniu; izolinie: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



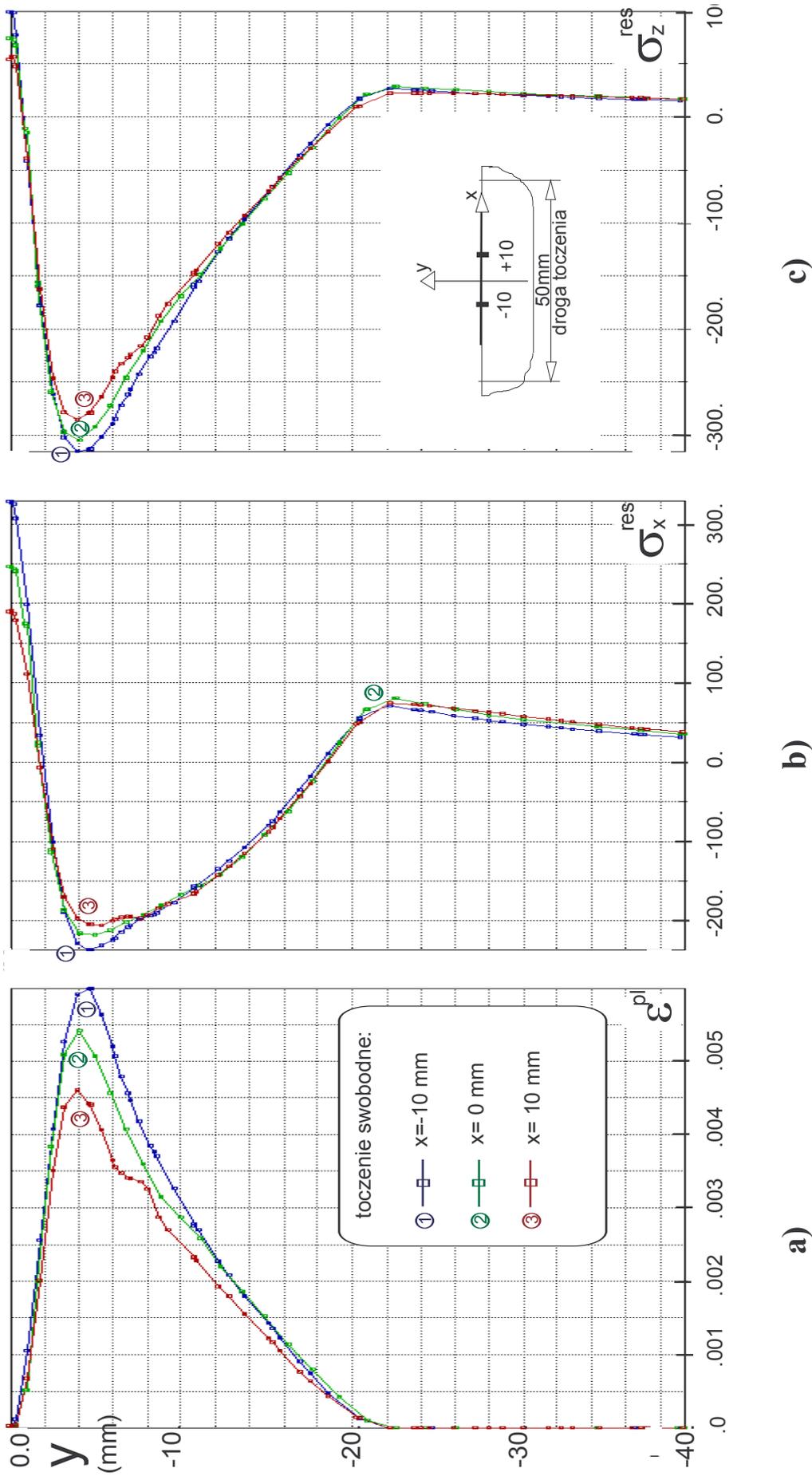
Rys.5.23. Toczenie z przyspieszaniem  $T = -0.75T_h$ , stan po przemieszczeniu walca o 10mm; izolinie: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kier. poprzecznym (z).



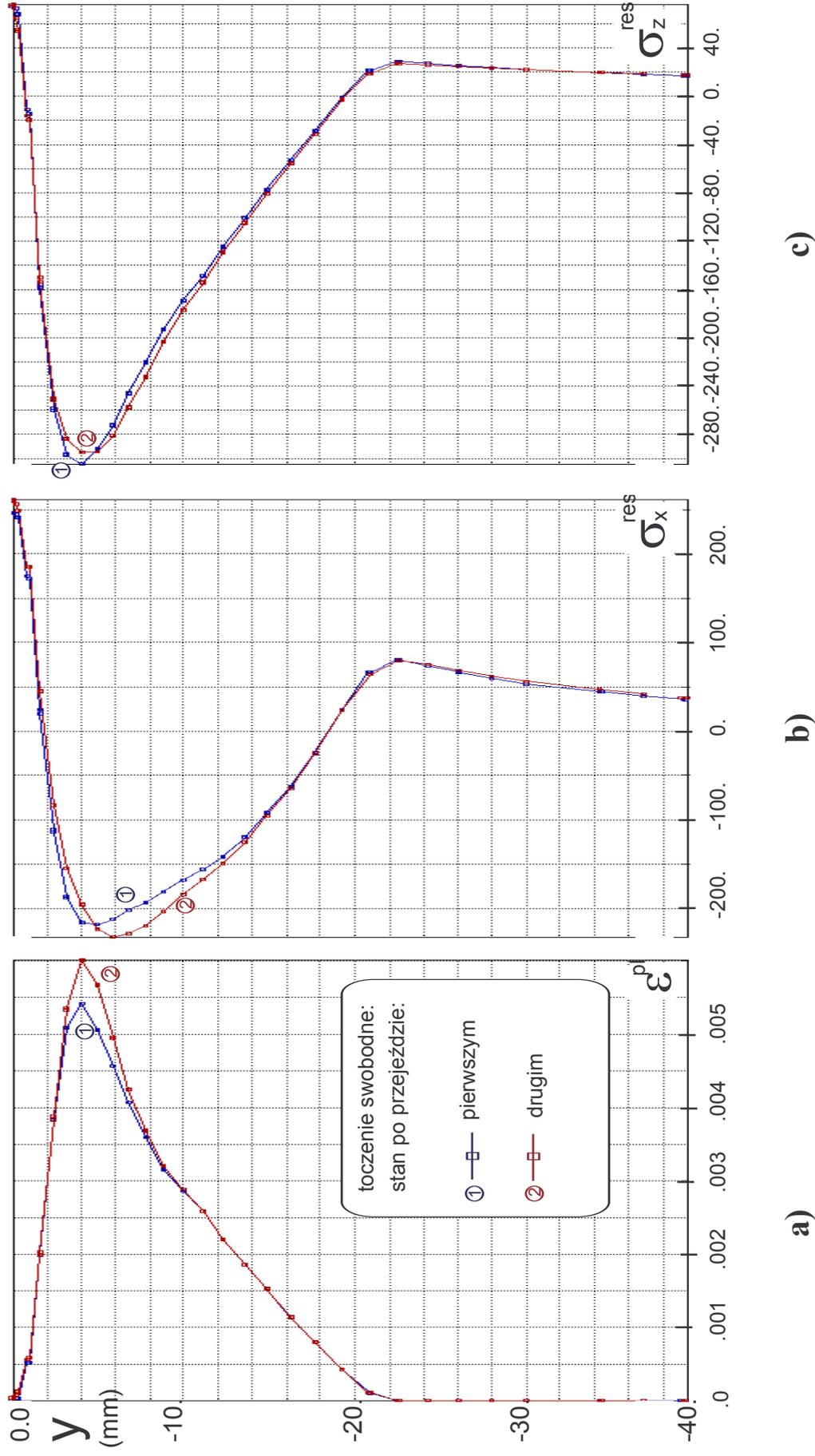
Rys.5.24. Toczenie z przyspieszeniem  $T = -0.75T_h$ , stan po przemieszczeniu walca o 50mm; izolinie: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kier. poprzecznym (z).



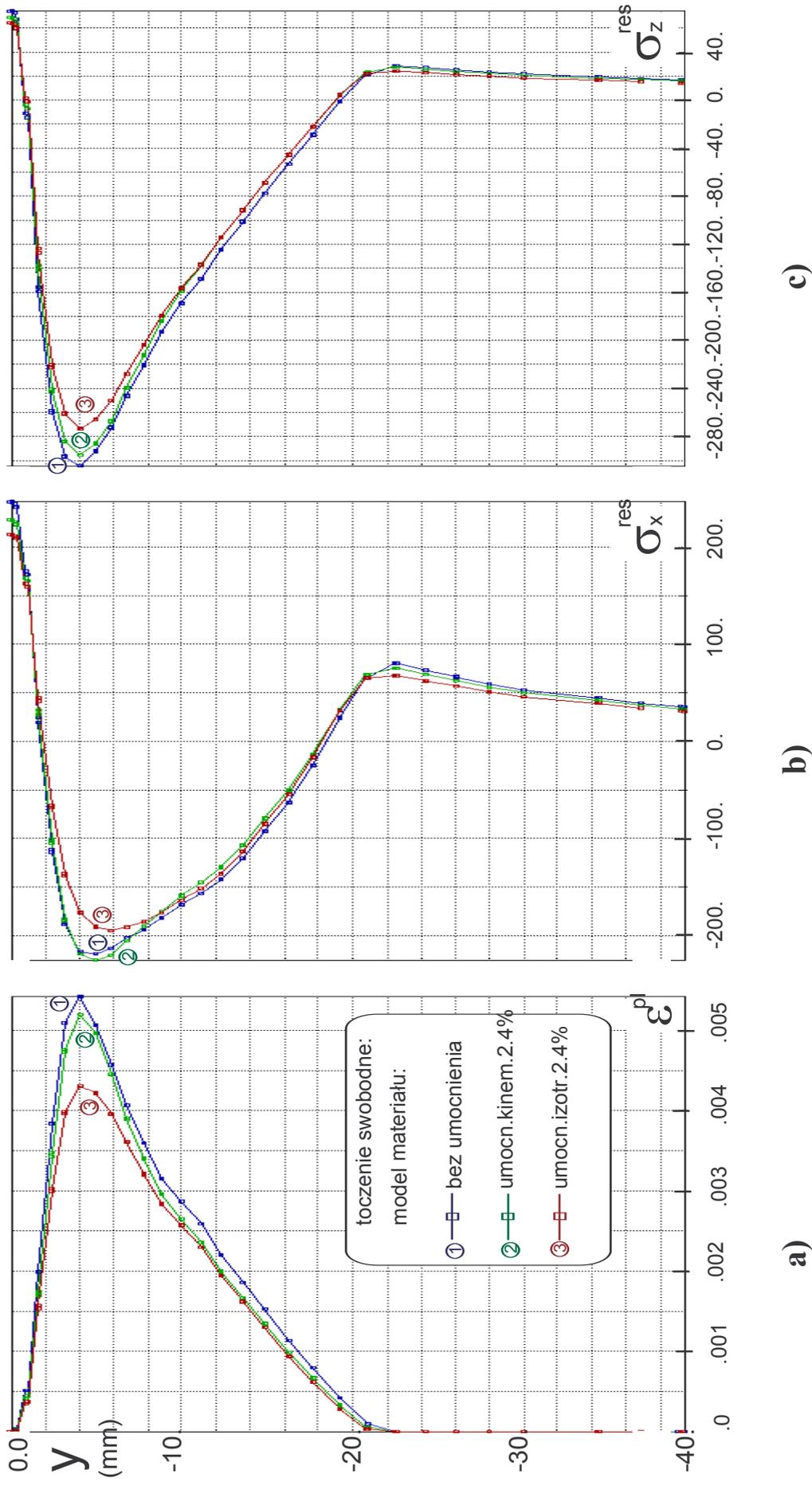
Rys.5.25. Toczzenie z przyspieszaniem  $T = -0.75T_p$ , stan po odciażeniu; izolinie: a) naprężeń zredukowanych, b) zredukowanych odkształceń plastycznych, c) składowej naprężeń w kierunku toczenia (x), d) składowej naprężeń w kierunku poprzecznym (z).



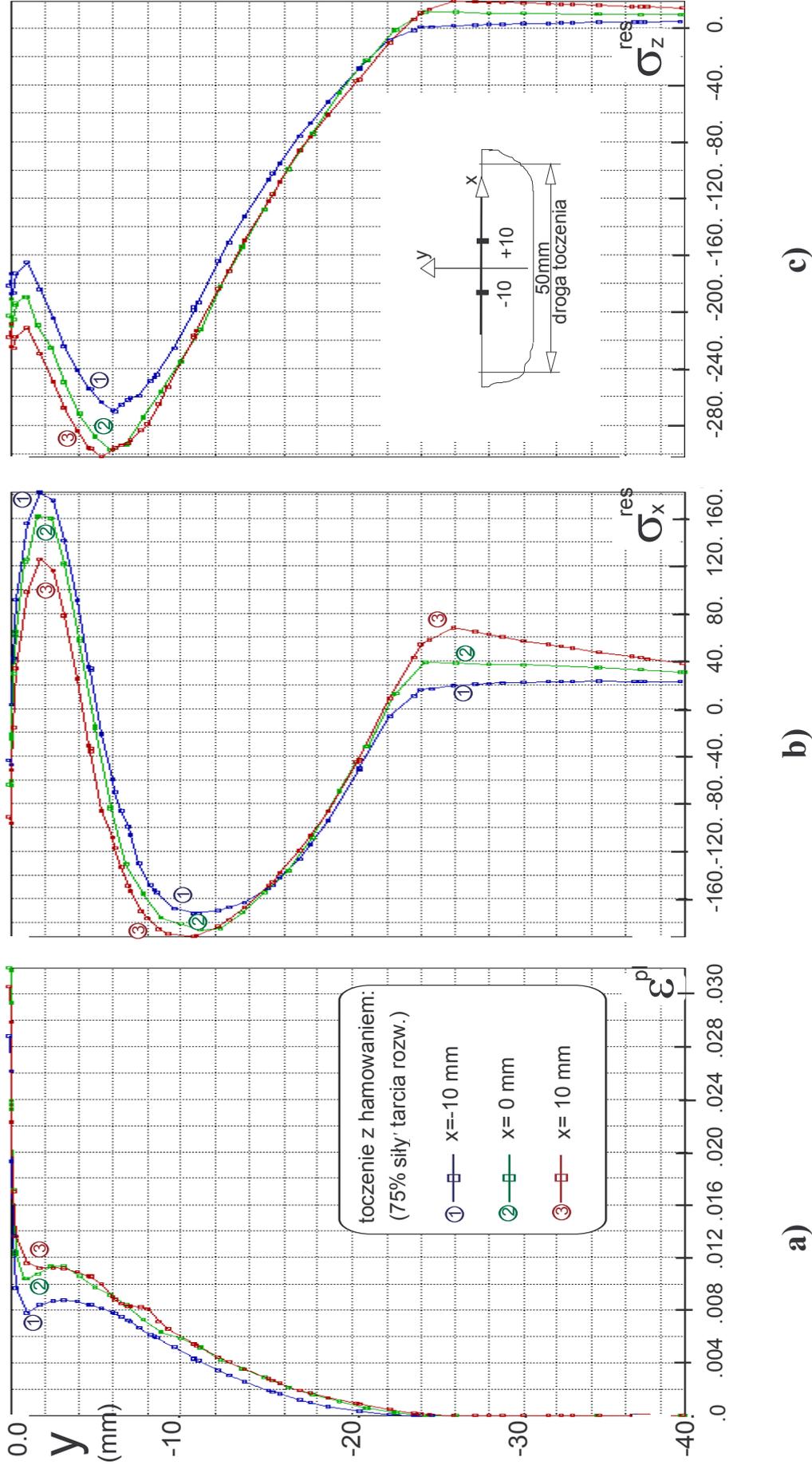
Rys.5.26. Toczanie swobodne z tarciami; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia ( $x$ ), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym ( $z$ ), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia ( $y$ ) w kolejnych miejscach wzdłuż drogi toczenia.



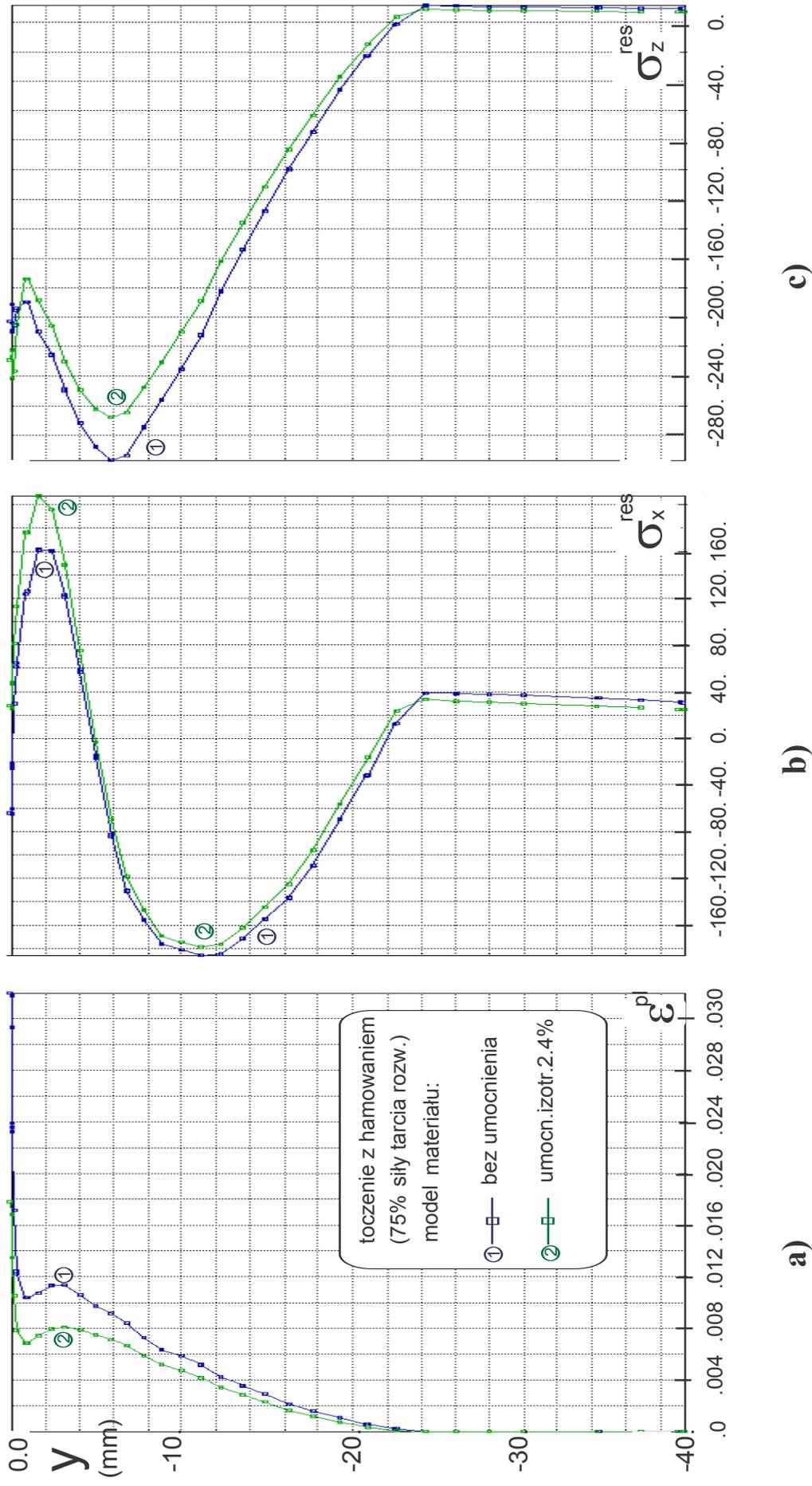
Rys.5.27. Toczzenie swobodne z tarcielem, stan po pierwszym i drugim przejeździe w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y).



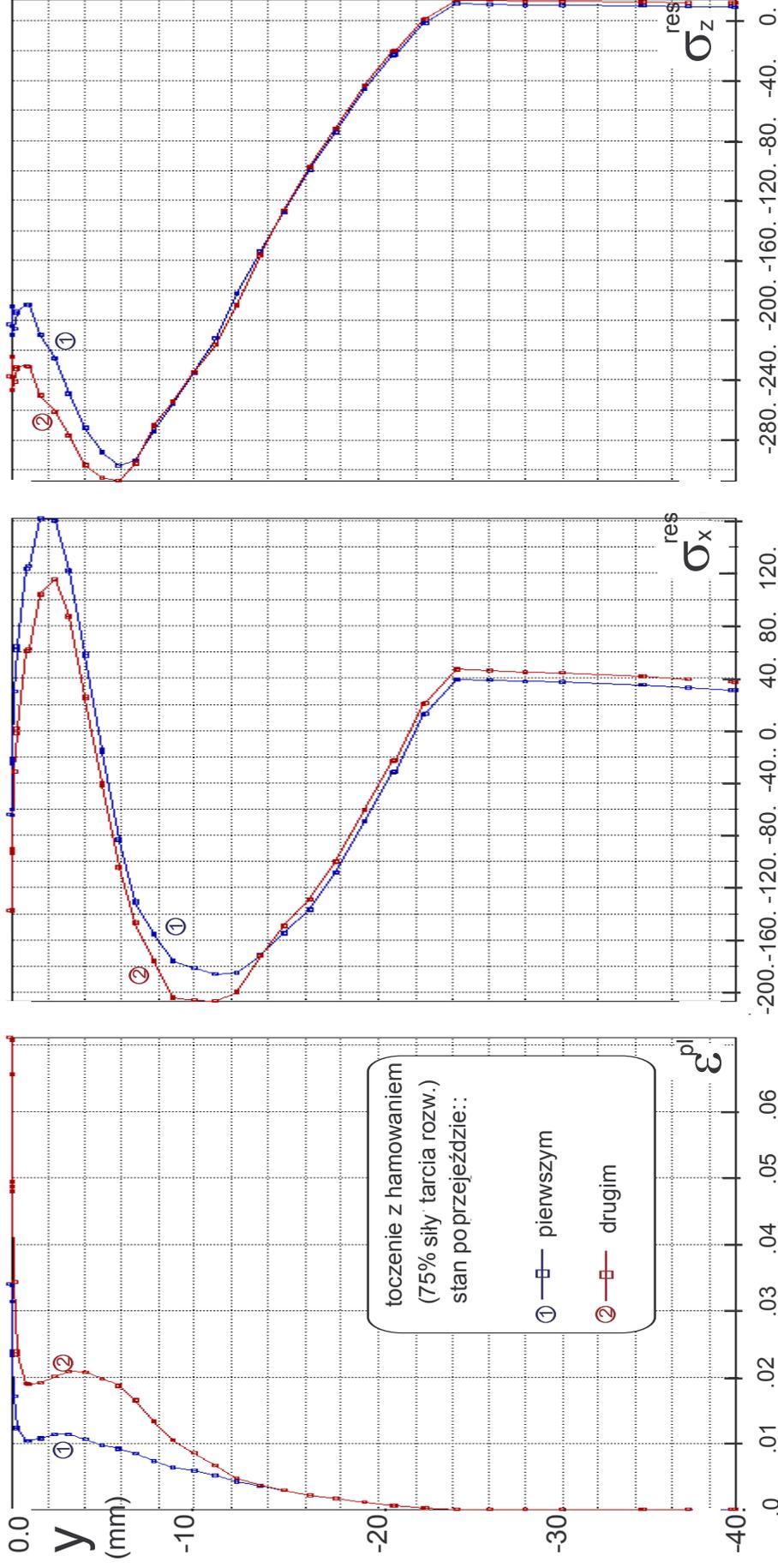
Rys.5.28. Toczenie swobodne, stan w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężenia własnych w kierunku toczenia ( $x$ ), c) składowa naprężenia własnych w kierunku poprzecznym ( $z$ ), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia ( $y$ ) dla różnych modeli umocnienia materiału.



Rys.5.29. Toczenie z hamowaniem ( $T = 0.75T_h$ ); rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) w kolejnych miejscach wzdłuż drogi toczenia.

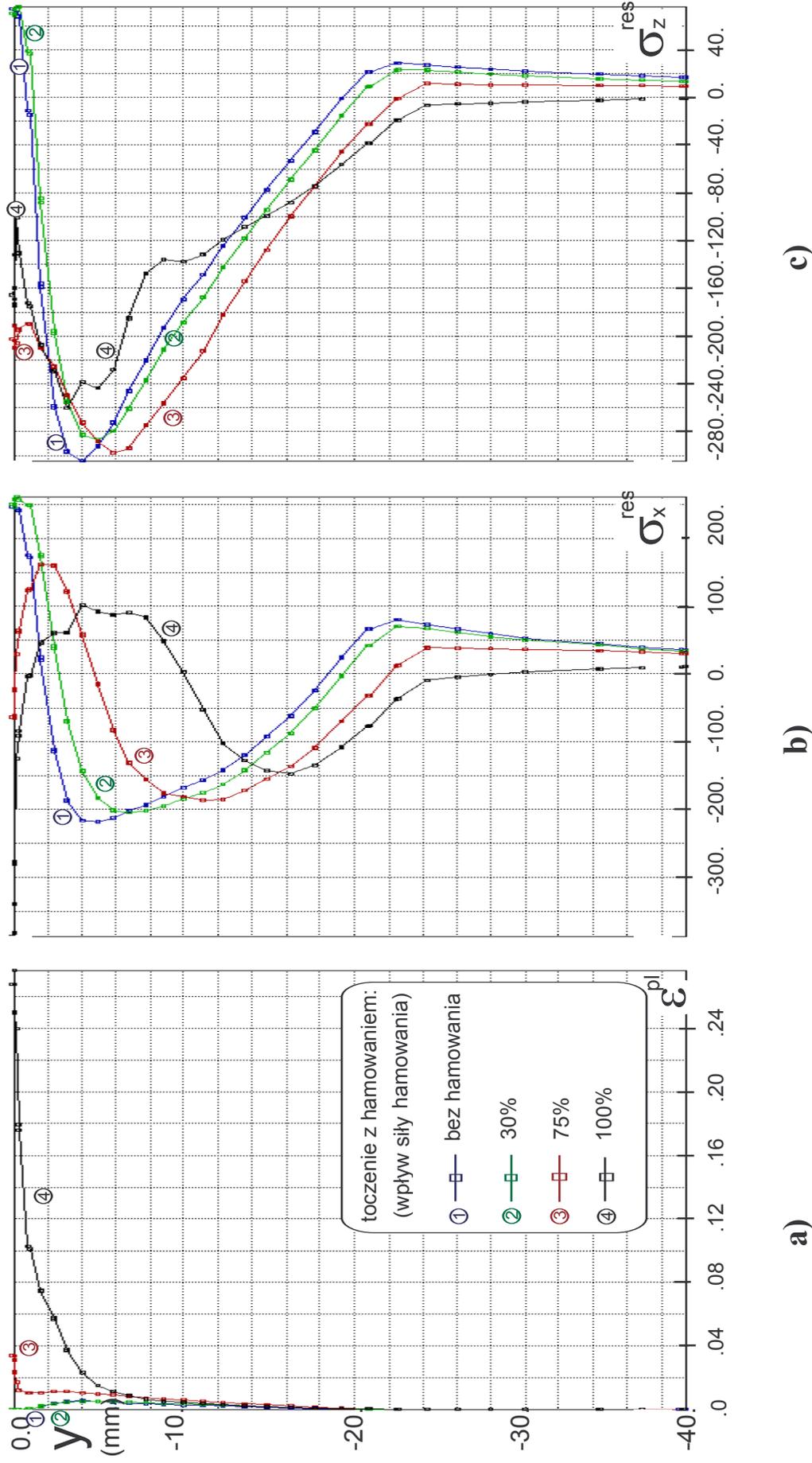


Rys.5.30. Toczenie z hamowaniem ( $T = 0.75T_h$ ); rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) dla różnych modeli umocnienia materiału.

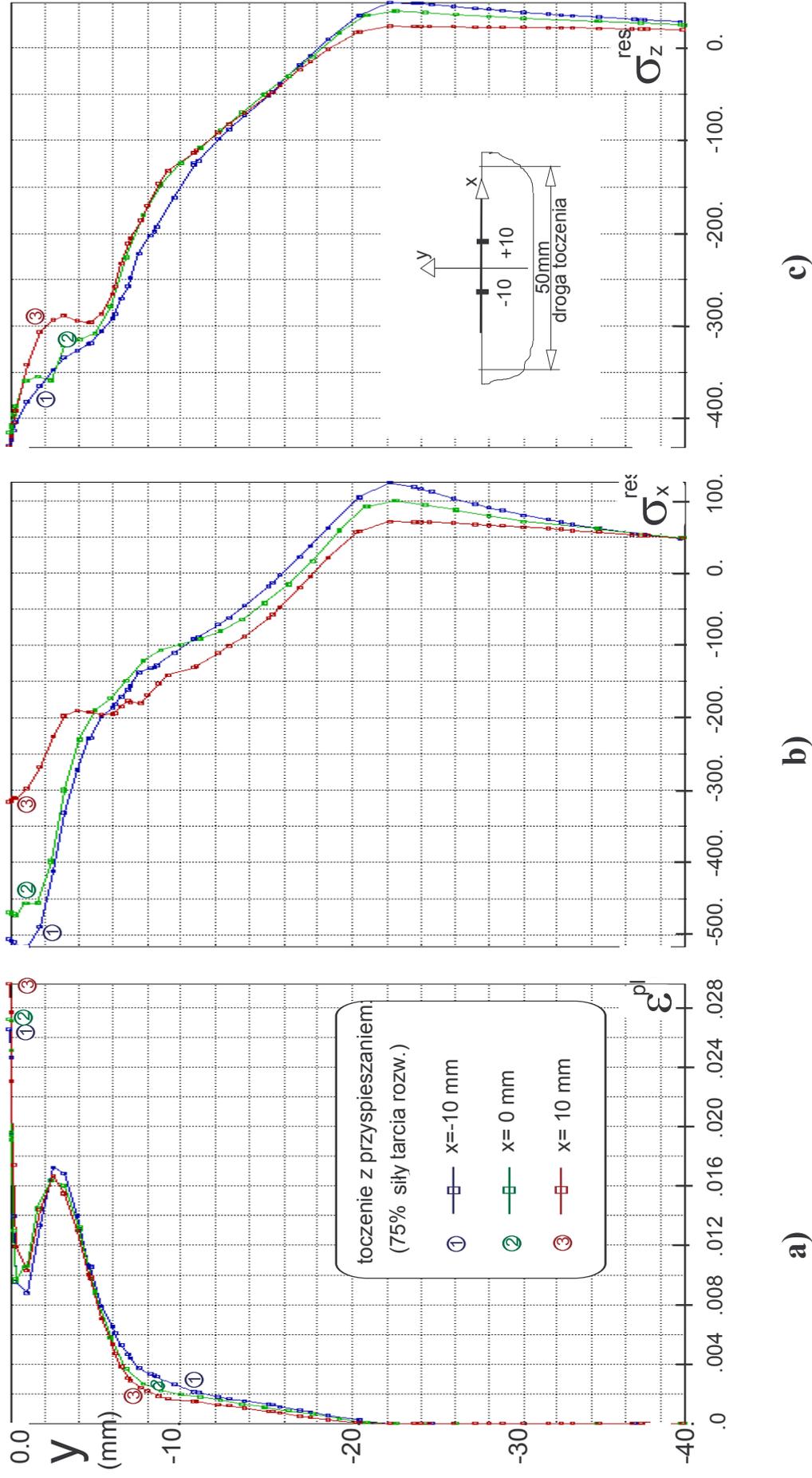


**a)** **b)** **c)**

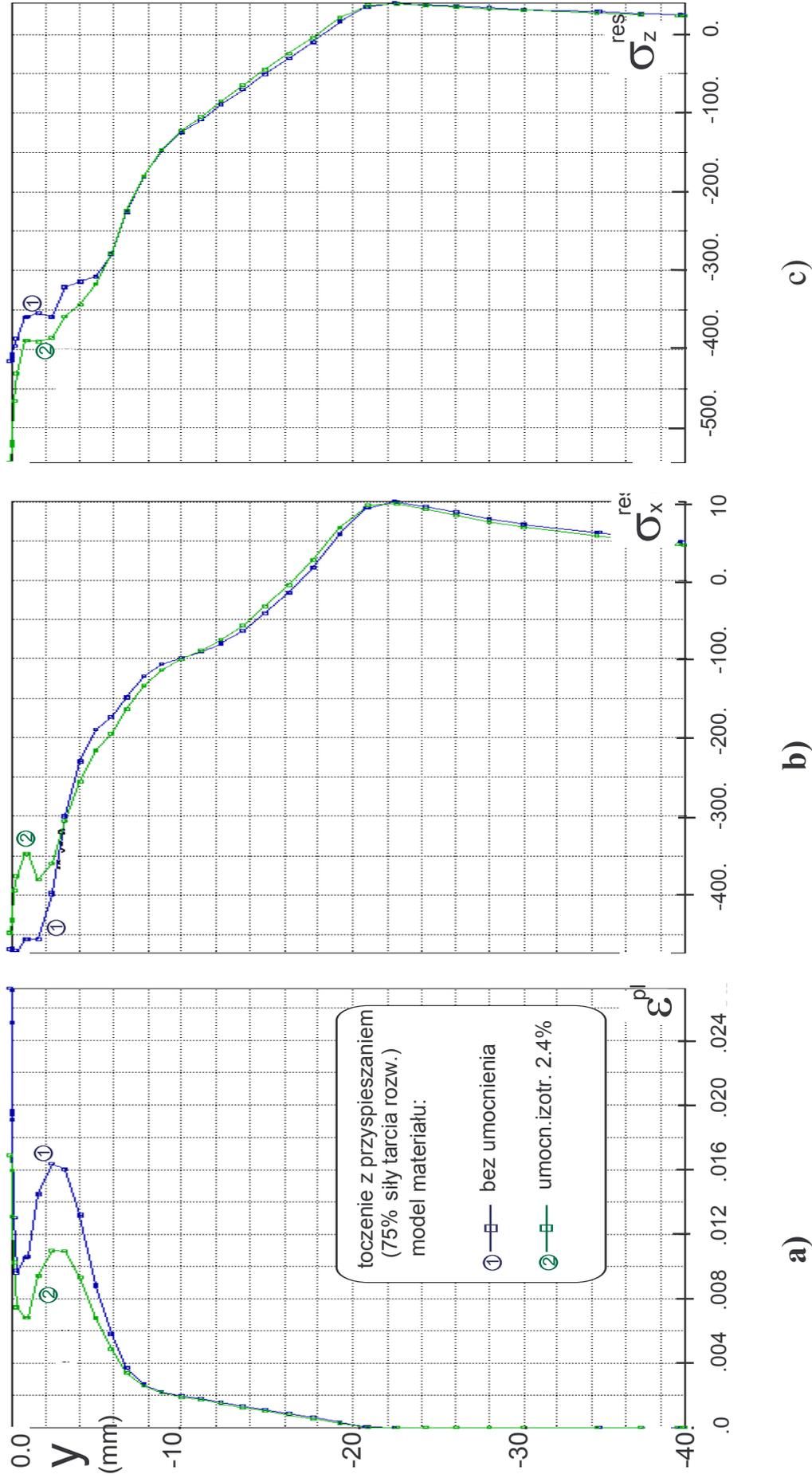
Rys.5.31. Toczenie z hamowaniem ( $T = 0.75T_h$ ), stan w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) po pierwszym i drugim przejeździe.



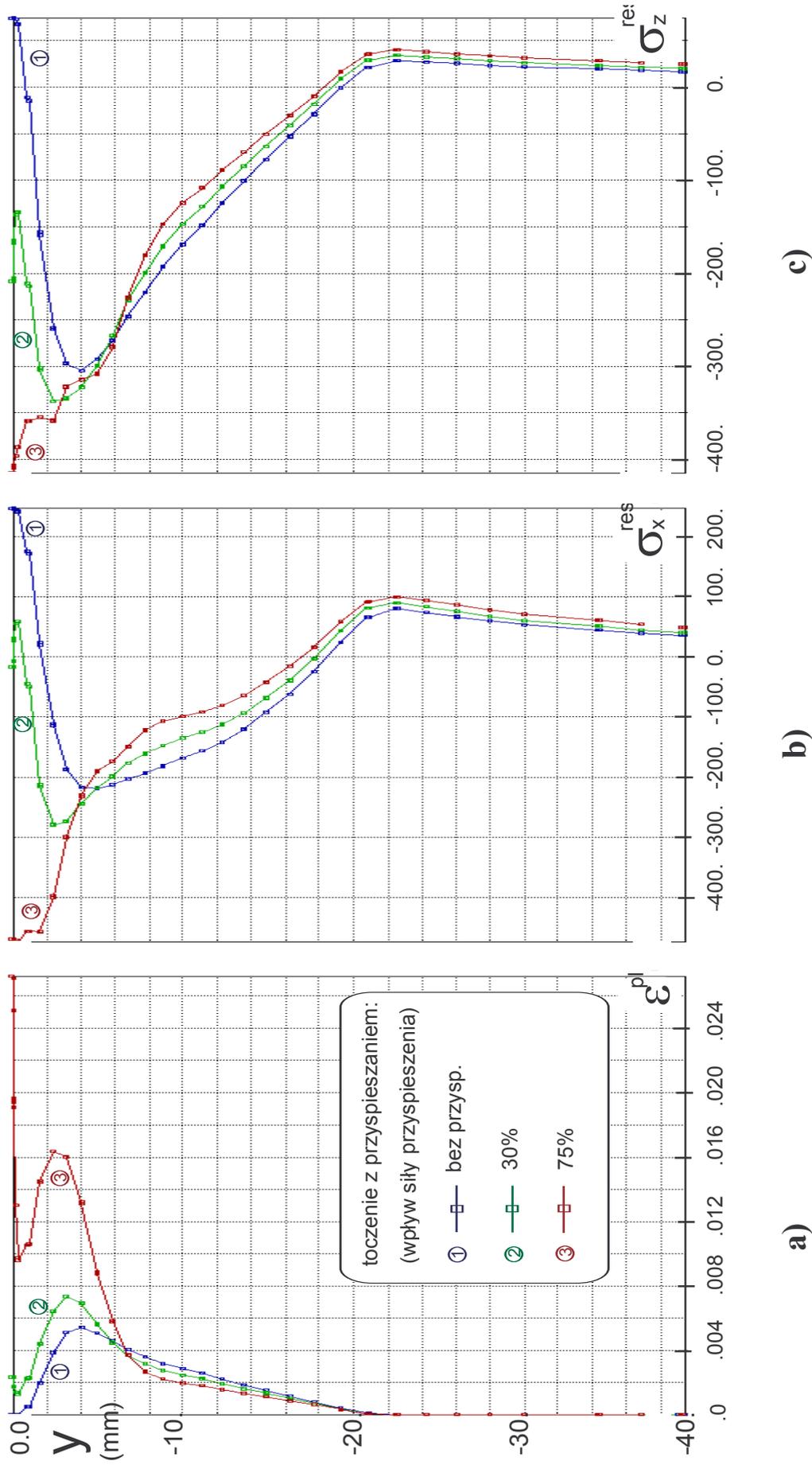
Rys.5.32. Toczenie z hamowaniem, stan w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) przy hamowaniu o wielkości  $T = 0, 0.3T_h, 0.75T_h, 1.0T_h$ .



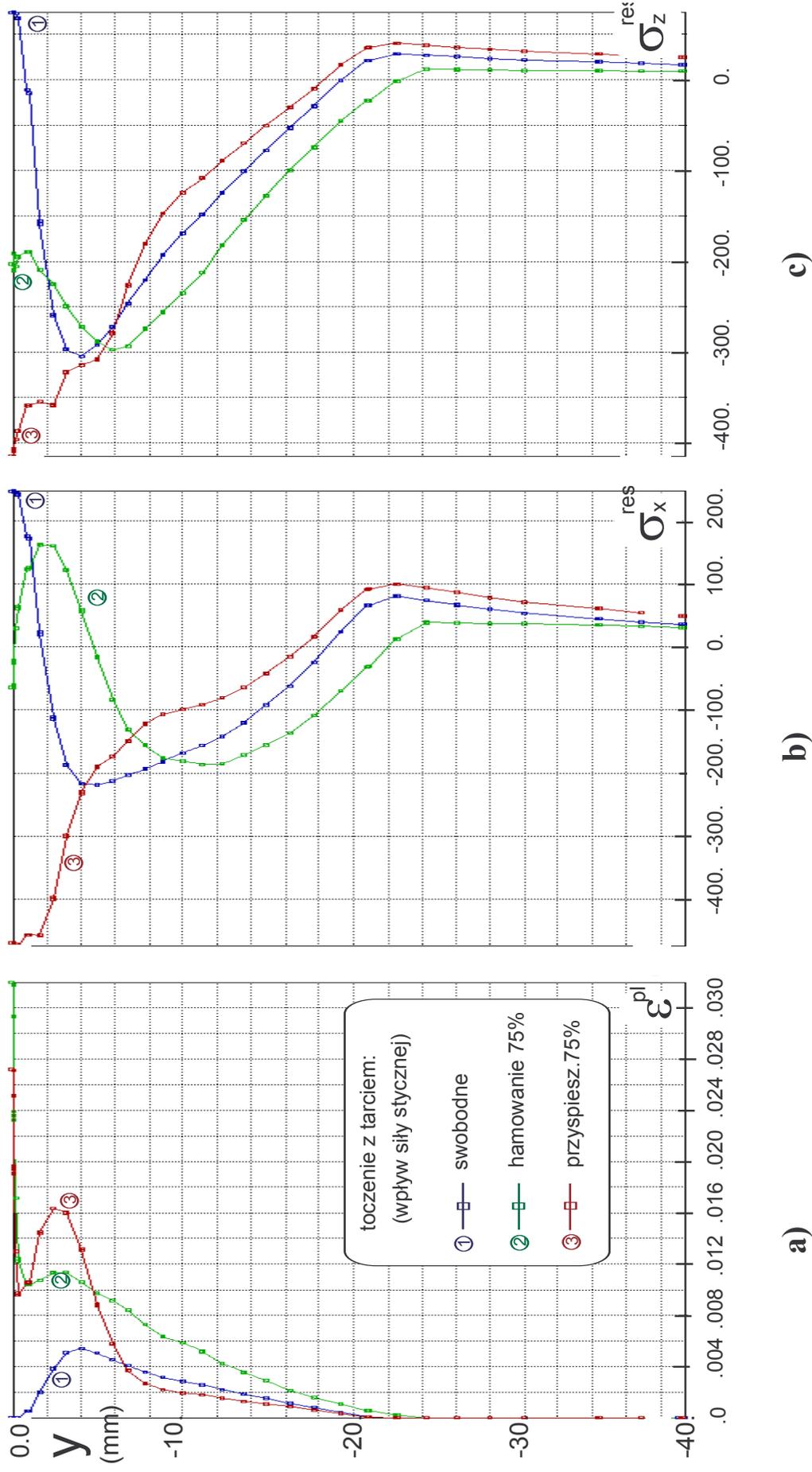
Rys.5.33. Toczenie z przyspieszaniem  $T = -0.5T_H$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowa naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowa naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) w kolejnych przekrojach wzdłuż drogi toczenia.



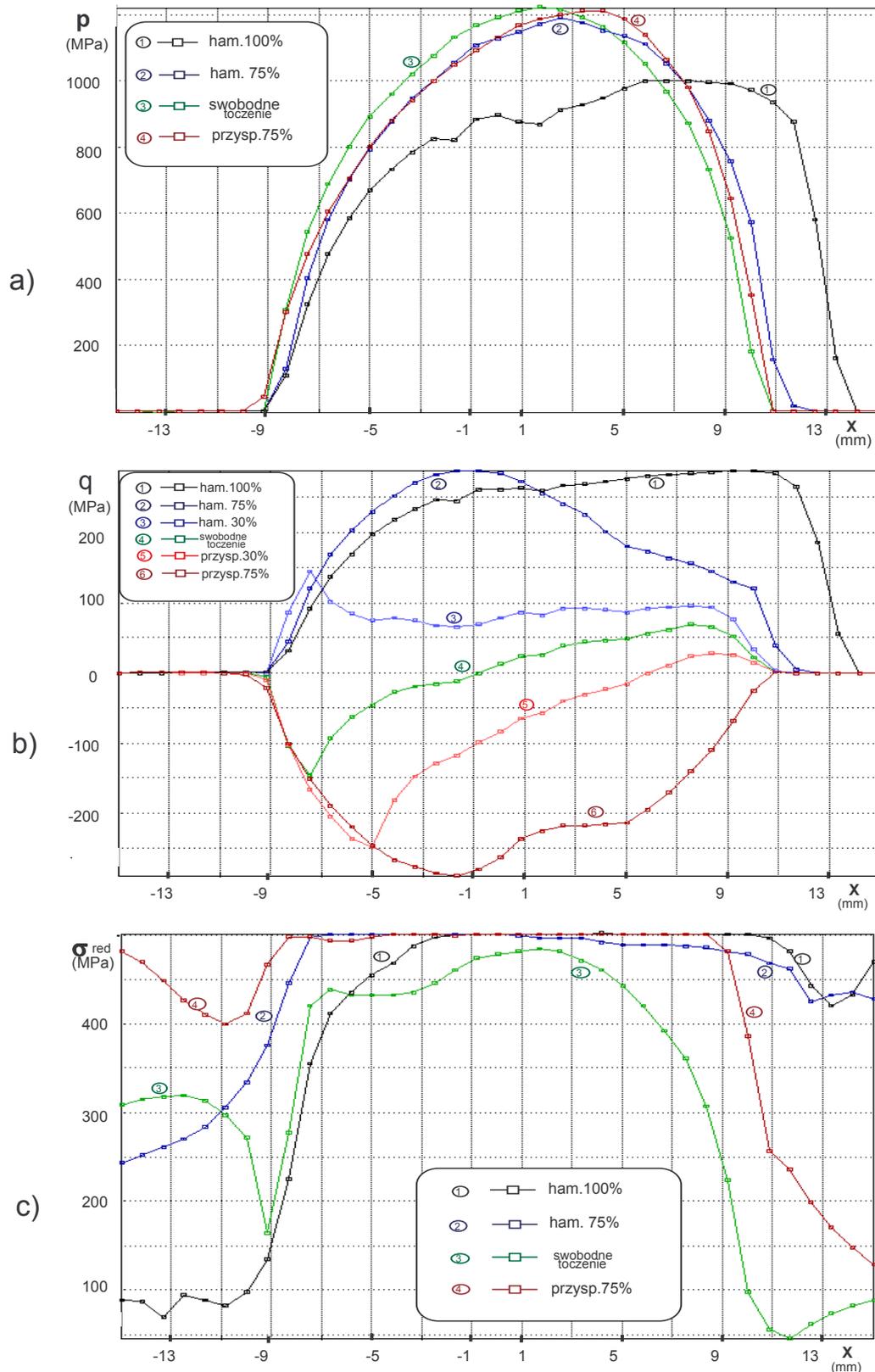
Rys.5.34. Toczenie z przyspieszaniem ( $T = -0.5T_H$ ), w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężenia własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężenia własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) dla różnych modeli umocnienia.



Rys.5.35. Toczenie z przyspieszaniem w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y) przy przyspieszaniu o wartości  $T = 0, -0.3T_h, -0.75T_h$ .



Rys.5.36. Porównanie toczenia swobodnego z hamowaniem ( $T = 0.75T_n$ ) i przyspieszaniem ( $T = -0.75T_n$ ) w miejscu  $x=0$ ; rozkłady: a) zredukowanych odkształceń plastycznych, b) składowej naprężeń własnych w kierunku toczenia (x), c) składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym (z), w funkcji głębokości mierzonej od powierzchni toczenia (y).



Rys.5.37. Porównanie toczenia swobodnego, z hamowaniem i przyspieszaniem; rozkłady: a) nacisków, b) naprężeń stycznych, c) naprężeń zredukowanych na powierzchni szyny w strefie kontaktu, gdy walec jest w połowie drogi toczenia ( $x=0$ ,  $u=25$ mm).

## Rozdział 6

### Naprężenia własne w trójwymiarowym zadaniu kontaktu szyny z kołem

#### 6.1. Uwagi wstępne.

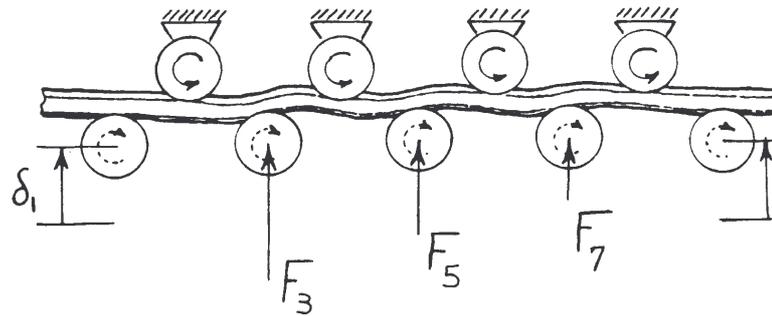
Intensyfikacja przewozów kolejowych pociąga za sobą m.in. zwiększenie obciążeń i zwiększenie częstości przejazdów pociągów prowadząc do szybkiego zużycia szyn. Dlatego też trwają prace nad modyfikacją składu stali i procesu obróbki cieplnej, aby uzyskać szyny mocniejsze i bardziej odporne na zużycie. Prowadzi się dokładną kontrolę defektoskopową i pomiary naprężeń resztkowych eliminując szyny wadliwie wykonane. Wprowadzane są zmiany konstrukcyjne samych szyn; technologia spawania szyn w sposób ciągły zastępuje łączenie ich w sposób tradycyjny. Na szczególnie obciążonych szlakach dokonuje się systematycznego smarowania powierzchni toczyń w celu złagodzenia efektów tarcia, a przez to zmniejszenie ich zużycia. Te zabiegi powodują przedłużenie żywotności szyn, które jednakże pozostając dłużej w eksploatacji narażone są na powstawanie pęknięć zmęczeniowych. Powierzchniowe lub podpowierzchniowe szczeliny, które w szynach ze stali mniej odpornych miały szansę likwidacji na skutek naturalnego ścierania warstwy wierzchniej, w stalach odpornych na zużycie mają możliwość wzrastania, co prowadzi może do powstawania pęknięć i w konsekwencji grozić wykolejeniem pociągu.

Szybkość propagacji szczelin w szynach kolejowych i ich odporność na pękanie zależą w sposób istotny od naprężeń własnych powstałych w procesie produkcji i eksploatacji.

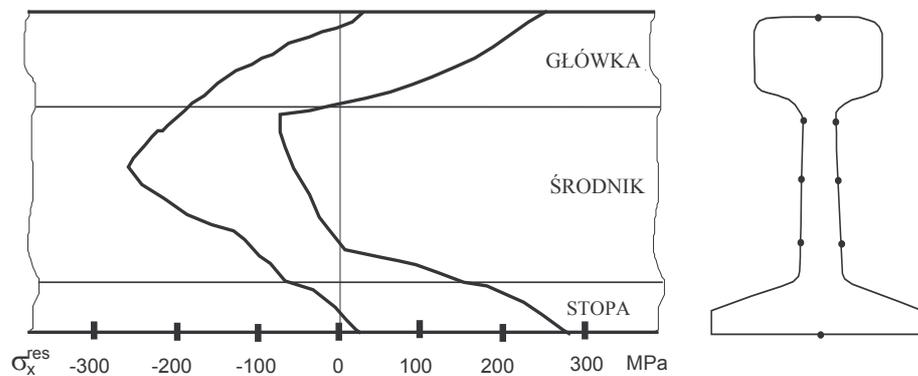
#### *Naprężenia własne w procesie produkcji i eksploatacji szyny*

Szyna przeznaczona do łączenia ciągłego, po obróbce cieplnej jest z zasady poddana zabiegowi prostowania na rolkach (rys.6.1). W wyniku tego procesu następuje skrócenie długości szyny przy równoczesnym zmniejszeniu wysokości jej profilu i poszerzeniu w kierunku poprzecznym. Powstający w główce i stopie stan odkształceń trwałych prowadzi do wytworzenia w szynie charakterystycznego rozkładu naprężeń własnych w kształcie litery U. Typowe rozkłady naprężeń wzdłużnych powstających w wyniku prostowania na rolkach

mieszczą się w granicach pokazanych na rysunku 6.2. Naprężenia te mogą stać się przyczyną długich pęknięć środka szyny.



Rys.6.1 Schemat prostowania na rolkach [108].

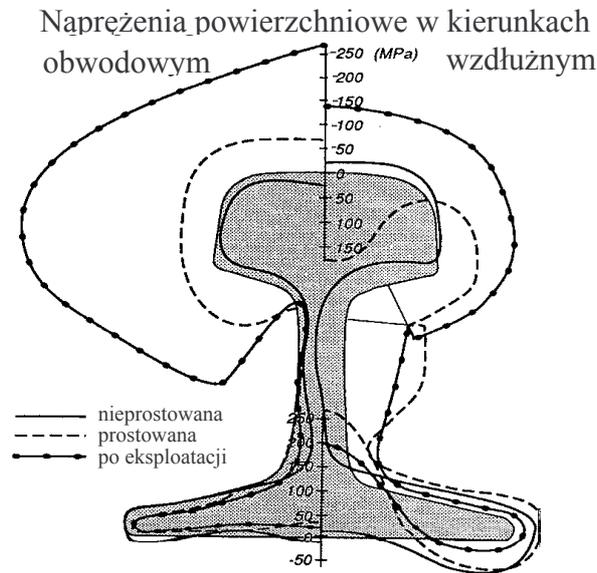


Rys.6.2. Obwiednia występujących w szynach rozkładów składowej wzdłużnych naprężeń własnych wywołanych prostowaniem [108].

Analiza modelu prostowania na rolkach podejmowana przez wielu badaczy jest osobnym, złożonym zadaniem (np.[108]).

Naprężenia własne wywołane kontaktem tocznym tworzą się w główce szyny w strefie jej styku z kołem. Analiza mechanizmu powstawania tych naprężeń stanowi bardzo złożone zadanie, gdyż w trakcie całego procesu eksploatacji szyny położenie obszaru kontaktu, wartość obciążenia, efekty poślizgowe, warunki tarcia ulegają ciągłej zmianie. W szynach łączonych techniką spawania, naprężenia te powstają ponadto w obszarze już istniejących naprężeń wywołanych prostowaniem. Prowadzone są liczne badania doświadczalne (np.[13,86,107]), mające na celu wyznaczenie rozkładu naprężeń własnych. Charakterystyczne rozkłady tych naprężeń przedstawione są na

rysunku 6.3\*: pokazano tam przebieg składowej wzdłużnej i obwodowej na powierzchni szyny nieprostowanej, po prostowaniu i po eksploatacji. Szczególnie duże zmiany naprężeń występują na powierzchni główki szyny, gdzie po prostowaniu naprężenia wzdłużne mają wartość +180MPa i zmieniają się w trakcie eksploatacji do poziomu -140MPa.



Rys.6.3. Naprężenia własne na powierzchni szyny [86].

### *Materiały stosowane do produkcji szyn*

Szyny produkowane przez różne wytwórnie różnią się własnościami wytrzymałościowymi. Dane materiałowe dla szyn UIC60, wytwarzanych ze stali 900A przez różnych producentów, przedstawione są przykładowo w tabelicy 6.1. Stal 900A jest stalą konwertorową wytapianą próżniowo. W stanie tzw. surowym wykazuje ona twardość 280HB. Obróbka cieplna polega na podgrzaniu do  $850^{\circ}\text{C}$  w piecu tunelowym, a następnie schłodzeniu (hartowaniu) w oleju i odpuszczeniu w temperaturze  $450^{\circ}\text{C}$ .

W analizach numerycznych dotyczących szyn napotkać można sporą dowolność w przyjmowaniu danych materiałowych: np. dla amerykańskich szyn 132RE wartość granicy plastyczności jest:  $R_e = 483\text{MPa}$  [79,85], podczas gdy w pracy [61] autorzy przyjęli dla tej stali wartość  $R_e = 218\text{MPa}$ . Często pomijany jest efekt umocnienia materiału szyny.

\* Wartości naprężeń na wykresie należy przyjmować jako odcinek linii prostopadłej do powierzchni szyny w danym punkcie zawartej między tą powierzchnią, a odpowiednią krzywą. Krzywe wychodzące poza obręb przekroju poprzecznego wskazują ściskanie, pozostające w tym obrębie - rozciąganie.

TABLICA 6.1. Własności mechaniczne stali 900A stosowanej do produkcji szyn ([119]).

Producent	HUTA KATOWICE		THYSSEN STAHL		
	stan surowy	obrabiana cieplnie	stan surowy	utwardzanie główki	
$R_{0.2}$ MPa	-	842	502	716	821
$R_m$ MPa	975	1231	954	1143	1244
$A_5$ %	11.6	13.0	12	14.3	12.3
Twardość HB	288	337	285	351	382

### Modelowanie podłoża toru kolejowego

Rzeczywiste podłoże, na którym spoczywa szyna składa się z szeregu elementów. Przykładem pracy zawierającej próbę modelowania fragmentu toru uwzględniającą jego trójwymiarowy charakter i rzeczywiste składniki podłoża takie jak podkładki, podkłady drewniane lub żelbetowe, podsypka itp. zawiera praca [98]. Jednym z wielu ważnych wniosków wypływających z przedstawionej tam analizy jest ten, że podłoże szyny może zostać w pełni zastąpione modelem ciągłym podłoża sprężystego o odpowiednim module. Sztywność tak traktowanego podłoża zależy od wielu czynników m.in. od rodzaju podsypki, od rodzaju podkładów (drewno, beton); moduł sprężystości ocenia się w granicach  $14 \div 21$  MPa [79,85].

### Obciążenia szyn

Zasadnicze obciążenie szyn stanowi siła nacisku koła i siła hamowania/przyspieszania będąca rezultatem tarcia. Siła nacisku koła  $P$  wynika z obciążenia przypadającego na oś jednostki kolejowej. Stare linie kolejowe dopuszczały obciążenie  $180 \div 210$  kN/oś, obecnie jednak, ze względu na postępującą poprawę własności szyn, w analizach numerycznych i doświadczalnych przyjmowane jest obciążenie dochodzące do 300kN/oś, co daje siłę nacisku  $P \approx 150$  kN/koło. Siła hamowania/przyspieszenia zależna jest od siły  $P$ , współczynnika tarcia między szyną a kołem i stopnia rozwinięcia siły tarcia. Autorzy analiz dotyczących kontaktu tocznego często pomijają tarcie (np.: [14,15,16,60,61]). W innych pracach uwzględnia się tarcie nawet do wartości współczynnika  $\mu = 0.4$  (np. [77]). Wartość współczynnika tarcia dla tarcia suchego stali po stali wynosi:  $\mu_{\text{statyczne}} = 0.15 \div 0.17$ ,  $\mu_{\text{kinematyczne}} = 0.15$ . Zagadnienie tarcia jest tu bardzo istotne i powinno być tematem osobnych badań.

Siły normalne i hamowania wprowadzają poprzez koło stan nacisków i sił stycznych w szynę; to lokalne zadanie kontaktu nakłada się na globalny stan naprężeń wynikający z faktu zginania szyny jako belki na sprężystym podłożu.

Oprócz sił wewnętrznych wywołanych oddziaływaniami koła, w szynie spawanej może istnieć stan naprężeń własnych powstały w wyniku prostowania na rolkach, eksploatacji oraz obciążeń termicznych.

Szyny spawane naciąga się wstępnie w temperaturze średniej otoczenia tak, aby w wysokich temperaturach uniknąć ściskania i ewentualnego wyboczenia szyny. Konsekwencją tego jest fakt, że spadek temperatury poniżej średniej wprowadza w szynę znaczne rozciąganie.

## **6.2. Algorytm obliczeniowy MES dla problemów trójwymiarowych kontaktu sprężysto-plastycznego.**

W początkowym stadium pracy autor nie znalazł odpowiednio skutecznego narzędzia numerycznego, które mogłoby służyć mu do rozwiązania stawianych problemów, dlatego też opracował algorytm i pakiet programów MES do rozwiązywania dwuwymiarowych zadań sprężysto-plastycznego kontaktu. Skuteczność tego algorytmu pokazano rozwiązując szereg zadań przedstawionych w poprzednich rozdziałach.

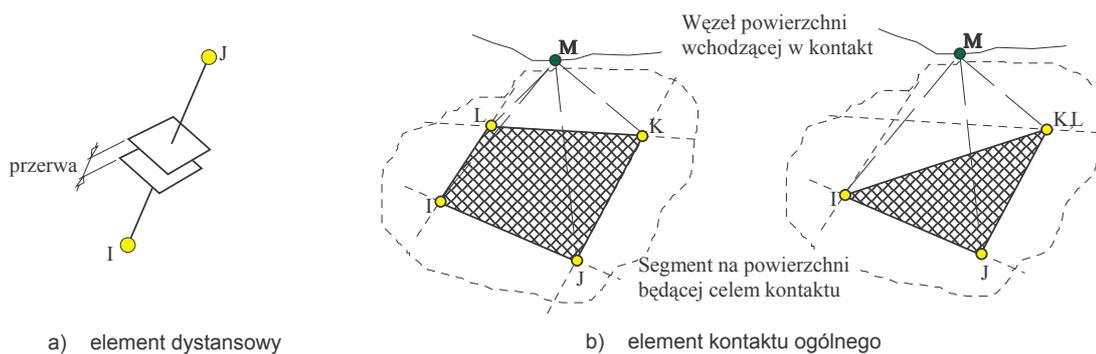
Następnie autor podjął budowę algorytmu i programu pozwalającego na rozwiązanie podobnych zadań w zakresie trójwymiarowym. Jednakże na tym etapie pracy w dostępnych na rynku pakietach MES zaczęto oferować możliwości stosunkowo wygodnego modelowania zadań kontaktu z uwzględnieniem nieliniowości materiałowych i geometrycznych. Prowadzenie zatem dalszych prac nad własnym programem dla zadań trójwymiarowych stało się niecelowe. Autor postanowił zbadać możliwości oferowanych pakietów i po pomyślnych próbach postanowił do dalszej części pracy użyć pakietu ANSYS\_5.0 zbudowanego przez Swanson Analysis Systems, Inc. Pakiet w wersji uniwersyteckiej pozwalał na budowę dużych modeli zadań, jednak istotnym jego ograniczeniem była dopuszczalna maksymalna szerokość frontu wynosząca 800 stopni swobody.

*Model kontaktu w zadaniu trójwymiarowym.*

Zastosowany pakiet stwarzał dwie możliwości modelowania kontaktu w zadaniu trójwymiarowym:

- poprzez zastosowanie elementów dystansowych dających połączenie typu węzeł-węzeł (rys.6.4a), nadających się do modelowania kontaktu w przypadku gdy od początku badanego procesu znane jest sąsiedztwo węzłów obydwu ciał, ulegając jedynie niewielkim zmianom w trakcie trwania tego procesu,
- przez zastosowanie elementów ogólnego kontaktu typu węzeł-segment (rys.6.4b), pozwalających na swobodne modelowanie kontaktu z uwzględnieniem możliwości zmian geometrii strefy kontaktu w trakcie obliczeń.

Ze względu na możliwość swobodnego modelowania strefy kontaktu przy użyciu elementów ogólnego kontaktu postanowiono tą opcję wykorzystać w dalszej analizie.



Rys.6.4. Elementy kontaktu dla zadań trójwymiarowych [2].

Element kontaktu trójwymiarowego typu węzeł-segment jest ostrosłupem o podstawie będącej segmentem zbudowanym na węzłach jednej powierzchni i wierzchołku będącym węzłem należącym do drugiej powierzchni (rys.6.5a). Element ten wprowadza w odpowiedni sposób w węzły obydwu powierzchni siły wynikające z nacisku i tarcia. Ważną jego cechą jest to, że wzajemne sąsiedztwo węzłów nie musi być znane dokładnie i może się zmieniać w trakcie rozwiązywania zadania.

Kinematyka kontaktu polega na precyzyjnym określeniu wzajemnego położenia węzłów elementu kontaktu, pozwalając na ustaleniu stanu kontaktu. W tym celu algorytm najpierw wstępnie określa położenie węzła wchodzącego w kontakt względem sfery poszukiwań (rys.6.5b). Węzły wyselekcjonowane w ten sposób

zostają zlokalizowane względem chwilowo utworzonego pseudoelementu (rys.6.5c). Następnie określone zostaje położenie węzła M wchodzącego w kontakt w układzie lokalnym związanym z segmentem I,J,K,L (rys.6.5d). i ustalony zostaje parametr penetracji  $g$ , którego wartość świadczy o odległości węzła od płaszczyzny segmentu:

- węzeł M znajduje się na zewnątrz sfery poszukiwań,
- węzeł M znajduje się wewnątrz sfery poszukiwań, ale  $g > 0$ ,
- węzeł M znajduje się wewnątrz sfery poszukiwań i  $g \leq 0$ .

Stan przylegania obydwu powierzchni i ocena ich dopuszczalnej wzajemnej penetracji dokonywana jest przy użyciu funkcji kary lub funkcji kary połączonej z metodą mnożników Lagrange'a.

Z chwilą wejścia węzła M w kontakt z segmentem I,J,K,L ( $g \leq 0$ ), zostają w elemencie wywołane siły, których celem jest przeciwdziałanie penetracji i sprowadzenie parametru  $g$  do możliwie małych, z punktu widzenia numeryki, wartości.

W metodzie funkcji kary wartość siły normalnej określić możemy [2] jako:

$$f_n = \begin{cases} K_n g & \text{dla } g \leq 0 \\ 0 & \text{dla } g > 0 \end{cases}, \quad (6.1)$$

gdzie  $K_n$  jest sztywnością kontaktu.

W metodzie funkcji kary z mnożnikami Lagrange'a wartość siły normalnej jest natomiast:

$$f_n = \min(0, K_n g + \lambda_{i+1}), \quad (6.2)$$

gdzie  $\lambda_{i+1}$  jest mnożnikiem Lagrange'a dla siły w iteracji  $i + 1$ .

Siły styczne spowodowane efektami tarcia powstają w sytuacji wzajemnego ruchu obydwu powierzchni wchodzących w kontakt. Na rysunku 6.5e przedstawiono przemieszczenie węzła M o  $u$  i odpowiednio przemieszczenie jego rzutu na płaszczyznę segmentu o  $\eta$ , przy czym rozkładając to przemieszczenie na składowe w układzie (x,y), możemy zapisać:

$$\eta = \sqrt{(\eta_x^2 + \eta_y^2)}. \quad (6.3)$$

Po uwzględnieniu, że przemieszczenie składa się z części sprężystej i poślizgu:

$$\begin{aligned} \eta_x &= \eta_x^e + \eta_x^s, \\ \eta_y &= \eta_y^e + \eta_y^s, \end{aligned} \quad (6.4)$$

możemy zapisać siły styczne jako:

$$\begin{aligned} f_x &= K_t \eta_x^e, \\ f_y &= K_t \eta_y^e, \end{aligned} \quad (6.5)$$

gdzie  $K_t$  jest sztywnością styczną.

Wielkość siły stycznej określimy zatem ostatecznie

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (6.6)$$

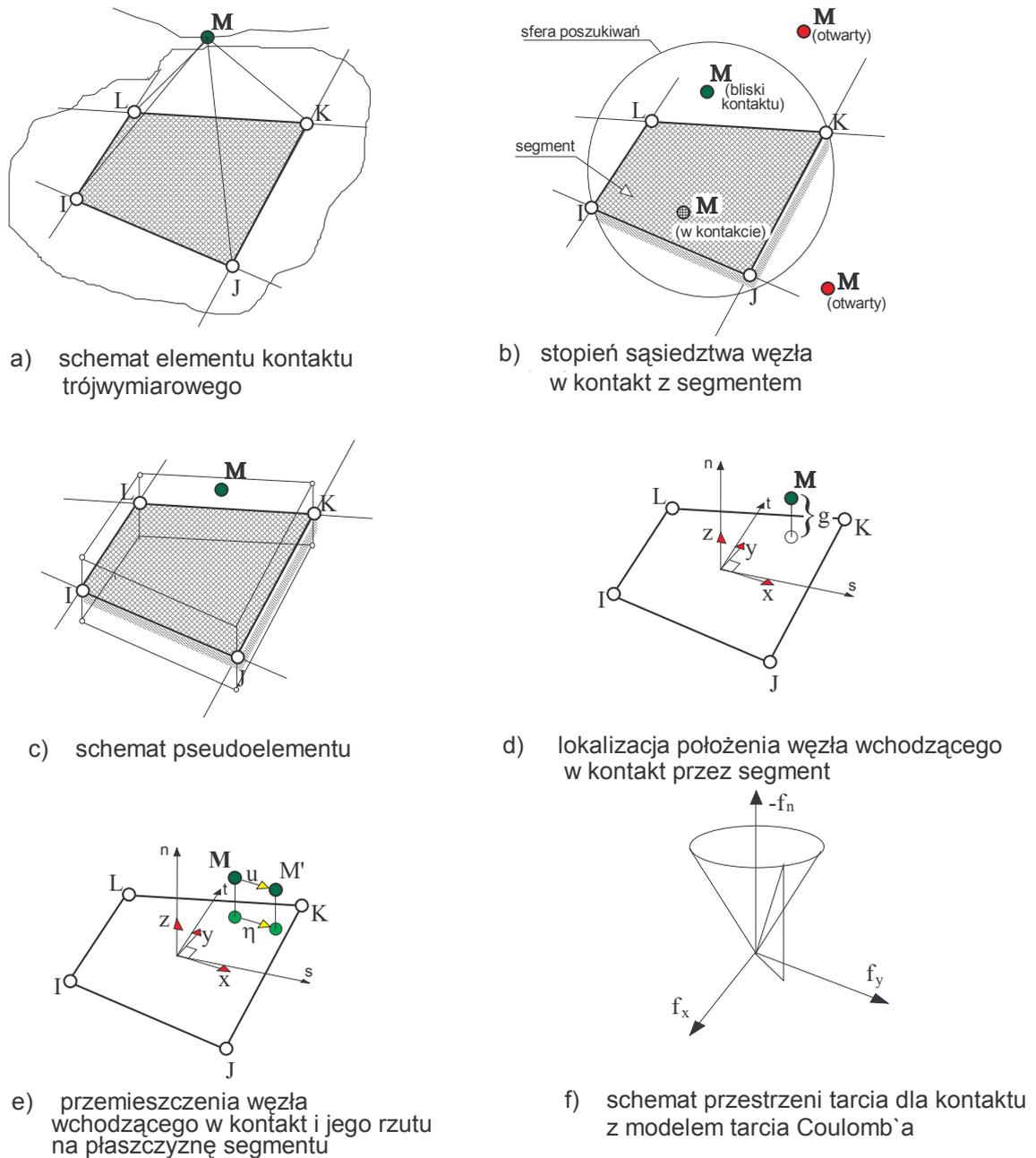
Stan kontaktu poślizgowego możemy teraz wyrazić w postaci:

$$f_s = -\mu f_n, \quad (6.7)$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia, natomiast stan przylegania zapiszemy jako:

$$f_s < -F\mu f_n, \quad (6.8)$$

gdzie  $F$  jest współczynnikiem dynamicznym kontaktu.



Rys.6.5. Element ogólnego kontaktu dla zadania trójwymiarowego.

Algorytm programu wykorzystuje technikę zbliżoną do stosowanej dla niestowarzyszonego płynięcia plastycznego [2] wyznaczając przyrost poślizgu w przestrzeni tarcia (rys.6.5f).

Określone wyżej siły w elemencie rozłożone zostają na węzły segmentu (I,J,K,L) za pomocą funkcji kształtu takich jak dla elementu liniowego, czterowęzłowego, a elementowi przypisana zostaje odpowiednio macierz sztywności [2].

W celu zapewnienia dobrej zbieżności rozwiązania zadania ogólnego kontaktu należy zastosować na tyle mały krok obciążenia, aby elementy kontaktu były w stanie odnaleźć swoje węzły wchodzące w kontakt. Dobre wyniki daje tu użycie pełnej metody Newtona-Raphson`a z automatycznym sterowaniem kroku obciążenia. W przypadku kłopotów z uzyskaniem zbieżności macierz sztywności zostaje "dosztywniona" (ang."adaptive descent") [2], a przy niemożności znalezienia rozwiązania w danym kroku stosuje się jego bisekcję. Ważne jest by odpowiednio dobrać wartości stałych sprężystych  $K_n, K_t$ . Zbyt mała wartość tych stałych prowadzi do głębokiego zachodzenia na siebie obu kontaktujących się ciał, zbyt duża natomiast powodować może kłopoty numeryczne. Wartości stałych najlepiej jest przyjąć po przeprowadzeniu prób numerycznych na mniejszym modelu zadania.

### 6.3. Model sprężysto-plastycznego kontaktu szyny z kołem.

Celem przedstawionej dalej numerycznej analizy było określenie mechanizmu powstawania naprężeń własnych oraz ich rozkładu w szynie kolejowej poddanej sprężysto-plastycznemu toczeniu koła.

Przy budowie modelu i rozwiązaniu zadania został wykorzystany, jak wspomniano już poprzednio, program ANSYS\_5.0. Do dyskretyzacji strefy kontaktu użyto elementy ogólnego kontaktu omówione w punkcie 6.2, a do modelowania obszaru koła i szyny zastosowano ośmiowęzłowe elementy liniowe z dodatkowymi funkcjami kształtu [2]. Wybór tych ostatnich został podyktowany koniecznością zapewnienia ich zgodności z elementami kontaktu, które, będąc zbudowane na czterowęzłowych segmentach z wykorzystaniem funkcji liniowych, źle współpracują z elementami parabolicznymi (np. ZIB20). Ponadto, w złożonych zadaniach nieliniowych elementy liniowe mające tę samą liczbę punktów Gaussa co elementy paraboliczne zapewniają lepszą dokładność rozwiązania przy odpowiednio gęstszej siatce [2].

Na rysunku 6.6 przedstawiono geometrię kontaktujących się ciał i model materiału przyjęte do analizy. Geometria przekroju poprzecznego szyny i koła zostały nieco uproszczone w stosunku do rzeczywistych, odwzorowując jednak ściśle kształt w okolicy przewidywanej strefy kontaktu. Obliczenia przeprowadzono dla fragmentu szyny o długości 2400mm. Tak znaczna długość zapewniała dobre modelowanie pracy szyny jako belki na sprężystym podłożu. Założono sprężysty materiał koła ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ) i sprężysto-plastyczny materiał szyny (granica plastyczności  $R_e = 502 \text{ MPa}$ , umocnienie liniowo-kinematyczne o module umocnienia  $H = 4000 \text{ MPa}$ ). Pomiedzy kołem i szyną przyjęto tarcie Coulomb'a o wartości współczynników tarcia  $\mu = 0.17, 0.30$ .

Ze względu na specyficzną geometrię koła i szyny, a także możliwość różnych konfiguracji ich wzajemnego położenia koniecznym było arbitralne umiejscowienie obydwu ciał względem siebie. Postanowiono ustawić koło w położeniu podstawowym, tzn. takim jak to wynika z rysunku 6.6, przy czym odebrano mu swobodę przemieszczania się w kierunku poprzecznym do kierunku jazdy, podczas gdy szyna leżała na podłożu sprężystym podlegając wynikającym stąd więzom.

Intencją autora było zbadanie wybranego przypadku rzeczywistego kontaktu, nie dokonano więc żadnych uproszczeń geometrycznych (np. poprzez wprowadzenie płaszczyzn symetrii) co mogłoby znacznie zredukować rozmiary zadania i prowadzić do obniżenia nakładów obliczeń. Dlatego też pierwsze próby zbudowania modelu okazały się nieskuteczne: przekroczone zostały ograniczenia stawiane przez użytą wersję programu (ograniczenie szerokości frontu do 800 stopni swobody). Możliwy do zrealizowania model nie zapewniał natomiast należytego stopnia dyskretyzacji w strefie kontaktu. Autor podjął szereg prób mających na celu rozwiązanie zadania z wykorzystaniem podstruktur, jednak nie dały one porządanych rezultatów.

Ostatecznie powstała oryginalna koncepcja niestandardowego użycia "submodellingu" do analizy nieliniowego zadania kontaktu szyny z kołem. Koncepcja ta przedstawiona jest na rysunku 6.7.

Istota pomysłu polega na jednorazowym rozwiązaniu zadania nieliniowego kontaktu materiałowo liniowej szyny (postawienie koła), przeniesieniu przemieszczeń będących wynikiem tej analizy jako warunków brzegowych na nowe, znacznie węższe, granice obszaru szyny w nowym modelu - submodelu i rozwiązaniu nowego zadania nieliniowego kontaktu z uwzględnieniem nieliniowego modelu materiału szyny (toczenie sprężysto-plastyczne). Model pełny uwzględniał pracę szyny jako belki na sprężystym podłożu przekazując wynikające stąd przemieszczenia do "wyciętego" zeń submodelu. Submodel

obejmował natomiast znacznie mniejszy wycinek szyny, wystarczający jednakże do oceny lokalnych efektów sprężysto-plastycznego kontaktu. Strefa kontaktu w submodelu pokryta została znacznie bardziej gęstą siatką elementów niż w modelu całej szyny (rys.6.7).

Na rysunku 6.8 pokazany jest model numeryczny zadania pełnego kontaktu szyny z kołem. Przedstawione są tam szczegóły dyskretyzacji strefy kontaktu. Pokazany został przekrój szyny i koła płaszczyzną symetrii. Na tak zbudowany model składało się 4849 węzłów, 3888 elementów, w tym 224 elementy kontaktu. Zadanie miało 13610 aktywnych stopni swobody, przy maksymalnej szerokości frontu równej 756 stopni swobody.

Dyskretyzację submodelu przedstawia z kolei rysunek 6.9: pokazane są tam wymiary wycinka szyny objętego submodelem oraz wymiary strefy kontaktu. Siatka dyskretyzacyjna składała się z 6086 węzłów, 6464 elementów (w tym 1500 elementów kontaktu) co daje 16430 aktywnych stopni swobody przy maksymalnej szerokości frontu równej 598 stopni swobody.

Rysunek 6.10 przedstawia koncepcję toczenia koła po szynie. Warunki brzegowe na granicach wycinka szyny objętego submodelem dla kolejnych położenia koła określone były w odpowiednich miejscach tego samego rozwiązania zadania pełnego. Koło w submodelu obciążone jest siłami i sterowane krokiem przemieszczenia  $u_i$ .

Analizie poddano dwa przypadki toczenia. Pierwszym z nich było swobodne toczenie koła po szynie przy sile nacisku  $P=150\text{kN}$  i współczynniku tarcia  $\mu=0.17$ , drugim zaś toczenie przy sile  $P=150\text{kN}$  i momencie przespieszającym o wartości 75% momentu powodującego pełny poślizg gdy współczynnik tarcia wynosi  $\mu=0.3$ .

Wszystkich obliczeń dokonano na mikrokomputerze PC486, 33MHz, 16MB RAM, 500MB+205MB HD.

W celu uzyskania rozwiązania zadania pełnego przeprowadzono 35 iteracji co zajęło około 48 godzin pracy komputera.

W submodelu toczeniu poddano odcinek o długości 80mm pokonując go w ośmiu krokach przemieszczenia po 10mm każdy, podzielonych automatycznie na podkroki nie większe niż 2 mm.

W przypadku swobodnego toczenia z tarciem po 261 iteracjach koło przebyło odcinek 60mm (570 godzin obliczeń). Kłopoty numeryczne (pogarszająca się zbieżność) wobec braku istotnych zmian w rozkładzie naprężeń własnych w szynie zdecydowały o wcześniejszym zakończeniu obliczeń i "odciążeniu".

W zadaniu toczenia z momentem przyspieszającym obliczenie przerwano po przemieszczeniu koła o 46mm, bowiem sumaryczny poślizg między obydwoma powierzchniami spowodował wyjście z kontaktu wszystkich węzłów, które znalazły się poza sferą poszukiwań (por.rys.6.5.b). Stało się tak, gdyż w celu ograniczenia wielkości submodelu każdemu węzłowi przyporządkowano wcześniej tylko cztery najbliższe segmenty uwzględniając możliwość poślizgu o wartości około  $\pm 2.5\text{mm}$  (wymiary segmentu).

#### 6.4. Wyniki analizy i ich dyskusja.

##### *Wyniki obliczeń modelu pełnego*

Wybrane wyniki obliczeń pełnego kontaktu koła z szyną, będące punktem wyjścia do analizy sprężysto-plastycznego toczenia (patrz rys.6.7) przedstawiono na rysunkach 6.11 i 6.12. Rysunek 6.11 pokazuje rozkład przemieszczeń w kierunku  $y$  (ugięć) całej szyny i rozkłady wszystkich składowych przemieszczenia ( $u_x, u_y, u_z$ ) w okolicy strefy kontaktu, przedstawione w formie map na fragmencie modelu przeciętym płaszczyzną symetrii (w połowie długości). Jak widać szyna ugięła się o niespełna 2mm (1.62mm), a przemieszczenia wzdłużne ( $u_x$ ) i poprzeczne ( $u_z$ ) są małe (kąt skręcenia przekroju środkowego wynosi około  $0.05^\circ$ ).

Rysunek 6.12 przedstawia rozkłady składowej wzdłużnej  $\sigma_x$ , pionowej  $\sigma_y$  i poprzecznej  $\sigma_z$  naprężeń normalnych oraz rozkład naprężeń zredukowanych  $\sigma_{red}$  w strefie kontaktu dla modelu pełnego szyny w płaszczyźnie symetrii (w połowie długości badanego odcinka). Naprężenia w szynie pochodzące od jej zginania jako belki na podłożu sprężystym osiągają w stopie szyny (rozciąganie w kierunku wzdłużnym) wartości około 84MPa, a w główce szyny wartości około -80MPa (ściskanie w kierunku  $x$ ).

Jak już wspomniano wcześniej, przemieszczenia określone w zadaniu pełnym przyjęto jako warunki brzegowe (przemieszczenia) w submodelu, odpowiednio dla każdego kroku obciążenia (patrz rys 6.10).

##### *Przebieg procesu toczenia w submodelu*

Na rysunku 6.13a,b,c przedstawiono przykładowo przemieszczenia ( $u_x, u_y, u_z$ ) w obszarze submodelu szyny z końca piątego kroku, tzn. po przemieszczeniu się koła o 30mm. Brzegowe wartości przemieszczeń są tu

zgodne z obliczonymi dla modelu pełnego (rys.6.11). Ekstremalne ugięcie pionowe szyny  $u_y$  ma wartość -1.6mm. Na rysunku (rys.6.13d,e) przedstawiono natomiast rozkład składowej naprężeń normalnych w kierunku pionowym ( $\sigma_y$ ): ma on charakterystyczny kształt o dwóch lokalnych minimach. Największa wartość ujemnych naprężeń  $\sigma_y$  na powierzchni odpowiada w przybliżeniu maksymalnej wartości nacisków, wynosi około 1000MPa i jest umiejscowiona po zewnętrznej stronie szyny (przesunięta na zewnątrz toru).

Rysunek 6.14 pokazuje rozkłady składowych naprężenia w submodelu, w przekroju poprzecznym do kierunku jazdy. Ekstremalne wartości tych składowych znajdują się na powierzchni główki szyny pod kołem, w okolicy miejsca maksymalnych nacisków i wszystkie mają znak ujemny (ściskanie). Największa ujemna wartość składowej naprężeń w kierunku wzdłużnym ( $\sigma_x$ ) wynosi około -920MPa, w tym -80MPa pochodzi od zginania belki jako całości, reszta natomiast jest wynikiem obciążeń kontaktowych. Minimalna wartość składowej naprężeń w kierunku poprzecznym ( $\sigma_z$ ) wynosi -740MPa. Naprężenia zredukowane ( $\sigma_{red}$ ) odsiągają maksimum na głębokości od 3 do 3.5mm pod powierzchnią toczenia. Kształt rozkładu naprężeń zredukowanych w przekroju poprzecznym szyny wynika, jak już wspomniano, z istnienia na powierzchni kontaktu dwóch lokalnych maksimów nacisków, od których "rozchodzą się" strefy dużych naprężeń zredukowanych łącząc się ze sobą na pewnej głębokości.

Na rysunku 6.15 przedstawiono rozkłady składowych odkształceń plastycznych w przekroju poprzecznym szyny w tym samym miejscu co na rys.6.14. Materiał doznaje maksymalnych odkształceń dodatnich (wydłużenie) w kierunku x (wzdłuż szyny) o wartości około 0.00022 na głębokości około 3mm pod powierzchnią (rys.6.15a), odkształceń także dodatnich w kierunku poprzecznym (z) o wartości około 0.001 na głębokości około 2.3 mm (rys.6.15c), oraz ujemnych odkształceń plastycznych (skrócenia) w kierunku pionowym (y) o wartości około -0.0012, również na głębokości 2.3mm.(rys.6.15b).

Rysunek 6.15d pokazuje rozkład zredukowanych odkształceń plastycznych ( $\varepsilon_{red}^p$ ). Maksimum odkształceń plastycznych zlokalizowane jest w pobliżu punktu maksymalnych naprężeń zredukowanych, na głębokości około 2mm pod powierzchnią toczenia. Odkształcenia te nie dochodzą do powierzchni, tak więc przy rolowaniu swobodnym materiał cienkiej warstwy wierzchniej szyny (na powierzchni toczenia) nie doznaje żadnych odkształceń trwałych. Dodatkowo na rysunku 6.15e pokazany został rozkład zredukowanych odkształceń plastycznych w przekroju płaszczyzną pionową, równoległą do kierunku jazdy w miejscu maksymalnych nacisków. Jak można zauważyć strefa uplastycznienia rozbudowuje się pod powierzchnią kontaktu.

### *Odciążenie po toczeniu swobodnym*

Na rysunkach 6.16÷6.19 przedstawiono rozkłady badanych wielkości po odciążeniu szyny w przypadku swobodnego toczenia. Porównano rezultaty dla kolejnych przekrojów: A, B, C, odległych od siebie o około 10mm (rys.6.16); chodziło tu o stwierdzenie czy i na ile różnią się one od siebie, a zatem czy można uznać, że toczenie na stosunkowo krótkim odcinku w pewnym obszarze zapewnia już w przybliżeniu równomierny rozkład sił wewnętrznych wzdłuż szyny.

Zredukowane odkształcenia plastyczne ( $\varepsilon_{red}^p$ ) pokazuje rys.6.16; strefa tych odkształceń znajduje się pod powierzchnią toczną i sięga do głębokości około 7mm, ich wartość maksymalna znajduje się na głębokości około 2mm i wynosi od  $\sim 0.0015$  w przekroju C do  $\sim 0.0026$  w przekroju A.

Rozkład składowej naprężeń własnych w kierunku x ( $\sigma_x$ ) na powierzchni toczenia przedstawiono na rysunku 6.17; wszędzie mają one znak dodatni (rozciąganie). Szczegółowe przebiegi tych naprężeń w kolejnych przekrojach (również rys.6.17) wskazują, że ok. 3.5 mm pod powierzchnią osiągają one wartości minimalne: od -47MPa w przekroju A do -22MPa w przekroju C. Duże odkształcenia plastyczne występujące w tej strefie powodują, że naprężenia pod powierzchnią i na powierzchni toczenia osiągają wartości dodatnie (rozciąganie), jednakże próba szacowania wartości naprężeń na samej powierzchni jest trudna, gdyż należałoby tu użyć bardziej precyzyjnej siatki dyskretyzacyjnej.

Rozkład naprężeń własnych w kierunku poprzecznym ( $\sigma_z$ ) przedstawia rysunek 6.18. Na powierzchni toczenia koło pozostawia ślad w postaci dwóch wyraźnych pasów naprężeń rozciągających, a maksymalna ich wartość wynosi około +56MPa. Zmienności tych naprężeń w kolejnych przekrojach A,B,C przedstawiono na tym samym rysunku. Rozkład jest tu podobny do poprzedniego ( $\sigma_x$ ): minimum znajduje się pod powierzchnią toczenia na głębokości około 2.5mm (nieco płycej niż w przypadku  $\sigma_x$ ), a wartości wahają się od -54MPa dla przekroju A do około -27MPa dla przekroju C; strefa ściskania jest tu bardziej rozległa.

Zarówno składowa naprężeń własnych w kierunku x jak i w kierunku z osiągają minimum (ściskanie) na pewnej głębokości pod powierzchnią szyny pod miejscem gdzie występują maksymalne naciski koła, są natomiast dodatnie na powierzchni toczenia. Wyraźnie większe wartości w przekroju A mogą wynikać ze szczególnej sytuacji na początku toczenia, podczas gdy w przekrojach B i C występują stosunkowo małe różnice i rozkłady wzdłuż szyny się stabilizują.

Reasumując, w rezultacie uplastycznień pod powierzchnią toczenia wytwarza się ściskanie podczas gdy naprężenia rozciągające na powierzchni powstają wtórnie, jako wynik ustalenia się stanu równowagi.

Na rysunku 6.19 przedstawione zostały przebiegi odkształceń plastycznych wyznaczone wzdłuż drogi 1-2 pokazanej na przekroju z rysunku 6.16. Wszystkie składowe (w kierunku  $x,y,z$ ) oraz odkształcenia zredukowane wykazują wyraźne minimum na głębokości około 2.5mm pod powierzchnią toczenia, podczas gdy na samej powierzchni osiągają wartości zerowe.

Ten sam rysunek pokazuje zmienność składowych naprężeń własnych w głąb materiału w kolejnych przekrojach. Minimum tych naprężeń występuje na głębokości odpowiadającej maksymalnym zredukowanym odkształceniom plastycznym. Załamanie wykresów i zmiana kierunku ich przebiegu ("nawrót" w stronę naprężeń ściskających) tuż pod powierzchnią kontaktu mogą być efektem czysto numerycznym, wynikającym ze zbyt rzadkiej, w tym obszarze, siatki dyskretyzacyjnej: uzyskana zmienność jest tu prawie liniowa, a wynik taki nie wydaje się prawdopodobny.

#### *Odciążenie po toczeniu z przyspieszaniem*

Na rysunkach 6.20÷6.24 przedstawione zostały rozkłady badanych wielkości po odciążeniu szyny dla przypadku toczenia z momentem przyspieszającym o wartości 75% momentu powodującego całkowity poślizg koła. Rozkłady odkształceń plastycznych i naprężeń własnych porównano dla kolejnych przekrojów A i B odległych od siebie o około 10mm (rys.6.20).

Powstają dwie strefy uplastycznień (rys.6.20) odpowiadające położeniu miejsc, w których występują maksymalne naciski (rys.6.13e). Na powierzchni tocznej (widok W z rys.6.20) dostrzec można związane z tym dwa pasma odkształceń plastycznych: to, że odkształcenia te w obydwu strefach osiągnęły powierzchnię jest spowodowane dużą wartością siły wzdłużnej wynikającej z przyspieszania koła. Strefy plastyczne pokazane w kolejnych przekrojach są tu większe niż dla swobodnego toczenia, a wartość maksymalnych zredukowanych odkształceń plastycznych wynosi od ok. 0.0026 w przekroju B do ok. 0.003 w przekroju A.

Rozkład składowej naprężeń własnych w kierunku  $x$  na powierzchni toczenia przedstawiono na rys.6.21 (w widoku W). Naprężenia te mają w różnych miejscach różne znaki (ściskanie/rozciąganie), jednak występuje wyraźny pas ściskających naprężeń resztkowych położony na linii odpowiadającej drugiej, płytszej strefie plastyczności. Na zamieszczonych na

tym samym rysunku mapach naprężeń  $\sigma_x$  w dwóch przekrojach (A i B) widać, że ich minimum położone jest tu znacznie płycej (na głębokości ok. 2mm) w porównaniu z przypadkiem toczenia swobodnego. Na powierzchni nad silniejszą strefą plastyczną naprężenia  $\sigma_x$  zanikają, inaczej niż w drugiej, płytszej strefie plastycznej, gdzie naprężenia ściskające "wybudowują się" na powierzchnię toczenia.

Składowa naprężeń własnych w kierunku poprzecznym ( $\sigma_z$ ) układa się na powierzchni toczenia (widok W z rys.6.22) w dwa zewnętrzne pasy ściskania i środkowy pas rozciągania. Szerszy pas naprężeń ściskających odpowiada położeniu płytszej strefy plastycznej (patrz. rys.6.20). Minimum tych naprężeń znajduje się w strefie większych uplastycznień na głębokości około 1.8mm pod powierzchnią (rys.6.22, przekroje A i B).

Rozkłady odkształceń plastycznych i naprężeń własnych w funkcji głębokości pod powierzchnią toczenia dla obydwu przekrojów, w okolicy maksimum odkształceń plastycznych pokazano na rysunku 6.23. Odkształcenia plastyczne mają bardziej łagodny przebieg niż w przypadku toczenia swobodnego, nie osiągają na powierzchni wartości zerowej, a uplastycznienie cienkiej warstwy wierzchniej jest bardziej równomierne. Widocznym jest, że materiał w strefie plastycznej doznaje wydłużenia w kierunku x i z oraz skrócenia w kierunku y. Naprężenia własne mają również bardziej regularny przebieg wzdłuż głębokości, największe ściskanie występuje pod powierzchnią w strefie silnych uplastycznień i chociaż ich wartość bezwzględna spada wraz ze zbliżaniem się do powierzchni, pozostają tam ujemne (ściskające).

Zmienność odkształceń plastycznych i naprężeń własnych w okolicy płytszej strefy plastycznej przedstawia rysunek 6.24. Składowe odkształcenia plastycznego (z wyjątkiem składowej w kierunku x) rosną w miarę zbliżania się do powierzchni, gdzie osiągają wartości ekstremalne. Odkształcenia te wywołane są najprawdopodobniej poślizgiem koła, które mając zmienną wzdłuż szerokości średnicę toczy się zasadniczo w strefie maksimum nacisków (gdzie średnica jest nieco mniejsza) i musi przebyć dłuższą drogę po obwodzie zewnętrznym przy tym samym kącie obrotu. Sytuacja ta wymusza mikropoślizg, który w strefie niższych nacisków prowadzi do uplastycznienia cienkiej warstwy na powierzchni toczenia. Wynikające z odkształceń plastycznych przebiegi naprężeń własnych wskazują na zdecydowanie ujemne wartości naprężeń  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  w warstwie przypowierzchniowej i na samej powierzchni (rys.6.24).

Dokładność wyznaczenia naprężeń własnych na samej powierzchni kontaktu nie jest wysoka. Np. naprężenia  $\sigma_y$  (normalne do powierzchni), mają wartości odbiegające w sposób znaczący od zera (a winny być równe zero) w

pobliżu strefy dużych odkształceń plastycznych, szczególnie w przypadku toczenia swobodnego. Spowodowane jest to istnieniem dużego gradientu naprężeń własnych w cienkiej warstwie powierzchniowej, co w połączeniu z zastosowaniem zbyt dużych elementów w tej warstwie (grubość warstwy elementów wynosi 0.7mm) prowadzi do obliczenia wartości naprężeń na powierzchni swobodnej w kierunku do niej normalnym porównywalnych z wartościami naprężeń własnych w dwóch pozostałych kierunkach. Z tego też względu należy z rezerwą odnosić się do fragmentu rozkładu naprężeń własnych (np.rys.6.19) w obszarze tuż pod powierzchnią (wspomniane wcześniej odgięcie wykresu w kierunku wartości ujemnych).

### *Podsumowanie analizy*

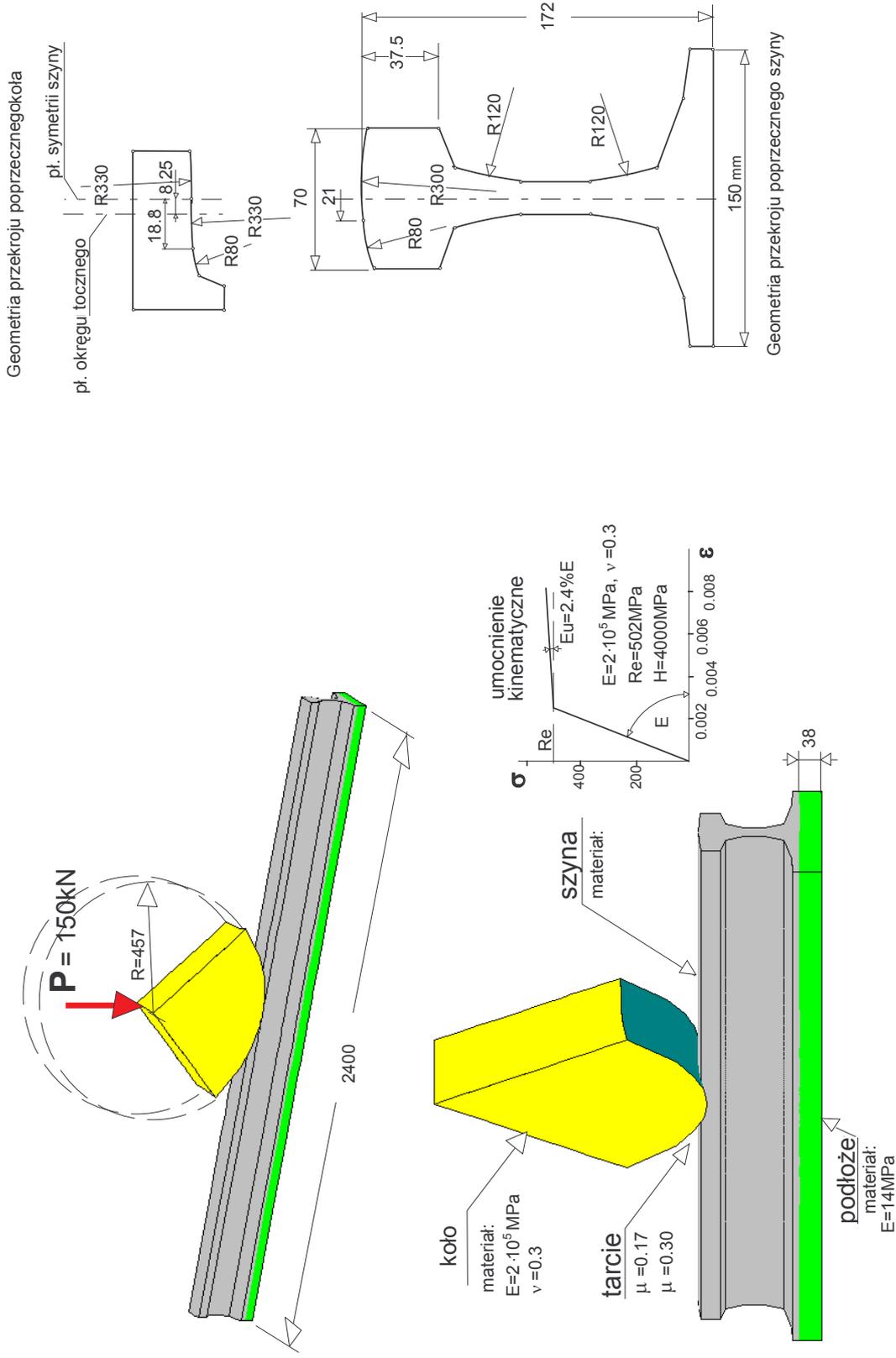
Uzyskane wyniki potwierdzają przydatność opracowanej przez autora koncepcji "submodellingu" do analizy nieliniowego zadania kontaktu tocznego. Rozmiary submodelu i sposób jego budowy wynikały ze wstępnych prób numerycznych, przy istniejących ograniczeniach na szerokość frontu rozwiązania, jednakże obliczone rozkłady naprężeń (np.rys.:6.19, 6.25) wskazują na potrzebę zastosowania mniejszych elementów w warstwie okołopowierzchniowej w celu dokładniejszego opisu zjawisk. w strefie dużych gradientów naprężeń.

Uzyskane wyniki nasuwają szereg interesujących wniosków i uwag:

- Rzeczywisty rozkład nacisków w zadaniu kontaktu szyny z kołem różni się w sposób istotny od przyjmowanego w szeregu prac (np.[61]) rozkładu nacisków typu hertzowskiego. Przyjęte w zadaniu podstawowe położenie koła i szyny wywołało powstanie rozkładu nacisków z dwoma maksimumami (rys.6.13e). Taki rozkład jest bardziej korzystny od hertzowskiego, a wywołana w jego następstwie strefa odkształceń plastycznych w szynie jest mniejsza, mieści się w głębi pod powierzchnią toczenia i jej maksimum przesunięte jest w stronę największych nacisków (rys.6.14).
- Toczenie swobodne prowadzi zasadniczo do rozwoju strefy plastycznej pod powierzchnią (rys.6.15). Włókna materiału w tej strefie ulegają skróceniu w kierunku pionowym (y) oraz wydłużeniu w kierunku wzdłużnym (x) i poprzecznym (z), co prowadzi do powstania pod powierzchnią ściskających naprężeń własnych ( $\sigma_x, \sigma_z$ ). Silna strefa ściskania pod powierzchnią wywołuje rozciągające naprężenia na powierzchni toczenia.
- Toczenie z udziałem sił stycznych do powierzchni, pochodzących od hamowania czy przyspieszania wprowadza uplastycznienie w warstwą

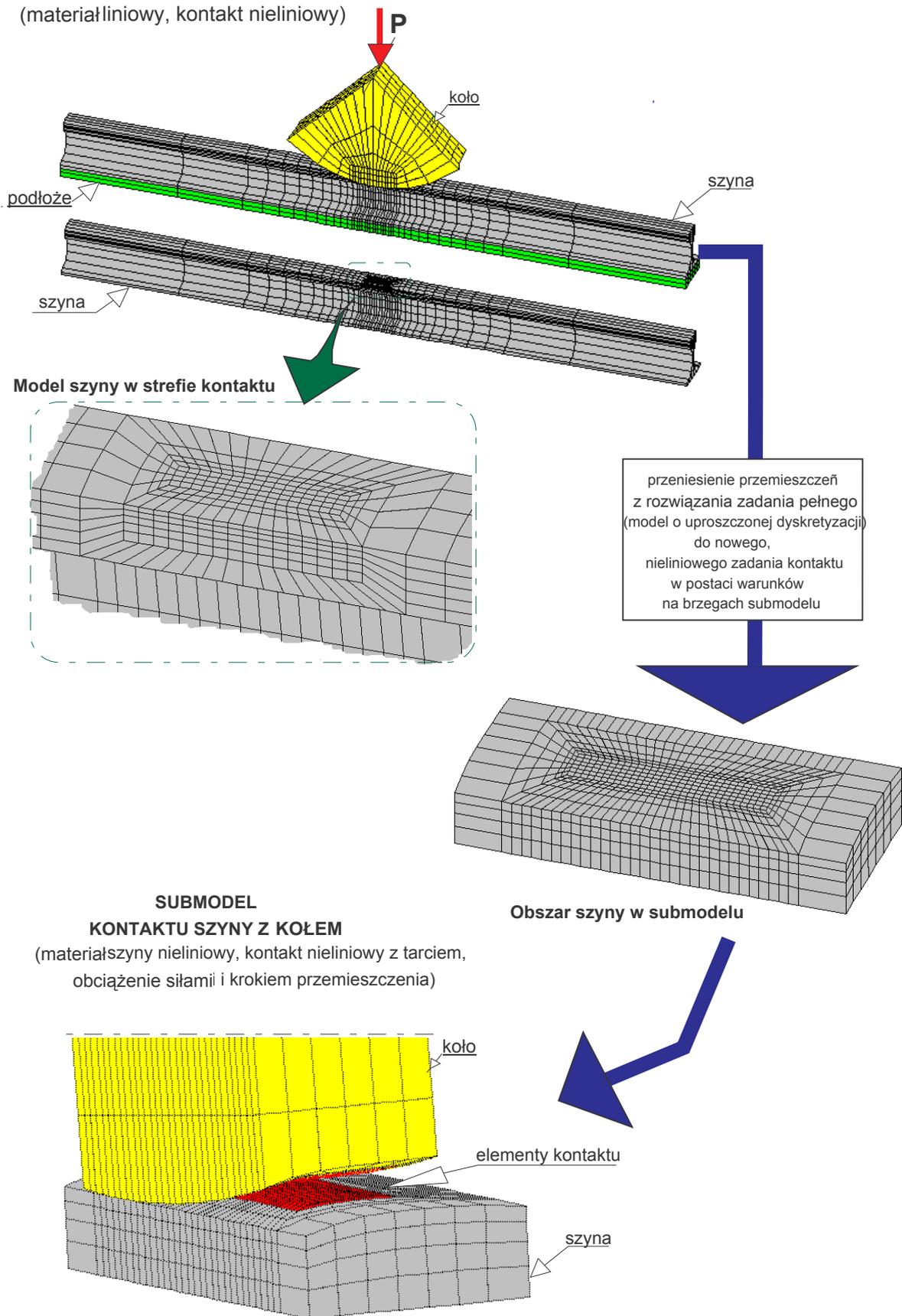
powierzchniową (rys.6.20). Następuje wtedy przesunięcie maksymalnych zredukowanych odkształceń plastycznych na płytszy poziom, a to wiąże się z przemieszczeniem strefy dużego ściskania z głębi szyny w stronę jej powierzchni (rysunki: 6.19,6.23). Towarzyszy temu stopniowe złagodzenie gradientu naprężeń własnych w strefie uplastycznienia.

- Wpływ tarcia powoduje szczególnie duże zmiany w punktach powierzchni poddanych mikropoślizgom wynikającym z geometrii koła i szyny. Odkształcenia plastyczne zachodzą wtedy na samej powierzchni kontaktu, a strefa plastyczna rozbudowuje się w płytkiej warstwie powierzchniowej (rysunki:6.20,6.24). W takim przypadku naprężenia własne w warstwie przypowierzchniowej i na samej powierzchni osiągają znaczne wartości ujemne (ściskanie - rys.6.24).
- Wyniki uzyskane zostały dla jednokrotnego przetoczenia koła. Biorąc pod uwagę wąskie strefy powstałych obszarów uplastycznień, trudno jest je porównać z rezultatami badań szyn po krótszym, czy dłuższym okresie eksploatacji, gdyż tam, w trakcie całej historii obciążenia, stopniowemu uplastycznieniu ulega prawie cała powierzchnia toczna szyny. Wąska strefa plastyczna ma nieduży zasięg i wprowadza niewielkie naprężenia własne w małych obszarach. Uzyskane wyniki mają zatem w mniejszym stopniu wartość ilościową, jakościowo wszakże bardzo dobrze charakteryzują kontakt koła z szyną.
- Zasadniczym wnioskiem wynikającym z analizy jest, że powstanie ściskających naprężeń własnych na powierzchni tocznej szyny jest nieodłącznie związane z efektami tarcia, a w szczególności wynika z poślizgów i mikropoślizgów koła względem szyny. W zadaniu wprowadzono moment przyspieszający aby wywołać stosowną wartość siły stycznej na powierzchni kontaktu. W rzeczywistych warunkach pracy szyn kolejowych siły takie mogą być wprowadzane nie tylko drogą hamowania, czy przyspieszania ale i w sposób naturalny wynikający z geometrii ruchu obydwu ciał względem siebie. W sytuacji gdy jedno z dwóch kół związanych wspólną osią wymusza poślizg drugiego koła (koła mogą być w kontakcie z szynami na różnych promieniach, skąd wynikać może różnica obwodowej drogi toczenia) wtedy mamy do czynienia z ruchami pełzania [46]. W tym miejscu warto też wspomnieć o tym, że płaszczyzna koła może być ustawiona pod pewnym kątem do kierunku jazdy (koło jedzie skośnie), co spowoduje powstanie składowej poprzecznej poślizgu.

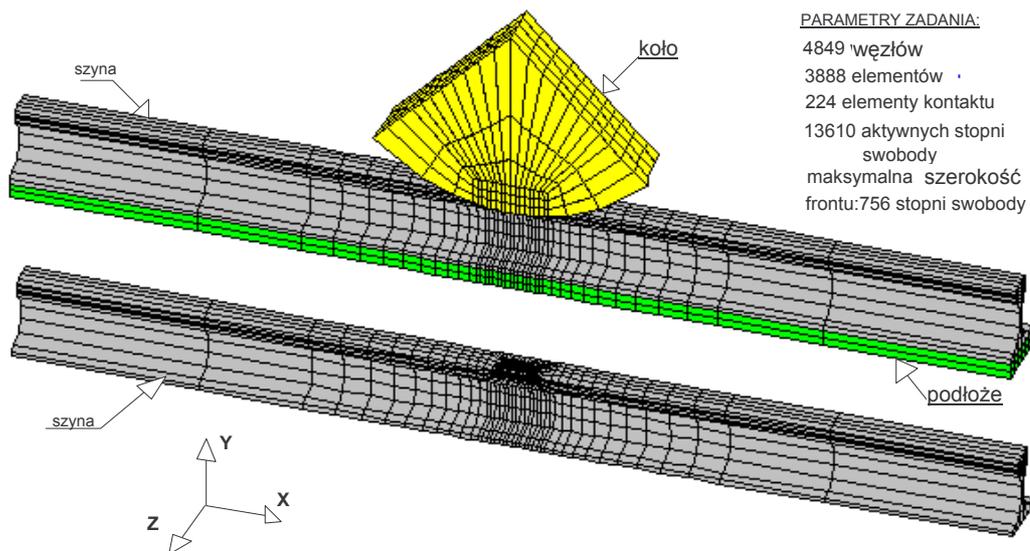


Rys.6.6. Geometria ciał i model materiału przyjęte w analizie kontaktu tocznego szyny z kołem.

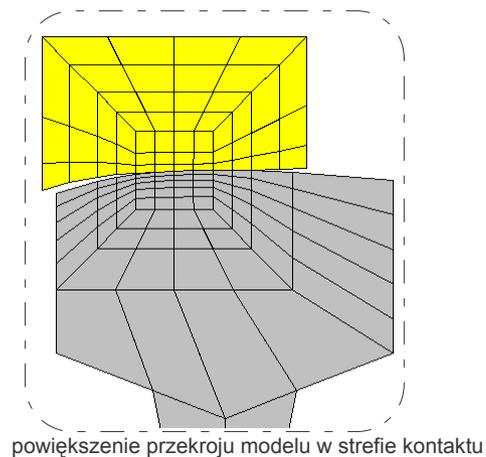
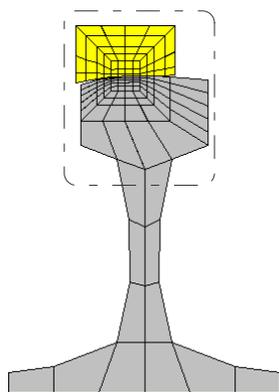
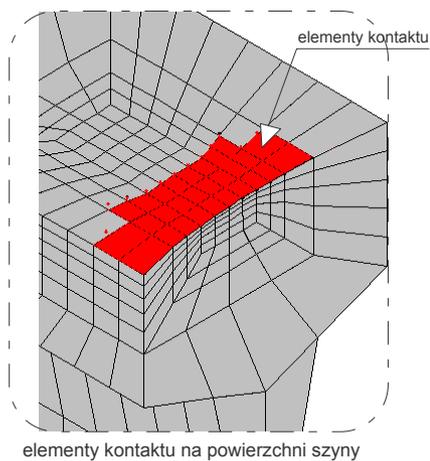
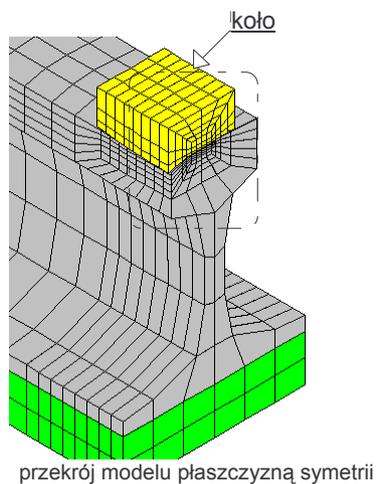
**Pełny model kontaktu szyny z kołem**  
(materiałliniowy, kontakt nieliniowy)



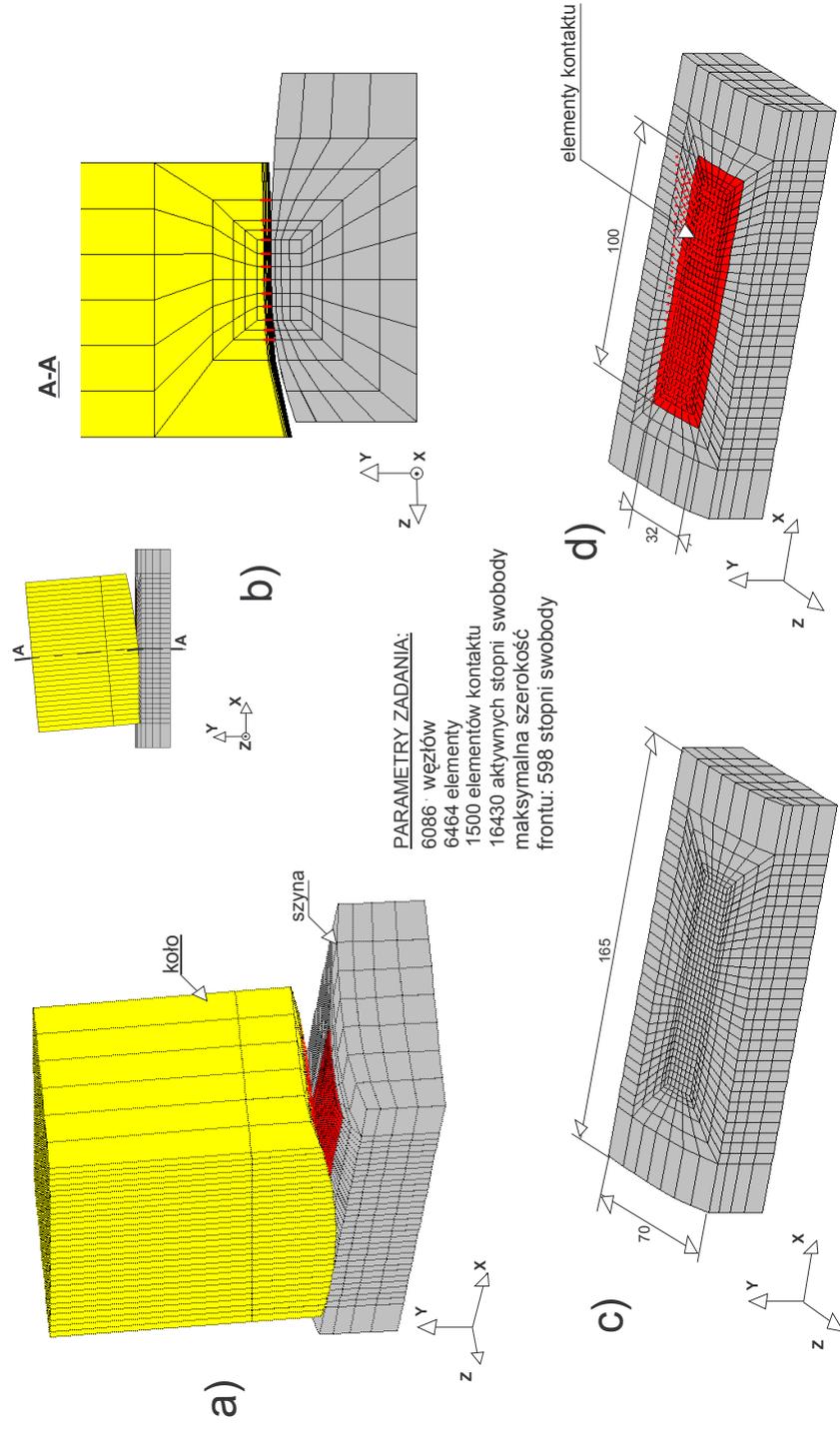
Rys. 6.7. Koncepcja submodelingu w zadaniu kontaktu tocznego szyny z kołem.



### Budowa strefy kontaktu



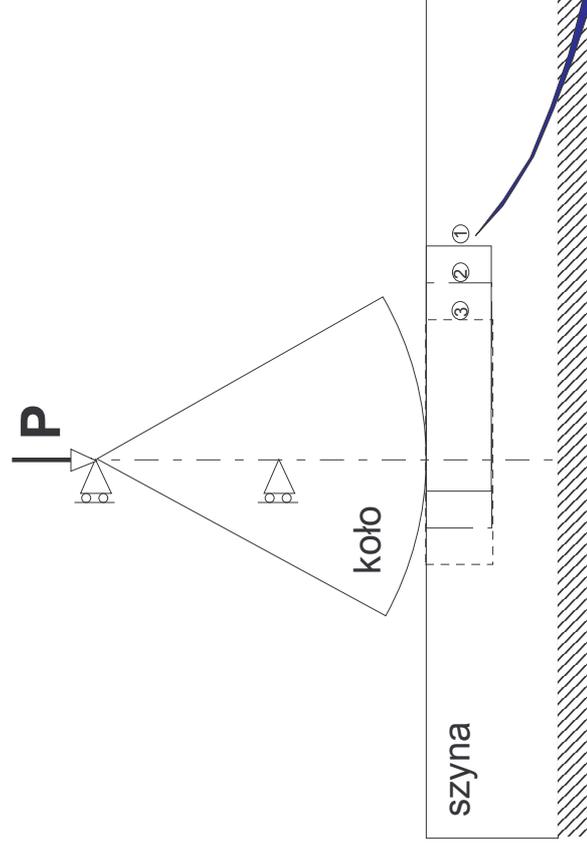
Rys.6.8. Siatka dyskretizacyjna dla zadania pełnego kontaktu szyny z kołem.



Rys.6.9. Dyskretyzacja submodelu w zadaniu kontaktu szyny z kołem;

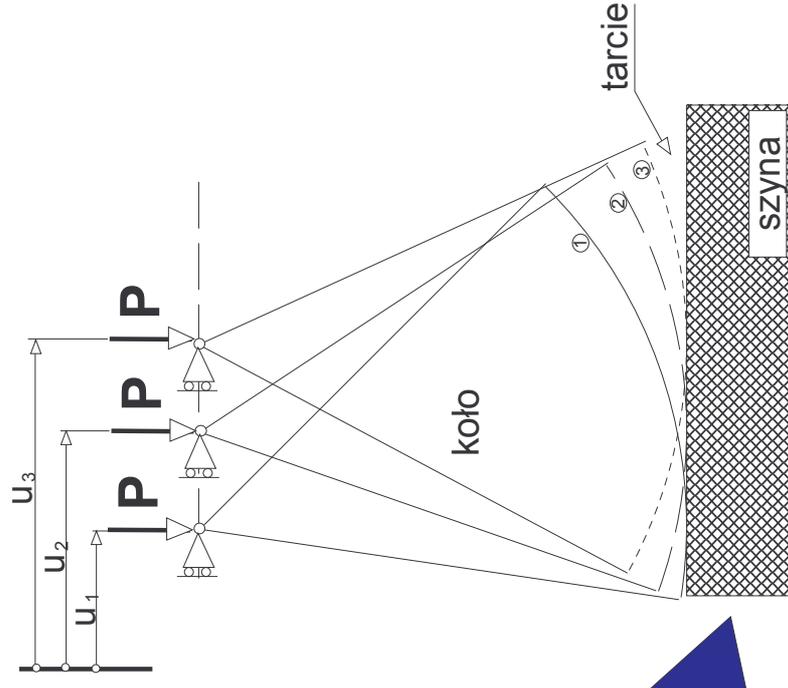
- a) wycinek szyny objęty submodelem,
- b) przekrój submodelu płaszczyzną A-A,
- c) dyskretyzacja submodelu,
- d) dyskretyzacja strefy kontaktu z zaznaczeniem elementów kontaktu.

## MODEL

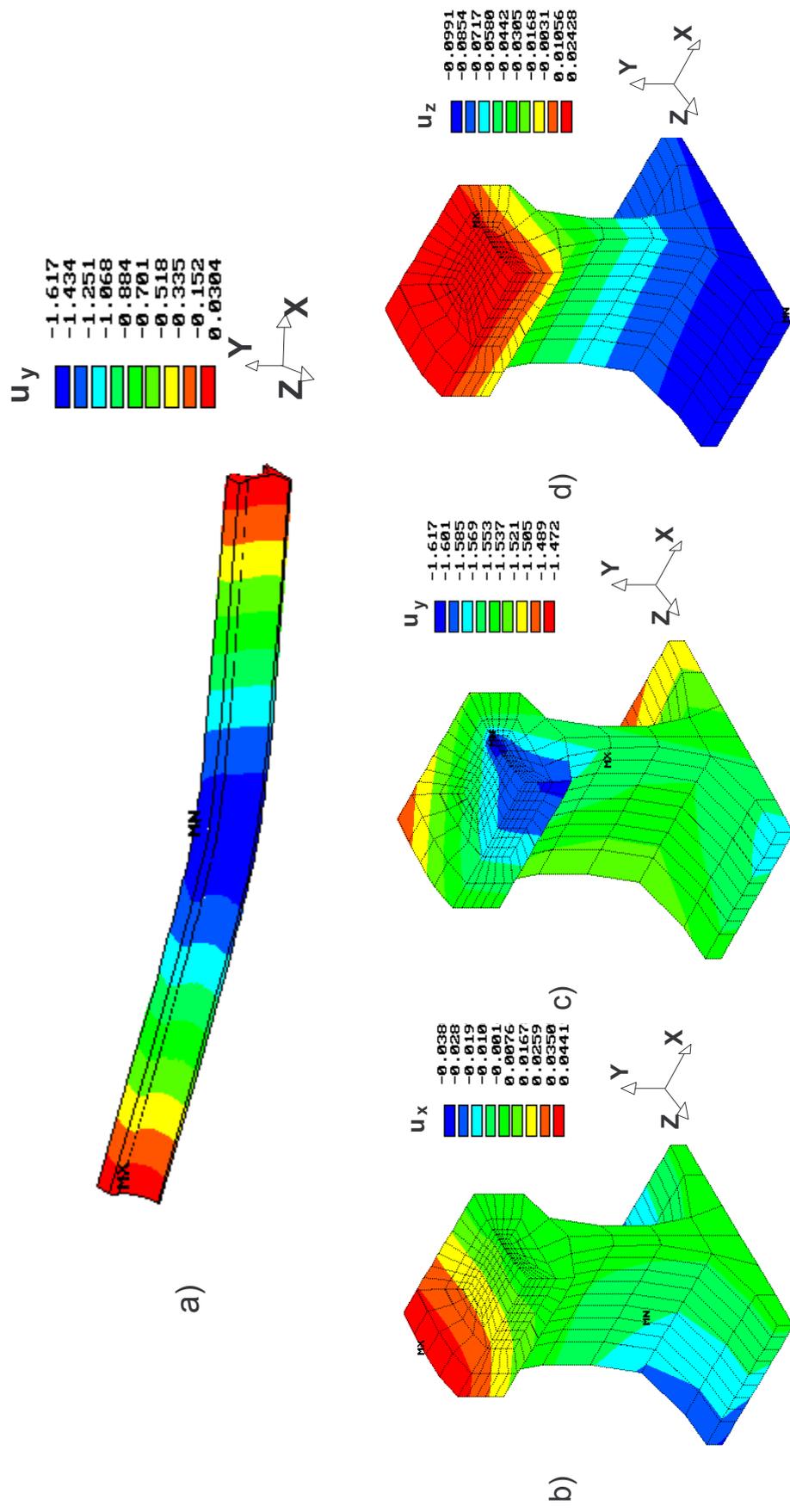


przeniesienie warunków  
brzegowych w kolejnych  
krokach obciążenia

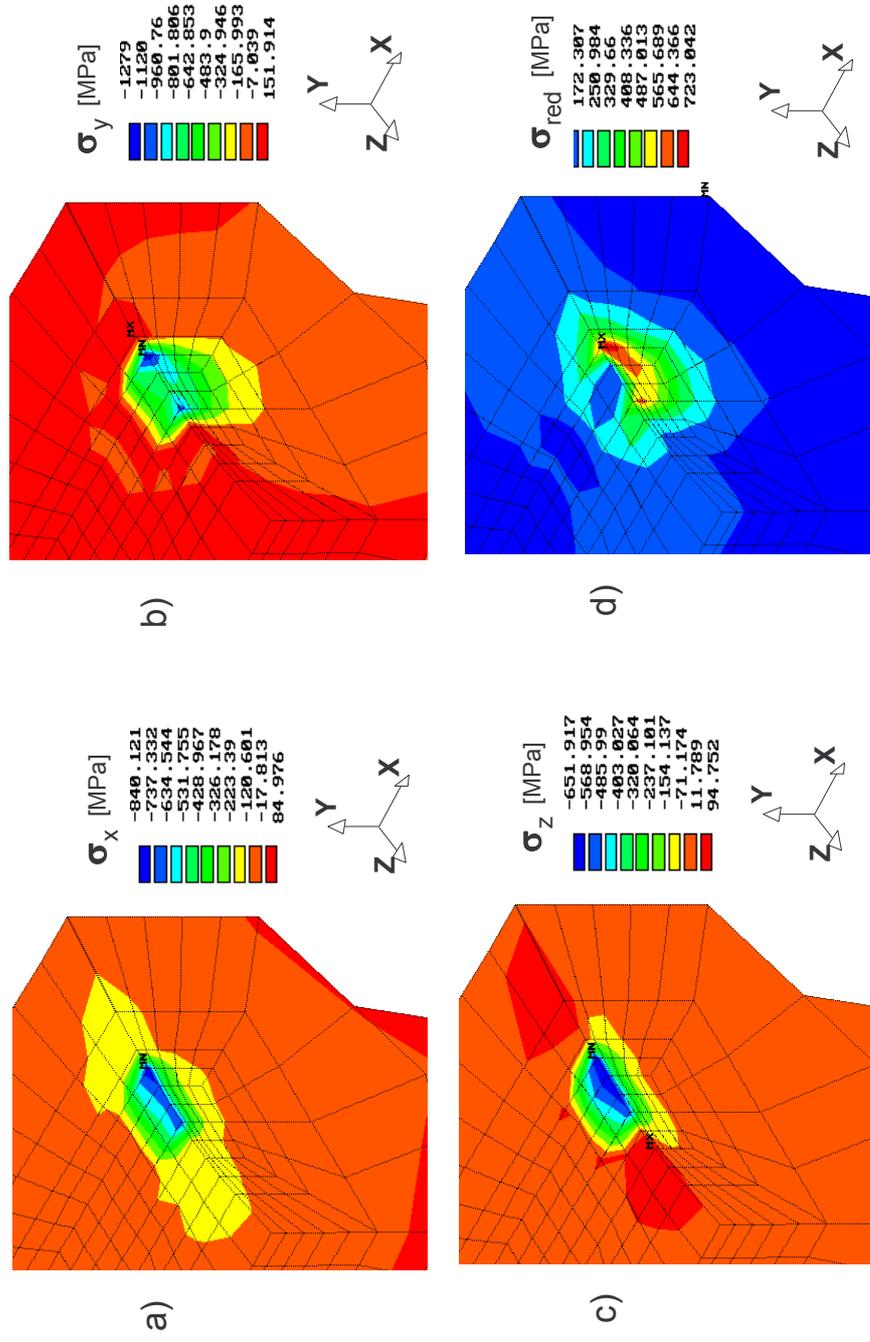
## SUBMODEL



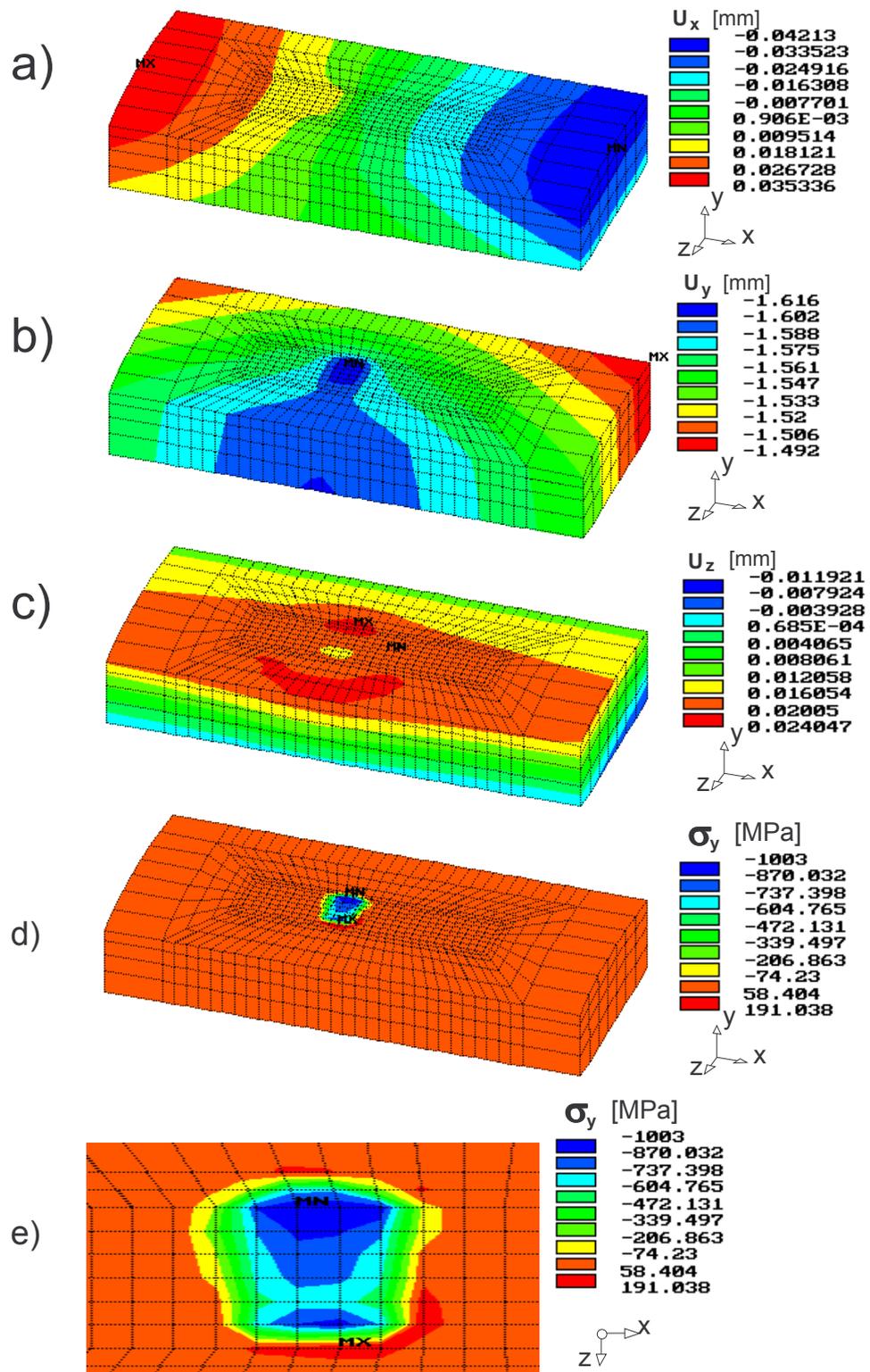
Rys.6.10. Koncepcja toczenia w zadaniu kontaktu szyny z kołem, przy wykorzystaniu modelu i submodelu.



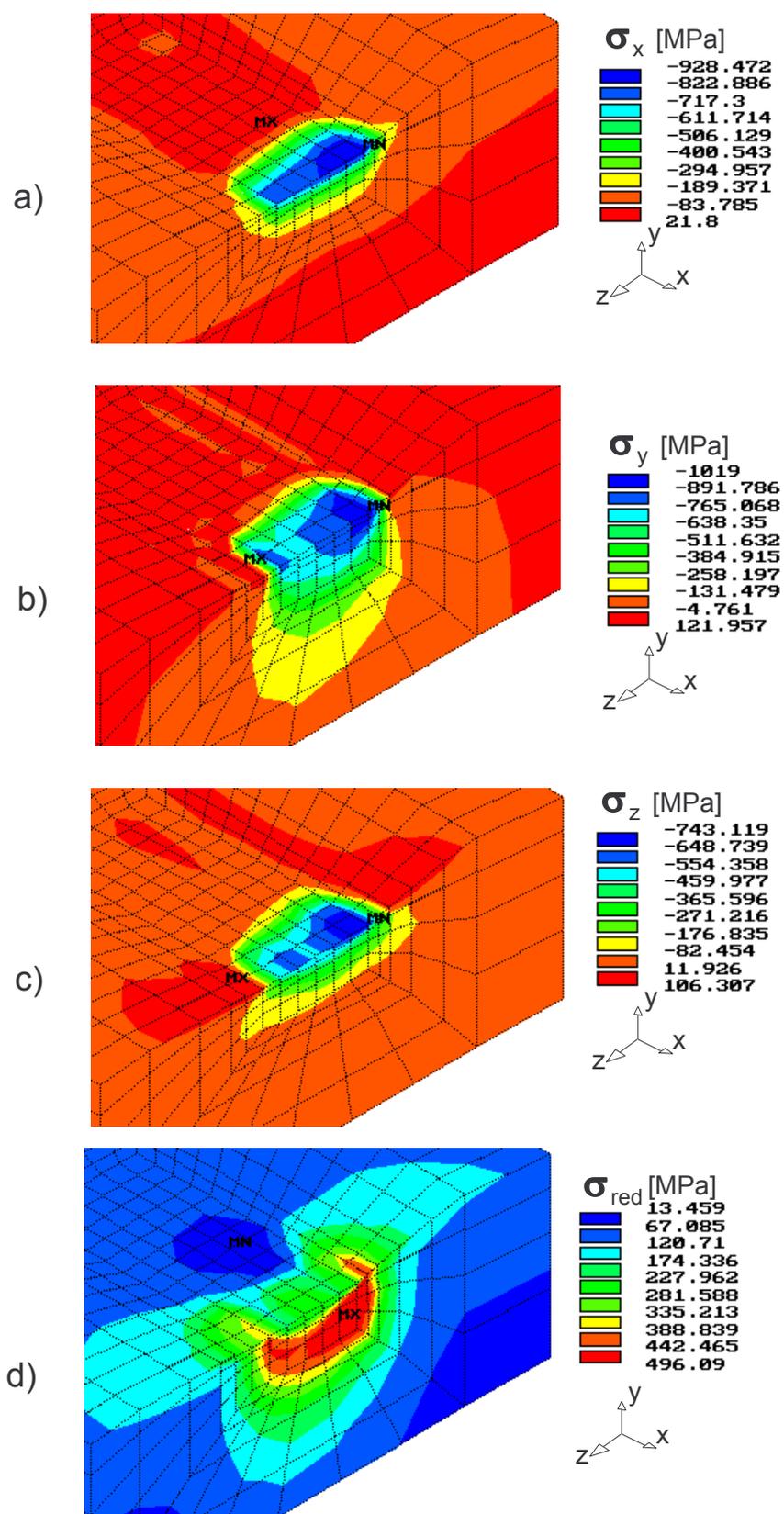
Rys.6.11. Wyniki obliczeń modelu pełnego: przebiegi składowych przemieszczenia [mm]: a) w kierunku pionowym dla całej szyny, oraz b) w kierunku wzdłużnym, c) pionowym i d) poprzecznym w strefie kontaktu.



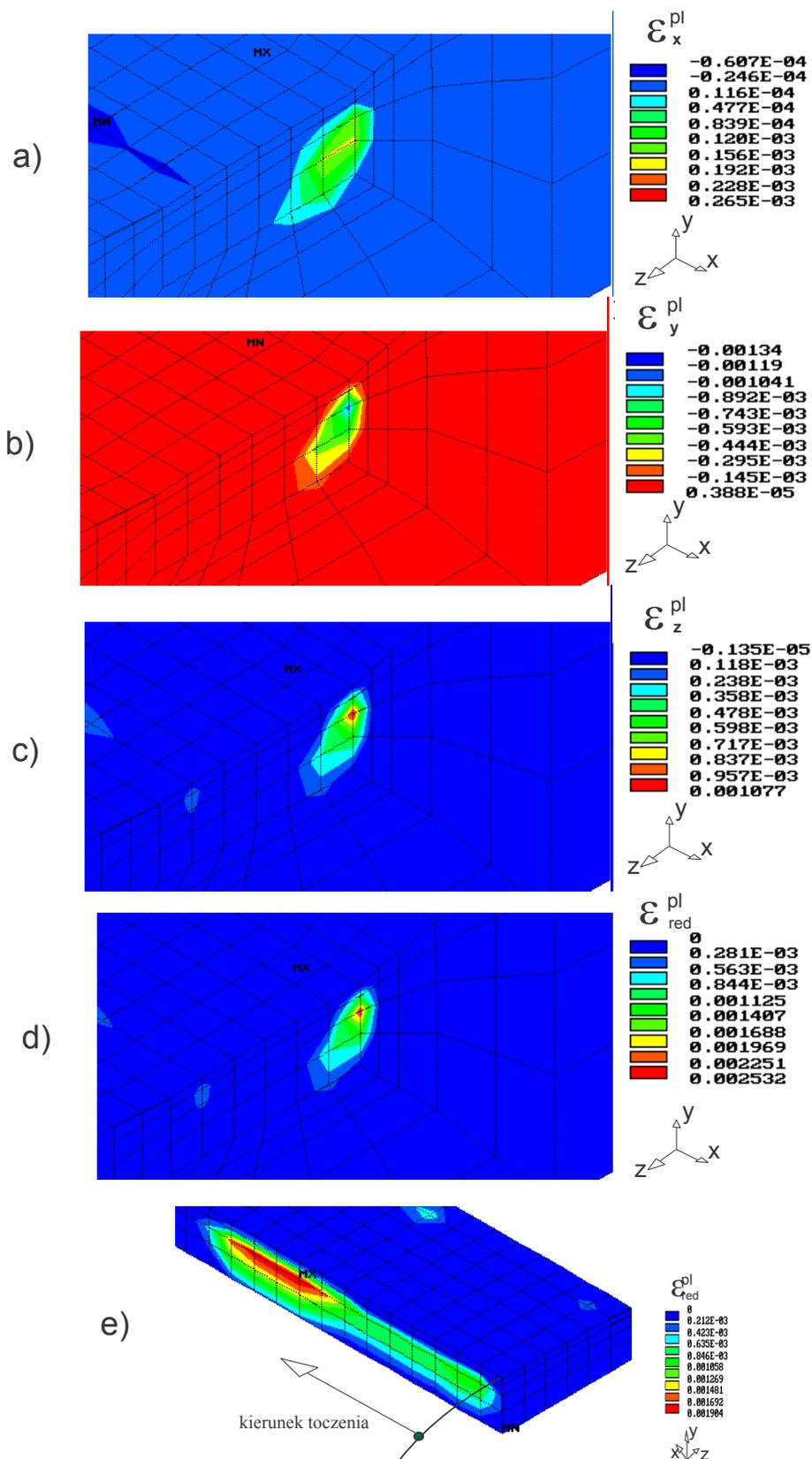
Rys.6.12 Rozkłady składowych naprężeń normalnych: a) w kierunku wzdłużnym, b) w kierunku pionowym, c) w kierunku poprzecznym oraz c) naprężeń zredukowanych w strefie kontaktu dla modelu pełnego szyny.



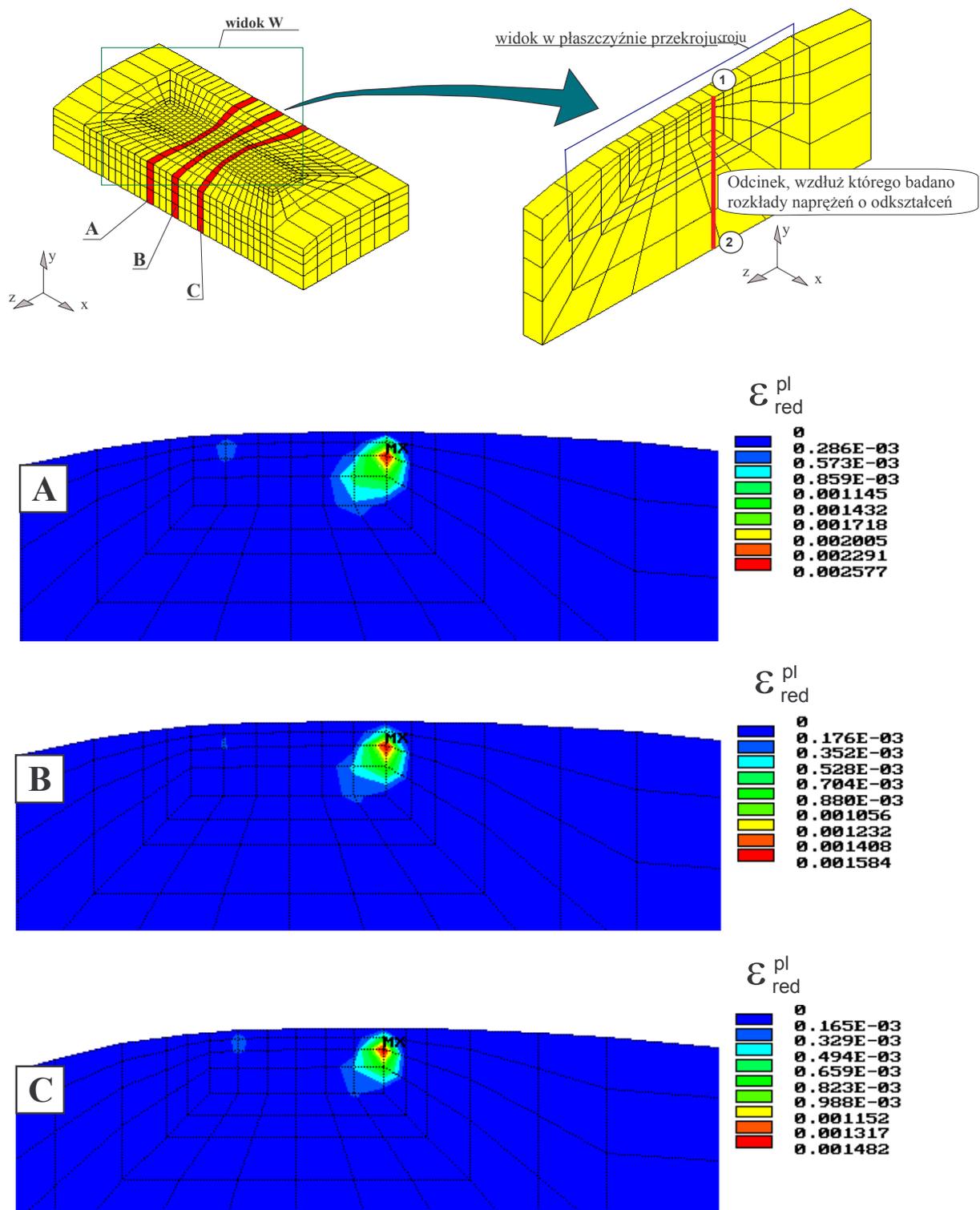
Rys. 6.13. Swobodne toczenie, stan po przemieszczeniu koła o 30mm; rozkłady składowych przemieszczenia: a)  $U_x$ , b)  $U_y$ , c)  $U_z$  oraz rozkład nacisków na powierzchni toczenia submodelu d) obraz całości, e) powiększenie elementu powierzchni



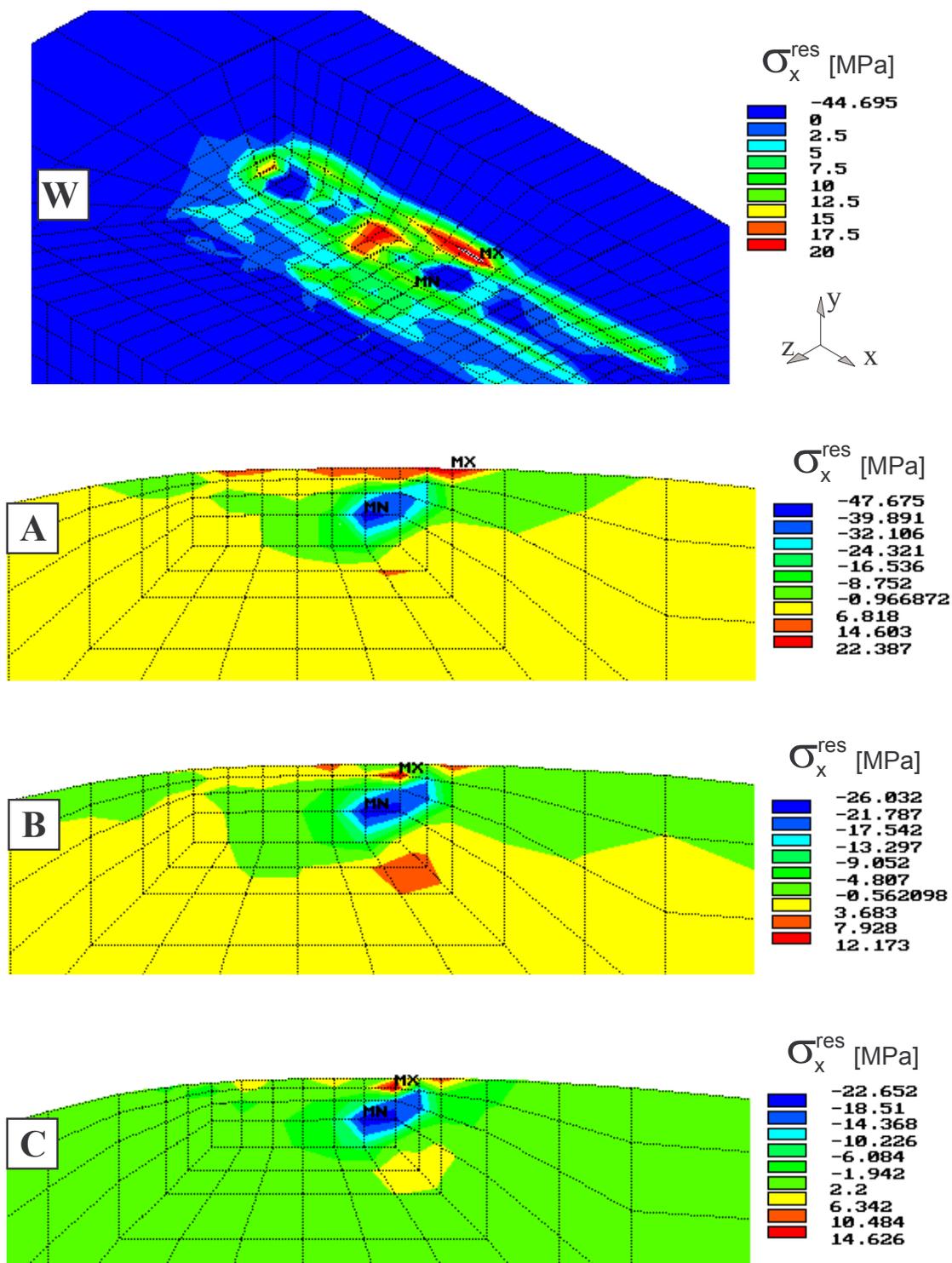
Rys.6.14. Toczenie swobodne, stan po przemieszczeniu koła o 30mm; rozkłady składowych naprężeń: a)  $\sigma_x$ , b)  $\sigma_y$ , c)  $\sigma_z$  oraz d) naprężeń zredukowanych  $\sigma_{red}$  w przekroju pod miejscem kontaktu.



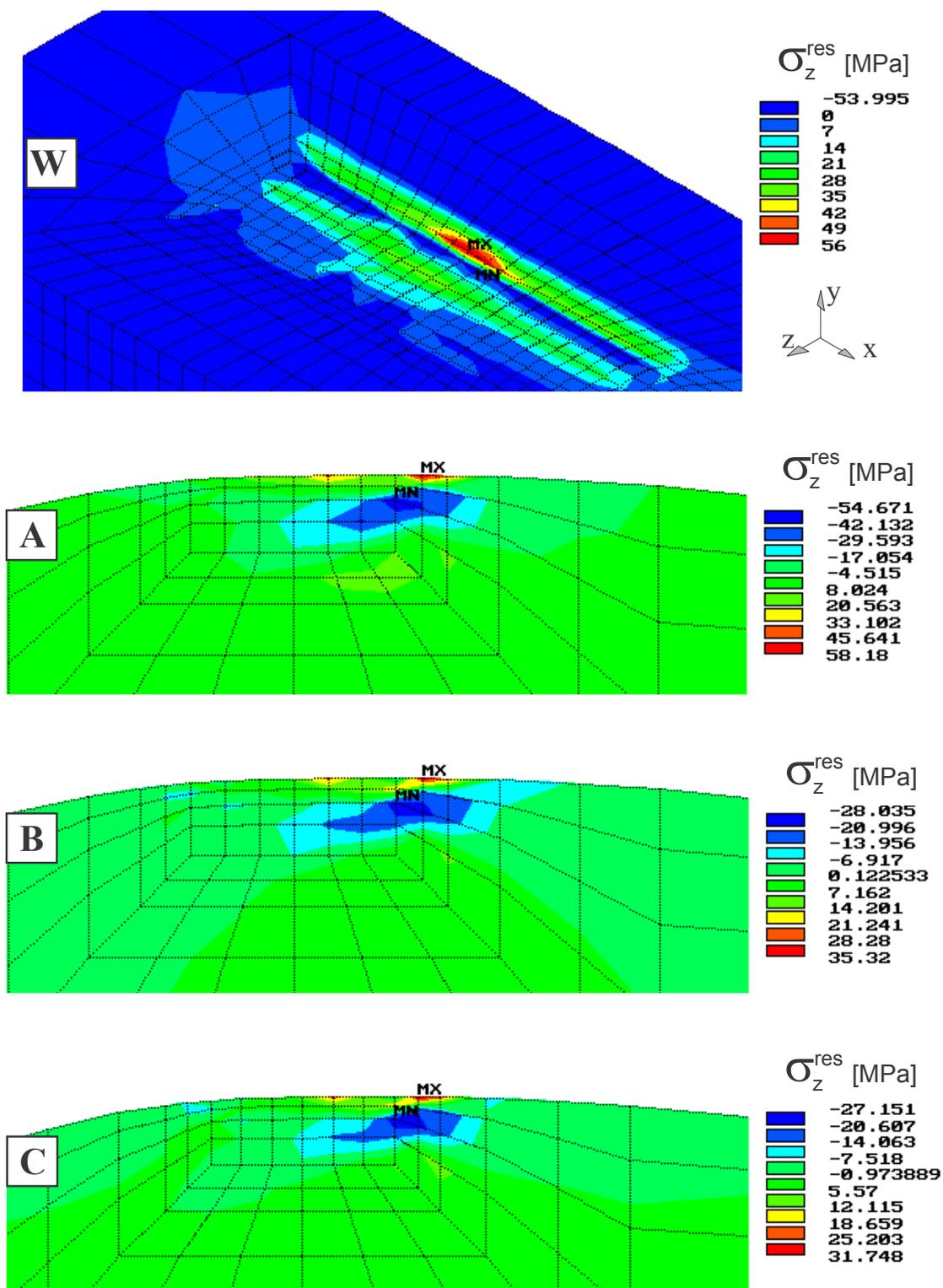
Rys.6.15. Toczenie swobodne, stan po przemieszczeniu koła o 30mm; rozkłady odkształceń plastycznych w strefie kontaktu: a) w kierunku x, b) w kierunku y, c) w kierunku z, d) zredukowanych odkształceń plastycznych w przekroju poprzecznym do kierunku jazdy, e) zredukowanych odkształceń plastycznych w przekroju płaszczyzną pionową równoległą do kierunku jazdy.



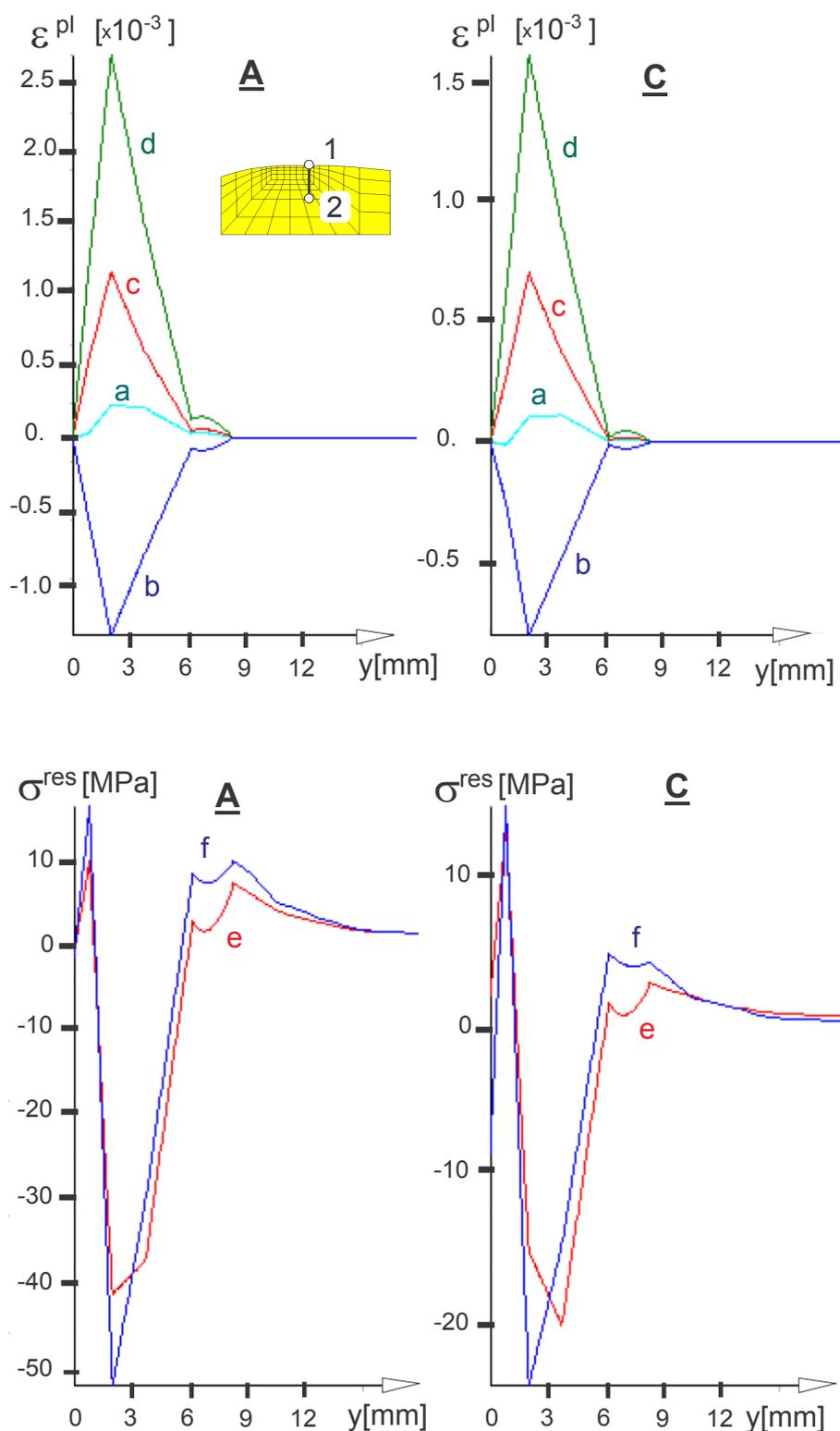
Rys.6.16. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B,C) po toczeniu swobodnym i odciążeniu.



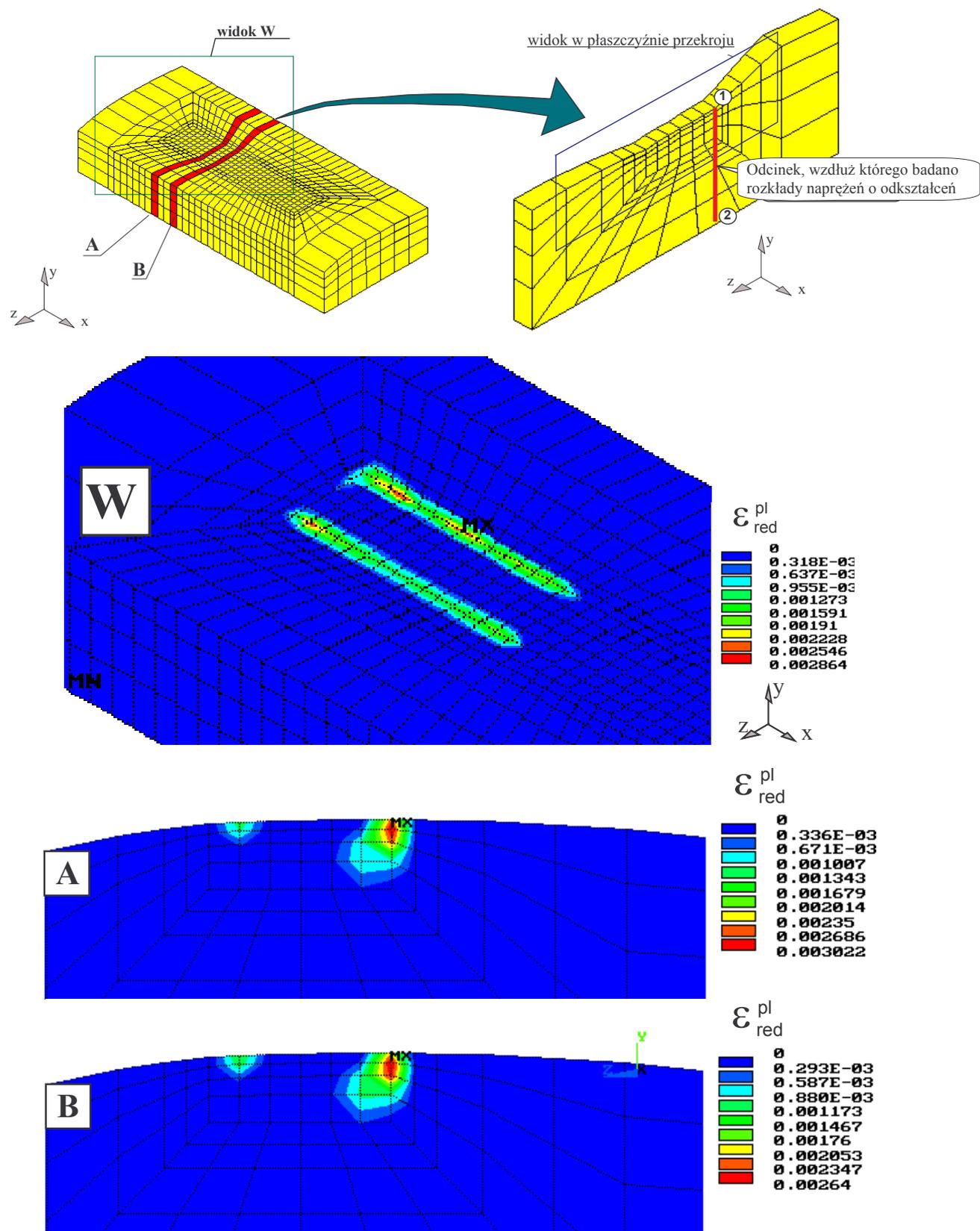
Rys.6.17. Rozkłady składowej naprężeń własnych w kierunku wzdłużnym na powierzchni toczenia (W) i w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B,C) po toczeniu swobodnym i odciążeniu.



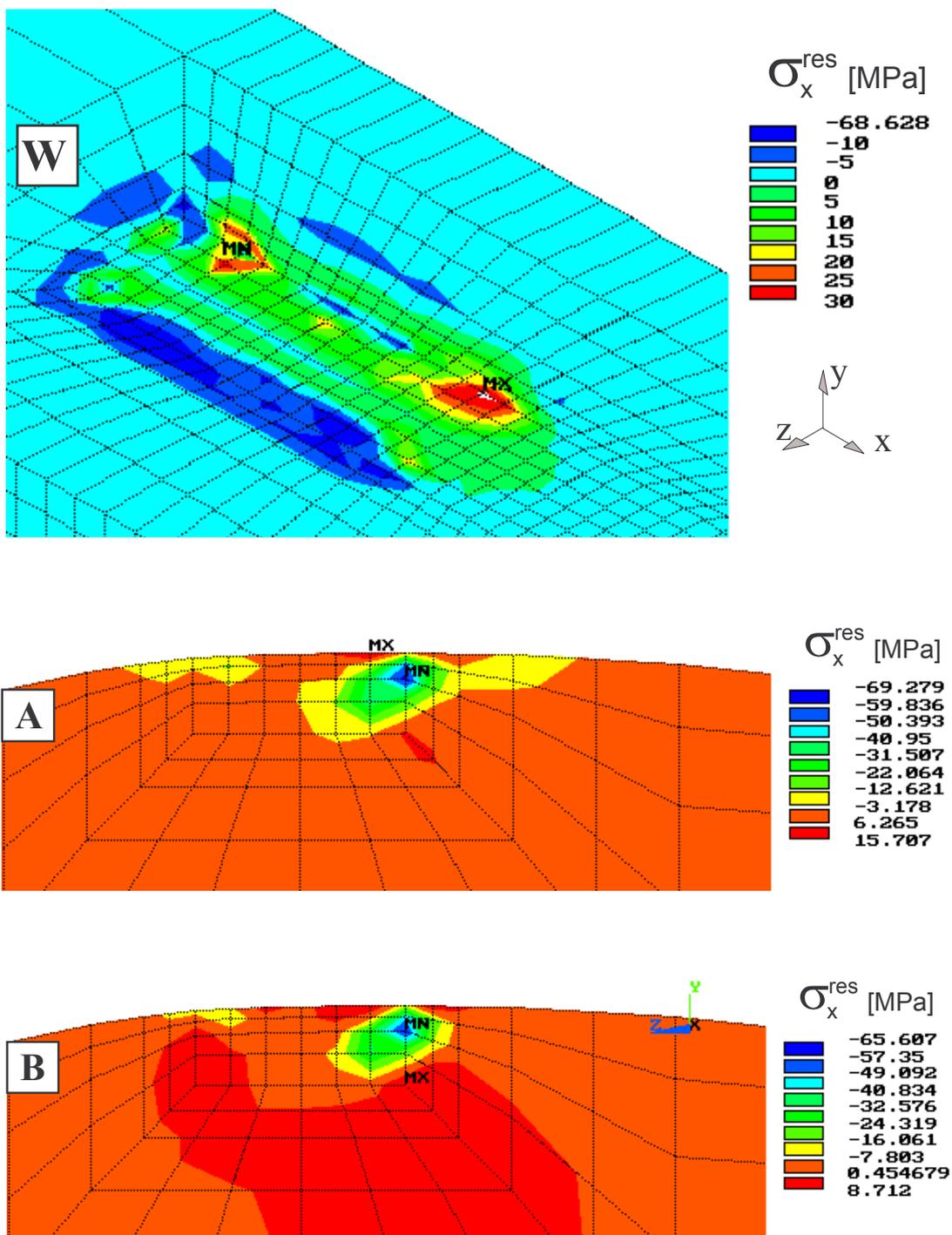
Rys.6.18. Rozkłady składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym na powierzchni toczenia (W) i w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B,C) po toczeniu swobodnym i odciążeniu.



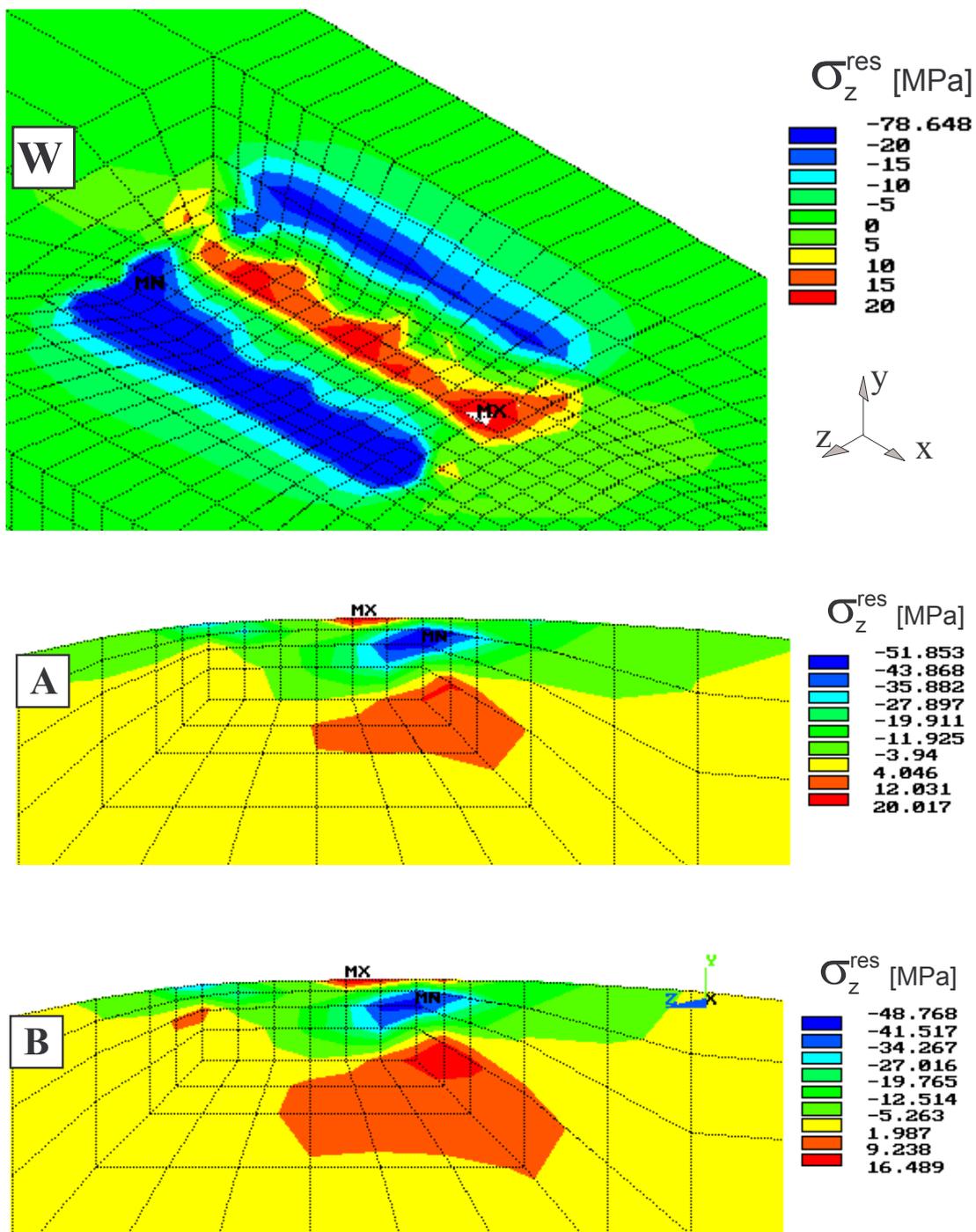
Rys.6.19. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych: a) w kierunku x, b) w kierunku y, c) w kierunku z, d) zredukowanych odkształceń plastycznych oraz naprężeń własnych: e) w kierunku x i f) w kierunku z w funkcji głębokości pod powierzchnią toczenia w miejscu maksymalnych odkształceń plastycznych dla przekrojów A i C. Stan po toczeniu swobodnym.



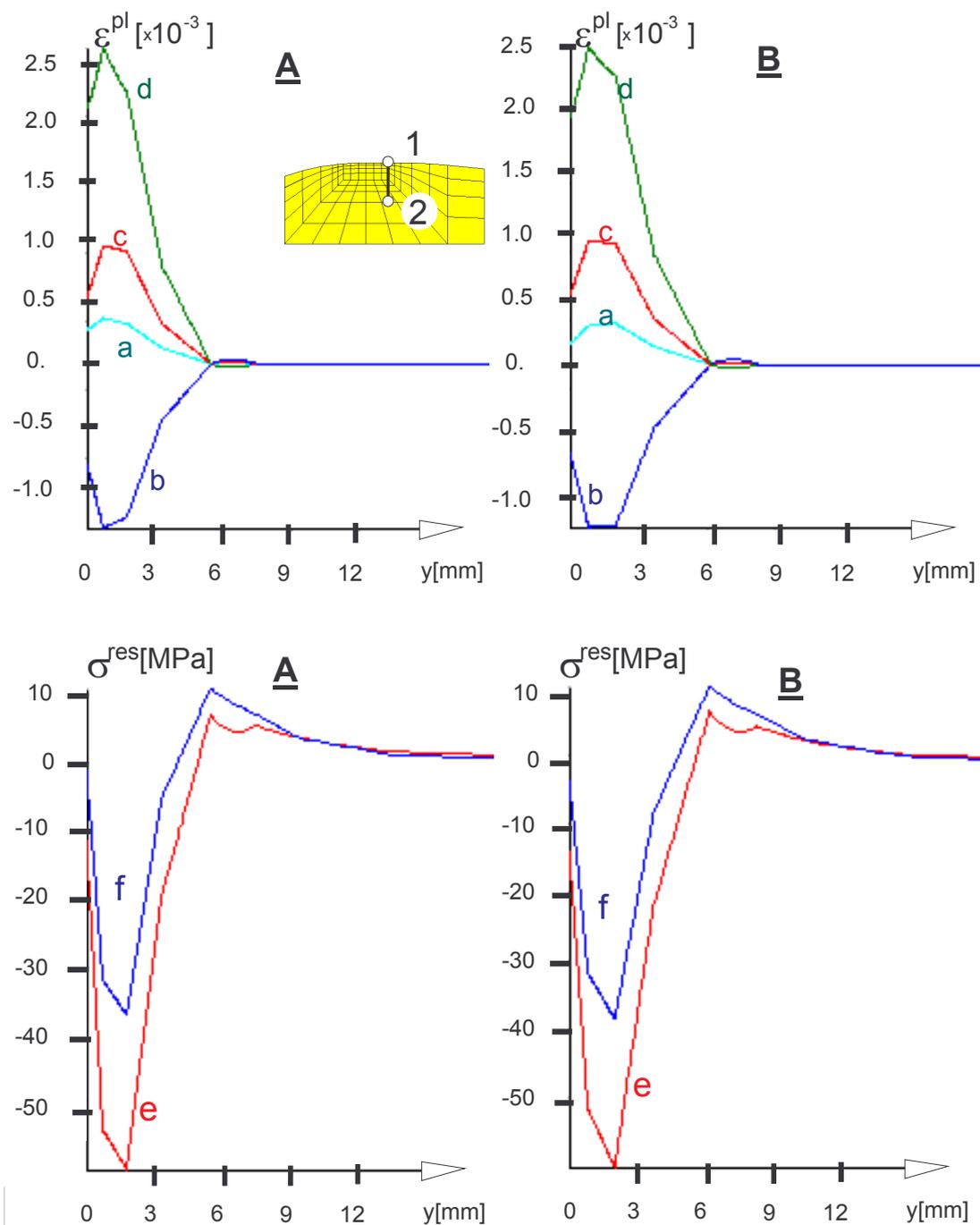
Rys.6.20. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B) po toczeniu z przyspieszaniem.



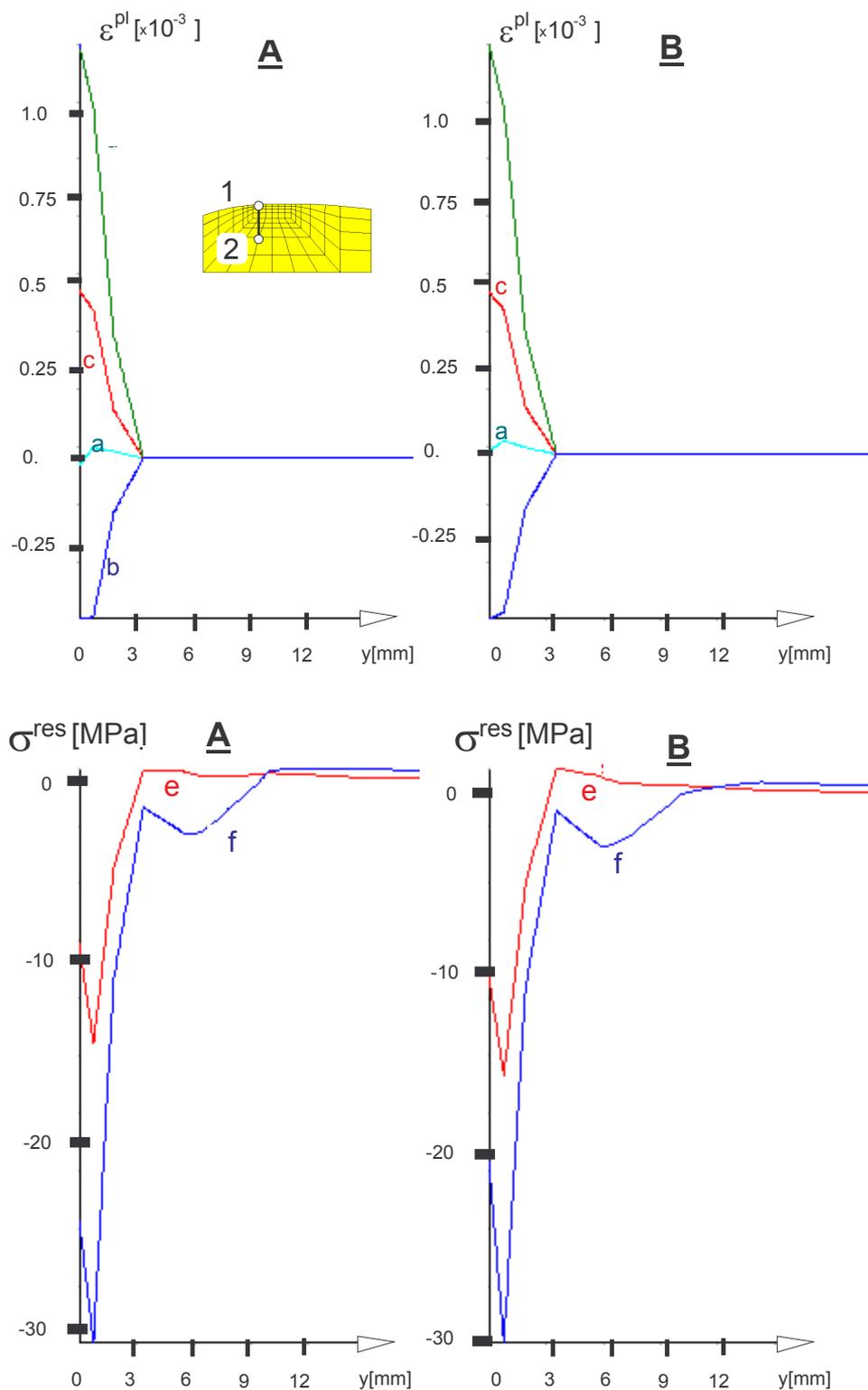
Rys.6.21. Rozkłady składowej naprężeń własnych w kierunku wzdłużnym na powierzchni toczenia (W) i w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B) po toczeniu z przyspieszeniem.



Rys.6.22. Rozkłady składowej naprężeń własnych w kierunku poprzecznym na powierzchni toczenia (W) i w kolejnych przekrojach poprzecznych (A,B) po toczeniu z przyspieszaniem.



Rys.6.23. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych: a) w kierunku x, b) w kierunku y, c) w kierunku z, d) zredukowanych odkształceń plastycznych oraz e) składowej naprężenia własnego: w kierunku x, f) w kierunku z w funkcji głębokości pod powierzchnią toczenia dla przekrojów A i B, w miejscu maksymalnych odkształceń plastycznych. Stan po toczeniu z przyspieszaniem.



Rys.6.24. Rozkłady zredukowanych odkształceń plastycznych: a) w kierunku x, b) w kierunku y, c) w kierunku z, d) zredukowanych odkształceń plastycznych oraz składowych naprężeń własnych: e) w kierunku x, f) w kierunku z, w funkcji głębokości pod powierzchnią toczenia w okolicy płytszej strefy plastycznej dla przekrojów A i B. Stan po toczeniu z przyspieszaniem.

## Rozdział 7

### Podsumowanie i wnioski

W pracy podjęta została próba numerycznego modelowania zjawisk kontaktu ciał odkształcalnych dla zbadania wpływu modelu materiału i warunków kontaktu (współczynnik tarcia, poślizg, hamowanie i przyspieszanie) na rozkłady naprężeń, zasięg stref plastycznych i rozkłady naprężeń własnych.

Do analizy problemów dwuwymiarowych posłużono się zbudowanymi przez autora programami analizy MES, wykorzystującymi opracowany przez niego algorytm kontaktu, którego skuteczność sprawdzono w szeregu testów (punkt 4.4).

Przeprowadzono analizę stempla wciskanego w półpłaszczyznę (punkt 5.1) uzyskując informacje dotyczące rozwoju stref plastycznych i charakteru powstających rozkładów naprężeń własnych. Uzyskano odpowiedź na pytanie co dzieje się z osobliwością naprężeń występującą w stanie sprężystym w ostrym narożu stempla i sąsiadującym z nim obszarze w przypadku uwzględnienia sprężysto-plastycznego modelu materiału (por.pkt.5.1.3). Jednym z wniosków tej analizy jest, że dla materiału o liniowej charakterystyce umocnienia, w obecności tarcia może istnieć w obszarze plastycznym rozkład naprężeń wykazujący cechy rozkładu osobliwego. Wartości maksymalnych nacisków i naprężeń własnych wzrastają wraz ze wzrostem wartości współczynnika tarcia.

Przeprowadzono dalej dwuwymiarową analizę toczenia walca na sprężysto-plastycznym podłożu przy uwzględnieniu oddziaływania sił normalnych i stycznych (hamowanie, przyspieszanie, poślizg) (pkt.5.2). Dotychczasowe prace numeryczne i doświadczalne nie wyjaśniły do końca pewnych zjawisk występujących przy rolowaniu i poślizgu. Istnieją między innymi kontrowersje co do rozkładu (znaku i wartości) naprężeń własnych wywołanych plastycznym odkształceniem w cienkiej warstwie przypowierzchniowej. Od znaku i wielkości naprężeń własnych w tej warstwie zależy prędkość propagacji szczelin, wytrzymałość zmęczeniowa itp., a zatem w dużej mierze decydują one o wytrzymałości i żywotności ustroju. Mają istotne praktyczne znaczenie dla wytrzymałości szyn kolejowych, elementów maszyn poddanych obróbce powierzchniowej zgniotem i.t.p.

W prezentowanych badaniach znaleziono odpowiedź na pytanie jaki jest wpływ sposobu obciążenia układu na proces rozbudowania się i rozkład naprężeń własnych. Wykazane zostało, że uwzględnienie tarcia w analizie sprężysto-plastycznego toczenia jest sprawą podstawową. Uzyskane rezultaty wskazują, że ściskające naprężenia własne w warstwie przypowierzchniowej powstają w wyniku istnienia dużych odkształceń plastycznych i mogą być wywołane jedynie efektami tarcia w

strefie kontaktu (toczenie bez tarcia prowadzi do naprężeń własnych rozciągających w tym obszarze). Przy hamowaniu odkształcenia powierzchniowe powstają w strefie za walcem, podczas gdy przy przyspieszaniu występują w strefie najazdu walca. Przyspieszanie (w porównaniu z hamowaniem) prowadzi do powstawania znacznie większych naprężeń własnych w warstwie przypowierzchniowej.

Analiza dwuwymiarowa toczenia walca po półpłaszczyźnie dała podstawy do podjętej w dalszej części pracy próby rozwiązania złożonego zadania kontaktu koła kolejowego z szyną, uwzględniającego przestrzenny charakter zjawiska i zbliżone do rzeczywistych parametry układu (materiał, geometria, sposób i wielkość obciążenia). Zadanie rozwiązano za pomocą systemu ANSYS5.0 wykorzystując niekonwencjonalną, opracowaną przez autora koncepcję "submodellingu" (p.6.3).

Na skutek przestrzennego ukształtowania strefy kontaktu, w modelu trójwymiarowym rozkład nacisków odbiegał w znaczny sposób od rozkładu typu Hertza (był bardziej równomierny), co w efekcie prowadziło do mniejszych naprężeń zredukowanych pod powierzchnią toczenia i powstania wąskiej strefy plastycznej. W analizie tej prześledzono rozwój stref plastycznych i uzyskano rozkłady naprężeń własnych. Z analizy wynika, że powstanie ściskających naprężeń własnych na powierzchni tocznej szyny jest nieodłącznie związane z efektami tarcia, a w szczególności jest rezultatem poślizgów i mikroślizgów koła względem szyny. Podobne wyniki zostały uzyskane dla dwuwymiarowego modelu zjawiska. W przypadku toczenia swobodnego wyniki obu analiz (2D i 3D) wskazują na istnienie ściskających naprężeń własnych na pewnej głębokości pod powierzchnią toczenia związanych z istnieniem tam największych odkształceń plastycznych. Wynikiem tego jest powstanie rozciągających naprężeń własnych na powierzchni toczenia.

Trudno jest porównywać wyniki trójwymiarowej analizy toczenia koła po szynie, nawet po kilku przejazdach, do wyznaczanych doświadczalnie rozkładów naprężeń własnych szyn po pewnym okresie eksploatacji. W analizie numerycznej w efekcie pojedynczego lub kilku przejazdów koła otrzymano niewielki obszar uplastycznień. W warunkach rzeczywistych stan naprężeń resztkowych jest wynikiem wielokrotnego i występującego w różnych punktach powierzchni tocznej kontaktu, przy bogatej historii obciążenia (przyspieszanie, hamowanie, poślizgi wzdłużne i poprzeczne, zużycie warstwy wierzchniej, wpływ zmian temperatury i.t.p.). Analiza numeryczna dostarcza wszakże bardzo istotnych informacji na temat mechanizmu kontaktu i wpływu poszczególnych obciążeń na sposób ukształtowania naprężeń własnych.

W analizie trójwymiarowej toczenia koła po szynie cienka warstwa powierzchniowa była modelowana na tyle dokładnie, na ile pozwalały na to ograniczenia (p.6.2). Uzyskane wyniki pokazały, że można było przyjąć mniejszy

obszar submodelu zachowując podobny podział na elementy. W dalszych pracach wskazane byłoby zagęszczenie siatki elementów w strefie kontaktu.

W analizie podjęto próbę uwzględnienia możliwie dokładnie parametrów pracy kontaktujących się ciał. Okazało się to trudne chociażby ze względu na przybliżony charakter modeli opisujących tarcie i plastyczność.

Uzyskane rozkłady naprężeń własnych wskazały na podstawowe znaczenie efektów tarcia w strefie kontaktu, celowe jest zatem w dalszych analizach rozważenie innych modeli tarcia bardziej złożonych, ale też dokładniej opisujących zjawisko.

W przyszłych pracach należałoby także uwzględnić takie czynniki jak: różne usytuowania koła względem szyny, wprowadzenie w szynę wstępnych naprężeń od prostowania, uwzględnienie efektów bocznych ruchów koła, zmianę geometrii szyn na skutek zużycia.

W analizie numerycznej prowadzonej za pomocą mikrokomputera PC486 jeden cykl toczenia w zadaniu dwuwymiarowym (punkt 5.2) "kosztował" około 1500 iteracji (100 godzin), podczas gdy w zadaniu trójwymiarowym (p.6.3) - 260 iteracji (570 godzin). Przyjęta koncepcja pozwalała na wniknięcie w mechanizm powstawania naprężeń własnych podczas toczenia, realizując zaledwie kilkukrotny przejazd koła po szynie. W przyszłych badaniach należałoby szczególnie nacisk położyć na wielokrotne obciążenia cykliczne, problemy przystosowania się badanego ustroju itp.

Przedstawione problemy mają bardzo istotny i ciekawy aspekt poznawczy i duże znaczenie praktyczne. Zostały przeanalizowane dotąd nie wyjaśnione zagadnienia związane z powstawaniem naprężeń własnych w cienkiej warstwie przypowierzchniowej podczas sprężysto-plastycznego toczenia.

## Spis literary

- [1] Abuku S. and Cullity B.D.: A Magnetic Method for the Determination of Residual Stress, *Experimental Mechanics* Nr 55, 1971.
- [2] Ansys Users's Manual for Revision 5.0.
- [3] Bai X. and Zhao X. Analysis of large deformation elastoplastic contact through finite gap elements, *Comp.Struct.*, 30, 975-978, 1988.
- [4] Bathe K.J.: *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall 1981.
- [5] Bathe K.J., Chaudhary A.: A solution method for planar and axisymmetric contact problems, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 21, 65-88, 1985.
- [6] Bijak-Żochowski M.: Badanie rozkładu naprężeń własnych metodą miejscowej trepanacji, *Archiwum Budowy Maszyn*, z.4, 1976
- [7] Bijak-Żochowski M.: *Metody badania naprężeń własnych*, praca habilitacyjna, warszawa 1978.
- [8] Bijak-Żochowski M.: Zastosowanie metody penetratora do badania naprężeń własnych, *Archiwum Budowy Maszyn*, z.4, 1988.
- [9] Bijak-Żochowski M.: Investigation of residual stress by penetration method. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): *Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics*, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.I, 185-203.
- [10] Bijak-Żochowski M., Marek P., Tracz M.: On reduction and elimination of stress singularities in some elastic contact problems. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.36, No.4, 1994.
- [11] Bijak-Żochowski M., Marek P., Tracz M.: On stress singularities in some axisymmetric problems of elastic contact. *Proceedings of the 10th International Conference on Experimental Mechanics*, Lisbona, Portugal, 1994.
- [12] Bijak-Żochowski M., Marek P.: Development of plastic zones and residual stress in elasto-plastic contact problems with stress singularities in elastic range. *International Journal of Mechanical Science* (w druku).
- [13] Bijak-Żochowski M., Tracz M.: Investigation of residual stress distribution in a rail head. *Journal of Strain Analysis*, Vol.29, No.1, 1994, ss. 73-78.
- [14] Bhargava V., Hahn G.T., Rubin C.A.: An Elastic-Plastic Finite Element Model of Rolling Contact, Part1: Analysis of Single Contacts. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.52, No.1, 1985, ss.67-74.

- [15] Bhargava V., Hahn G.T., Rubin C.A.: An Elastic-Plastic Finite Element Model of Rolling Contact, Part2: Analysis of Repeated Contacts. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.52, No.1, 1985, ss.75-82.
- [16] Bhargava V., Hahn G.T., Ham G., Kulkarni S., Rubin C.A.: Influence of Kinematic hardening on Rolling Contact Deformation. Proc. 2nd Int.Symp. on Contact Mechanics and Rail/Wheel Systems, Kingston, R.I., 1986.
- [17] Bower A.P., Johnson K.L., Kalousek J.: A Ratchetting Limit for Plastic Deformation of a Quarter Space under Rolling Contact Loads. Proc. 2nd Int.Symp. on Contact Mechanics and Rail/Wheel Systems, Kingston, R.I., 1986.
- [18] Bower A.F, Johnson K.L.: The influence of Strain Hardening on Cumulative Plastic Deformation in Rolling and Sliding Line Contact. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.37, No.4, 1989, ss. 471-493.
- [19] Bower A.F, Johnson K.L.: Plastic Flow and Shakedown of the Rail Surface in Repeated Wheel-Rail Contact. Wear, 144, 1991, ss.1-18.
- [20] Campos,L.T. et al. A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., 34, 821-845, 1982.
- [21] Campus F.: Effects of Residual Stress on the Behavior of Structures w: Residual Stress in Metals and Metal Constructions, edited by W.R. Osgood, New York 1954.
- [22] Cecot W., Orkisz J.: Estimation of Actual Residual Stresses by Boundary Element Method. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, ss.179-190.
- [23] Chandrasekaran,N. et al. A finite element solution method for contact problems with friction, Int.J.Num.Metch.Eng., 24, 477-495, 1987.
- [24] Comninou,M. Stress singularity at sharp edge in contact problems with friction, J.Appl.Math.and Phys. (ZAMP), 27, 493-499, 1976.
- [25] Curnier,A. TACT: a contact analysis program, 10th Leeds-Lyon Symp. Tribology, 1983.
- [26] Curnier,A.: A theory of friction, Int.J.Solids Struct.,Vol.20, No.7, ss.637-647, 1984.
- [27] Czarnek R., Lee J., Lin S.Y.: Moire interferometry and its potential for application to residual stress measurements in rails. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.I, 153-167.
- [28] Dumas G., Baronet C.N.: Elasto-plastic indentation of a half space by a long rigid cylinder. International Journal of Mechanical Sciences, 13, 1971, ss.519.

- [29] Dundurs, J. and Lee, M.-S. Stress concentration at a sharp edge in contact problems, *J.Elast.*, 2, 109-112, 1972.
- [30] Endahl N.: On the finite element solution of the elastoplastic axisymmetric Hertz contact problem. *Computers & Structures*, Vol.24, No.4, 1986, ss.517-523.
- [31] Follansbee P.S., Sinclair G.B.: Quasi-static normal indentation of an elastic plastic half-space by a rigid sphere. *International Journal of Solids and Structures*, 20, 1984, ss. 81.
- [32] Francavilla, A. and Zienkiewicz, O.C. A note on numerical computation of elastic contact problems *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 9, 913-924, 1975.
- [33] Fredriksson, B. On elastostatic contact problems with friction - a finite element analysis, *Dissertation, Linköping Inst.Technol.*, 1976.
- [34] Fredriksson B., Torstenfelt B., Endahl N.: Numerical solutions to contact, friction and crack problems with applications. *Eng. Comput.*, 1, 1984, 133-143.
- [35] Fredriksson, B. et al. Numerical solutions to contact, friction and crack problems with applications, *Eng.Comput.*, 1, 133-143, 1984.
- [36] Gallego, F.J. and Anza, J.J. A mixed finite element model for the elastic contact problem, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 28, 1249-1264, 1989.
- [37] Giannakopoulos, A. The return mapping method for the integration of friction constitutive relations, *Comp.Struct.*, 32, 157-167, 1989.
- [38] Glowinski, R. et al. Augmented Lagrangian techniques for solving frictionless contact problems in finite elasticity, in *FEM Nonlinear Problems*, (Eds P.G.Bergan, et al.), Springer-Verlag, Berlin, pp.745-758, 1985.
- [39] Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V.: The elastoplastic indentation of a half-space by a rigid sphere. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 3, 1971, ss.451-462..
- [40] Haslinger, J. and Hlavacek, I. Contact between elastic bodies - finite element analysis, *Aplikace Matemat.*, 26, 263-290, 1981.
- [41] Hermann, L.R. Finite element analysis of contact problems, *J.Eng.Mech.Div., ASCE*, 104, 1043-1057, 1978.
- [42] Heyliger, P.R. and Reddy, J.N. A mixed computational algorithm for plane elastic contact problems - I. Formulation, *Comp. Struct.*, 26, 621-634, 1987.

- [43] Hołowiński M., Orkisz J.: Hybrid Finite Method for Estimation of Actual Residual stress. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świderski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, ss.125-149.
- [44] A.Jaworski, G.Krzesiński, P.Marek: CRA\* Pakiet programów MES do obliczania współczynników intensywności naprężeń dla pęknięć w płaskim stanie naprężenia i płaskim stanie odkształcenia. Sprawozdanie dla ITWL. Warszawa 1990.
- [45] A.Jaworski, A.Dacko, G.Krzesiński, P.Marek: Opracowanie programów komputerowych obliczających współczynniki intensywności naprężeń dla pęknięć w trójwymiarowym stanie naprężenia i odkształcenia. Sprawozdanie dla ITWL. Warszawa 1991.
- [46] Johnson K.L.: Contact mechanics. Cambridge University Press, 1989.
- [47] Johnson K.L.: Plastic Flow, Residual Stress and Shakedown in Rolling Contact. Kingston R.I. (eds): 2nd International Symposium on Contact Mechanics and Rail/Wheel Systems. University of Waterloo Press, Canada, 1986.
- [48] Kapoor A., Johnson K.L.: Effect of Changes in Contact Geometry on Shakedown of Surfaces in Rolling/Sliding Contact. Int.Journal of Mechanical Science, Vol.34, No.3, 1992, ss.233-239.
- [49] Karlikowski Z., Bijak-Żochowski M.: Numerical and experimental investigations of some problems of plastic contact. Archiwum Budowy Maszyn, Vol.XL, z.2, 1993.
- [50] Kihara J.: Application of boundary element method to rolling technology with special respect to flatness and crown plate and sheet. ISIJ International, Vol.31, No.6, 1991, ss.543-549.
- [51] Kikuchi, N. and Oden, J.T. (Eds) Contact problems in elasticity: study of variational inequalities and finite element methods, SIAM Stud. Appl. Math., SIAM, New York, 1988.
- [52] Kleiber M.: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum" PWN 1985.
- [53] Kleiber M.: Incremental finite element modelling in non-linear solid mechanics. Ellis Horwood Ltd, PWN 1989.
- [54] Klarbring, A.: Contact problems in linear elasticity, friction laws and mathematical programming applications, Linköping Studies in Science and Technol, Dissert.No.133, 1985.
- [55] Klarbring, A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., 58, 175-200, 1986.

- [56] Klarbring, A. and Bjorkman, G. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface, *Comp.Struct.*, 30, 1185-1198, 1988.
- [57] Konig J.A.: *Shakedown of elastic-plastic structures*. Elsevier & PWN - Polish Science Publishers, Warsaw, 1987.
- [58] Kudrin S.N., Kazankov V.V: *Inline assessment of stress state of rails*. *Stell in the USSR*, vol.19, 1990, ss.549-551.
- [59] Kulkarni S.M., Hahn G.T., Rubin C.A., Bhargava V.: *Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Three-Dimensional, Pure Rolling Contact at the Shakedown Limit*. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, 1990, ss.57-65.
- [60] Kulkarni S.M., Hahn G.T., Rubin C.A., Bhargava V.: *Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Three-Dimensional Pure Rolling Contact Above the Shakedown Limit*. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.58, 1991, ss.347-353.
- [61] Kulkarni S.M., Hahn G.T., Rubin C.A., Bhargava V.: *Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Repeated Three-Dimensional, Elliptical Rolling Contact With Wheel Properties*, *ASME Journal of Tribology*, Vol.113, 1991, ss.434-441.
- [62] Kuo, A.S. A two-dimensional shear spring element, *AIAA J.*, 22, 1460-1464, 1984.
- [63] Lee B.C., Kwak B.M.: *A computational method for elasto-plastic contact problems*. *Computers & Structures*, Vol.18, No.5, 1984, ss.757-765.
- [64] Lee C.H., Masaki S., Kobayashi S.: *Analysis of ball indentation*. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14, 1972, s.417.
- [65] Lee, B.C. and Kwak, B.M. *A computational method for elasto-plastic contact problems*, *Comp.Struct.*, 18, 757-765, 1984.
- [66] Lee, K. *An accelerated iterative method for contact analysis*, *Int.J. Num. Meth.Eng.*, 28, 279-293, 1989.
- [67] Lee, K. *An efficient solution method for frictional contact problems*, *Comp.Struct.*, 32, 1-11, 1989.
- [68] Mather J.: *Determination of Initial Stress of Measuring the Deformation Around Holes*, *Transactions ASME* Nr 56, 1934.
- [69] McDowell D.L., Moyar G.J.: *Effects of Non-Linear Kinematic Hardening on Plastic Deformation and Residual Stresses in Rolling Line Contact*. *Wear*, 144, 1991, ss.19-37.
- [70] Montmitounet P., Edlinger M.L., Felder E.: *Finite element analysis of elastoplastic indentation: Part I- Homogeneous media*. *Journal of Tribology*, ASME, Vol.115, No.1, 1993, ss.10-14.

- [71] Montmitounet P., Edlinger M.L., Felder E.: Finite element analysis of elastoplastic indentation: Part II- Application to hard coatings. *Journal of Tribology*, ASME, Vol.115, No.1, 1993, ss.15-19.
- [72] Nayak G.C., Zienkiewicz O.C.: Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5, 1972, ss.113-135.
- [73] Oden,J.T. and Pires,E.B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity, *J.Appl.Mech.*, 50, 67-76, 1983.
- [74] Oden,J.T. and Pires,E.B. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws, *Comp.Struct.*, 19, 137-147, 1984.
- [75] Ohmae N.: Analysis of the Large Plastic Deformation Involved in Wear Processes Using the Finite Element Method With an Updated Lagrangian Formulation. *ASME Journal of Tribology*, Vol.109, 1987, ss.330-337.
- [76] Olesiak Z. Koncentracja naprężeń, naprężenia kontaktowe w: Życzkowski M. (red.) *Mechanika techniczna tom IX. Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych*. PWN, Warszawa 1988.
- [77] Olzak M., Stupnicki J., Wójcik R.: Analysis of crack front propagation in contact. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): *Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics*, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, 45-62.
- [78] Orkisz J., Oringer O., Hołowiński M., Pazdanowski M., Cecot W.: Discrete Analysis of Actual Residual Stress Resulting from Cyclic Loadings. *Computers & Structures*, Vol.35, No.4, 1990, ss. 397-412.
- [79] Orkisz J.: Prediction of actual residual stress by constrained minimization of energy. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): *Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics*, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, ss.101-124.
- [80] Orkisz J.: On Future Development of the Constrained Energy Minimization Method. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): *Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics*, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, ss.219-233.
- [81] Orłoś Z.: Półtrepanacyjne metody pomiarów naprężeń, *Biuletyn WAT*, Nr 5, 1959.
- [82] Owen D.R.J., Hinton E.: *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
- [83] Owen D.R.J., Fawkes A.J.: *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge Press Ltd., U.K., 1983.

- [84] Parisch, H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis, *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 28, 1803-1812, 1989.
- [85] Perlman A.B., Gordon J.E.: Application of the Constrained minimization Method to the Prediction of Residual Stresses in Actual Rail Section. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): *Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics*, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, ss.151-177.
- [86] Radomski R.: Residual stress measurements at rail surface and inside rail head. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): *Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics*, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.I, 205-214.
- [87] Rao Q.C. et al.: Residual stress analysis of three-body abrasion. *Wear*, vol.143, 1991, ss.365-377.
- [88] Rydholm G., Friedriksson B.: Shakedown Analysis of Three-Dimensional Rolling Contact Problems. *Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations, No.61*, 1981.
- [89] Sawczuk A., Janas M., König J.A.: *Analiza plastyczności konstrukcji*. Ossolineum, Wrocław, 1972.
- [90] Schwaighofer J.: Determination of Residual Stresses on the Surface of Structural Parts, *Experimental Mechanics* Nr 4, 1964.
- [91] Serikov S.V.: Estimation of the level of residual stress in fin pipes. *Problemy Prochnosti*, 1991, ss.86-88.
- [92] Shyu, S.C. et al. Friction-contact analysis using a mixed finite element method, *Comp.Struct.*, 32, 223-242, 1989.
- [93] Simo, J.C. et al. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems, *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 50, 163-180, 1985.
- [94] Simons, J.W. and Bergan, P.G. A finite element formulation of three-dimensional contact problems with slip and friction, *Comp.Mech.*, 1, 153-164, 1986.
- [95] Skalski K.: Contact problem analysis of an elastoplastic body. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika*, z.67, WPW 1979.
- [96] Skrzypek J.: *Plastyczność i pełzanie. Teoria, zastosowania, zadania*. PWN, Warszawa, 1986.
- [97] Stäblein E.: Stress Measurements on Billets Quenched from one Side, *Stahl und Eisen* Nr 52, 1932.
- [98] Stupnicki J. i zespół: Simulation of crack propagations in rails due to the transient load. Final Report for European Rail Research Institute (ERRI), Warszawa, 1993.

- [99] Świdorski Z.: Rail fracture inspection on the heavily loaded railway line Tczew-Katowice. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.I, ss.21-35.
- [100] Świdorski Z., Wójtowicz A.: Plans and progress of controlled experiments on rail residual stress using the EMS-60 machine. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.I, ss.57-66.
- [101] Tian H., Saka N.: Finite element analysis of an elasto-plastic two-layer half-space. Sliding contact. Wear, Vol.148, 1991, ss.261-285.
- [102] Tsai P., Chen W.H.: Finite Element Analysis of Elastoplastic Contact Problem with Friction. AIAA Journal, 24, 1986, ss.344-346.
- [103] Underwood J.H.: Residual-stress Measurement Using Surface Displacements Around an Indentation, Experimental Mechanics Nr 9, 1973.
- [104] Underwood J.H., O'Hara G.P., Zalinka J.J.: Analysis of Elastic-Plastic Ball Indentation to Measure Strength of High-Strength Steels. Experimental Mechanics, 26, 1986, ss.379-385.
- [105] Underwood, J.H. et al. Analysis of elastic-plastic ball indentation to measure strength of high-strength steels, Exp.Mech., 26, 379-385, 1986.
- [106] Webster P.: Neutron strain scanner. A new analytical tool for engineers. Steel Times, Vol.218, No.6, 1990, ss.321-323.
- [107] [10] Webster G.A. et.al.: Neutron diffraction determinations of residual stress patterns in railway rails. O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.I, 143-152.
- [108] Wineman S.J., McClintock F.A.: Residual Stress and Web Fracture in Roller-straightened Rail. w: O.Oringer, J.Orkisz, Z.Świdorski (eds): Residual Stress In Rails. Effects on Rail Integrity and Railroad Economics, Kluwer Academic Publishers, 1992, vol.II, ss.1-22.
- [109] Yu M., Moran B., Keer L.M.: A Direct Analysis of Two-Dimensional Elastic-Plastic Rolling Contact. ASME Journal of Tribology, Vol.115, 1993, ss.227-236.
- [110] T.Zagrajek, P.Marek, A.Dacko, G.Krzysiński: CRAPLA\*Pakiet programów MES dla zagadnień dwuwymiarowych mechaniki pęknięcia w zakresie sprężysto-plastycznym. Sprawozdanie dla ITWL. Warszawa 1992.
- [111] Zagrajek T., Dacko A., Krzysiński G., Marek P.: Finite Element Modelling of Large Structural Analysis Problems Including Cracks. Materiały 30. Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Zakopane, 1994.

- [112] Zarka J., Frelat J.: On description of a new "hardness" test, *International Journal of Solids and Structures*, vol.13, 1977.
- [113] Zienkiewicz O.C.: *The finite element method*. McGraw-Hill Book Company (UK), London 1977.
- [114] Zhong Zhihua. On numerical procedures for contact problems, Licent.Thesis, 1987:02L, Lulea University, Sweden, 1987.
- [115] Zhong, W.X. and Sun, S.M. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction, *Comp.Struct.*, 32, 37-43, 1989.
- [116] Zhong Z., Mackerle J.: Static contact problems - a review. *Eng. Comput.*, 9, 1992, ss.3-37.